Instituto de Física
Universidade de São Paulo

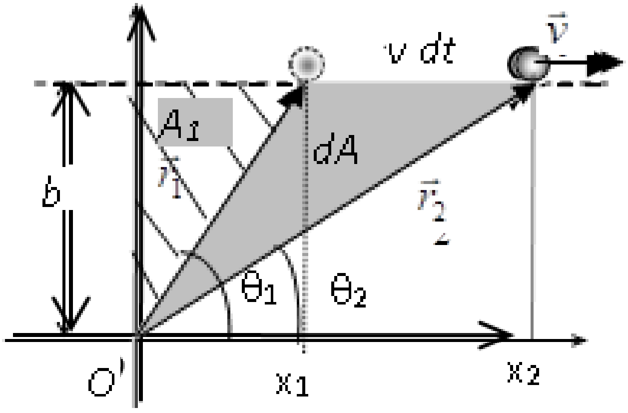
Disciplina 4300255

Mecânica dos Corpos Rígidos e dos Fluidos

Conservação do Momento Angular

Aplicações da 2ª Lei de Newton para Rotação

Problema 1. Lista 4 (TIPLER CAP 10, E 17) Uma partícula percorre, com velocidade constante $\vec{v}$, uma reta que está à distância b da origem O. Seja dA a área varrida pelo vetor posição traçado de O até a partícula, no intervalo de tempo dt. Mostrar que dA/dt é constante no tempo e igual a $L/2m$, com L o momento angular da partícula em relação à origem.



$$A_1 = \frac{r_1 \cos\theta_1 \cdot b}{2} \qquad A_2 = \frac{r_2 \cos\theta_2 \cdot b}{2} \therefore$$

$$A_1 = \frac{x_1 \cdot b}{2} \qquad A_2 = \frac{x_2 \cdot b}{2}$$

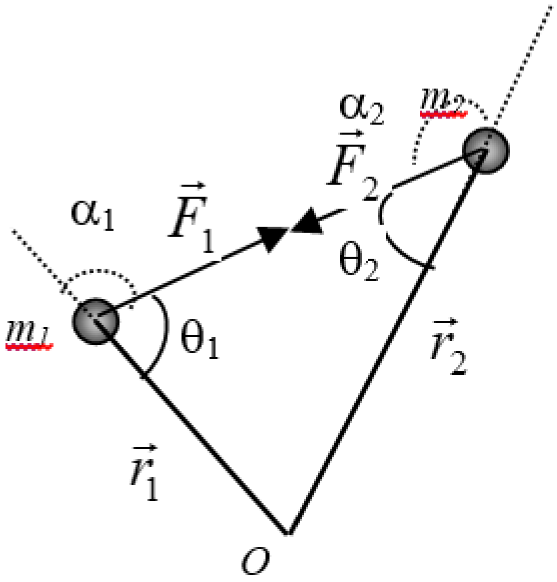
$$dA = A_2 - A_1 = \frac{b(x_2 - x_1)}{2} = \frac{b\Delta x}{2} = \frac{bv\Delta t}{2}$$

Multiplicando e dividindo por m: $$dA = \frac{b(mv)\Delta t}{2m} = \frac{b\ p\,\Delta t}{2m}$$

Sabemos que: $$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \Rightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{bv}{2} = \frac{L}{2m}}$$

$$L = r\ m\ v \qquad bv = \frac{L}{m}$$

Problema 2. Lista 4 (TIPLER CAP 10, E 19) Duas partículas de massa m_1 e m_2, estão localizadas em $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_2}$ em relação à origem O, como mostra a figura ao lado. As partículas exercem forças iguais em módulo e postas, uma sobre a outra. Calcular a resultante dos torques dessas forças internas em relação à origem O e mostrar que o torque é nulo se as forças $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$ estiverem sobre a reta que une as partículas.



$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

Pela definição de produto vetorial, e como $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = F$

$$\sum \tau_O = -r_1 \cdot F \cdot sen\,\alpha_1 + r_2 \times F \cdot sen\,\alpha_2 = -r_1 \cdot F \cdot sen\theta_1 + r_2 \times F \cdot sen\theta$$

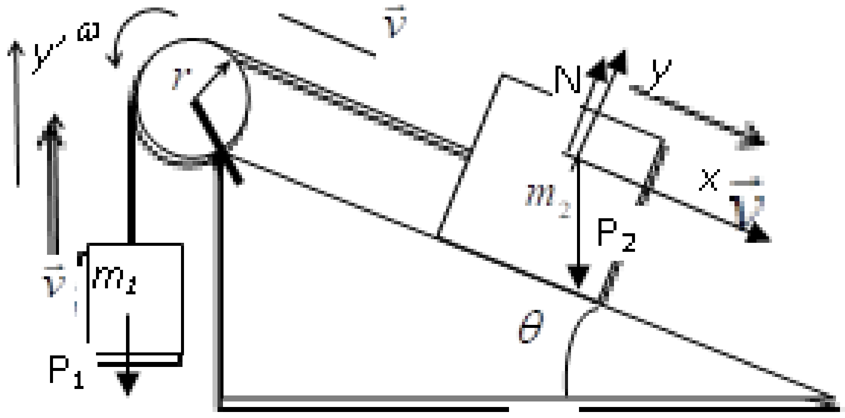
$$\sum \tau_O = F(-r_1 sen\theta_1 + r_2 sen\theta_2)$$

Pela lei dos senos, $\dfrac{r_1}{sen\theta_2} = \dfrac{r_2}{sen\theta_1} \therefore r_1 \cdot sen\theta_1 = r_2 \cdot sen\theta_2$

Em particular, se a origem estiver na reta que une as partículas, $\theta_1 = 0^\circ ; \theta_2 = 180^\circ$

Assim, a soma dos torques é nula.

Problema 3. Lista 4. (Tipler Cap 10, E 23) Na figura ao lado, o plano inclinado não tem atrito e o fio que une os dois corpos passa pelo centro de massa de cada um deles. O momento de inércia da polia é *i* e o raio *r*. a) Determinar a resultante dos torques que atuam sobre o sistema (isto é, sobre os dois corpos – o fio e a polia). b) Dar a expressão do momento angular total do sistema em relação ao centro da polia quando a velocidade de cada corpo for *v*. c) Calcular a aceleração de cada corpo a partir dos resultados conseguidos em a) e em b), igualando a resultante dos torques à taxa de variação do momento angular do sistema.



No corpo 1,

$$\sum \vec{F} = m_1 \vec{a}_1$$

$$\vec{P}_1 + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1$$

$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$$

$$-m_1 g + T_1 = m_1 a$$

$$T_1 = m_1 (a + g)$$

No corpo 2,

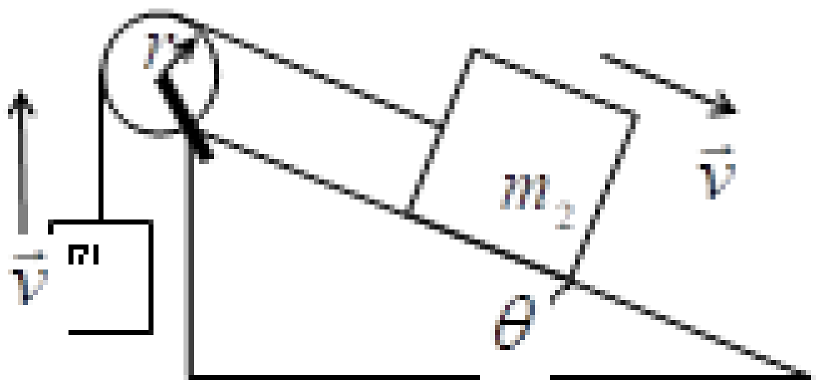
$$\sum \vec{F} = m_2 \vec{a}_2$$

$$\vec{P}_2 + \vec{T}_2 + \vec{N} = m_2 \vec{a}_2$$

$$m_2 g sen\theta - T_2 = m_2 a$$

$$T_2 = m_2 g sen\theta - m_2 a = m_2 (g sen\theta - a)$$

$$\sum \tau = r \cdot T_1 - r \cdot T_2 = r \cdot [m_1 (a + g) - m_2 (g sen\theta - a)]$$



b) Como a corda não desliza $v = -\omega R$

O momento angular é dado por $L_z = r \times p_z$

O momento angular total é uma soma vetorial dos momentos angulares dos corpos e da polia.

A velocidade angular deve respeitar o sentido do referencial adotado.

$$L_z = r \times m_1 v + r \times m_2 v - I\omega$$

c) Sabendo que $\sum \tau = \tau_{res} = I\alpha$ e que $\sum \tau = r \cdot [m_1(a+g) - m_2(gsen\theta - a)]$

$$\tau_{z\,res} = \frac{dL_z}{dt}$$

$$I\alpha = r \cdot [m_1(a+g) - m_2(gsen\theta - a)]$$

considerando a polia como um disco,

$$\frac{1}{2} m_p r^2 \alpha = r \cdot [m_1(a+g) - m_2(gsen\theta - a)]$$

$$m_p \alpha = 2 \frac{[m_1(a+g) - m_2(gsen\theta - a)]}{r}$$

pela igualdade $a = -\alpha r$ a aceleração dos blocos é:

$$m_p a = -m_p \alpha r = -2 \frac{[m_1(a+g) - m_2(gsen\theta - a)]}{r} r = -2 \frac{[m_1(a+g) - m_2(gsen\theta - a)]}{1}$$

$$-m_p a = 2[m_1(a+g) - m_2(gsen\theta - a)] = 2m_1 a + 2m_1 g + 2m_2 a - 2m_2 gsen\theta$$