AULA 12

Mecânica Quântica I

$\boxed{\text{AULA 12}}$

(d) Estados Coerentes

O estado fundamental do oscilador harmônico evoluído no tempo que vimos na aula passada pertence a uma <u>classe de estados coerentes</u> que tem um papel muito importante na teoria quântica da luz.

Considere o oscilador não forçado e o conjunto de estados produzidos por $D(z)$ agindo em $|0\rangle$

$$|z\rangle = D(z)|0\rangle = e^{-|z^*|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

$z \in \mathbb{C}$
parâmetro ind. do tempo

$$= e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^{z a^+} e^{-z^* a} |0\rangle \quad (1)$$

$$= e^{-|z|^2/2} e^{z a^+} |0\rangle$$

esses vetores são estados coerentes, $|z\rangle$ é um autovetor do operador a

$$a|z\rangle = z|z\rangle \quad (2)$$

$$e^{a^+ z} a\, e^{-a^+ z} = a + e^{a^+ z}[a, e^{-a^+ z}] = a - z$$

$$\Rightarrow \quad e^{a^+ z} a = (a - z)\, e^{a^+ z}$$

$$e^{a^+ z} a|0\rangle = (a - z) e^{a^+ z}|0\rangle = 0 \quad \Rightarrow a|z\rangle = z|z\rangle$$

seja $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 + i p_0)$ $\quad q_0, p_0 \in \mathbb{R}$ const. reais

$$D(z) = D(q_0, p_0) = \exp\left[i\left(p_0 \tilde{q} - q_0 \tilde{p}\right)\right] \left(\equiv \exp\left[z a^+ - z^* a\right]\right) \quad (3)$$

Note que:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{q} + i\tilde{p}) \qquad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{q} - i\tilde{p})$$

$$z a^+ - z^* a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 + i p_0)\frac{(\tilde{q} - i\tilde{p})}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 - i p_0)\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{q} + i\tilde{p})$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cancel{q_0\tilde{q}} - i q_0 \tilde{p} + i p_0 \tilde{q} + \cancel{p_0 \tilde{p}} - \cancel{q_0 \tilde{q}} - i q_0 \tilde{p} + i p_0 \tilde{q} - \cancel{p_0 \tilde{p}}\right]$$

$$= i\left(p_0 \tilde{q} - q_0 \tilde{p}\right)$$

---

essa é uma translação no espaço de fase de uma distância q_0 e momento p_0. Vejamos

$$D(z) = D(q_0, p_0) = e^{\frac{i}{2} q_0 p_0}\, e^{-i q_0 \tilde{p}}\, e^{i p_0 \tilde{q}} \quad (4a)$$

$$[\tilde{q}, \tilde{p}] = i$$

$$= e^{-\frac{i}{2} q_0 p_0}\, e^{i p_0 \tilde{q}}\, e^{-i q_0 \tilde{p}} \quad (4b)$$

$$D^+ \tilde{p} D = \tilde{p} + D^+[\tilde{p}, D] = \tilde{p} + p_0 \quad (5a)$$

$$D^+ \tilde{q} D = \tilde{q} + D^+[\tilde{q}, D] = \tilde{q} + q_0 \quad (5b)$$

Para a função de onda temos

$$\langle x | D(z) | 0 \rangle = e^{-\frac{i}{2} q_0 p_0}\, e^{i p_0 x} \langle x | e^{-i q_0 \tilde{p}} | 0 \rangle$$

$$= e^{-\frac{i}{2} q_0 p_0}\, e^{iup_0} \langle u - q_0 | 0 \rangle = e^{-\frac{i}{2} q_0 p_0}\, e^{iup_0}\, \varphi_0(u - q_0)$$

Como o estado fundamental deslocado $|z\rangle$ evolui com t?

$$e^{-iH_0 t} |z\rangle =$$

$$= e^{-iH_0 t}\, D(z) |0\rangle$$

$$= e^{-iH_0 t}\, D(z)\, e^{iH_0 t}\, e^{-iH_0 t} |0\rangle$$

$$= e^{-i\frac{t}{2}} \left(e^{-iH_0 t}\, D(z)\, e^{iH_0 t} \right) |0\rangle$$

$$= e^{-i\frac{t}{2}} \exp\left[z a^+ e^{-it} - z^* a\, e^{it} \right] |0\rangle \quad (6)$$

Note que a dependência temporal de a e a^+ é oposta a que usamos antes pois a equação (6) está na descrição de Schrödinger. A menos da fase devido a energia de ponto zero (que definiremos agora como zero)

$$e^{-iH_0 t} |z\rangle = |z e^{-it}\rangle = D(z e^{-it}) |0\rangle \quad (7)$$

a evolução temporal meramente substitui

$$z \to z e^{-it}$$

$$z e^{-it} = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_0 \cos t + p_0 \operatorname{sen} t) + i (p_0 \cos t - q_0 \operatorname{sen} t) \quad (8)$$

logo em t o estado coerente é o estado fundamental não deformado deslocado p/ a posição e momento que ~~o~~ oscilador clássico teria se tivesse sido colocado em movimento em $t=0$ com condições iniciais (q_0, p_0).

Uma propriedade importante dos estados coerentes segue imediatamente do fato que $|z\rangle$ é autoestado de a

$$D^+(z)\, a\, D(z) = a + D^+(z)\,[a, D(z)] = a + z$$

$$\Rightarrow \quad a\, D(z) = D(z)\,(a+z) \qquad a|0\rangle = 0$$

$$a\, D(z)\,|0\rangle = \underline{a|z\rangle} = D(z)\,(z+a)\,|0\rangle = \underline{z\,|z\rangle}$$

~~se~~ $\bar{A}(t)$ é o valor esperado de qualquer operador A em um estado coerente.

$$\langle z|\, e^{iH_0 t}\, a\, e^{-iH_0 t}\,|z\rangle = \langle z e^{-it}|\, a\, |z e^{-it}\rangle = \bar{a}(t)$$

$$= z e^{-it} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar{q}(t) + i\,\bar{p}(t)\right)$$

$$\langle z|\, e^{iH_0 t}\, H_0\, e^{-iH_0 t}\,|z\rangle = \langle z|\, H_0\,|z\rangle = \langle z|\, a^+ a\,|z\rangle = |z|^2 = \bar{H}$$

$$= \frac{1}{2}\left(p_0^2 + q_0^2\right) \equiv E_0$$ que é a energia do oscilador clássico.

o fato que o valor mais baixo de $\bar{H}$ não ser $\frac{1}{2}\hbar\omega$ (ou $1/2$ p/as relações adimensionais) é devido a termos redefinido a energia de ponto zero (estado fundamental) como zero.

A expansão dos estados coerentes em termos dos autoestados de energia

$$|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = D(z)|0\rangle = e^{-|z|^2/2} e^{za^+}|0\rangle$$

$$\langle z|z\rangle = \langle 0| D(z)^+ D(z)|0\rangle = 1 . \quad (9)$$

mas

$$\langle z'|z\rangle = \langle 0| D^+(z') D(z)|0\rangle$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(|z|^2+|z'|^2)} \langle 0| e^{z'^* a} e^{za^+}|0\rangle$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(|z|^2+|z'|^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z'^* z)^n}{n!} = e^{-\frac{1}{2}(|z|^2+|z'|^2)} e^{z'^* z}$$

$$|\langle z'|z\rangle|^2 = e^{-|z-z'|^2} \quad (10)$$ ("distância" entre 2 estados coerentes)

não são ortogonais, eles formam um conjunto completo mas não ortogonais

A distribuição dos valores de n é uma lei de Poisson

$$p(n) = |\langle n|z\rangle|^2 = e^{-|z|^2} \frac{|z|^{2n}}{n!} \quad (11)$$

$$= \frac{E_0^n e^{-E_0}}{n!}$$

$$\bar{N} = \sum_n n p_n = e^{-E_0} E_0 \frac{d}{dE_0} \sum_n \frac{E_0^n}{n!} = E_0 = |z|^2$$

$$\cancel{\Delta N \equiv \langle N \rangle - \langle N \rangle^2 = \langle N(N-1) \rangle - \bar{N}^2}$$

$$(\Delta N)^2 \equiv \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \bar{N} = E_0$$

A completeza se estabelece

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \, |z\rangle\langle z| \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} dq_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \, D(z)|0\rangle\langle 0| D^\dagger(z)$$

$$\doteq \int dq_0 \, dp_0 \, e^{-|z|^2} e^{z a^\dagger} |0\rangle\langle 0| e^{z^* a}$$

$$= \int dq_0 \, dp_0 \, e^{-|z|^2} \sum_{n,m} \frac{z^n (z^*)^m}{\sqrt{n!\, m!}} |n\rangle\langle m|$$

$$z = q_0 + i p_0 = \rho e^{i\phi}$$

$$\int_0^\infty \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \, e^{-\rho^2} \sum_{n,m} \frac{(\rho)^{n+m} e^{i(n-m)\phi}}{\sqrt{n!\, m!}} |n\rangle\langle m| \quad (12)$$

em (12) a integral angular é nula se $n \neq m$, e usando

$$\boxed{\int_0^\infty da\, a^n e^{-a} = n!} \qquad \rho^2 = a \qquad 2\rho d\rho = da$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty da\, e^{-a}\, a^n / n! = 1/2$$

$$(12) \Rightarrow \sum_n \int_0^{2\pi} d\phi\, \frac{1}{2} |n\rangle\langle n| = \frac{2\pi}{2}\sum_n |n\rangle\langle n| = \pi$$

$$\frac{1}{\pi}\int d\mathrm{Re}z\, d\mathrm{Im}z\, |z\rangle\langle z| = \frac{1}{\pi}\int d^2z\, |z\rangle\langle z| \equiv \mathbb{I} \quad (13)$$

os estados coerentes não são L.I.

Vimos que a trajetória clássica do oscilador no plano $\{q(t), p(t)\}$ é determinado pelo valor inicial de $z = q_0 + i p_0 \in \mathbb{C}$: $z = |z| e^{i\theta}$ $|z| = \sqrt{E_0}$ está fixo pelo valor da energia do oscilador clássico. Qual a interpretação da fase de $z e^{-it} = |z| e^{i(\theta - \omega t')}$

$\phi(t') = \theta - \omega t'$, tomemos $\theta = 0$ p/ simplificar.

$z(t') = |z| e^{-i\omega t'}$ (colocando de volta as unidades)

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \left(\frac{a + a^+}{\sqrt{2}} \right) \qquad \hat{p} = \sqrt{m\omega\hbar}\, i \left(\frac{a^+ - a}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\langle z(t')|\hat{q}|z(t')\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle z(t')| a + a^+ |z(t')\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, 2 \,\mathrm{Re}\, z(t') = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} |z| \cos\omega t'$$

$$\langle z(t')|\hat{p}|z(t')\rangle = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\, i \langle z(t')| a^+ - a |z(t')\rangle$$

$$= -\sqrt{2\hbar\omega m}\, \mathrm{Im}\, z(t') = -\sqrt{2\hbar\omega m}\, |z| \,\mathrm{sen}\,\omega t'$$

os pontos $\{\langle \hat{q}(t)\rangle, \langle \hat{p}(t)\rangle\}$ descrevem uma elipse, se usarmos os operadores adimensionais $\tilde{q}$ e $\tilde{p}$:

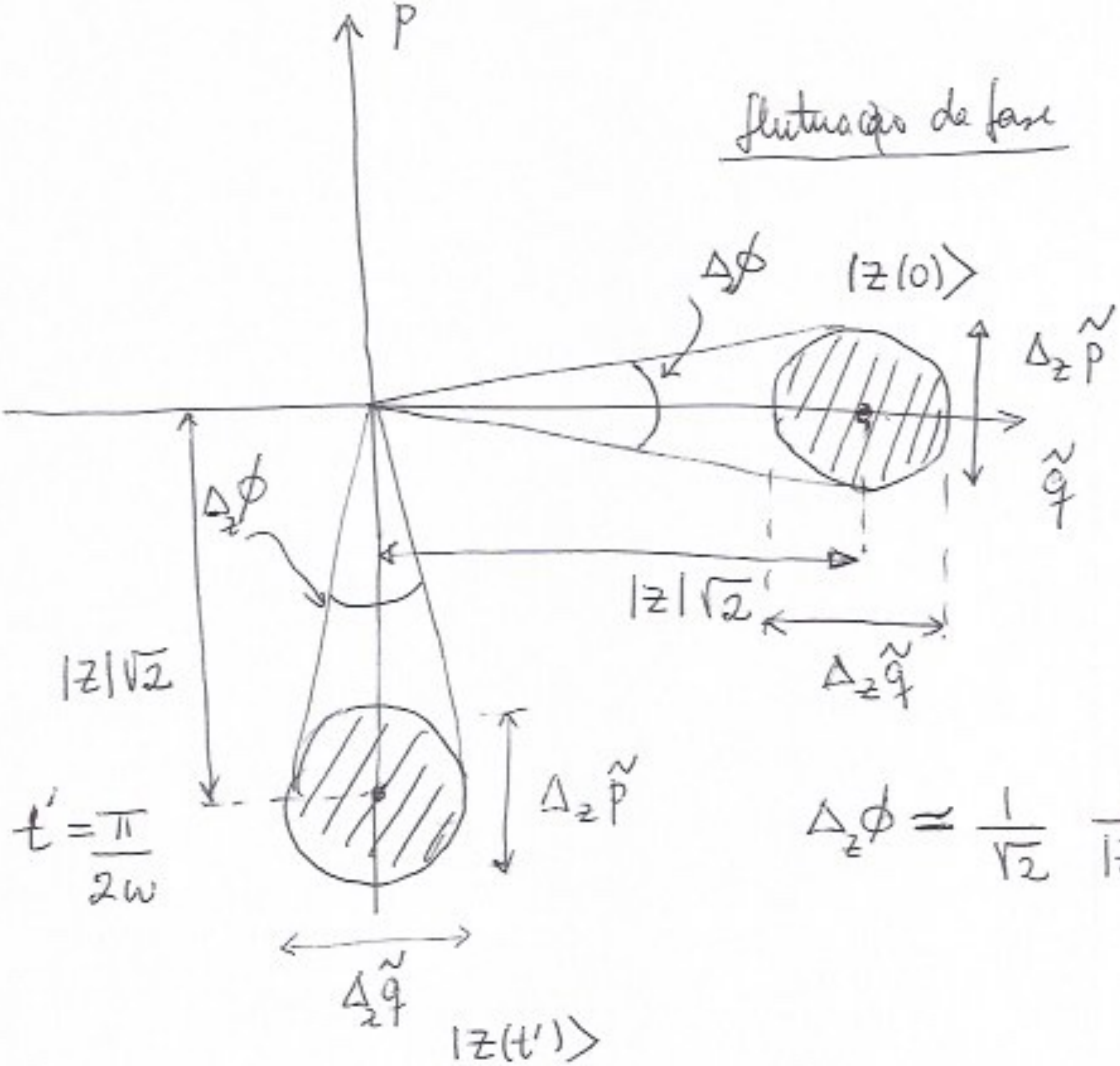
$$\langle \tilde{q}\rangle(t) = \sqrt{2}\, |z| \cos t'$$

$$\langle \tilde{p}\rangle(t) = -\sqrt{2}\, |z| \,\mathrm{sen}\, t$$

descrevem um círculo de raio $\sqrt{2}\,|z| = \sqrt{2 E_0}$ no plano $\{\hat{q}, \hat{p}\}$. É possível mostrar facilmente que

$$\Delta_z \tilde{q} = \Delta_z \tilde{p} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{(Mostre!)}$$

flutuação de fase



$$\Delta_z\phi \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{|z|\sqrt{2}} = \frac{1}{2|z|}$$

Vimos que p/ estados coerentes $\Delta_z N = |z|$ de maneira que

$$\Delta_z\phi\,\Delta_z N \simeq \frac{1}{2} \qquad \bar{N}_z = |z|^2 \;,\; \Delta_z N = \sqrt{\bar{N}_z}$$

$\tilde{p}$ e $\tilde{q}$ são chamados de operadores de quadratura.

Essas noções são importantes na quantização dos campos e.m. onde cada modo do campo poderá ser caracterizado por um número de ocupação n, # de fótons em cada modo

$$|n_{\vec{k}_1}, n_{\vec{k}_2}, \ldots\rangle = |n_{\vec{k}_1}\rangle \otimes |n_{\vec{k}_2}\rangle \otimes \ldots$$

espaço de Fock $\quad\uparrow$ auto-estados de energia e do operador de número

(e) Movimento em Campo Magnético

Considere uma partícula carregada em um campo magnético uniforme e estático.

(i) equação de movimento e espectro de energia

e = carga da partícula

m = massa da partícula.

$\vec{A}$ potencial vetor associado ao campo $\vec{B}$, $\vec{A}(\vec{q})$

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 \quad (1)$$ é o Hamiltoniano do sistema

$$\vec{v} = \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)/m \quad (2)$$ $\vec{p}$ é o momento canônico.

usando

$$i\hbar \frac{d}{dt} q_j(t) = i\hbar v_j(t) = [q_j(t), H] \qquad \text{Eq. de Heisenberg.}$$

$$= \left[q_j(t), \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{2mc}\vec{p}.\vec{A} - \frac{e}{2mc}\vec{A}.\vec{p}\right]$$

$$= \frac{1}{2m}[q_j(t), \vec{p}^2] - \frac{e}{2mc}[q_j(t), \vec{p}.\vec{A}] - \frac{e}{2mc}[q_j(t), \vec{A}.\vec{p}]$$

$$= i\hbar\frac{p_j}{m} - \frac{e}{2mc}[q_j(t), p_i]A_i - \frac{e A_i}{2mc}[q_j(t), p_i]$$

$$= i\hbar\frac{p_j}{m} - \frac{i\hbar e}{2mc}\delta_{ji}A_i - \frac{i\hbar e}{2mc}\delta_{ji}A_i$$

$$= i\hbar\left[\frac{p_j}{m} - \frac{e}{mc}A_j\right] \qquad [q, p^n] = i n\hbar\, p^{n-1}$$

$\therefore \ \vec{v} = \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)/m$

$$\Longrightarrow \ H = \frac{1}{2} m \, |\vec{v}|^2 \quad (3) \quad \left(\begin{array}{c}\text{Invariante de}\\ \text{gauge}\end{array}\right)$$

<u>cuidado</u>: essa não é a energia de uma partícula livre!

$$[v_i, v_j] = \frac{1}{m^2} \left[p_i - \frac{e}{c}A_i, \, p_j - \frac{e}{c}A_j\right]$$

$$= \frac{-e}{m^2 c} [p_i, A_j] - \frac{e}{m^2 c}[A_i, p_j]$$

$$= \frac{-e}{m^2 c}\left(-i\hbar \frac{\partial A_j}{\partial q_i}\right) - \frac{e}{m^2 c}\left(i\hbar \frac{\partial A_i}{\partial q_j}\right)$$

$$= \frac{i e\hbar}{m^2 c}\left(\frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_j}\right) = \frac{i e \hbar}{m^2 c} \ \varepsilon_{ijk} B_k \quad (4)$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{invariante de}\\ \text{gauge}\end{array}\right)$$

onde usamos:

$$[p, F(q)] = -i\hbar \frac{\partial F(q)}{\partial q}$$

$$\varepsilon_{ijk} B_k = \varepsilon_{ijk}\left(\varepsilon_{k\ell m} \, \partial_\ell A_m\right) = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{\ell m k} \, \partial_\ell A_m$$

$$= (\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}) \, \partial_\ell A_m$$

$$= \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

A equação de movimento

$$i\hbar\, \dot{\vec{v}}(t) = [\vec{v}, H] \Rightarrow i\hbar \frac{dv_j}{dt} = \left[v_j, \frac{m}{2} v_k v_k\right]$$

$$= \frac{m}{2}\left\{ v_k [v_j, v_k] + [v_j, v_k] v_k \right\}$$

$$= \frac{m}{2}\left\{ \frac{ie\hbar}{m^2 c} \epsilon_{jkl}\, v_k B_l + \frac{ie\hbar}{m^2 c} \epsilon_{jkl} B_l v_k \right\}$$

$$\dot{v}_j(t) = \left\{ \frac{e}{2mc} (\vec{v}\times\vec{B})_j - \frac{e}{2mc} (\vec{B}\times\vec{v})_j \right\}$$

$$\therefore\ \dot{\vec{v}}(t) = \frac{e}{2mc} \left(\vec{v}\times\vec{B} - \vec{B}\times\vec{v}\right) \quad (5)$$

$$[B_j, v_k] = \left[B_j, \frac{p_k}{m}\right] - \frac{e}{mc} \cancelto{0}{[B_j, A_k]}$$

$$= \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial B_j}{\partial q_k} \quad (6)$$

a equação de movimento geral é

termo ausente no e.m. clássico

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{mc}\, \vec{v}\times\vec{B} + \frac{ie\hbar}{2m^2 c}\, \vec{\nabla}\times\vec{B}} \quad (7)$$

* Consideremos agora $\vec{B} = (0,0,B)$, $B > 0$

$$[v_x, v_y] = \frac{i e \hbar}{m^2 c} B$$ é o único comutador não nulo.

$$H = \frac{1}{2} m \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \right) \qquad v_z = \frac{p_z}{m} \qquad [v_x, v_z] = [v_y, v_z] = 0$$

$\Rightarrow$ o momento paralelo a $\vec{B}$ é uma constante de movimento, como no caso clássico. O movimento ao longo de $\vec{B}$ é simplesmente o de uma partícula livre. Assim só vamos nos preocupar com o que acontece no plano $xy \perp \vec{B}$ para o qual

$$H = \frac{1}{2} m \left(v_x^2 + v_y^2 \right)$$

$$[v_x, v_y] \neq 0 \qquad [v_x, H] \neq 0 \qquad [v_y, H] \neq 0$$

mas $[v_x, v_y] \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ o movimento no plano $\perp \vec{B}$ é o de um oscilador harmônico!

<u>Def</u>: $$a \equiv \sqrt{\frac{m}{2\hbar \omega_c}} \left(v_x + i v_y \right) \qquad \omega_c \equiv \frac{eB}{mc}$$

freqüência ciclotron

$$a^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m}{2\hbar w_c}}\,(v_x - i v_y) \qquad [v_x, v_y] = i\hbar \frac{w_c}{m}$$

$$[a, a^\dagger] = \frac{m}{2\hbar w_c}[v_x + i v_y, v_x - i v_y] = \frac{m}{2\hbar w_c}[v_x, v_y](-2i)$$

$$= 1.$$

$$\boxed{H = \hbar w_c\,(a^\dagger a + 1/2)}$$ p/ o movimento no plano $\perp \vec{B}$

Conhecemos as soluções p/ o espectro

$E_n = \hbar w_c\,(\frac{1}{2} + n) \quad n = 0, 1, 2, \ldots$ __níveis de Landau__

p/ um eletron $e = -|e| < 0$

Podemos estimar a velocidade característica do estado de energia E_n

$$(v/c) \sim 5 \times 10^{-10} \left(\frac{B}{T}\right) n$$

tipicamente não relativísticas.

Quando B é uniforme a equação de movimento se simplifica

$\dot{v}_x = \omega_c \, v_y \qquad\qquad \dot{v}_y = -\omega_c v_x$

a solução é a mesma que para o caso clássico. Se $e>0$ temos um movimento circular horário com freqüência angular ω_c ($e<0$ o mov. é anti horário)

$$\begin{cases} x(t) = x_0 - \dfrac{1}{\omega_c} v_y(t) \\ y(t) = y_0 + \dfrac{1}{\omega_c} v_x(t) \end{cases}$$

são operadores!

$$x_0 = x(t) + \frac{1}{\omega_c} v_y(t) \qquad [x_0, y_0] = -i\, l_B^2 \quad \text{(Mostre!)}$$

$$y_0 = y(t) - \frac{1}{\omega_c} v_x(t) \qquad l_B \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}}$$

$$v_x(t) = \frac{1}{i\hbar}[x(t), H]$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\left\{ [x_0, H] - \frac{1}{\omega_c}[v_y(t), H] \right\}$$

$$\left[v_y(t), \tfrac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2)\right] = \tfrac{1}{2}m\left[v_y(t), v_x^2\right] = -i\hbar\, \omega_c\, v_x(t)$$

$\therefore\ [x_0, H] = 0$ de forma análoga $[y_0, H] = 0$

são const. de movimento!

x_0 e y_0 são const. de movimento

mas como não comutam, só uma delas pode ser diagonalizada simultaneamente com H

$$R^2 \equiv [x(t) - x_0]^2 + [y(t) - y_0]^2 = \frac{2}{m\omega_c^2} H$$

o raio da órbita é proporcional à energia

$$R^2 |E_n) = \frac{2}{m\omega_c^2} H |E_n) = \frac{2}{m\omega_c^2} \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) |E_n)$$

$$= \frac{(2n+1)\frac{\hbar}{\hbar} mc}{m|e|B} |E_n) \qquad (r^2)_n = (2n+1)\frac{\hbar c}{|e|B} = (2n+1)\, l_B^2$$

os raios dos estados estacionários cresce com $\sqrt{n}$

Como veremos os níveis de Landau são infinitamente degenerados. Para especificar os estados de forma única precisamos de outro número quântico além da energia.