COUNTED
COUNTED
P06-30
COUNTED
COUNTED
P07-30

Estoque - Incerteza (Aula 7)

Programação e Controle da Produção

Prof. Daniel de Oliveira Mota

Dep. Engenharia de Produção

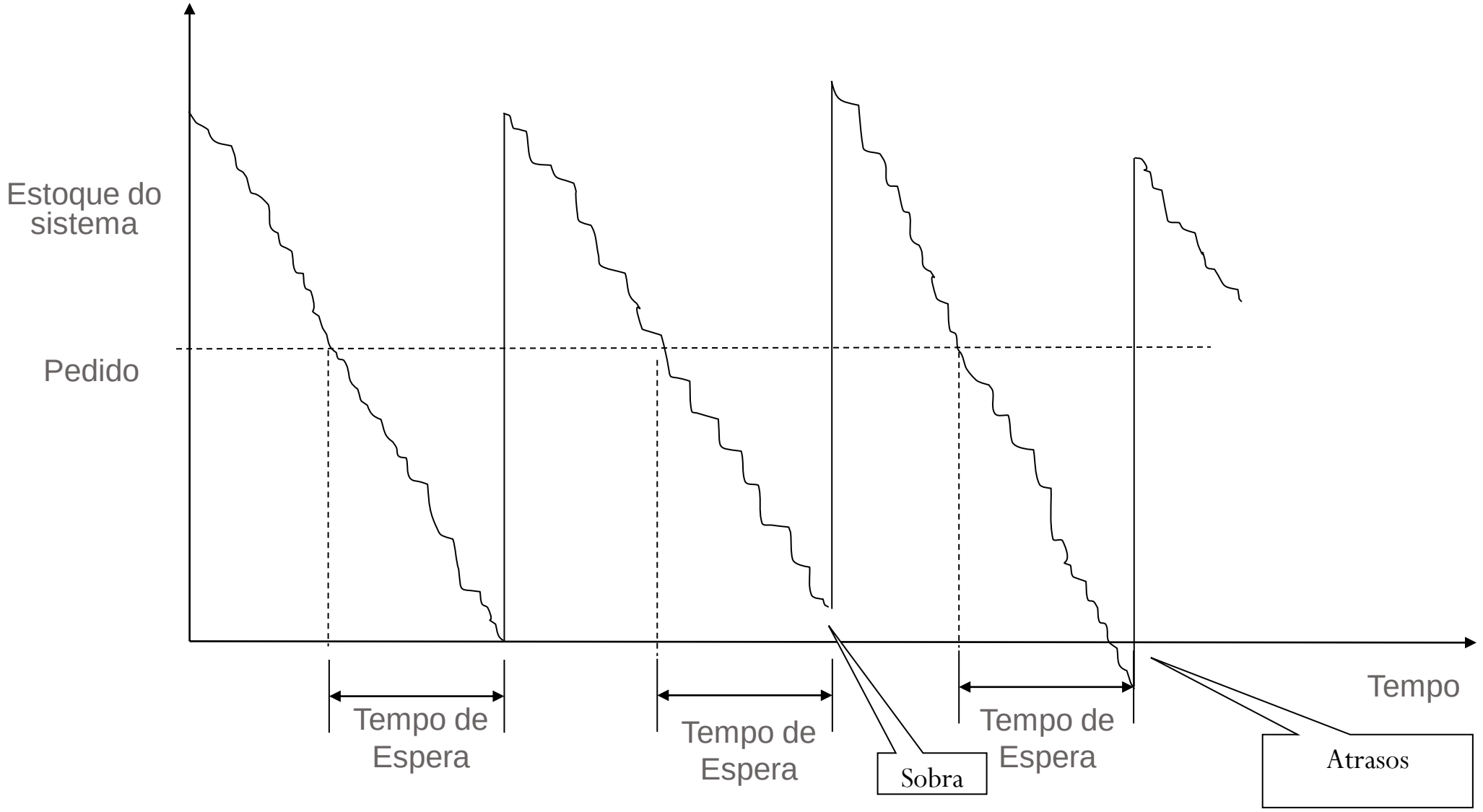
Agenda

- Gestão de estoques:
  - Efeito da incerteza
  - Modelos probabilísticos:
    - *Newsvendor model*
    - Sistemas de revisão periódica
    - Sistemas de estoque mínimo
    - Sistemas de revisão contínua

Efeito da incerteza

- O modelo anterior assume o mundo perfeito:
  - Fornecedor 100% **confiável**
  - Não há **variação** da demanda
  - Não há **variação** no leadtime
- Como funciona na vida real?

Efeito da incerteza no Modelo de lote econômico



Modelo do Jornaleiro
*Newsvendor Model (*Edgeworth, 1888)

- Premissas
  - Produtos separáveis (demanda independente)
  - O planejamento é feito para um período só
  - Demanda aleatória
  - Entregas realizadas (disponibilizadas) antes das demandas
  - Custos de excesso ou falta são lineares

Modelo

X = demanda (em unidades), variável aleatória

$g(x)$ = função densidade de probabilidade (pdf)

$G(x)$ = $P(X \leq x)$ = função distribuição acumulada

μ = $E[X]$ = demanda média (em unidades)

σ = desvio padrão da demanda (em unidades)

c_o = o custo de estoque de uma unidade ($ por unidade em excesso)

c_s = o custo por falta de produto ($ por unidade em falta)

Q = a quantidade produzida ou comprada (em unidades); variável de decisão

Exemplo

- Suponha que um conjunto de luzes custe $5 para fabricação e distribuição, e seu preço de venda seja $10. Quando não vendido, será liquidado por $2,50 (promoção). Sendo a demanda prevista de 10.000 unidades, com desvio padrão de 1.000 (distribuído normalmente). Qual o tamanho do lote (Q)?

Análise:

$c_o = (5 - 2{,}5) = \$2{,}50$

$c_s = (10 - 5) = \$5{,}00$

$$Y(Q) = c_0 . Unidades\ excesso + c_s . Unidades\ falta$$

Exemplo

$$Y(Q) = c_o.Unidades\ excesso + \ c_s.Unidades\ falta$$

$$Y(Q) = c_o.E[Unidades\ excesso] + \ c_s.E[Unidades\ falta]$$

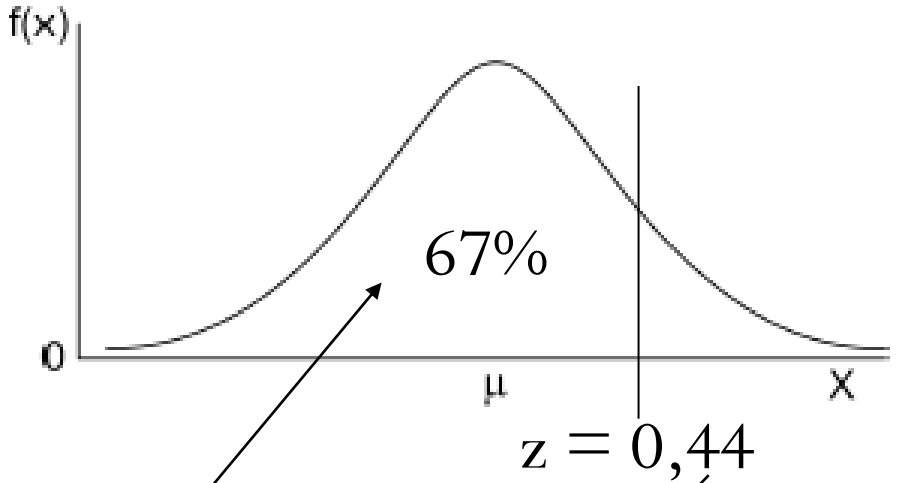
$$Y(Q) = c_o.\int_0^{\infty} max\{Q - x, 0\}g(x)dx + \ c_s.\int_0^{\infty} max\{x - Q, 0\}g(x)dx$$

$$Y(Q) = c_o.\int_0^{Q} (Q - x)g(x)dx + \ c_s.\int_Q^{\infty} (x - Q)g(x)dx$$

$$\frac{\partial(Y(Q))}{\partial Q} = 0\ (aplicando\ derivada) \ldots G(Q^*) = P(demanda \leq Q^*) = \frac{c_s}{c_o + c_s}$$

Exemplo

$$G(Q^*) = P(demanda \leq Q^*) = \frac{c_s}{c_o + c_s}$$



$$demanda \sim N(10.000, 1.000^2)$$

$$G(Q^*) = \Phi\left(\frac{Q^* - \mu}{\sigma}\right) = \frac{c_s}{c_o + c_s} = \frac{5}{2{,}5 + 5} = 0{,}67\ (\%\ de\ atendimento)$$

$$\frac{Q^* - \mu}{\sigma} = z \therefore Q^* = \mu + z\sigma \therefore Q^* = 10.000 + 0{,}44\ x\ 1.000$$

$$Q^* = 10.440\ unidades$$

Conclusões do modelo do Jornaleiro

- O tamanho do lote depende tanto da distribuição da demanda quanto da relação entre os custos (falta / excesso)
- Sendo a demanda distribuída normalmente:

$$Q^* > demanda\ se\ \frac{c_s}{c_o + c_s} > 0{,}5$$

$$Q^* < demanda\ se\ \frac{c_s}{c_o + c_s} < 0{,}5$$

Modelo do estoque mínimo

- Premissas
  - Produtos separáveis (demanda independente)
  - A demanda ocorre uma de cada vez (não há lotes)
  - Demanda não atendida fica pendente (não perde vendas)
  - Tempos de reposição fixos e conhecidos
  - Reposições feitas uma de cada vez
  - Demanda pode ser aproximada de uma distribuição contínua
  - Monitoramento contínuo

Modelo do estoque mínimo

l = tempo de reposição (em dias), assumido constante

X = demanda (em unidades) durante o tempo de reposição, variável aleatória

$g(x)$ = função densidade de probabilidade (pdf) demanda durante o tempo de reposição

$G(x)$ = $P(X \leq x)$ = função distribuição acumulada durante o tempo de reposição

θ = $E[X]$ = demanda média (em unidades) durante o tempo de reposição

σ = desvio padrão da demanda (em unidades) durante o tempo de reposição

h = o custo de estoque de uma unidade ($ por unidade por ano)

r = ponto de reposição (em unidades), variável decisão

s = $r - \theta$, nível de estoque de segurança (em unidades)

$S(r)$ = taxa de preenchimento (frações de pedidos atendidos do estoque) como função de r

$B(r)$ = número médio de pedidos pendentes como função de r

$I(r)$ = nível médio de estoque existentes (em unidades) como função de r

Modelo do estoque mínimo

Posição de estoque = estoque existente – pedidos pendentes + pedidos

Cada pedido demora um tempo l para a reposição, durante o qual a demanda esperada é de θ unidades.

s = r – θ que representa o **estoque de segurança** (proteção)

$$S(r) = G(r+1) = \Phi\left(\frac{r+1-\theta}{\sigma}\right) = nível\ de\ atendimento\ (nível\ de\ serviço)$$

$$B(r) = \int_{r}^{\infty} (x-r)g(x)dx = (\theta - r)[1-\Phi(z)] + \sigma\phi(z)$$

$$I(r) = r + 1\ - \theta + \mathrm{B(r)}$$

$$Y(r) = h(r+1-\theta) + (b+h)B(r)$$

Exemplo

- Suponha demanda média de 10 refrigeradores por mês, com tempo de reposição de 1 mês. Assim, θ=10 unidades. Demanda segue distribuição de Poisson, portanto $\sigma = \sqrt{10} = 3{,}16$. Custo do refrigerador seja $ 750 e custo de estoque seja 2%, e para manter os pedidos pendentes são estimados $25 mensais por unidade.

Análise:

p/ r=13: $S(13) = \Phi\left(\frac{14-10}{3{,}16}\right) = \Phi(1{,}26) = 0{,}896$

p/ r=14: $S(14) = \Phi\left(\frac{15-10}{3{,}16}\right) = \Phi(1{,}58) = 0{,}942$

r mínimo para nível de serviço (nível de atendimento) superior a 90%

Exemplo

p/ r=14 .: s = r – θ .: s=14 – 10 .: s=4 unidades

Estoque de segurança

$$B(15) = (\theta - r)[1 - \Phi(z)] + \sigma\phi(z)$$

$$= (10 - 14 - 1)[1 - \Phi(1{,}58)] + \sigma\phi(1{,}58)$$

$$= (-5)[1 - 0{,}942] + 3{,}16 \text{ x } 0{,}114 = 0{,}077$$

Num. Médio de pedidos pendentes

$$I(15) = r + 1 - \theta + B(r) = 14 + 1 - 10 + 0{,}077 = 5{,}077$$

Nível médio de estoque existente

$$Y(15) = h(r + 1 - \theta) + (b + h)B(r)$$

$$= h(5) + (b + h)0{,}077$$

$$= 15 \text{ x } 5 + (25 + 15) \text{ x } 0{,}077 = 78{,}08 \text{ (por unidade)}$$

Conclusões do modelo do lote mínimo

- O ponto de reposição controla a probabilidade de falta, estabelecendo um estoque de segurança
- O nível de estoque mínimo que permite determinado nível de atendimento é uma função do desvio padrão da demanda durante o tempo de reposição
- O nível de atendimento ótimo é função dos custos
- A mesma ideia discutida se aplica a controle por cartões (*kanban*)

Modelo (Q,r) – Wilson (1934)

- Premissas
  - Produtos separáveis (demanda independente)
  - A demanda ocorre uma de cada vez (não há lotes)
  - Demanda não atendida fica pendente (não perde vendas)
  - Tempos de reposição fixos e conhecidos
  - Reposições feitas uma de cada vez
  - Demanda pode ser aproximada de uma distribuição contínua
  - Monitoramento contínuo
  - Existe um custo fixo associado ao pedido
  - Existe uma limitação do número de pedidos anuais

Modelo (Q,r)

D = demanda anual esperada (em unidades)

l = tempo de reposição (em dias), assumido constante

X = demanda (em unidades) durante o tempo de reposição, variável aleatória

θ = E[X] = demanda média (em unidades) durante o tempo de reposição

σ = desvio padrão da demanda (em unidades) durante o tempo de reposição

g(x) = função densidade de probabilidade (pdf) demanda durante o tempo de reposição

G(x) = $P(X \leq x)$ = função distribuição acumulada durante o tempo de reposição

A = os custos de setup (ou de colocar um pedido) ($)

c = custo unitário de produção ($ por unidade)

h = o custo de estoque de uma unidade ($ por unidade por ano)

k = custo por falta de estoque ($)

Modelo (Q,r) (cont'd)

b = custo unitário anual do pedido pendente (em $ por unidades pendentes por ano)

Q = quantidade de reposição (em unidades), variável de decisão

r = ponto de reposição (em unidades), variável decisão

s = $r - \theta$, nível de estoque de segurança (em unidades)

F(Q,r) = a frequência do pedido (pedidos de reposição por ano)

S(Q,r) = taxa de preenchimento (frações de pedidos atendidos do estoque) como função de Q,r

B(Q,r) = número médio de pedidos pendentes como função de Q,r

I(Q,r) = nível médio de estoque existentes (em unidades) como função de Q,r

Modelo (Q,r)

$$Custo\ fixo\ de\ setup: F(Q,r) = \frac{D}{Q}$$

$$Custo\ da\ falta\ de\ estoque: S(Q,r) = \frac{1}{Q}\int_{r}^{r+Q} G(x)dx = 1 - \frac{1}{Q}[B(r) - B(r+Q)]$$

$$Custo\ de\ pedidos\ pendentes: B(Q,r) = \frac{1}{Q}\int_{r}^{r+Q} B(x+1)dx = \frac{1}{Q}[\beta(r) - \beta(r+Q)] \qquad onde\ \beta(x) = \int_{x}^{\infty} B(y)dy$$

$$Custo\ de\ estocagem: I(Q,r) = \frac{Q+1}{2} + r - \theta + B(Q,r)$$

$$Custo\ total: Y(Q,r) = \frac{D}{Q}A + bB(Q,r) + hI(Q,r)$$

$$\frac{\partial Y(Q,r)}{\partial Q} = 0 \ \therefore Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{h}}$$

$$\frac{\partial Y(Q,r)}{\partial r} = 0 \ \therefore G(r^*) = \frac{b}{b+h} = r^* = \theta + z\sigma$$

Exemplo

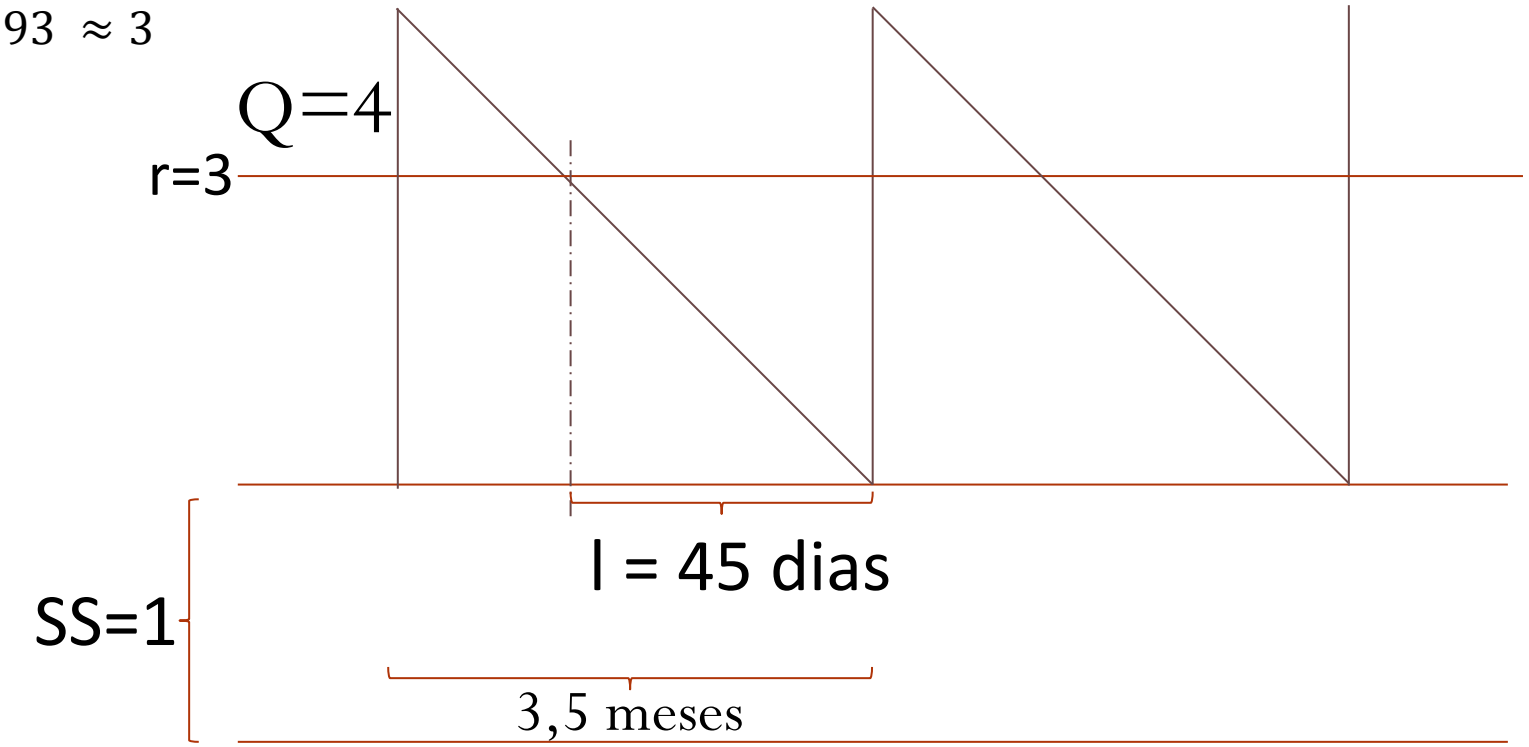
- Partindo dos dados históricos, uma das peças de reposição do estoque tem demanda anual (D) = 14 unidades. O custo unitário c da peça é de $150 e considerando a taxa de juros referência de 20%, o custo de armazenagem anual h=$30 por ano. São necessários 45 dias para receber um pedido de reposição. Portanto a demanda média durante a reposição é de $\theta = \frac{14}{365} 45 = 1{,}726$. O custo para colocar o pedido é estimado em $15. b = $100 e k = $40. A demanda segue um modelo de Poisson.

Exemplo

$$Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{h}} = \sqrt{\frac{2(15)(14)}{30}} = 3{,}7 \approx 4$$

$$r^* = \theta + z\sigma = 1{,}726 + \frac{100}{100+30}1{,}314 = 2{,}693 \approx 3$$

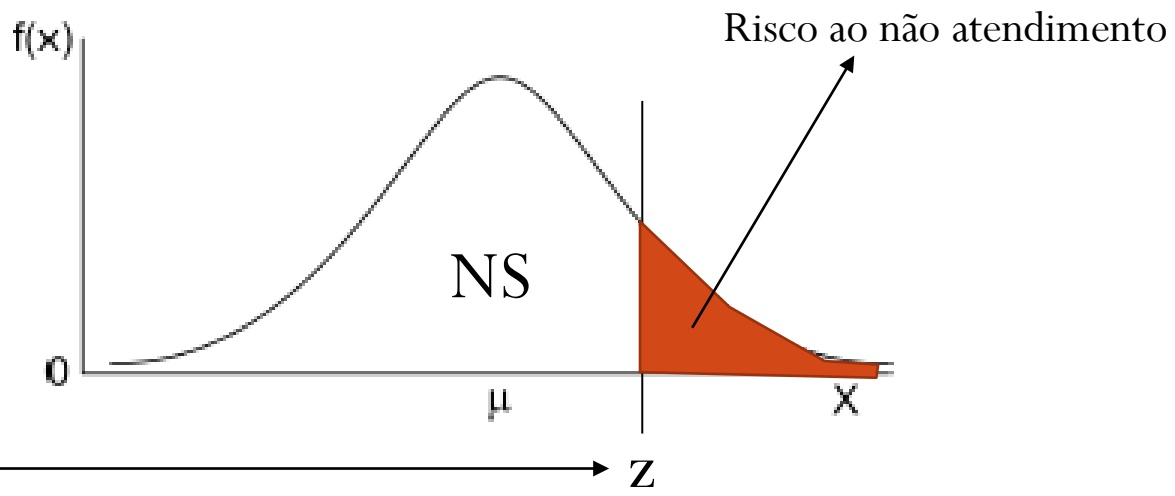
$$N = \frac{14}{4} = 3{,}5$$



Conclusões

$$Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{h}}$$

$$r^* = \theta + z\sigma$$



D (média) = 5.000

Nível de Serviço	Ponto de pedido	Estoque de segurança
5%	3836	-1164
10%	4093	-907
15%	4267	-733
20%	4404	-596
25%	4523	-477
30%	4629	-371
35%	4727	-273
40%	4820	-180
45%	4911	-89
50%	5000	0
55%	5089	89
60%	5180	180
65%	5273	273
70%	5371	371
75%	5477	477
80%	5596	596
85%	5733	733
90%	5907	907
95%	6164	1164
99%	6645	1645