$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \ldots + n.a_n(x-x_0)^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n.a_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + \ldots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(x-x_0)^{n-2},$$

e assim por diante; e cada uma das séries converge absolutamente no intervalo $|x-x_0| < R$.

Série de Taylor

Uma função $f(x)$ pode ser desenvolvida em série de potências tal que:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

Aqui, a série $f(x)$ é desenvolvida em série de Taylor em relação a x_0. Os coeficientes da função podem ser aproximados quando $x = x_0 \Rightarrow f(x_0) = a_0$. Se derivarmos $f(x)$ novamente em relação a x, teremos:

$$f'(x) = a_1 + 2.a_2(x-x_0) + \ldots + n.a_n(x-x_0)^{n-1} + \ldots$$

Assim, para $x = x_0 \Rightarrow f'(x_0) = a_1$. Derivando-se novamente $f(x)$, temos:

$$f''(x) = 2.a_2 + 6.a_3(x-x_0) + \ldots + n(n-1).a_n(x-x_0)^{n-2}$$

Assim, para $x = x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 2a_2$. Derivando-se novamente $f(x)$, obtemos:

$$f'''(x) = 6.a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2).a_n.(x-x_0)^{n-3}$$

Assim, para $x = x_0 \Rightarrow f'''(x_0) = 6a_3$. Dessa forma, é fácil ver que $f^n(x_0) = n!\,a_n \therefore$

$a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Assim, uma função $f(x)$ que tem uma expressão em série de Taylor em torno de $x = x_0$, pode ser escrita como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \qquad (122).$$

com raio de convergência $R > 0$. Tal função é dita analítica em $x = x_0$.

Deslocamento do Índice de Somatório

O índice de somatório em uma série infinita é uma variável muda, da mesma forma que a variável de integração em uma integral definida é uma variável muda. Logo, não importa a letra usada para o índice de um somatório. Por exemplo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j x^j}{j!}$$

Da mesma forma que podemos mudar a variável de integração em uma integral definida, é conveniente fazer mudanças no índice de somatório ao calcular soluções em série para equações diferenciais. A seguir, ilustramos exemplos de mudança do índice do somatório

Exemplo 1

Escreva $\sum_{n=2}^{\infty} a_n . x^n$ como uma série cujo primeiro termo corresponde a $n=0$, em vez de $n=2$.

Solução: Seja $m=n-2$, então $n=m+2$ corresponde a $m=0$. Logo,

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n . x^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} . x^{m+2}$$

Escrevendo alguns termos iniciais de cada uma dessas séries, pode-se verificar que elas contêm precisamente os mesmos termos.

Exemplo 2

Escreva a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)\, a_n \,(x-x_0)^{n-2}$$

como uma série cujo termo geral envolve $(x-x_0)^n$, em vez de $(x-x_0)^{n-2}$.

Solução: Novamente, deslocamos o índice de somatório em 2 unidades, de modo que $\underline{n}$ é substituído por $n+2$ e começamos a contar 2 unidades abaixo. Obtemos,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+4)(n+3)\, a_{n+2} \,(x-x_0)^n.$$

<u>Solução de equações diferenciais ordinárias pelo método de série de potências</u>

Dada uma E.D.O. homogênea de 2ª ordem da forma

$$a(x)\, y''(x) + b(x) . y'(x) + c(x) y(x) = 0, \qquad (123)$$

Sendo $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ funções dadas. Queremos, com o método de série de potências obter pelo menos uma solução na forma de uma série de potências, tal que:

$$y(x) = \sum_{n}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad (124)$$

sendo x_0 o ponto em torno do qual queremos achar a solução. Essa expressão é uma série, mas não necessariamente a série de Taylor de alguma função $f(x)$. Podemos reescrever a equação (123) na forma normalizada tal que:

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = 0 \qquad (125)$$

com

$$p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$$

e

$$q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$$

Note que $p(x)$ e $q(x)$ são duas funções racionais e não é possível escrever a série de Taylor de uma função racional em torno dos pontos x_0 que são raízes do denominador. Se ambas as funções $p(x)$ e $q(x)$ são analíticas em x_0, esse ponto é dito ordinário. Se pelo menos uma das funções não é analítica em x_0, esse ponto é dito singular.

Exemplo 1: Na equação diferencial

$$y''(x) + x \cdot y'(x) + (x^2+5) \cdot y(x) = 0$$

temos:

$$p(x) = x \quad \text{e} \quad q(x) = x^2 + 5$$

que são polinômios e não tem nenhum ponto singular. Todos os pontos são ordinários.

Exemplo 2: Na equação diferencial

$$y''(x) + \frac{1}{x} \cdot y'(x) + (x^2 - 4x + 5)\, y(x) = 0$$

temos:

$$p(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad q(x) = x^2 - 4x + 5$$

tem um ponto singular em $x_0 = 0$, apesar de $q(x)$ ser analítica em todos os pontos. A distinção entre pontos singulares e ordinários é necessária por causa do seguinte teorema.

Teorema: A equação diferencial (125) tem duas soluções diferentes, linearmente independentes, na forma

$$y(x) = \sum_{n}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

desde que x_0 seja um ponto ordinário. Ou seja, se x_0 for um ponto ordinário da equação (125), através do método de séries é possível encontrar duas soluções linearmente independentes em torno de x_0 que a formam a solução geral da equação diferencial. O que diferenciará as duas soluções são os termos a_n.

Como exemplo, no caso das duas equações diferenciais anteriores, a primeira não tem nenhum ponto singular, e assim podemos achar a solução para qualquer valor de x_0, como, por exemplo:

$$y(x) = \sum_n a_n (x-2)^n, \quad g(x) = \sum_n a_n \cdot x^n, \quad y(x) = \sum_n a_n (x+4)^n$$

No entanto, a segunda tem ponto singular em $x_0 = 0$. Com certeza ela tem duas soluções linearmente independentes para $x_0 \neq 0$, isto é,

$$y(x) = \sum_n a_n (x-2)^n, \qquad y(x) = \sum_n a_n (x+4)^n$$

mas ainda não sabemos ainda o que ocorre se $x_0 = 0$.

Para entender melhor o método, vamos usar como exemplo a E.D.O. apresentada no exemplo 1, que não possui ponto singular. Do exemplo anterior, temos:

$$\ddot{y}(x) + x \cdot \dot{y}(x) + (x^2+5) \cdot y(x) = 0. \qquad (126)$$

Vamos achar uma solução em torno do ponto $x_0 = 0$, na forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \qquad (127)$$

Se a equação (127) é solução da equação (126), quando a substituirmos na equação (127) juntamente com suas derivadas acharemos uma igualdade, semelhante ao que ocorre no método dos coeficientes a determinar para equações diferenciais com coeficientes constantes.

Calculando a primeira e a segunda derivada da equação (127), temos:

$$\dot{y}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} \qquad (128)$$

e

$$\ddot{y}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2} \qquad (129)$$

Substituindo as equações (127), (128) e (129) na equação (126), temos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n \cdot x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + (x^2+5)\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0 \qquad (130)$$

ou

$$\overbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n \cdot x^{n-2}}^{\mathrm{I}} + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^n + \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+2}}^{\mathrm{II}} + 5\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0 \qquad (131)$$

Para podermos continuar, primeiro precisamos fazer com que x seja elevado ao mesmo expoente em cada uma das somatórias. Por isso, devemos reescrever o primeiro e o terceiro termos da equação. Assim, o primeiro termo será dado por:

$$\mathrm{I} \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2}$$

Chamando $m = n-2$ ou $n = m+2$, obtemos:

$$\mathrm{I} \rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) \cdot a_{m+2} \cdot x^m \qquad (132)$$

Como $\underline{m}$ e $\underline{n}$ são apenas variáveis mudas, que simplesmente indicam onde começa e termina a somatória, podemos trocar $\underline{m}$ por $\underline{n}$ na equação (132) ou forma a termos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) \cdot a_{n+2} \cdot x^n \qquad (133)$$

Para o terceiro termo, teremos:

$$\mathrm{II} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+2}$$

Fazendo a mudança de variável $m = n+2$ ou $n = m-2$, chegamos à:

$$\mathrm{II} \rightarrow \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} \cdot x^m \qquad (134)$$

e retornando à variável n, temos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} \cdot x^n \qquad (135)$$

Substituindo as equações (133) e (135) na equação (131), obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1).a_{n+2}.x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n + 5.\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad (136)$$

Apesar do expoente ser o mesmo na equação (136), a faixa de valores de $\underline{n}$ é diferente, sendo que uma faixa comum começa em $n=2$. Assim, reescrevemos a equação acima explicitando os termos $n=0$ e $n=1$, ou seja, para a primeira soma temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}.x^n = 2a_2 + 6a_3x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n. \quad (137)$$

O segundo termo ficará:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n x^n = a_1.x + \sum_{n=2}^{\infty} n.a_n.x^n. \quad (138)$$

O quarto termo poderá ser reescrito como:

$$5\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 5a_0 + 5a_1x + 5\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \quad (139)$$

Substituindo as equações (137), (138) e (139) na equação (136), obtemos:

$$2a_2 + 6a_3x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}.x^n + a_1.x + \sum_{n=2}^{\infty} n.a_n.x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n + 5.a_0 + 5a_1.x + 5\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 0$$

(140).

Reescrevendo a equação (140), chegamos à:

$$(5a_0 + 2a_2) + (6a_1 + 6a_3) + \sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+5)a_n + a_{n-2}].x^n = 0 \quad (141)$$

Se quisermos que a equação acima seja válida, ela tem de ser verificada para cada potência de x. Assim, por identidade polinomial, temos:

$$\begin{cases} 5a_0 + 2a_2 = 0 & (142.a) \\ 6a_1 + 6a_3 = 0 & (142.b) \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+5)a_n + a_{n-2} = 0 & (142.c) \end{cases}$$

Da equação (142.a) temos que:

$$a_2 = -\frac{5a_0}{2} \quad (143)$$

Da equação (142.b) temos que:

$$a_3 = -a_1 \qquad (144)$$

Da condição imposta pela equação (142.c) podemos calcular o termo a_{n+2} em função de a_n e a_{n-2}, como abaixo:

$$a_{n+2} = \frac{(n+5)a_n + a_{n-2}}{(n+2)(n+1)} \qquad (145)$$

Veja que com a equação (145) podemos achar os coeficientes com n par em termos de a_0 e com n ímpar em termos de a_1. Usando essa relação de recorrência para $n=2$, por exemplo, temos:

$$a_4 = \frac{33}{24}a_0$$

Para $n=3$, por exemplo, temos:

$$a_5 = \frac{17}{72}a_1$$

Substituindo os valores determinados na equação (127), chegamos à:

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots$$

$$y(x) = a_0 + a_1 x - \frac{5}{2}a_0 x^2 - a_1 x^3 + \frac{33}{24}a_0 x^4 + \frac{17}{72}a_1 x^5 + \ldots$$

$$y(x) = a_0\left[1 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{33}{24}x^4 + \ldots\right] + a_1\left[x - x^3 + \frac{17}{72}x^5 + \ldots\right] \qquad (147)$$

que é a solução em série da equação (126). Veja que ela é formada por duas soluções linearmente independentes, dadas por:

$$y_1(x) = 1 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{33}{24}x^4 + \ldots$$

$$y_2(x) = x - \frac{5}{6}x^3 + \frac{17}{72}x^5 + \ldots$$

combinadas com os coeficientes constantes a_0 e a_1 para formar a solução geral:

$$y(x) = a_0 \cdot y_1(x) + a_1 \cdot y_2(x) \qquad (148)$$

Portanto, quando achamos a série para um ponto ordinário x_0 ($x_0 = 0$, neste caso), temos duas soluções linearmente independentes, que formam a solução geral, e ambas as soluções são obtidas simultaneamente. Vamos, a seguir, explorar mais um exemplo, agora para um problema de valor inicial.

Exemplo: Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} x\cdot\ddot{y}(x) + \dot{y}(x) + 2y(x) = 0 \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 4 \end{cases}$$

Para este problema, vamos procurar a uma solução em série de potencias em torno do ponto $x_0 = 1$, devido as condições iniciais do problema serem dadas neste ponto. Dessa forma, procuramos uma solução da forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

Vimos que a condição para escrevermos a solução da E.D.O. com uma série de potência é de que o ponto em torno do qual se busca a solução seja ordinário. Verifica-se, facilmente, que $x_0 = 1$ é ponto ordinário. Derivando-se $y(x)$ duas vezes, obtemos:

$$\dot{y}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (x-1)^{n-1}$$

e

$$\ddot{y}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2}$$

Substituindo $y(x)$, $\dot{y}(x)$ e $\ddot{y}(x)$ na equação diferencial, obtemos:

$$\underbrace{x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2}}_{1^{\text{º}}\ \text{termo}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n (x-1)^{n-1}}_{2^{\text{º}}\ \text{termo}} + \underbrace{2\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n}_{3^{\text{º}}\ \text{termo}} = 0$$

Vamos reescrever cada somatória em termos dos mesmos expoentes de $(x-1)$. Para o primeiro termo, devemos proceder da seguinte maneira: Escrever x como um expoente $(x-1)$. Logo:

$$x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} = ((x-1)+1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} = (x-1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} =$$

$$\overset{\text{I}}{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-1}} + \overset{\text{II}}{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2}}$$. Fazendo mudança de variável, no primeiro (I) termo, temos: $m = n-1$ ou $m = n = m+1$ $\therefore$ $\sum_{m=1}^{\infty} (m+1)\cdot m\cdot a_{m+1} (x-1)^m$. Para o segundo (II) termo, temos: $m = n-2$ ou $n = m+2$ $\therefore$ $\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} (x-1)^m$. Voltando à variável n, temos: $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\cdot n\cdot a_{n+1} (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n$

Para o segundo termo, tomamos $m = n-1$ ou $n = m+1$, tal que

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) . a_{m+1} . (x-1)^m$$

Voltando à variável $\underline{n}$, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) . a_{n+1} . (x-1)^n$$

Assim,

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) . n . a_{n+1} (x-1)^n}_{1^{\circ} \text{ termo}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n}_{2^{\circ} \text{ termo}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) . a_{n+1} . (x-1)^n}_{3^{\circ} \text{ termo}} + \underbrace{2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n}_{4^{\circ} \text{ termo}} = 0$$

Com todos os termos escritos na mesma potência de $(x-1)$, temos agora que ajustar as somatórias que se iniciam numa faixa diferente. Para o nosso caso, teremos de deixar explícitos coeficientes da somatória do 2º termo, 3º termo e 4º termo. Assim:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) . n . a_{n+1} (x-1)^n + 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n + a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-1)^n + 2a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n = 0$$

Reescrevendo a equação acima, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1)^2 . n . a_{n+1} + 2a_n \right] (x-1)^n + (2a_0 + a_1 + 2a_2) = 0$$

Por identidade polinomial, obtemos:

$$\begin{cases} 2a_0 + a_1 + 2a_2 = 0 \\ (n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1)^2 . n . a_{n+1} + 2a_n = 0 \end{cases}$$

Da primeira condição, obtemos:

$$a_2 = -\frac{2a_0 + a_1}{2}$$

Da segunda condição, obtemos:

$$a_{n+2} = -\frac{\left[(n+1)^2 . n . a_{n+1} + 2a_n \right]}{(n+1)(n+2)}, \quad \text{com } n \geq 1$$

Com a relação de recorrência acima, vamos determinar alguns coeficientes. Para $n = 1$:

$$a_3 = -\frac{\left[(1+1)^2 a_2 + 2 . a_1 \right]}{6} = -\frac{4a_2 + 2a_1}{6} = -\frac{4\left[-\frac{2a_0 + a_1}{2} \right] + 2a_1}{6} = \frac{2a_0}{3}$$

Para $n=2$, temos:

$$a_4 = -\frac{9a_3 + 2a_2}{12} = \frac{a_1 - 4a_0}{12}$$

e assim sucessivamente. Como a forma da solução é:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + a_4(x-1)^4 + \dots$$

ou

$$y(x) = a_0 + a_1(x-1) - \left[\frac{2a_0 + a_1}{2}\right](x-1)^2 + \frac{2a_0}{3}(x-1)^3 + \left[\frac{a_1 - 4a_0}{12}\right](x-1)^4 + \dots$$

Expandindo a equação acima, temos:

$$y(x) = a_0 + a_1(x-1) - a_0(x-1)^2 - \frac{a_1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{3}a_0(x-1)^3 - \frac{a_0}{3}(x-1)^4 + \frac{a_1}{12}(x-1)^4 + \dots$$

Reorganizando os termos da equação acima, chegamos à:

$$y(x) = a_0\left[1 - (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{3}(x-1)^4 + \dots\right] + a_1\left[(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^4 + \dots\right]$$

Agora, devemos considerar as condicoes iniciais. Para $y(1) = 2$, temos:

$$y(1) = a_0\left[1 - (1-1)^2 + \frac{2}{3}(1-1)^3 - \frac{1}{3}(1-1)^4 + \dots\right] + a_1\left[(1-1) - \frac{1}{2}(1-1)^2 + \frac{1}{12}(1-1)^4 + \dots\right]$$

$$y(1) = a_0 = 2$$

Para a segunda condição, devemos derivar $y(x)$. Assim,

$$y'(x) = a_0\left[-2(x-1) + 2(x-1)^2 - \frac{4}{3}(x-1)^3 + \dots\right] + a_1\left[1 - (x-1) + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \dots\right]$$

$y'(x=1) = a_1 = 4$. Dessa forma, teremos a seguinte solução sujeita às condições iniciais:

$$y(x) = 2\left[1 - (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{3}(x-1)^4 + \dots\right] + 4\left[(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^4 + \dots\right]$$

$$\boxed{y(x) = 2 + 4(x-1) - 4(x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{3}(x-1)^4 + \dots}$$