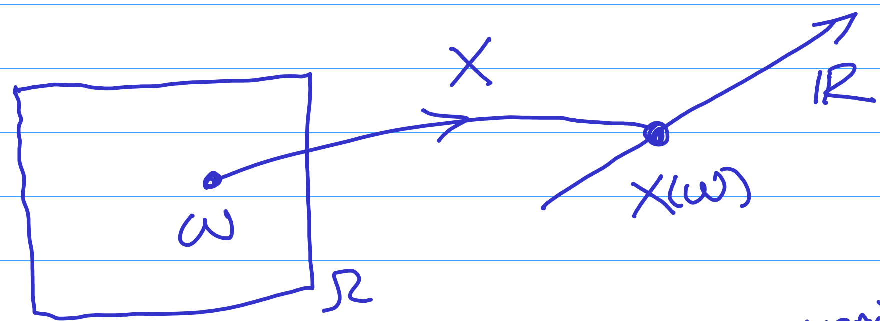
Variável Aleatória: Uma variável aleatória é basicamente* uma função do espaço amostral Ω com valores em $\mathbb{R}$.

* há algumas condições ("mensurabilidade") que podemos ignorar no nível deste curso.

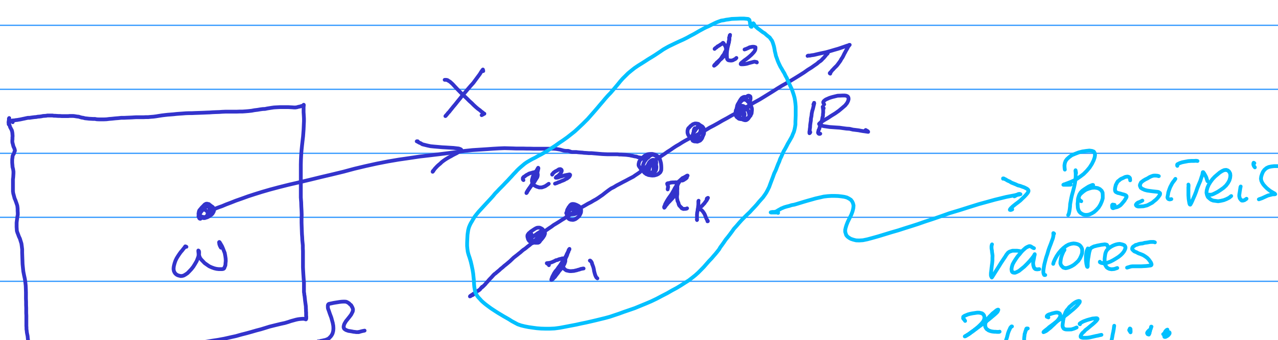


$X: \Omega \to \mathbb{R}$

variável aleatória

Uma variável aleatória, que vamos representar por letras maiúsculas X, Y, W, ... essencialmente "codifica" os resultado dos experimento aleatório por números reais.

Caso discreto: vamos começar com o caso mais simples, quando a variável aleatória pode assumir valores num conjunto discreto, ou seja o conjunto de valores possíveis é finito ou infinito enumerável.



na figura: $X(\omega) = x_k$, para certo k.

Ou seja, o conjunto imagem de uma variável aleatória discreta X

$X: \Omega \to \mathbb{R}$, dado por $\{X(\omega);\ \omega \in \Omega\} = \{x_1, x_2, \dots\}$

é enumerável.

Obs: lembre que um conjunto A é dito "enumerável" se existe uma maneira de selecionar todos os elementos de A, em alguma sequência, tal que todos esses elementos sejam eventualmente escolhidos.
Mais precisamente, existe $f: \mathbb{N} \to \Omega$, *sobrejetora, onde* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ *representa os números naturais.*

Notação: se uma variável X só pode assumir os valores $\{x_1, x_2, \dots\}$ *vamos escrever:* $X \in \{x_1, x_2, \dots\}$

A informação importante sobre uma v.a. discreta X é sua

Distribuição de probabilidades: *quais são as probabilidades de cada valor possível; ou seja, como são distribuidas a probabilidade total, igual a 1, entre esses valores.*

Se $X \in \{x_1, x_2, \dots\}$ então a coleção

$\{p_1, p_2, \dots\}$ com

$$p_i \equiv P(X = x_i), \quad i = 1, 2, \dots, \quad 0 \leq p_i \leq 1$$

"indica que é uma definição"

é dita Distribuição de Probabilidades de X

Note que: $P(X \in \{x_1, x_2, \dots\}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = \boxed{\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1}$

A distribuição de probabilidade de uma v.a. X tambem pode ser definida pela **Função Distribuição Acumulada de Probabilidade:**

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$$

com $F_X(x) \equiv P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$

definição

Para toda v.a. X temos as seguintes propriedades:

1) $\lim\limits_{x \downarrow -\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \uparrow +\infty} F_X(x) = 1$

2) $F_X(x)$ é uma função não decrescente, isto é

se $a<b$ então $F_X(a) \leq F_X(b)$

3) F_X é uma função "contínua à direita"

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \text{com } \Delta x > 0}} F_X(x+\Delta x) = F_X(x)$$

Para v.a. discretas, o mais natural é fixar diretamente a distribuição de probabilidades de cada resultado:

$$\{p_i = P(X=x_i)\}_{i \geq 1}$$

Vejamos alguns exemplos importantes.

Alguns exemplos:

1) **Bernoulli(p) :** *Dizemos que uma variável aleatória (v.a.) X tem distribuição Bernoulli com parâmetro* $p \in [0,1]$ *se ela só pode assumir dois valores: 0 ou 1*

$X \in \{0,1\}$; 1 = "sucesso"
0 = "fracasso"

sendo que

$P(X=1) = p$ $\quad p =$ probabilidade de "sucesso"
$P(X=0) = 1-p$ $\quad 1-p =$ probabilidade de "fracasso"

Notação: escrevemos $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

"tem distribuição" parâmetro da Bernoulli

Obs: X é o resultado de lançar uma moeda com probabilidade p de sair cara ("sucesso") e prob $1-p$ de sair coroa ("fracasso").

2) **Uniforme em** $\{1,2,\ldots,N\}$: $U(\{1,2,\ldots,N\})$
Dizemos que X tem distribuição uniforme no conjunto $\{1,2,\ldots,N\}$ se

$$P(X=i) = \frac{1}{N}, \quad 1 \le i \le N$$

Notação: $X \sim U(\{1,2,\ldots,N\})$

3) Geométrica com parâmetro p, $p \in [0,1]$

Suponha que lanço uma moeda, com probabilidade p de sucesso, um número arbitrariamente grande de vezes e independentemente.

Seja X = "número de lançamentos até encontrar cara pela primeira vez"

Antes: Qual é o espaço amostral Ω e as probabilidades associadas à esse experimento aleatório?

Lembrando que o espaço amostral é o conjunto que descreve todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.

O experimento em questão é "lançar uma moeda um número infinito de vezes"...

então um elemento de Ω deve me descrever qual foi a sequência infinita de resultados, se cara ou coroa, em cada lançamento.

$\omega \in \Omega$; ω = "sequência infinita de cara ou coroa"

$$\omega = \{ (c_i)_{i \geq 1} , c_i \in \{\text{"cara"}, \text{"coroa"}\} \}$$

$$= \{ \underbrace{(c_1, c_2, c_3, \dots)}_{\text{sequência (ordenada!)}} , c_i \in \{\text{"cara"}, \text{"coroa"}\} \}$$

c_i = "o que saiu no i-ésimo lançamento" $\in \{\text{"cara"}, \text{"coroa"}\}$

Obs: não é importante agora, mas esse espaço amostral NÃO é enumerável.

Já temos Ω. Quais são as probabilidades?

Basta (não é óbvio...) definir as probabilidades de "eventos simples": eventos que fixam apenas um número finito de lançamentos.

Exemplos:

$A = \{\omega = (c_1, c_2, \dots), \text{ com } c_1 = \text{"cara"}, c_2 = \text{"coroa"}\}$

= "saiu primeiro cara e depois coroa; o que aconteceu depois, não importa"

$B = \{\omega = (c_1, c_2 \dots), \text{ com } c_i = \text{"cara"}, \text{ para } 1 \le i \le 10.000.000\}$

= "saiu cara nos primeiros 10.000.000 lançamentos"

Como os lançamentos são independentes e a probabilidade de "cara" é igual a p, a definição das probabilidades para estes eventos simples não presenta dificuldade.

Notação: lembre que, se A é um conjunto, $A \times A$ denota o produto cartesiano de A com A, ou seja, o conjunto dos pares ordenados de elementos de A: $A \times A = A^2 = \{(a_1, a_2) : a_i \in A, i = 1, 2\}$

De forma análoga $A^n = A \times A \times \dots \times A$ (n termos)

= "conj. das sequências de n elementos de A"

Definição de probabilidades: sejam $n \ge 1$ e $\bar{\omega}_n \in \{\text{"cara"}, \text{"coroa"}\}^n$, $\bar{\omega}_n = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $c_i \in \{\text{"cara"}, \text{"coroa"}\}$, $1 \le i \le n$

uma particular sequência de n lançamentos

e $N(\omega_n)$ = "# de caras em $\bar{\omega}_n$"

Seja $A(\omega_n) \subset \Omega$ = "todas as sequências que concordam com ω_n nos primeiros n lançamentos "

$$A(\omega_n) = \{ \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \bar{\omega}_n \}$$

então $P(A(\omega_n)) = p^{N(\omega_n)} (1-p)^{N(\omega_n)}$

ou seja, se A = "todas as sequências de lançamentos sendo que os primeiros n lançamentos resultam na particular sequência $\bar{\omega}_n = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$"

$$P(A) = \underbrace{p \times p \times \ldots \times p}_{\#\text{de caras em } \omega_n} \times \underbrace{(1-p) \times (1-p) \times \ldots \times (1-p)}_{\#\text{de coroas em } \omega_n}$$

Com isso, temos o espaço amostral Ω e as probabilidades P

e voltamos à distribuição da v.a. Geométrica com parâmetro p

$X \in \{1, 2, \ldots\}$ = "número de lançamentos até a primeira cara"

$P(X=1) = p$ pois $\{X=1\}$ = {"cara" no 1º lançamento}

$P(X=2) = (1-p)p$ pois $\{X=2\}$ = { coroa no 1º lançamento e em seguida, cara }

$\boxed{P(X=k) = (1-p)^{k-1} p}$, $k \geq 1$ pois

$\{X=k\} = \{\omega=(\omega_1,\omega_2,\dots):$
$\omega_i=\text{"coroa"},\ 1\le i\le k-1,\ \text{e}\ \omega_n=\text{"cara"}\}$

<u>Obs</u>: $p_k=(1-p)^{k-1}p,\ k\geq 1$, é uma "sequência geométrica"

Precisamos verificar que $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

Resultado auxiliar: considere $a_\ell = x^\ell,\ \ell\geq 0$

$f(x)=\underbrace{\sum_{\ell=1}^{\infty} x^\ell}_{\text{que significa?}} = ?$; existe para todo $x\in\mathbb{R}$?

$\hookrightarrow f(x)=\lim_{N\uparrow\infty}\sum_{\ell=0}^{N} x^\ell$ (se existir...)

mas $\sum_{\ell=0}^{N} x^\ell = \dfrac{1-x^{N+1}}{1-x}$, para $N\geq 1$, e $x\neq 1$ (verifique!)

e, como $\lim_{N\uparrow\infty} x^{N+1}=0$ se $|x|<1$, temos

$$f(x)=\frac{1}{1-x} \quad \text{se}\ |x|<1 \quad \star$$

<u>obs</u>: o que acontece se $|x|\geq 1$?

Então, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = p \sum_{\ell=0}^{\infty} (1-p)^{\ell}$

por ☆ com $x = 1-p$, $|x|<1$ se $p \in (0,1]$

$$= p \frac{1}{1-\underbrace{(1-p)}_{x}} = 1 \quad \text{se } 0 < p \leq 1$$

e se $p=0$?

4) Binomial com parâmetros *n* e *p* :

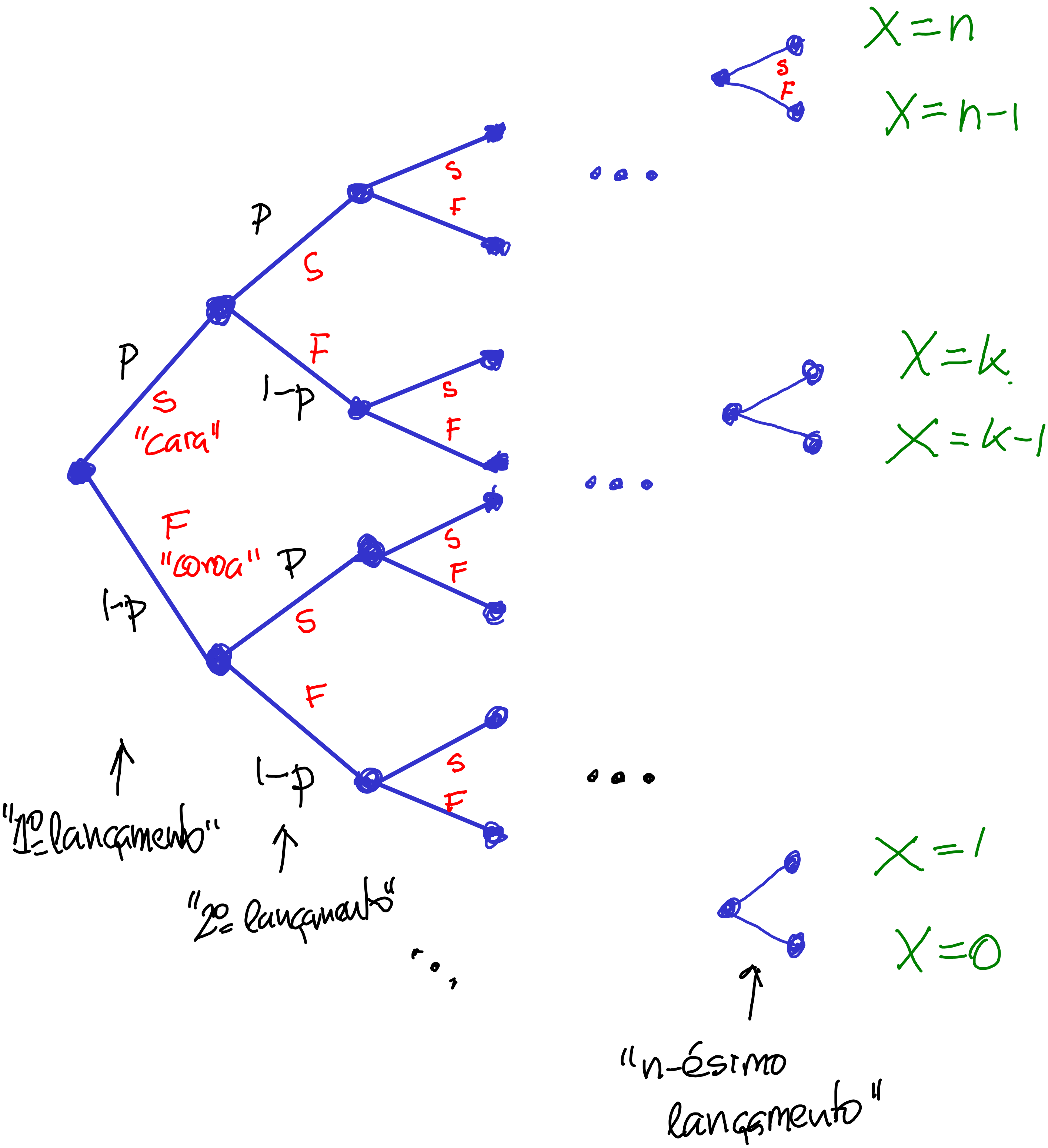
Suponha que lanço uma moeda, com probabilidade p de sucesso, n vezes, independentemente.

Seja X = "número de vezes que observo cara nos n lançamentos"

Então $X \in \{0,1,2,\ldots,n\}$

ou seja, posso observar desde 0, "nenhuma cara nos n lançamentos", até n caras, "todos os n lançamentos resultando em cara".

Para determinar a distribuição de probabilidades de X podemos usar um "diagrama em árvore", ou "diagrama de possibilidades":



$\{X=k\}$ = "conjunto de todas as trajetorias neste diagrama zig-zag que sobem ("sucesso") k vezes e descem ("fracasso") $n-k$ vezes.

Neste diagrama zig-zag, considere uma particular trajetória com k sucessos (e n-k fracassos).

A probabilidade desta trajetória, como discutido acima,

é dada por $p^k(1-p)^{n-k}$. *Ou seja, é a mesma prob. para toda trajetória.*

O evento {X=k} vai acontecer se tivermos qualquer uma destas trajetórias com k sucessos e n-k fracassos.

Quantas trajetórias existem? Cada trajetória que tem k sucessos e n-k fracassos é fixada quando escolhemos os k lançamentos, dentre os n, que resultaram em sucessos (e o restante, portanto, em fracassos).

Número de maneiras de escolher k dentre n:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

(Porquê?)

onde $n! = n\cdot(n-1)\ldots 2\cdot 1$ e $0! = 1$

Então

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$1 \leq k \leq n$$

Obs: precisamos verificar que

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$$

onde $\quad p_k = P(X=k)$

Binômio de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

(porquê?)

Usando este resultado:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (\underbrace{p}_{a} + \underbrace{(1-p)}_{b})^n$$

$$= 1$$

Valor Esperado de uma variável aleatória discreta.

Se X é uma variável aleatória discreta com

$$X \in \{x_1, x_2, \ldots\}$$

então seu valor esperado, denotado por E(X), é definido por:

$$E(X) = \sum_k x_i P(X = x_i)$$

(EX para simplificar a notação)

soma sobre todos os valores possíveis

obs: note que E(X) é uma média ponderada dos valores possíveis de X e a ponderação de cada valor é a sua probabilidade. Note tambem que a soma dessas ponderações é igual a 1.

Motivação desta definição: suponha que X = "quanto você ganha em cada rodada de certo jogo"; você pode ganhar x_1 ou x_2 ou... reais em cada rodada; depois de MUITAS rodadas (digamos N)

quanto você ganha POR RODADA?

Resposta: não sei!; este valor é aleatório para cada N finito.

Mas se N vai ficando cada vez maior ($N \to \infty$)

este valor vai ficando cada vez mais próximo de E(X).

Valor esperado nos exemplos.

1) Bernoulli(p): se $X \sim$ Bernoulli(p), então

$$P(X=1) = p \; ; \; P(X=0) = 1-p \quad e$$

$$\boxed{EX = 1 \cdot P(X=1) + 0 \cdot P(X=0) = p}$$

2) Uniforme em {1,2,...,N}: se $X \sim U(\{1,2,\dots,N\})$ então

$$P(X=i) = 1/N \quad , \quad 1 \leq i \leq N$$

$$\boxed{EX = \sum_{i=1}^{N} i \cdot \frac{1}{N} = \frac{(1+2+\dots+N)}{N} = \frac{N+1}{2}}$$

Obs: $1+2+3+\dots+(N-1)+N = \dfrac{N(N+1)}{2}$

soma N+1

soma N+1

(verifique!)

de forma que $EX = \dfrac{N+1}{2}$

3) Geométrica(p): se $X \sim$ Geométrica(p)

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p \quad , \quad k \geq 1$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$$

Resultado auxiliar: Como $\frac{d}{dx}(x^k) = kx^{k-1}$, $k \geq 1$

derivada

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^k) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)$$

$\frac{d}{dx}(x^0) = 0$

? Posso "tomar a derivada em evidência"?

Agora:

$$\frac{d}{dx}\left(\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x^k}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

vimos antes

curso de cálculo

e então, calculando para $x = 1-p$, temos

$$\boxed{EX = p \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}}$$

4) Binomial(n,p):   **se X ~Binomial(n,p)**

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad , \; 0 \leq k \leq n$$

com $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$, $n! = n.(n-1)\ldots 2.1$

$0! = 1$

e $$EX = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k \, . \, n!}{(n-k)!\,k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np . \boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(\underbrace{n-1-(k-1)}_{n-k})!\,(k-1)!} p^{k-1} (1-p)^{\overbrace{n-1-(k-1)}^{n-k}}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)}$$

(mudando o índice da soma para $\ell = k-1$)

$$= \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{n-1-\ell}$$

$$= \left(p + (1-p)\right)^{n-1} = 1 \quad \text{(Binômio de Newton)}$$

De forma que, se X ~Binomial(n,p)

$$\boxed{EX = np}$$