7600054 — Sistemas Complexos

Gonzalo Travieso

2020-04-15

Outline

Mapa logístico

- Voltando ao mapa logístico:

$$L(x, r) = rx(1 - x)$$

lembramos que ele tem um ponto fixo não-trivial em

$$x^* = 1 - 1/r$$

para $r > 1$, estável em $1 < r < 3$.

- Também vimos que em $r = 3$ ocorre uma bifurcação de duplicação de período, e surge um ciclo de período 2, com pontos periódicos em

$$x = \frac{(r+1) \pm \sqrt{(r+1)^2 - 4(r+1)}}{2r}$$

estáveis em $3 < r < 1 + \sqrt{6}$.

- O que acontece além de $1 + \sqrt{6}$?

Mapa logístico além de $r = 1 + \sqrt{6}$

- Lembramos que os pontos de período 2 de $L(x, r)$ são os pontos fixos de $L^2(x, r)$.
- A estabilidade desses pontos depende de

$$\frac{\partial L^2}{\partial x} = r^2(1 - 2x)(1 - 2rx(1 - x))$$

no ponto fixo. Substituindo para os pontos fixos em $r = 1 + \sqrt{6}$ encontramos

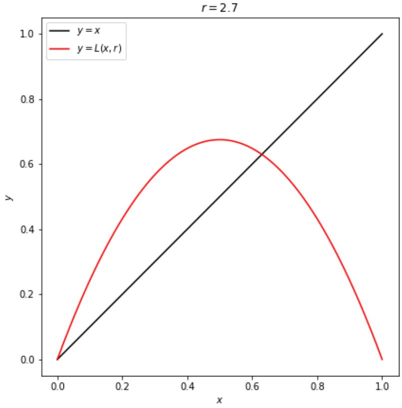
$$\frac{\partial L^2}{\partial x} = -1,$$

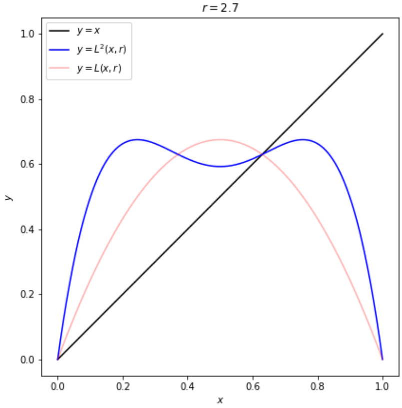
isto é, os dois pontos fixos de L^2 são não-hiperbólicos, com derivada negativa.

Mapa logístico além de $r = 1 + \sqrt{6}$ (cont)

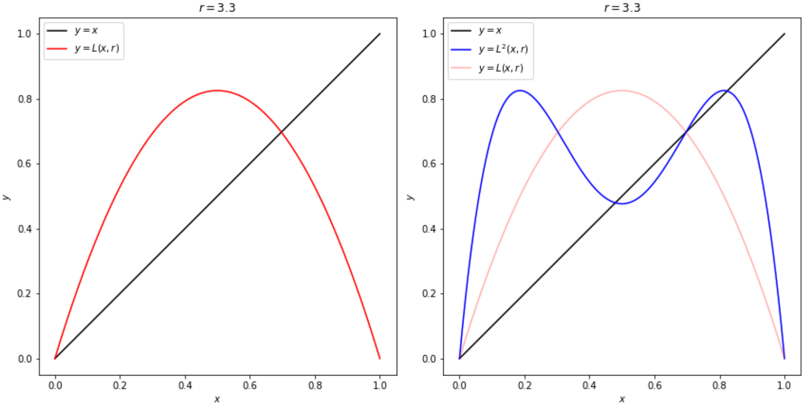
- Se verificarmos agora $L^4(x, r) = L^2(L^2(x, r), r) = L(L(L(L(x, r), r), r), r)$ veremos que ela satisfaz as condições para uma bifurcação de forquilha em $r = 1 + \sqrt{6}$.
- Portanto, temos uma bifurcação de duplicação de período de $L^2(x, r)$, com cada um dos seus pontos fixos estáveis se tornando instáveis e gerando dois pontos fixos estáveis de $L^4(x, r)$.
- O ciclo de período 2 em $L^2(x, r)$ implica por sua vez que $L(x, r)$ agora tem um ciclo de período 4.
- Na verdade, esse processo se repete indefinidamente.

Antes da primeira duplicação

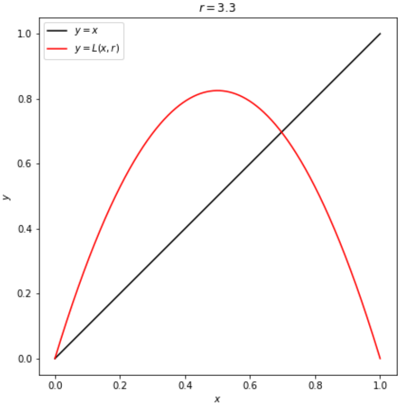


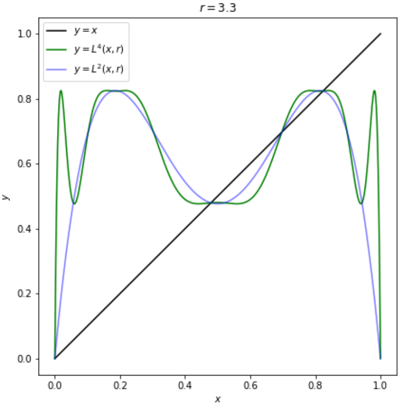


Após a primeira duplicação, antes da segunda

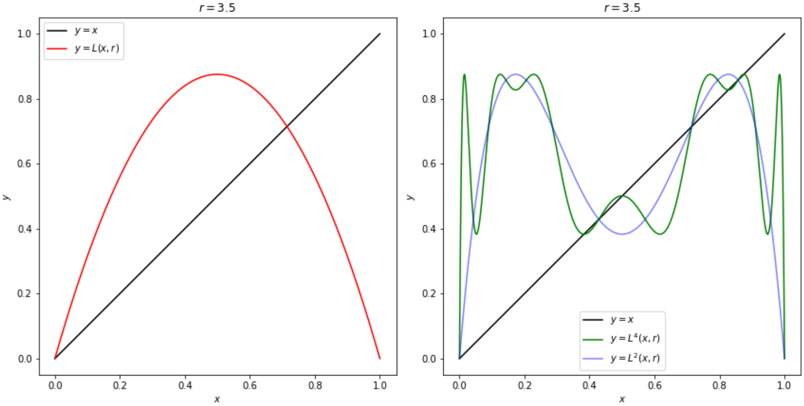


Após a primeira duplicação, antes da segunda

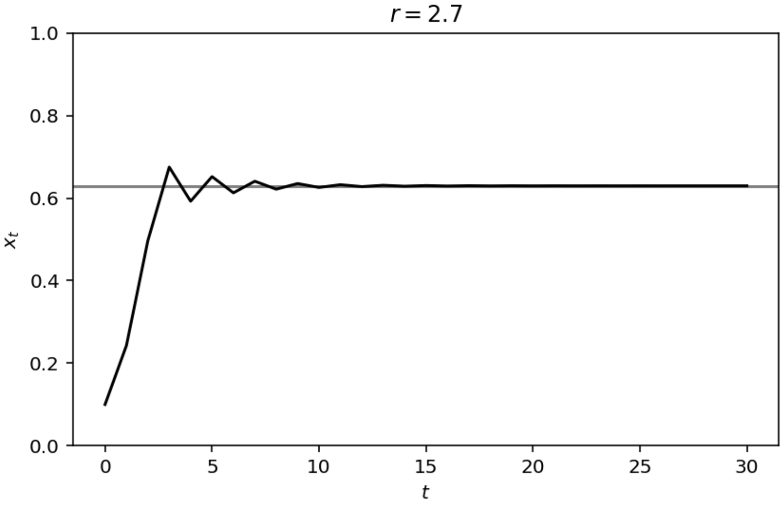




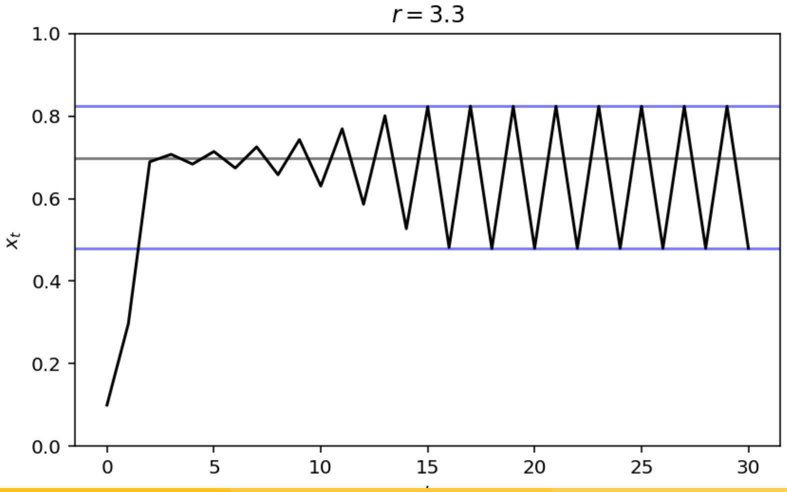
Após a segunda duplicação



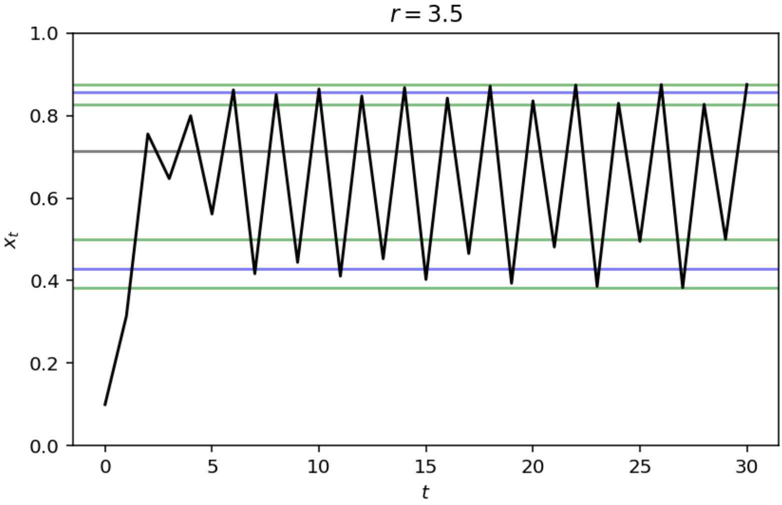
Evolução temporal, antes da primeira duplicação



Evolução temporal, após primeira duplicação, antes da segunda



Evolução temporal, após segunda duplicação



Sequência de duplicações

- Temos um pntos fixo (ciclo de período 1) a partir de $r_0 = 1$ e estável até $r_1 = 3$.
- Temos um ciclo de período 2 a partir de r_1 e até $r_2 = 1 + \sqrt{6} = 3.4494897\ldots$.
- A partir de r_2, teremos um ciclo de período 4 até um valor de r_3.
- No caso geral, temos um ciclo de período 2^k estável numa região $r_k < r < r_{k+1}$, para qualquer valor de $k \geq 0$.

Alguns pontos de duplicação

r_1	3.00000
r_2	3.44950
r_3	3.54409
r_4	3.56441
r_5	3.56876
r_6	3.56969
r_7	3.56989
r_8	3.56993

Exercício

Exercício

Execute o mapa logístico para $r = 3.55$.
Quantos pontos periódicos você espera?
Determine o valor desses pontos periódicos, rodando um número suficientemente grande de interações e verificando os últimos valores.

Número de Feigenbaum

- Note como os valores de r_k vão ficando cada vez mais próximos.
- De fato, eles têm um limite

$$\lim_{k\to\infty} r_k = r_\infty \approx 3.5699456\ldots.$$

- A convergência segue, para k suficientemente grande, uma regra específica: Definindo

$$\delta_k = \frac{r_{k-1} - r_{k-2}}{r_k - r_{k-1}},$$

encontramos que esse valor converge:

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k = \delta.$$

- A constante $\delta \approx 4.6692016091029\ldots$ é denominada número de Feigenbaum e é uma *constante universal* em sistemas que apresentam uma sequência de duplicação de períodos!

Universalidade do número de Feigenbaum

As condições para que o número de Feigenbaum apareça são:

- O mapa $x_{t+1} = f(x_t, \mu)$ exibe uma sequência infinita de duplicações de período.
- f é contínua e tem um máximo único em x_c.
- $f(x_c, \mu) - f(x, \mu) \sim (x - x_c)^2$ próximo de x_c.
- Se a ordem do máximo é diferente, $f(x_c, \mu) - f(x, \mu) \sim (x - x_c)^z$ com $z \neq 2$, então a constante de aproximação será diferente:

z	δ
2	4.669
4	7.284
6	9.296
8	10.948

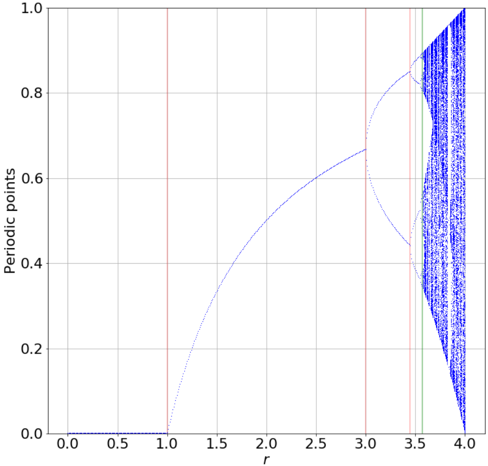
Acima de r_∞

- O período vai duplicando à medida que r_k cresce.
- As distâncias entre os pontos de duplicação vão diminuindo.
- Em princípio, em r_∞ teríamos um sistema periódico com período infinito.
- Mas r pode ainda ser aumentado até 4.
- O que acontece no intervalo $r_\infty < r < 4$?
- Veremos que o sistema é caótico nessa região (com algumas regiões não-caóticas).

Diagrama de bifurcação

- Um diagrama de bifurcação mostra os valores dos pontos cíclicos (ou fixos) estáveis de um sistema em função de seu parâmetro.
- Para cada valor do parâmetro, plotamos ou seu ponto fixo estável ou todos os seus pontos cíclicos.
- Num sistema com infinitas duplicações de período, teremos uma estrutura de “árvore” no diagrama de bifurcação.

Diagrama de bifurcação



Exercício

Diagrama de bifurcação

- Gere um novo diagrama de bifurcação, mas enfocando a região de r onde as duplicações acontecem, isto é, começando um pouco abaixo de $r_1 = 3$ e terminando um pouco acima de $r_\infty \approx 3.5699456$. Isto permitirá ver mais detalhes das bifurcações.
- Plote agora um diagrama da região de $3.5 < r < 4$. O que você nota nessa região, especialmente entre 3.8 e 3.9?
- Enfoque a região $3.8 < r < 3.9$ e diga o que você nota.