O Método

Consideremos o problema de valor inicial:

P.V.I

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

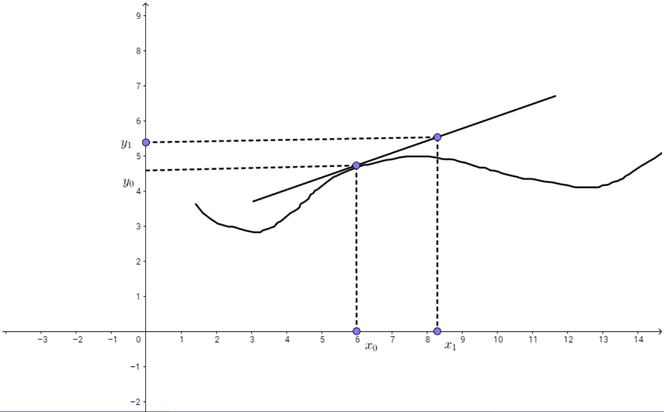
e suponhamos que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^1. Em geral, embora a existência local de soluções esteja assegurada, não podemos encontrar soluções explícitas (em termos de funções conhecidas).

Uma alternativa útil em muitos casos, é encontrar valores aproximados para a solução $y = \phi(x)$ do problema de valor inicial, definida em um intervalo I. Um dos métodos mais antigos para este objetivo ó método de Euler.
Sabemos que a inclinação da reta tangente ao gráfico de ϕ no ponto (x_0, y_0) é dada $f(x_0, y_0)$. Como sabemos do Cálculo, o gráfico da função ϕ em pontos próximos de x_0 pode ser aproximada pela reta tangente, ou seja

$$\phi(x) \sim y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

ou seja,

$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$ é uma aproximação para o valor da solução no ponto x_1.


y_1
y_0
x_0
x_1

Para repetir a aproximação para valores próximos do ponto x_1, precisaríamos dos valores de $\phi(x_1)$ e $f(x_1, \phi(x_1))$, **que são desconhecidos.**

Entretanto, usando a aproximação anterior, podemos substituí-los por y_1 e $f(x_1, y_1)$, respectivamente, obtendo uma nova aproximação para o valor da solução no ponto x_2, próximo de x_1

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$$

Prosseguindo desta forma, obteremos uma aproximação para cada ponto x_n em função da aproximação anterior no ponto x_{n-1}

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \cdots$$

Finalmente, se adotarmos um valor fixo h para cada ”passo” $x_n - x_{n-1}$, e denotarmos $f(x_n, y_n)$ por f_n obteremos

$$y_n = y_{n-1} + f_{n-1} h, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Exemplo

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Uamos usar o método de Euler para aproximar $y(n)$ usando um passo igual a 1 (h = 1).
Teremos então $x_1 = 1$, $f_0 = y(0) = 1$. Portanto

$y_1 = 1 + 1 \cdot 1 = 2,$
$y_2 = 2 + 2 \cdot 1 = 4$
$y_3 = 4 + 4 \cdot 1 = 8$
$\ldots$
$y_n = 2^{n-1} + 2^{n-1}1 = 2^n.$

Uma progressão geométrica de razão 2 !

A solução exata é do P.V.I. é dado pela exponencial $y = e^x$.
Em particular, temos $y(3) = e^3 = 20.009$.
Como $x_n = 0 + n.h = n$, temos $x_n = 3 \leftrightarrow n = 3$.
Assim o valor aproximado, dado pelo método de Euler é $y_3 = 2^3 = 8$, que está muito distante do valor correto.
Tomando agora $h = 0.1$, teremos $x_n = 3 \leftrightarrow n \cdot (0.1) = 3 \leftrightarrow n = 30$ e agora teremos

$y_1 = 1 + 1 \cdot 0.1 = 1.1,$
$y_2 = 1.1 + 1.1 \cdot 0.1 = (1.1)^2$
$\ldots$
$y_{30} = \cdots = (1.1)^{30} \sim 17.45$
Melhor, mas ainda distante do valor correto!

Exercício

O que ocorre com a solução aproximada quando $h \to 0$?