Detalhes da solução de Blasius para uma camada limite laminar sobre uma placa plana sem gradiente de pressão

Na adimensionalização do problema da placa plana, podemos imaginar que a informação da presença da parede viaja na direção y propagada ao longo do tempo t pela viscosidade cinemática. Assim, podemos construir uma distância adimensional η da parede dada por:

$$\eta \approx \frac{y}{\sqrt{\nu t}}$$

Pois $[y] = L$, $[\nu] = L^2 T^{-1}$ e $[t] = T$.

Se fizermos $t \approx x / U$:

$$\boxed{\eta = y\sqrt{\frac{U}{x\nu}} = \frac{y}{x}\sqrt{\frac{U x}{\nu}}}$$

Estabelecida a coordenada adimensional η, devemos poder exprimir as velocidades em função dela. Para tanto, usa-se o conceito de função de corrente ψ. Verifica-se que, se um escoamento é bidimensional e incompressível, existe uma função $\psi(x,y)$ tal que:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy, \text{ com } u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ e } \upsilon = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

De fato, a existência da função de posição $\psi(x,y)$ implica que:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(u) = \frac{\partial}{\partial y}(-\upsilon) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = 0$$

Assim, sempre que temos um escoamento bidimensional e incompressível, existe a função de corrente $\psi(x, y)$. Suas dimensões são:

$$[\psi] = L^2 T^{-1}$$

Essa função de corrente deve poder ser adimensionalizada, usando a velocidade, por:

$$g(\eta) = \frac{\psi}{U\, y}$$

Onde $g(\eta)$ é uma função adimensional. Se substituirmos $y = \eta \sqrt{x \nu / U}$:

$$\psi = \eta\, g(\eta) \sqrt{U x \nu} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi = f(\eta) \sqrt{U x \nu}}$$

Introduzimos, então, uma função $f(\eta)$. Podemos agora escrever a equação de Navier-Stokes se exprimirmos as velocidades e suas derivadas através dessa função. Assim:

$$\upsilon = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\left[\frac{\partial f(\eta)}{\partial x}\sqrt{Ux\nu} + f(\eta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{Ux\nu}\right)\right]$$

Mas podemos fazer, na expressão acima, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = f'\frac{\partial \eta}{\partial x}$, e assim obtemos:

$$\boxed{\upsilon = \frac{1}{2} f' \frac{y}{x} U - \frac{1}{2} f \sqrt{\frac{U\nu}{x}}}$$

Analogamente, podemos encontrar a velocidade u:

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y}=\frac{\partial f(\eta)}{\partial y}\sqrt{Ux\nu}=\frac{df}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\sqrt{Ux\nu}$$

Isso resulta:

$$\boxed{u=f'U}$$

Seguindo o mesmo procedimento, podemos encontrar:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y}=f''\sqrt{\frac{U}{x\nu}}U} \qquad \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=f''y\sqrt{\frac{U}{\nu}}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2}U} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f'''\frac{U^2}{x\nu}}$$

Com esses resultados, é possível mostrar que a equação da camada limite laminar sobre uma placa plana sem gradiente de pressão:

$$\boxed{u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$$

Com suas condições de contorno $u=0$ para $y=0$, $\upsilon=0$ para $y=0$ e $u\to U$ para $y\to\infty$, se transforma em:

$$\boxed{f'''+\frac{1}{2}f\,f''=0}$$

Com condições de contorno $f'=0$ para $\eta=0$, $f=0$ para $\eta=0$ e $f'\to 1$ para $\eta\to\infty$.

A solução dessa última equação deve fornecer não só a distribuição de velocidades na camada limite, mas também a tensão de cisalhamento na parede. O coeficiente de atrito adimensional é dado por:

$$c_f = \frac{\tau_o}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

A tensão de cisalhamento é dada por:

$$\tau_o = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Lembrando que $\mu = \rho \nu$ e introduzindo a expressão obtida para $\dfrac{\partial u}{\partial y}$:

$$\boxed{c_f = \frac{2 f_o''}{\sqrt{\dfrac{U x}{\nu}}}}$$

Onde f_o'' é $f''(\eta = 0)$.

Assim, a solução da equação diferencial ordinária adimensional permite obter perfis de velocidade ao longo do comprimento da placa, bem como a distribuição de tensões de cisalhamento na parede e consequentemente a força de arrasto sobre a placa.

Blasius conseguiu a solução dele através de séries de potências. Após o advento dos computadores digitais, a forma mais fácil de resolver a equação adimensional da camada limite é através de métodos numéricos. Usando um método de Euler, por exemplo, podemos fazer:

$$f(\eta + \Delta\eta) = f(\eta) + f'(\eta)\Delta\eta$$
$$f'(\eta + \Delta\eta) = f'(\eta) + f''(\eta)\Delta\eta$$
$$f''(\eta + \Delta\eta) = f''(\eta) + f'''(\eta)\Delta\eta$$
$$f'''(\eta + \Delta\eta) = -\frac{1}{2} f(\eta + \Delta\eta) f''(\eta + \Delta\eta)$$

Propondo um valor inicial para f_o'' e usando um passo $\Delta\eta$ adequado, é possível verificar se $f' \to 1$ para $\eta \to \infty$. O valor de f_o'' vai sendo então ajustado em sucessivas tentativas.

Em geral, usam-se métodos mais precisos, como um método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Resultados:

$$\boxed{\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}}$$

$$\boxed{c_f = \frac{2 f''_o}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} = \frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}}$$

Bibliografia:

White, F.M., “Mecânica dos Fluidos”, 5º edição, Ed. McGraw Hill, 2010.

Potter, M.C.; Wiggert, D.C., “Mecânica dos Fluidos”, Ed. Thomson Learning, 2004.

Mase, G.T.; Mase, G.E., “Continuum Mechanics for Engineers”, third edition, CRC Press, 1999.

Munson, Young, Okiishi, “Fundamentos da Mecânica dos Fluidos, Ed. Edgard Blucher, 4ª edição, 1999.