Norma

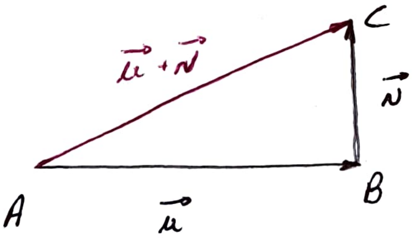
Norma (~~[illegible]~~ ou comprimento) de um vetor é o comprimento de qualquer um de seus representantes. A norma do vetor $\vec{u}$ é indicada por $\|\vec{u}\|$. Um vetor é unitário se sua norma é 1 um.

Teorema:

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se, e somente se, $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

Demonstração:

Trata-se, essencialmente, da aplicação do Teorema de Pitágoras



$$\therefore \quad \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

Definição: (Base ortonormal)

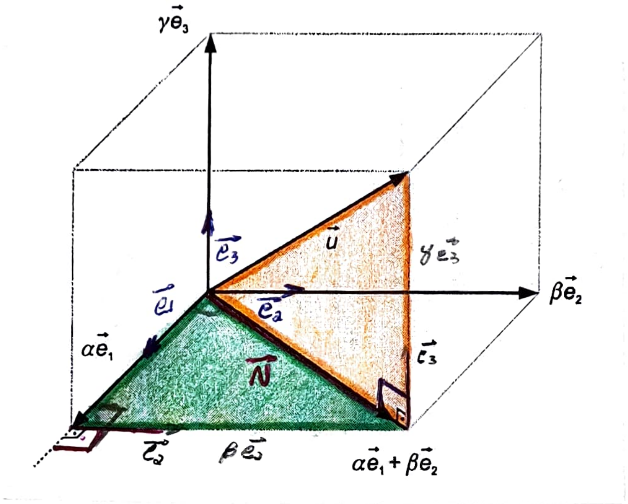
Uma base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ é ortonormal se $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ e $\vec{e_3}$ são unitários e dois a dois ortogonais

Teorema:

Seja $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base ortonormal. Se $\vec{u} = \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} + \gamma\vec{e_3}$, então:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

Demonstração:



Vetor da base: $\vec{N} = \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2}$

$$\|\vec{N}\|^2 = \|\alpha\vec{e_1}\|^2 + \|\beta\vec{e_2}\|^2$$

Vetor $\vec{u}$: $\vec{u} = \vec{N} + \gamma\vec{e_3} \Rightarrow \|u\|^2 = \|\vec{N}\|^2 + \|\gamma\vec{e_3}\|^2$

$$\vec{u} = \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} + \gamma\vec{e_3}$$

$$\|\vec{u}\|^2 = \|\alpha e_1\|^2 + \|\beta\vec{e_2}\|^2 + \|\gamma\vec{e_3}\|^2 = |\alpha|^2\|e_1\|^2 + |\beta|^2\|\vec{e_2}\|^2 + |\gamma|^2\|\vec{e_3}\|^2$$

Mas como $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ e $\vec{e_3}$, são vetores unitários, sabemos que $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = \|\vec{e_3}\| = 1$

$$\therefore \|\vec{u}\|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2$$

$$\|\vec{u}\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

Definição (Norma)

Se $\vec{u}$ é um vetor de V_n, o seu comprimento ou norma define-se pela igualdade:

$$\|\vec{u}\| = (\vec{u} \cdot \vec{u})^{1/2} = \sqrt{(\vec{u} \cdot \vec{u})}$$

Teorema: (propriedades)

Se $\vec{u}$ é um vetor de V_n e c é um escalar, $\|\vec{u}\|$ possui as seguintes propriedades:

a) $\|\vec{u}\| > 0$ se $\vec{u} \neq 0$ (positividade)

b) $\|\vec{u}\| = 0$ se $\vec{u} = 0$

c) $\|c\vec{u}\| = |c| . \|\vec{u}\|$ (homogeneidade)

Prova:

c) $\|c\vec{u}\| = \sqrt{c\vec{u} \cdot c\vec{u}}$

$= \sqrt{c^2 \, \vec{u} \cdot \vec{u}}$

$= \sqrt{c^2} \, . \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

$\|c\vec{u}\| = |c| . \|\vec{u}\|$

Produto escalar (interno)

Definição

* Sendo E uma base ortonormal.

* Se $\vec{u} = (a_1, a_2, \dots, a_n)_E$ e $\vec{v} = (b_1, b_2, \dots, b_n)_E$ são dois vetores de V_n, o seu produto escalar, representado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, define-se pela igualdade:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

ou seja, $\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$.

Exemplo:

Seja E uma base ortonormal, $\vec{u} = (3, -5, 8)_E$ e $\vec{v} = (4, -2, -1)_E$.

Encontre o produto interno entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 4 + (-5) \cdot (-2) + 8 \cdot (-1)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 14$$

Exercício:

Dados os vetores $\vec{u} = (4, \alpha, -1)$ e $\vec{v} = (\alpha, 2, 3)$ e os pontos $A(4, -1, 2)$ e $B(3, 2, -1)$, determinar o valor de α tal que

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \overrightarrow{BA}) = 5$$

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (4, -1, 2) - (3, 2, -1)$$

$$= (4 - 3, -1 - 2, 2 + 1)$$

$$= (1, -3, 3)$$

$$\vec{v} + \overrightarrow{BA} = (\alpha, 2, 3) + (1, -3, 3)$$

$$= (\alpha + 1, -1, 6)$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \overrightarrow{BA}) = 5$$

$$(4, \alpha, -1) \cdot (\alpha + 1, -1, 6) = 5$$

$$4 \cdot (\alpha + 1) + \alpha \cdot (-1) + (-1) \cdot 6 = 5$$

$$4\alpha + 4 - \alpha - 6 = 5$$

$$3\alpha = 7$$

$$\alpha = \frac{7}{3}$$

h.

__Teorema:__ (propriedades)

Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, e $\vec{w}$, e qualquer escalar λ, valem as seguintes propriedades:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

(propriedade comutativa)

b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

(propriedade distributiva)

c) $\lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v})$

(homogeneidade)

d) $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$ se $\vec{u} \neq \vec{0}$

e) $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ se, e somente se, $\vec{u} = \vec{0}$

f) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

__Prova:__

a) Seja E uma base ortonormal e $(a_1, a_2, a_3)_E$, $(b_1, b_2, b_3)_E$ as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente, então:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3)$$
$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$
$$= b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

- A prova das outras propriedades seguem de maneira análoga.

Exercício para casa: Prove que as propriedades b, c, d, e, são verdadeiras.

<u>Prova:</u>

f) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2$$

<u>Exercícios:</u>

- Prove que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

$$\begin{aligned}
\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) && \text{propriedade (f)} \\
&= \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) && \text{propriedade (b)} \\
&= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\
&= \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\
\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \\
&= \vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \\
&= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\
&= \|\vec{u}\|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\
\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2
\end{aligned}$$

Prove que $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

$$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}.(\vec{u}-\vec{v}) + \vec{v}.(\vec{u}-\vec{v})$$
$$= \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} - \vec{v}.\vec{u}$$
$$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$