

# AJUSTE DE PARÂMETROS

## Covid-19

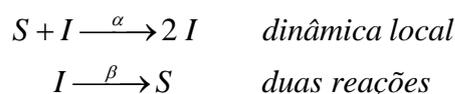
Entrega:24/04/2020

### Introdução

Várias situações são modeladas por Equações Diferenciais Ordinárias. Os modelos teóricos são bem estudados, com hipóteses sólidas e validados em laboratório. Porém, quando tentamos aplicá-los em casos concretos várias dificuldades aparecem, entre elas, quais parâmetros usarmos.

Neste trabalho vocês explorarão este aspecto da aplicação de EDO. E nada mais atual que tentarmos ajustar a atual epidemia. Para simplificar, usaremos um modelo epidemiológico muito simples, aplicável ao Covid-19 somente no surto inicial (comportamento exponencial). Neste modelo, agruparemos a população em compartimentos, os indivíduos suscetíveis  $S$  (que não tem a doença e podem contraí-la) e os indivíduos infectados  $I$  (que estão com a doença e podem transmiti-la). Agruparemos e definiremos como  $S$  e  $I$  o número de indivíduos nestas classes. Claramente, com a evolução da doença, este número varia, portanto, são funções do tempo. Chamaremos de  $N$  a população total, que suporemos constante  $S + I = N$ .

Definido a divisão da população, agora podemos definir como é a dinâmica ao longo do tempo dela, neste caso, assumiremos um modelo simples: Existem parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  que representam as taxas em que um infectado, ao encontrar um suscetível, o infecta e a taxa de recuperação de um infectado, que se torna suscetível de novo.



Com isto, temos o seguinte sistema de equações diferenciais.

$$\begin{aligned} S' &= -\alpha \frac{SI}{N} + \beta I \\ I' &= \alpha \frac{SI}{N} - \beta I \end{aligned}$$

E, como  $S + I = N$ , reduzimos a uma equação

$$I' = \alpha \frac{(N-I)I}{N} - \beta I$$

Trabalhando com densidades  $j = \frac{I}{N}$  e  $s = \frac{S}{N}$ , temos a seguinte equação

$$\frac{dj}{dt} = \alpha(1-j)j - \beta j \quad (1)$$

Observe que temos duas soluções que não dependem do tempo,  $j^d = 0$  e  $j^s = 1 - \frac{\beta}{\alpha}$ . A primeira é dita “livre de doenças”, já que não temos infectados, o segundo é dito equilíbrio endêmico, quando existir. Do ponto de vista da aplicação a densidade tem de ser positiva, logo, o equilíbrio endêmico, apesar de sempre existir matematicamente, só tem relevância na aplicação, quando for positivo, ou seja, quando,  $R_0 = \frac{\alpha}{\beta} > 1$ .

Tarefas:

1) Teórica:

- Mostre que, se  $j(0) \in [0,1]$ , então a solução de (1) satisfaz  $j(t) \in [0,1]$ , para todo tempo.
- Verifique que  $j^d$  e  $j^s$  são soluções.
- Utilize o método de variáveis separadas para achar a solução geral de (1). (Observe que:  $\int \frac{1}{ax-bx^2} dx = \frac{\ln x - \ln(a-bx)}{a} + const$ .)
- Decida o que acontece com a solução (para cada condição inicial) para diferentes valores de  $R_0 > 0$ .

2) Numérico.

Vamos ajustar os dados de casos confirmados de Covid-19 na cidade de São Paulo, desde 25 de fevereiro de 2020 quando havia 1 caso, que será nosso instante 0 e valor inicial, que podem ser acessados em

[https://brasil.io/dataset/covid19/caso?search=&date=&state=SP&city=S%C3%A3o+Paulo&place\\_type=&is\\_last=&city\\_ibge\\_code=&order\\_for\\_place=](https://brasil.io/dataset/covid19/caso?search=&date=&state=SP&city=S%C3%A3o+Paulo&place_type=&is_last=&city_ibge_code=&order_for_place=)

Para cada par de parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  temos uma única solução de (1). Queremos a solução que melhor se ajusta aos dados. Se  $(t_i, j_i)$  são os dados reais, então a solução que melhor se ajusta aos dados é aquela que  $\sum_i (j(t_i) - j_i)^2$  seja mínima.

- Utilize um método numérico para calcular, dado um valor do parâmetro, a solução de (1)
- Utilize o método numérico para determinar os valores dos parâmetros que melhor se ajustam aos dados.

c. Represente graficamente sua solução.