Equação de Laplace em Coordenadas Esféricas - I

[J. D. Jackson; Classical Electrodynamics; Cap. 3]

[Carmen L.R. Braga; Notas de Física Matemática; Cap. 4]

Equação de Helmholtz (sem fontes) em Coordenadas Esféricas

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{(r\sin\theta)^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + k^2\phi = 0$$

Ao escrever o Laplaciano, foi utilizada relação vista anteriormente(Aula 7 de abril 2020)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2}$$

Método de separação de variáveis

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \frac{R(r)}{r}P(\theta)Q(\varphi)$$

Fazendo a substituição, resulta

$$(r\sin\theta)^2\left[\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+k^2+\frac{1}{r^2\sin\theta\,P}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)\right]+\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2}=0$$

$$\therefore\ \frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2}=-m^2\ \rightarrow \boxed{Q(\varphi)=e^{\pm im\varphi}}$$

$$r^2\left[\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+k^2\right]+\left[\frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{(\sin\theta)^2}\right]=0$$

$$\boxed{\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{(\sin\theta)^2}\right]=0}$$

$$\boxed{\frac{d^2R}{dr^2}+\left[k^2-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]R=0}$$

Solução da equação radial para $k = 0$ (Equação de Laplace)

$$\frac{d^2R}{dr^2} - \ell(\ell+1)\frac{R}{r^2} = 0 \ \rightarrow R = r^{\alpha} \ \rightarrow \alpha = -\ell;\ \ell+1 \ \rightarrow R(r) = Ar^{\ell+1} + \frac{B}{r^{\ell}}$$

Equação para $P(\theta)$

$$x = \cos\theta \rightarrow \ \frac{dP}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta}\frac{dP}{dx} = -\sin\theta\,\frac{dP}{dx}$$

resultando na <u>*Equação Associada de Legendre*</u>

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P = 0; -1 \leq x \leq 1 \ \rightarrow P_{\ell}^{m}(x)$$

<u>Solução Geral para</u> $\phi(r,\theta,\varphi)$

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{\ell,m}\left[A_{\ell,m}r^{\ell} + \frac{B_{\ell,m}}{r^{\ell+1}}\right]P_{\ell}^{m}(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

<u>Nota sobre Seção 3.2 do Jackson</u>

Após considerar a solução geral, o livro texto considera primeiramente os problemas com simetria azimutal ($\partial/\partial\varphi = 0 \ \rightarrow m = 0$), discutindo a solução da Equação de Legendre, já vista em aula anterior.

De todos os tópicos discutidos nesta seção, os mais importantes são

- *Fórmula de Rodrigues*

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!}\frac{d^m}{dx^m}(x^2 - 1)^m$$

- *Relação de recorrência*

$$\frac{dP_{\ell+1}}{dx} - \frac{dP_{\ell-1}}{dx} - (2\ell + 1)P_l = 0$$

- *Desenvolvimento de uma função em Polinômios de Legendre*

$$f(x) = \sum_{m=0} A_m P_m(x) \ \rightarrow \ A_m = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)$$

Problemas de contorno com simetria axial $(m = 0)$

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0} \left[A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right] P_n(\cos\theta)$$

Exemplo: Potencial dentro de uma esfera de raio a, com potencial $\phi(a,\theta) = V$, no hemisfério superior, e $\phi(a,\theta) = -V$ no hemisfério inferior.

$$\phi(a,\theta) = \begin{cases} V; 0 \leq \theta < {}^{\pi}/_{2};\ (0 < x \leq 1) \\ -V; {}^{\pi}/_{2} < \theta \leq \pi; (-1 \leq x < 0) \end{cases}$$

Condição de regularidade na origem: potencial finito em $r = 0\ \rightarrow\ B_n = 0$; portanto,

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0} A_n r^n P_n(\cos\theta)\ \rightarrow\ \phi(a,\theta) = \sum_{n=0} A_n a^n P_n(\cos\theta)$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2a^n}\int_{-1}^{1}\phi(a,x)\,P_n(x)dx = \frac{2n+1}{2a^n}V\left[-\int_{-1}^{0}P_n(x)dx + \int_{0}^{1}P_x(x)dx\right]$$

Na primeira integral $x \to -x$ e emprega $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

$$A_n = \frac{2n+1}{2a^n} V \left[(1-(-1)^n) \int_0^1 P_n(x)dx \right] \Longrightarrow A_n = \begin{cases} 0; & n\, par \\ \dfrac{2n+1}{a^n} V \displaystyle\int_0^1 P_n(x)dx; & n\, ímpar \end{cases}$$

Resultado geral (https://mathworld.wolfram.com/LegendrePolynomial.html)

$$\int_0^1 P_m(x)dx = \frac{P_{m-1}(0) - P_{m+1}(0)}{2m+1} = \begin{cases} 1; & m = 0 \\ 0; & m\, par \neq 0 \\ \dfrac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} m!!}{m(m+1)(m-1)!!}; & m\, impar \end{cases}$$

onde $m!! = m(m-2)(m-4)\ldots\ldots \begin{cases} 6,4,2; & m\ \ par \\ 5,3,1; & m\, impar \end{cases}$

<u>OBS</u>: este resultado não é fácil de ser obtido, como insinua o Jackson ao derivar a Eq. 3.26.

Para tentar obtê-lo utilize $P_n(0) = (-1)^{n/2} \frac{(n-1)!!}{n!!}; n\, par.$

Utilizando esse resultado, obtemos

$$A_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(2n+1)n!!}{a^n n(n+1)(n-1)!!}$$

Este resultado parece distinto do dado pela Eq. 3.26 do Jackson. Calcule os primeiros termos e verifique que são equivalentes:

$$A_1 = \frac{3}{2a};\ \ A_3 = -\frac{7}{8a^3};\ \ A_5 = \frac{11}{16a^5}, \dots .$$

Com este resultado, o potencial dentro da esfera fica então

$$\phi(r,\theta) = V\left[\frac{3}{2}\frac{r}{a}P_1(\cos\theta) - \frac{7}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^3 P_3(\cos\theta) + \frac{11}{16}\left(\frac{r}{a}\right)^5 P_5(\cos\theta) \dots \dots .\right]$$

Para o potencial fora da esfera, temos que impor $\phi(r \to \infty, \theta) \to 0$. Então basta escolher $A_n = 0;\ B_n \neq 0$. Assim, o resultado teria a mesma forma, fazendo a troca $({}^{r}/_{a})^n \to ({}^{a}/_{r})^{n+1}$.

Observação

A representação do potencial como uma série de potências e polinômios de Legendre é a solução única para a Equação de Laplace com simetria axial.

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0} \left[A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right] P_n(\cos\theta)$$

Isso permite escrever a expressão para o potencial, se sua expressão ao longo do eixo z é conhecida. Se, por algum método conseguimos determinar $\phi(z)$ ao longo do eixo, e essa expressão possa ser desenvolvida em série de potências de z, para obter a expressão para o potencial em todo o espaço, basta fazer $z \to r, z \geq 0; z \to (-r), z \leq 0$ e multiplicar cada termo da série pelo Polinômio de Legendre correspondente à potência de r.

Tabelas para Equações e Polinômios de Legendre

- M.R. Spiegel, S. Lipschutz, and J. Liu; Mathematical Handbook of Formulas and Tables; Section VII; 28.
- M. Abramowitz and I.A. Stegun; Handbook of Mathematical Functions; Chapters 8; 22.