FUNMAC, 15 de Abril, 2020

Prof. Sinai Robins

IME, USP

Hoje: Nos abordaremos alguns dos seguintes tópicos:

Soma geométrica finita

Coeficientes binomiais

Aritmética modular, vamos começar

Quebra cabeça

Pergunta: dados 3 paus de comprimento a, b, c, quando podemos formar um triângulo físico usando esses paus?

Exemplo. Seja $a = 2$, $b = 3$, $c = 7$, isso e impossível.

Exemplo. Seja $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, isso e possível.

Exemplo. $a = 2$, $b = 3$, $c = 2$?

Pensar mais sobre isso......

Quebra cabeça

Pergunta: dados 3 paus de comprimento a, b, c, quando podemos formar um triângulo físico usando esses paus?

Se temos um triângulo, com lados de comprimentos a, b, c, então: $a + b > c,\ a + c > b,\ b + c > a$
devem ser todos verdadeiros.

Se temos um triângulo, com lados de comprimentos a, b, c,

então: $a + b > c,\ a + c > b,\ b + c > a$

devem ser todos verdadeiros.

Isso é chamado: UMA CONDIÇÃO NECESSÁRIA

pela verdade da afirmação original

mas isso também é UMA CONDIÇÃO SUFICIENTE?

(Mostre por que ou por que não)

A soma geométrica finita

Teorema.

Dado um número real positivo r, $r \neq 1$.

Então

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^N = \frac{r^{N+1} - 1}{r - 1},$$

para todos os números inteiros $N \geq 0$.

A soma geométrica finita

Prova.

Seja $S = 1 + r + r^2 + ... + r^N$.

Então $rS = r + r^2 + ... + r^N + r^{N+1}$.

Então, $S - rS = 1 - r^{N+1}$.

E isso implica que $S = \frac{1-r^{N+1}}{1-r}$.

O coeficiente binomial é

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(k!(n-k)!}$$

para todos os números inteiros $n \geq k$.

Exemplo. $\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 3 \cdot 8 = 120.$

Podemos avaliar

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}?$$

Podemos avaliar

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}?$$

Vamos ver o que acontece se expandirmos primeiro

Podemos avaliar

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}?$$

Vamos ver o que acontece se expandirmos primeiro

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$$

Podemos avaliar

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}?$$

Vamos ver o que acontece se expandirmos primeiro

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$$

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n$$

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + b^n$$

E agora?

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + b^n$$

E agora?

O que acontece se deixarmos $a = 1$ e $b = 1$?

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n$$

E agora?

O que acontece se deixarmos $a = 1$ e $b = 1$?

Então nós temos:

$$2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + 1$$

$$2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + 1$$

mas $\binom{n}{0} = 1$, então terminamos.

Lista 2

Prove:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exemplo. Dizemos que 132 é divisível por 12,

e escrevemos como

$$132 \equiv 0 \mod 12.$$

Exemplo. $24 = 9 \cdot 2 + 6$

e escrevemos isso como:

$$24 \equiv 6 \mod 9$$

Exemplo. $24 = 9 \cdot 2 + 6$

e escrevemos isso como:

$$24 \equiv 6 \mod 9$$

Exemplo. $24 = 9 \cdot 2 + 6$

e escrevemos isso como:

$$24 \equiv 6 \mod 9$$

Em geral, $$a \equiv b \mod m$$

significa que $m \mid a - b$

ou equivalente,

$a - b = qm$, por algún numero interior q.

Você já está acostumado a fazer aritmética modular $\mod 12$.

Exemplo. $17 \equiv 5 \mod 12$.

Questão: $17 \equiv -7 \mod 12$?

É o mesmo que perguntando: $12 \mid 17 - (-7)$?

$12 \mid 24$? sim!

De fato, $5 \equiv 17 \equiv 29 \equiv 41 \equiv \ldots\ldots \equiv -7 \equiv -19 \equiv \ldots\ldots \mod 12$

Então, vemos que, em certo sentido,
gostaríamos de tornar mais precisos,

todos os últimos inteiros são “ equivalentes ” um ao outro.

Podemos chamar o conjunto de todos eles
“ uma classe de equivalência ” de números inteiros mod 12.

Quantas classes de equivalência temos aqui? 12

O próximo passo:

Se $a \equiv b \mod m$

e também $c \equiv d \mod m$,

é verdade que

$$ac \equiv bd \mod m \text{ ?}$$

Tente provar isso!