MAE 121 - Introdução à Probabilidade e à Estatística I

3a Lista de Exercícios

1. Numa fábrica de parafusos, as máquinas A, B, C produzem respectivamente 20, 30 e 50 por cento do total. De sua produção, 6, 8, e 7 por cento são defeituosos. Um parafuso é retirado ao acaso da produção e se verifica que o mesmo está defeituoso. Quais é a probabilidade que ele tenha sido manufaturado pela máquinas A?

2. Dois dados honestos são lançados independentemente. Seja X a soma das duas faces e Y a variável aleatória que é igual a 1 se as duas faces são iguais e 0 caso contrário. Determine as distribuições de probabilidades dessas duas variáveis aleatórias.

3. Retira-se aleatoriamente uma bola de uma urna contendo 5 bolas vermelhas e 2 bolas brancas; em seguida devolvo outra bola, trocando cor (ou seja, se retirei uma bola vermelha, devolvo uma bola branca e vice-versa). Feito isto, retira-se, com reposição, 2 bolas desta urna. Seja X: o número de bolas vermelhas na amostra. Calcule $P[X = 2]$ e $E[X]$. Faça o mesmo para o caso de amostragem sem reposição.

4. Uma moeda prateada é lançada duas vezes. Por cada cara obtida, uma moeda dourada é lançada uma vez.
a) Qual é o número medio total de caras (somadas as duas moedas)?
b) Se soubermos que saiu exatamente uma cara na moeda dourada, qual é a probabilidade que a moeda prateada tenha produzido exatamente duas caras?

5. Um jornaleiro compra jornais a dez centavos cada e os vende a cinquenta centavos. A demanda diária de jornais é uma variável aleatória que se distribui segundo uma binomial com n=10 e p=1/3 e o jornaleiro compra 6 jornais por dia. a) Qual é a probabilidade do jornaleiro não conseguir vender todos os seus jornais?b) Qual é o lucro esperado do jornaleiro por dia? c) Quantos jornais você acha que o jornaleiro deveria comprar por dia? Seis jornais é o melhor valor?

6. A função distribuição de probabilidade acumulada de uma variável aleatória X, $F_X(x) = P(X \leq x)$ para $x \in \mathbf{R}$, é dada por
$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{1}{6}, & 1 \leq x < 4, \\ \frac{1}{3}, & 4 \leq x < 5, \\ 1, & x \geq 5. \end{cases}$$
a) Determine $P(X \leq 1)$. b) Determine $P(2 \leq X < 5)$. c) Determine $P(2 \leq X < 5 | X > 1)$. d) Determine $E(X)$.

7. A função distribuição de probabilidade acumulada de uma variável aleatória X, F_X, é dada por
$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{5}, & -1 \leq x < 1, \\ \frac{3}{5}, & 1 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

a) Determine $P(\frac{1}{2} \leq X \leq 2)$. b) Determine $P(\frac{1}{2} \leq X \leq 2 | X \geq 1)$ c) Se $Y = 2X + 3$, determine a esperança $(E(Y))$ e a variância de Y $(E(Y - E(Y))^2)$.

8. Uma urna contém uma bola verde e três bolas vermelhas. Duas bolas são escolhidas ao acaso e sem reposição; seja $X \in \{1, 2\}$ o número de bolas vemelhas neste sorteio. Observado o valor de X e lanço uma moeda honesta X vezes, independentemente, e observo $Y =$ o número de caras encontrado. a) Determine $P(X = 2)$. b) Determine $P(Y = 1|X = 2)$. c) Determine $P(Y = 1)$.

9. Considere a frase "Pratique mais esporte". Escolha ao acaso uma palavra dessa frase e considere as variáveis aleatórias V: número de vogais e C: número de consoantes. a) Determine a distribuição conjunta de V e C. b) Essas duas variáveis aleatórias são independentes? c) Determine $Var(V + C)$.

10. Um jogador tem dois dados, A e B, e uma moeda honesta. O dado A tem 4 faces vermelhas e 2 faces brancas e o dado B tem 2 faces vermelhas e 4 brancas. O jogador primeiro lança a moeda honesta. Se sair **cara** ele lança o dado A duas vezes, independentemente) e se der **coroa** ele lança o dado B duas vezes, tambem independentemente. a) Qual é a probabilidade de sair uma face vermelha no primeiro lançamento? b) Qual é a probabilidade de sair uma face vermelha no segundo lançamento se sabemos que saiu uma face vermelha no primeiro lançamento? c) Seja X a variável aleatória definida por $X =$ número total de faces vermelhas nos dois lançamentos. Determine a distribuição de probabilidade de X. d) Determine o valor esperado de X $(E(X))$.

11. Dentro de cada embalagem de determinado produto existe, de maneira equiprovável, um cupom com algum valor dentre os números $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Você recebe um prêmio do fabricante se conseguir juntar os 5 cupons diferentes. Seja N o número de embalagens embalagens que precisamos comprar até conseguir o prêmio. Calcule $E(N)$.

12. A função distribuição de probabilidade acumulada de uma variável aleatória X, F_X, é dada por

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ 1/3, & -2 \leq x < 0, \\ 2/3, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

a) Determine $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq 1)$. b) Determine $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq 1 | X \geq 0)$ c) Se $Y = 2X + 3$, determine a esperança e a variância de Y.

13. O número de navios que chega em cada semana a um porto é uma variável aleatória X com distribuição Poisson com parâmetro λ, isto é, $P(X = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$, para $k = 0, 1, \ldots$. Suponha que $\lambda = 5$ e que o número de navios que chega numa dada semana seja independente do número de navios que chega em outras semanas. Suponha também que, independentemente uns dos outros, a probabilidade de um navio transportar alimentos seja p. a) Qual é o número médio de navios que chega numa dada semana? b) Determine a probabilidade de chegar pelo menos um navio numa dada

semana. c) Determine a probabilidade de chegar pelo menos um navio em duas semanas sucessivas. d) Se $\lambda = 5$ e $p = 0.3$ determine a probabilidade de que nenhum navio transportando alimentos chegue a esse porto numa dada semana.

14. Sejam X_0, X_1 v.a. independentes, $X_0 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$, $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$. Qual é a distribuição de probabilidade de $Z = X_0 + X_1$?