



Terceiro bloco

Sistemas de muitos corpos

- Conteúdo:
1. Dinâmica de muitos corpos
 2. Sistemas de massa variável
 3. Colisões Unidimensionais
 4. Colisões Bidimensionais
 5. Bônus

Oscar Éboli (eboli@if.usp.br)

Dinâmica de muitos corpos

primeira aula

Oscar Éboli 15 de abril de 2020

- Pontos são aproximações! Na natureza há muitos sistemas complexos!



Galáxias são formadas por estrelas + ...

Como se movem as galáxias no Universo?

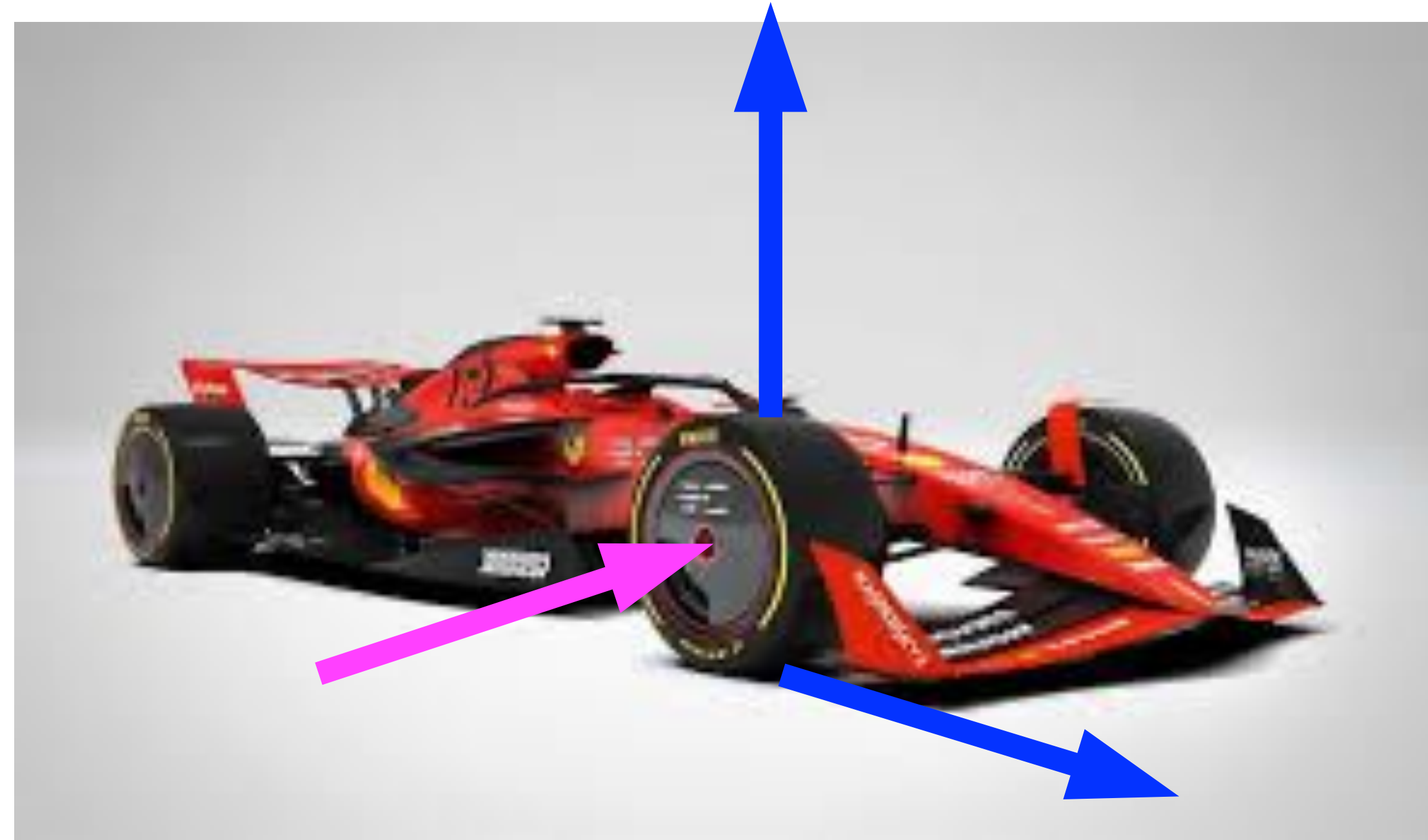


- Dependendo da escala que olhamos



carro de fórmula 1 pode ser tratado como um ponto

- mas os carros tem várias partes
- como relacionar o movimento do ponto com a descrição mais detalhada?



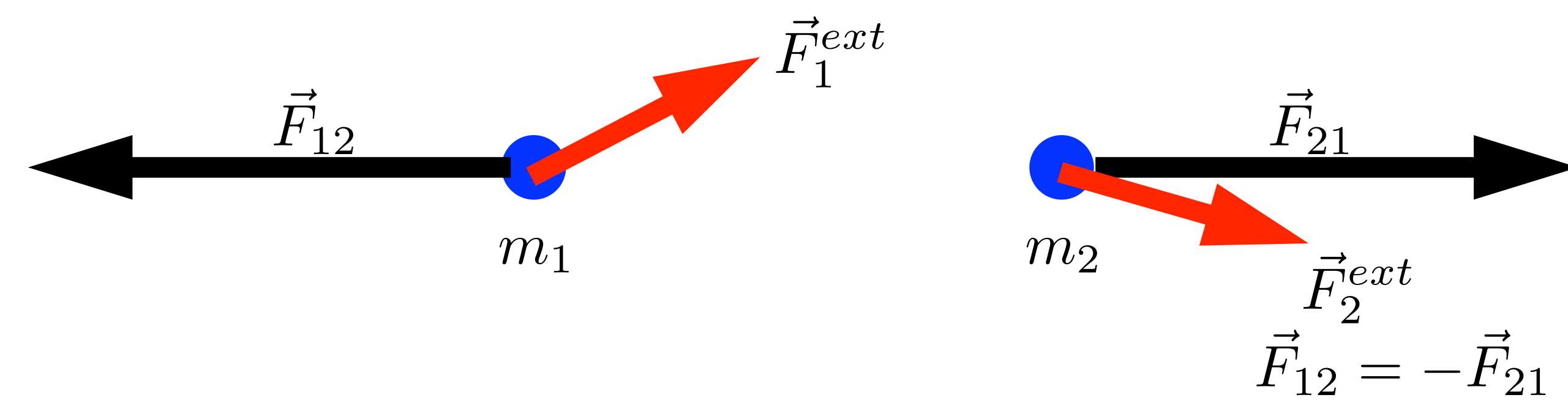
- Como as forças sobre constituintes se combinam?
- O que é o ponto que vemos de longe?
- O que é relevante?

Objetivos desta aula:

1. Centro de massa
2. Coordenadas relativas
3. Conservação do momento linear

1. Centro de massa

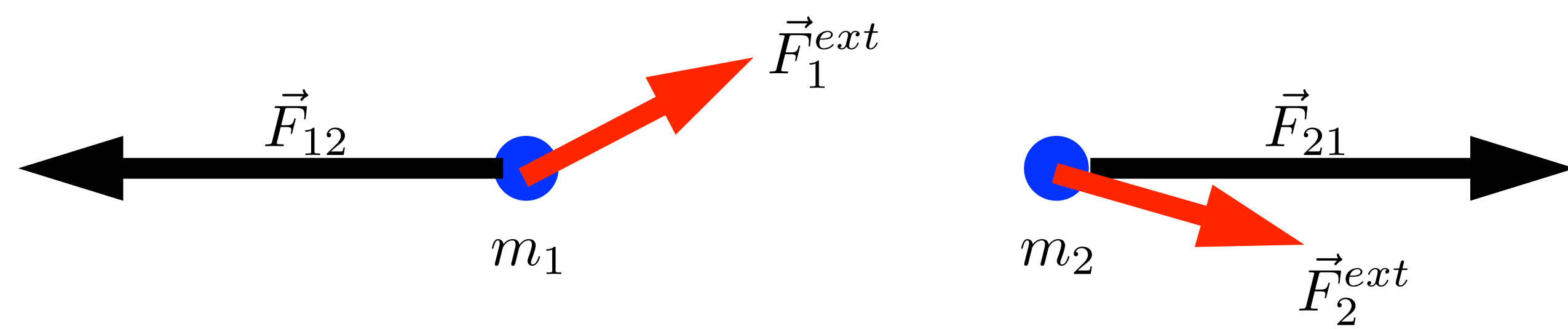
Aquecimento com 2 partículas



white board 1, 2 e 3

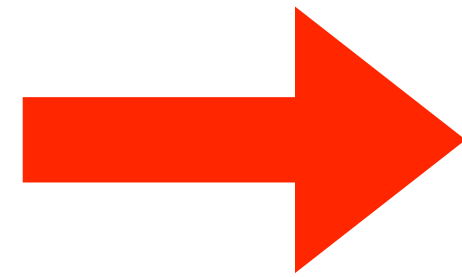
1. Centro de massa

1.a Aquecimento com 2 partículas



$$m_1 \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12}$$

$$m_1 \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}$$



$$m_2 \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{21}$$

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2} \right) = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}$$

massa total

Definimos o **centro de massa** por:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2}$$

e

$$M = m_1 + m_2$$

Então

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}$$

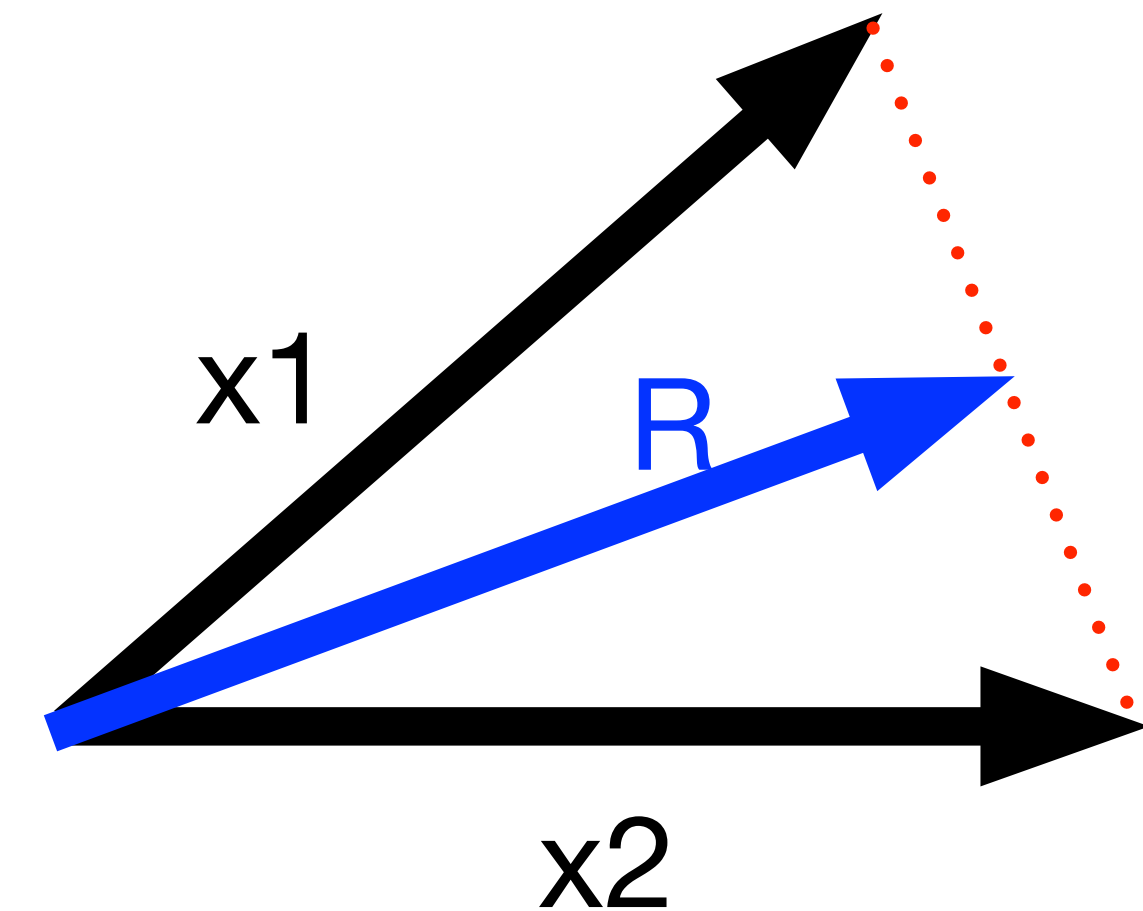
$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = \frac{1}{M} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$$

Logo, o momento do centro de massa é

$$\vec{P}_{CM} = M \vec{v}_{CM} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

Discussão

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{x}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{x}_2 \\ &= \frac{m_1 + \textcolor{red}{m_2} - \textcolor{red}{m_2}}{m_1 + m_2} \vec{x}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{x}_2 \\ &= \vec{x}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)\end{aligned}$$



O CM está entre as duas massas

para $m_1 \gg m_2 \implies \vec{R} \simeq \vec{x}_1 + \frac{m_2}{m_1} (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$

$$m_1 = m_2 \implies \vec{R} \simeq \vec{x}_1 + \frac{1}{2} (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$$

1.b N corporos: white board 4 e 5

1.b N corpos:

$$m_1 \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \cdots + \vec{F}_{1N}$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \cdots + \vec{F}_{2N}$$

.....

$$m_N \frac{d^2 \vec{x}_N}{dt^2} = \vec{F}_N^{ext} + \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \cdots + \vec{F}_{N(N-1)}$$

Introduzimos a notação:

$$m_k \frac{d^2 \vec{x}_k}{dt^2} = \vec{F}_k^{ext} + \sum_{j \neq k} \vec{F}_{kj} \text{ para } k = 1, 2 \dots N$$

agora somamos todas as equações

$$\sum_k m_k \frac{d^2 \vec{x}_k}{dt^2} = \sum_k \vec{F}_k^{ext} + \sum_k \sum_{j \neq k} \vec{F}_{kj}$$

o último termo é nulo pela terceira lei de Newton:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_k m_k \vec{x}_k \right) = \sum_k \vec{F}_k^{ext}$$

definindo $M = \sum_k m_k$

$$M \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\sum_k m_k \vec{x}_k}{M} \right) = \sum_k \vec{F}_k^{ext}$$

O centro de massa é $\vec{R} \equiv \frac{\sum_k m_k \vec{x}_k}{M} \implies M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \sum_k \vec{F}_k^{ext} = \vec{F}_{total}^{ext}$

Note que

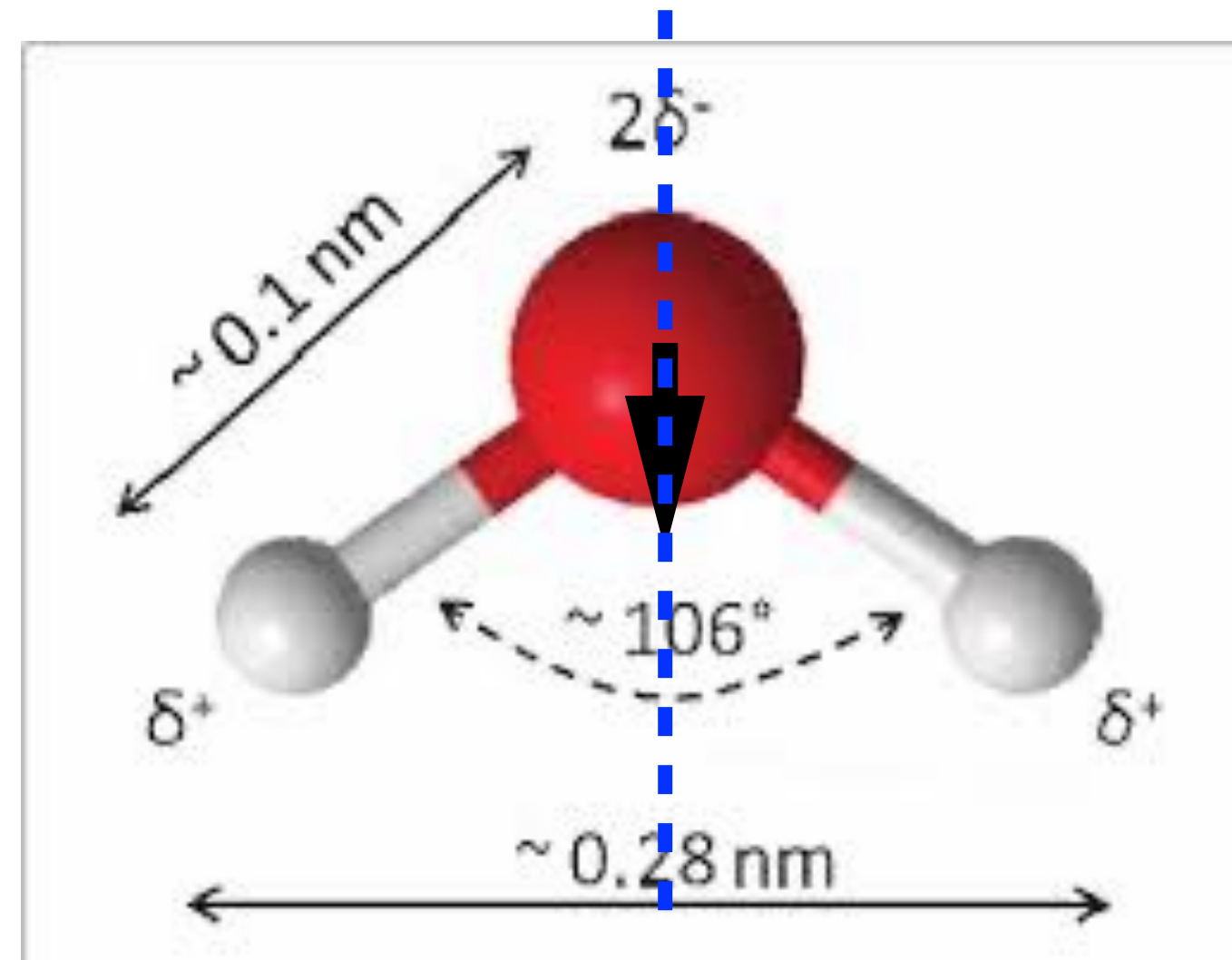
$$\begin{aligned}\vec{v}_{CM} &= \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_k m_k \vec{x}_k}{M} \right) \\ &= \frac{1}{M} \left(\sum_k m_k \vec{v}_k \right) = \frac{1}{M} \sum_k \vec{p}_k\end{aligned}$$

logo

$$\vec{P}_{CM} \equiv M \vec{v}_{CM} = \sum_k \vec{p}_k$$

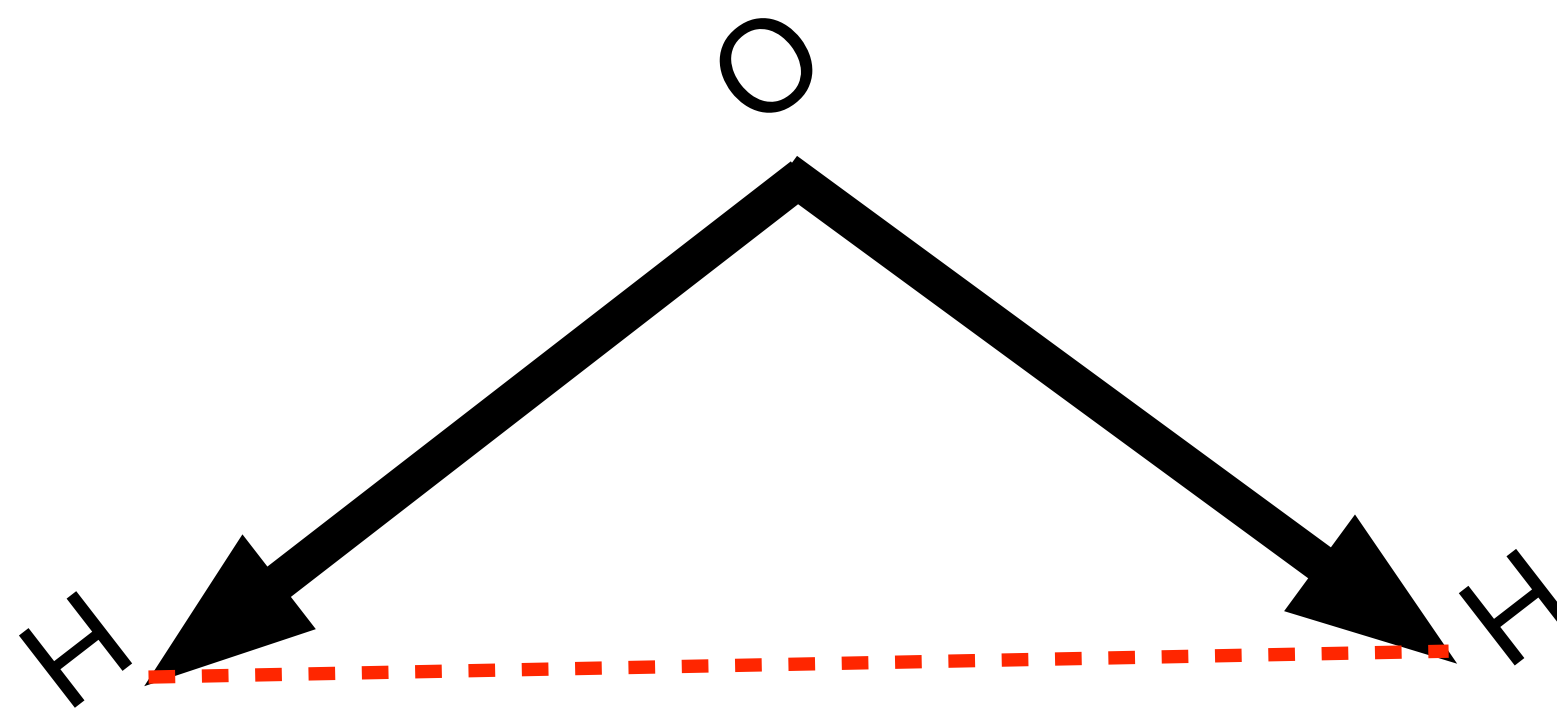
Exemplo 1: molécula d'água

Molécula é simétrica por
reflexão com respeito à linha
azul



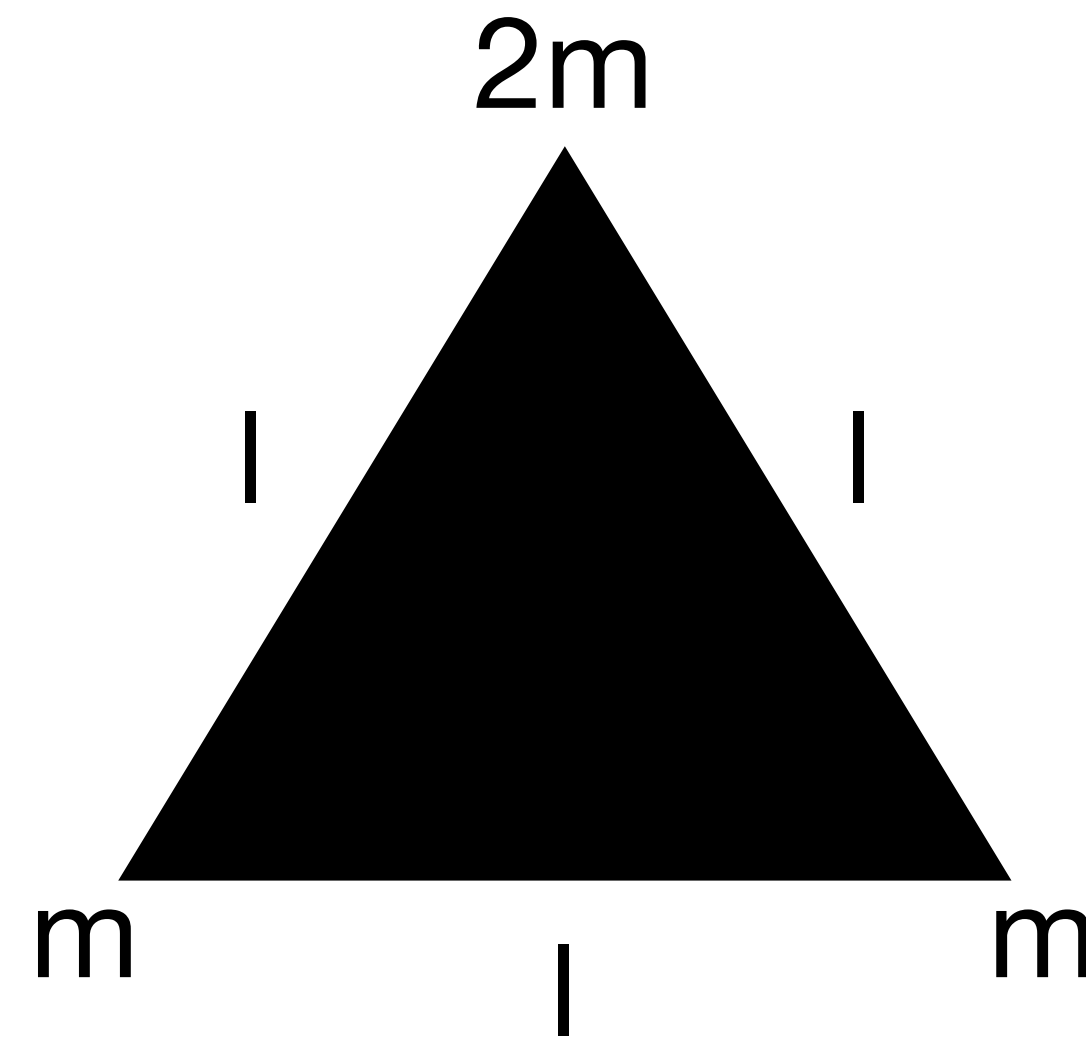
CM sobre a linha azul

origem no oxigênio



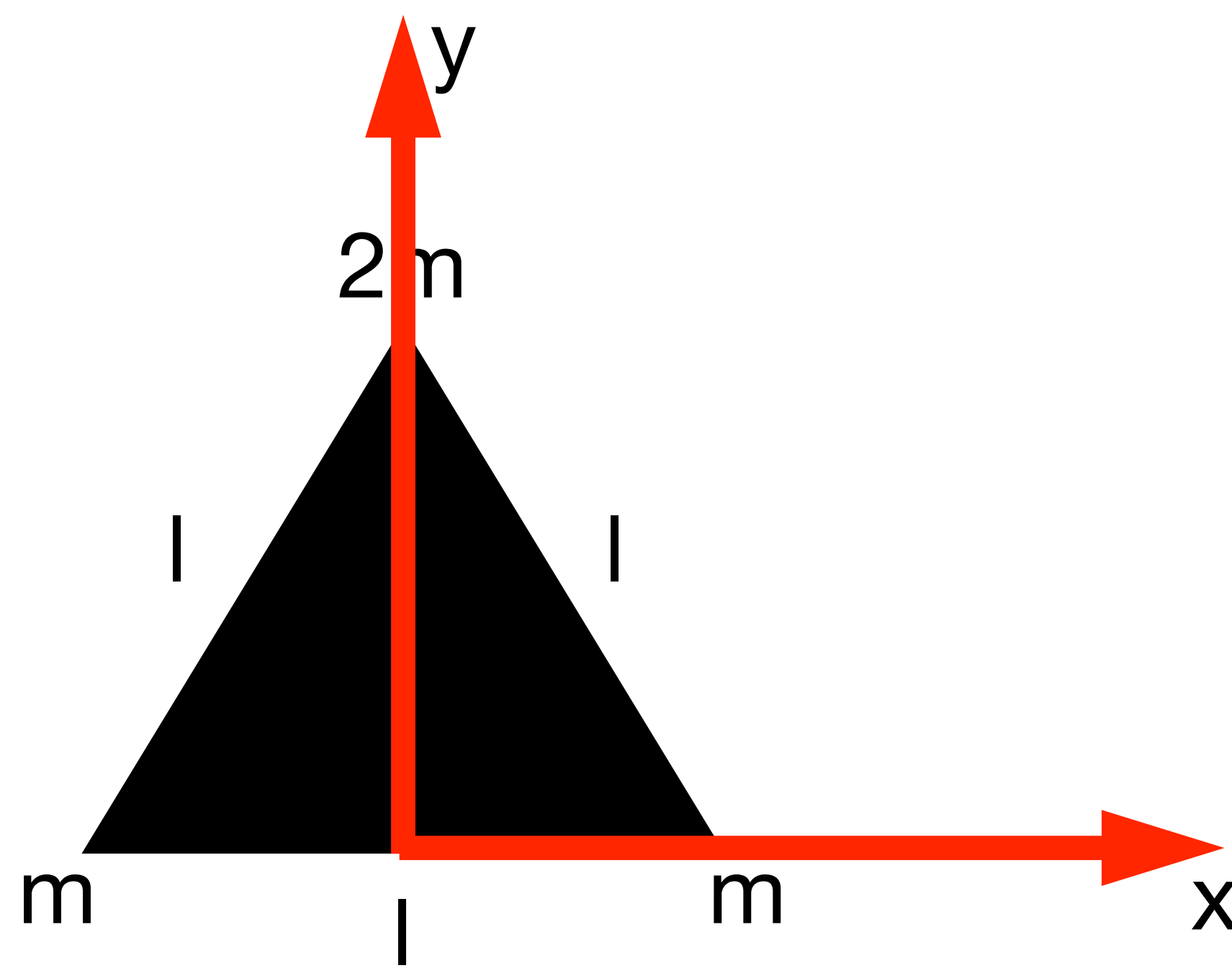
$$\vec{R} = \frac{1}{18} (\vec{x}_{H,1} + \vec{x}_{H,2})$$

Exemplo 2:



Escolhemos os eixos para explorar a simetria do problema

Exemplo 2



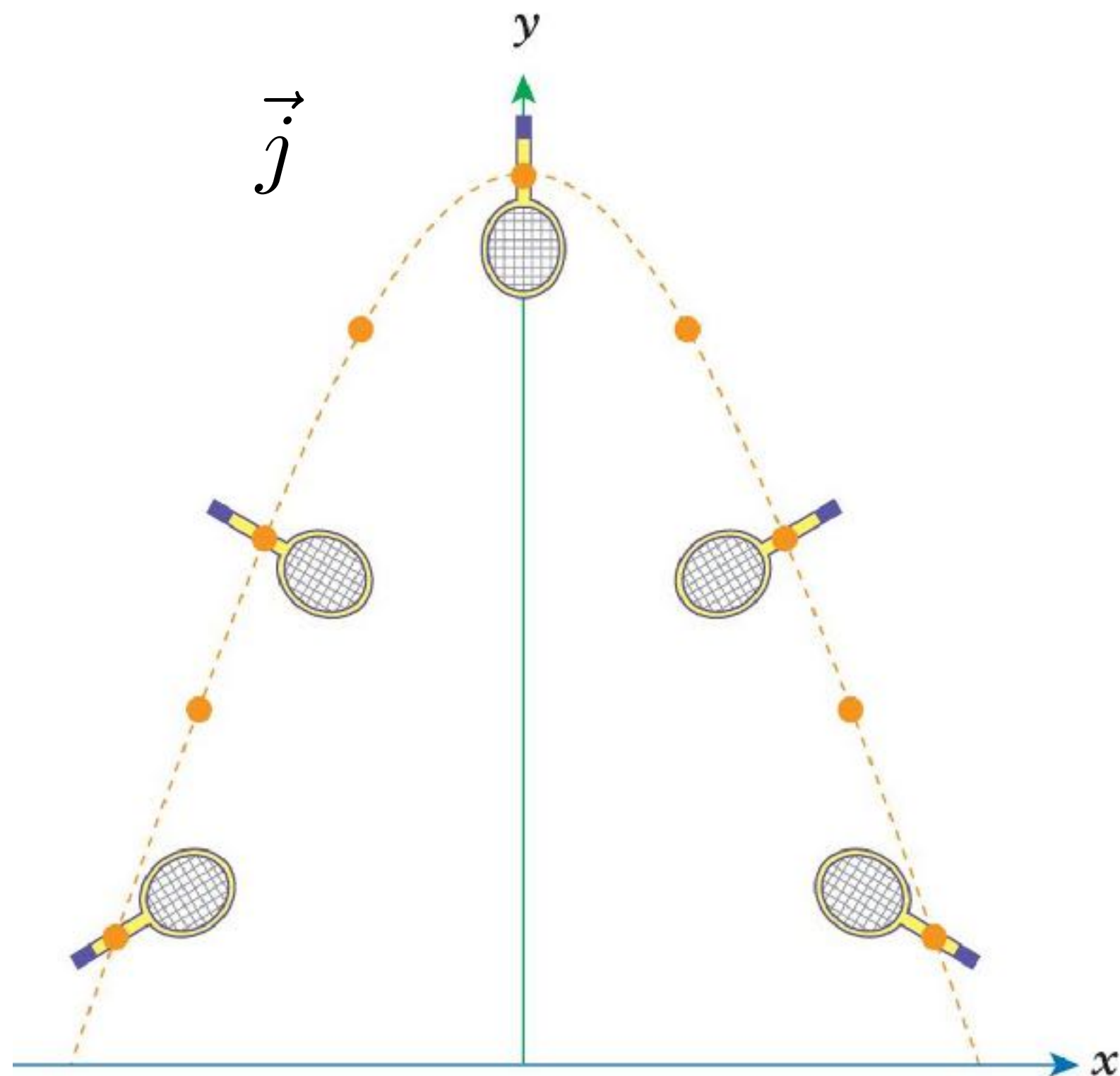
$$\vec{R} = \frac{m\vec{x}_1 + m\vec{x}_2 + 2m\vec{x}_3}{m + m + 2m}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{l}{2}(-\vec{i}) + \frac{l}{2}\vec{i} + 2 \frac{\sqrt{3}}{2}l\vec{j} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} l \vec{j}$$

Exemplo 3: raquete de tenis

Equação do movimento to centro de massa:



$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = -Mg\vec{j}$$

solução é uma parábola



Vejamos isso na vida real https://www.youtube.com/watch?v=_DzgPB9646k

Exemplo 4: Salto em altura olímpico!

- Física deu a medalha de ouro de 1968 a Fosbury!
- Novamente

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = -M g \vec{j}$$



https://www.ted.com/talks/asaf_bar_yosef_an_athlete_uses_physics_to_shatter_world_records#t-78200

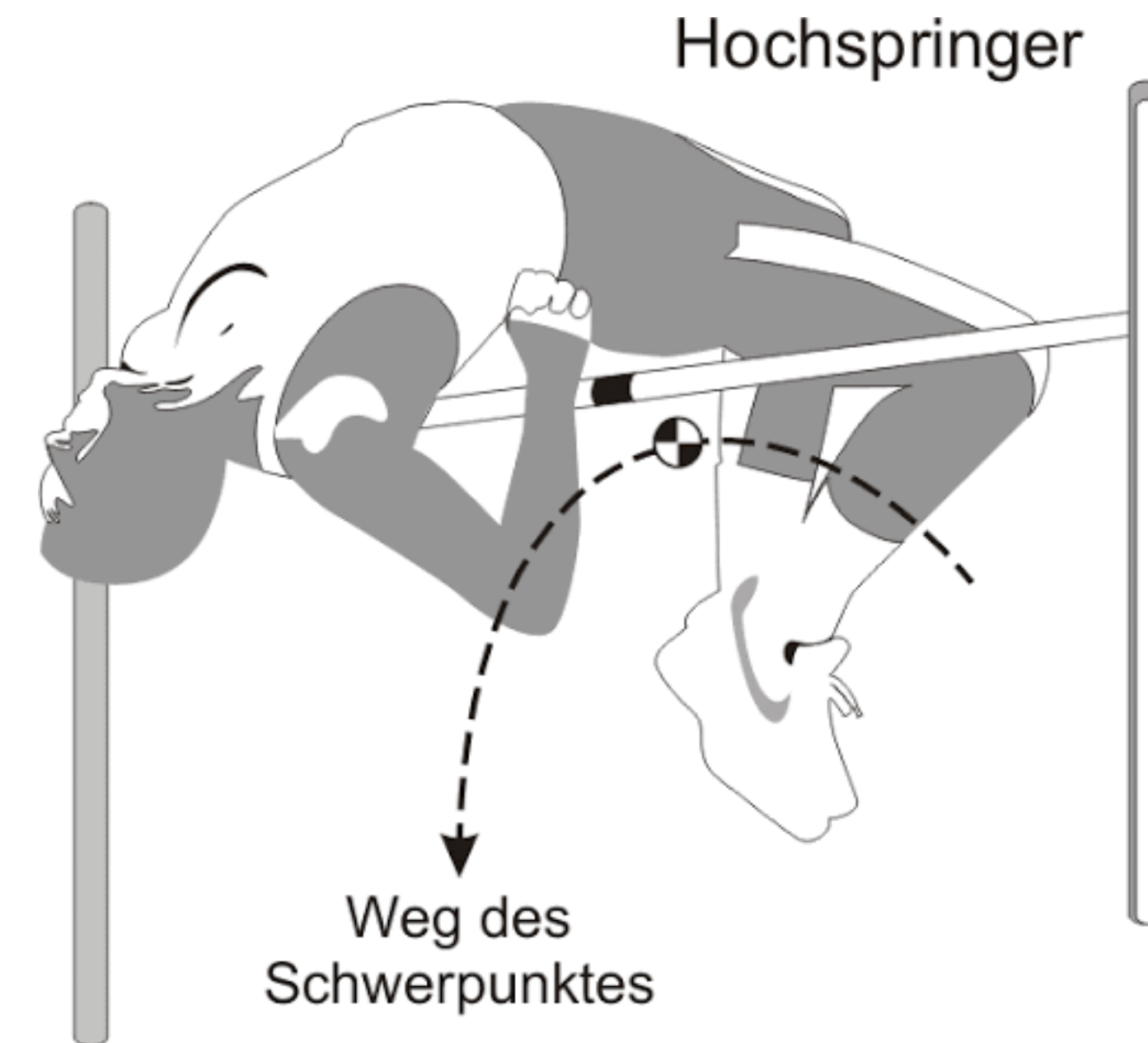
Exemplo 4: Salto em altura olímpico!

- Física deu a medalha de ouro de 1968 a Fosbury!
- Novamente

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = -Mg\vec{j}$$



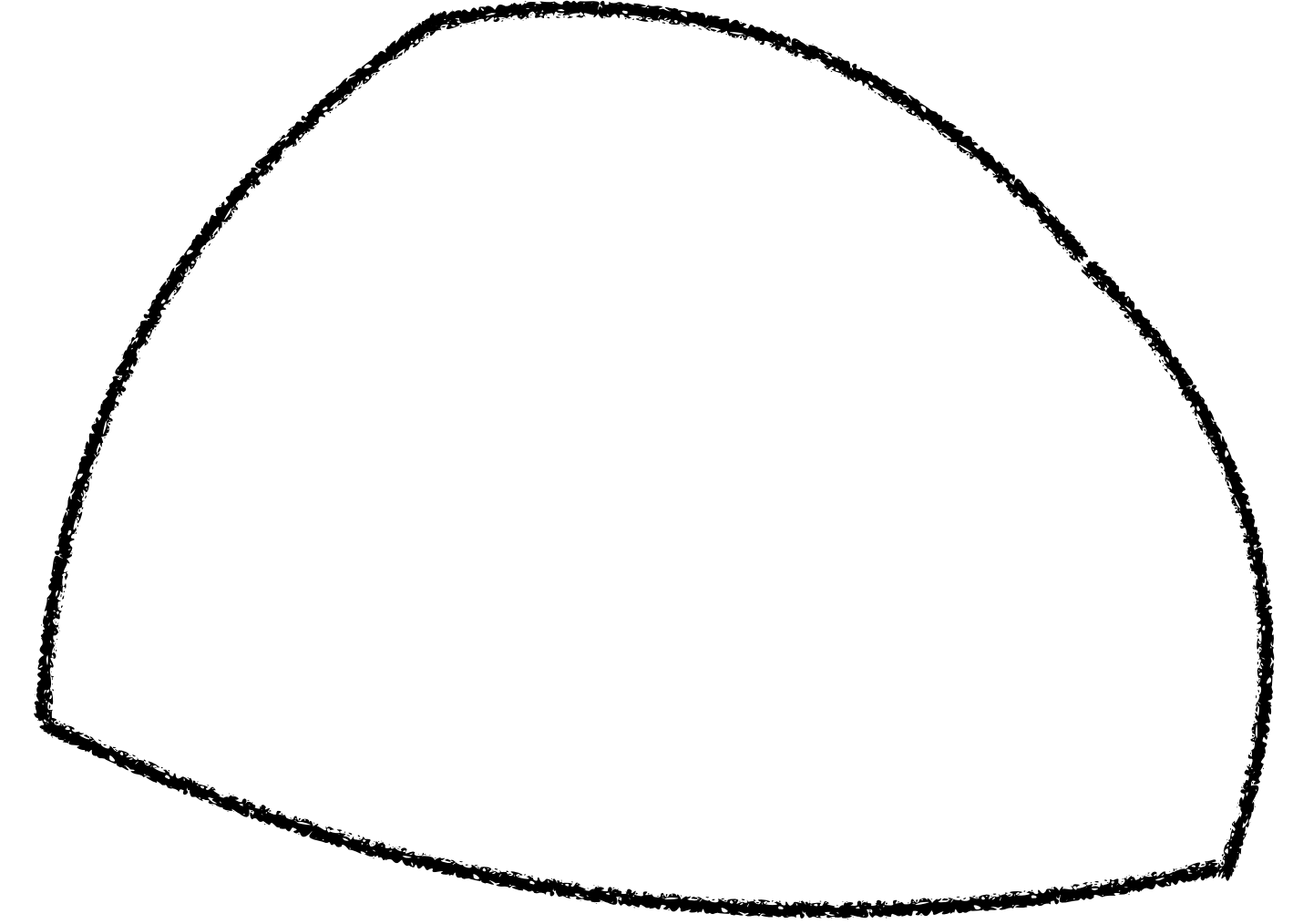
Truque: CM está abaixo da barra



https://www.ted.com/talks/asaf_bar_yosef_an_athlete_uses_physics_to_shatter_world_records#t-78200

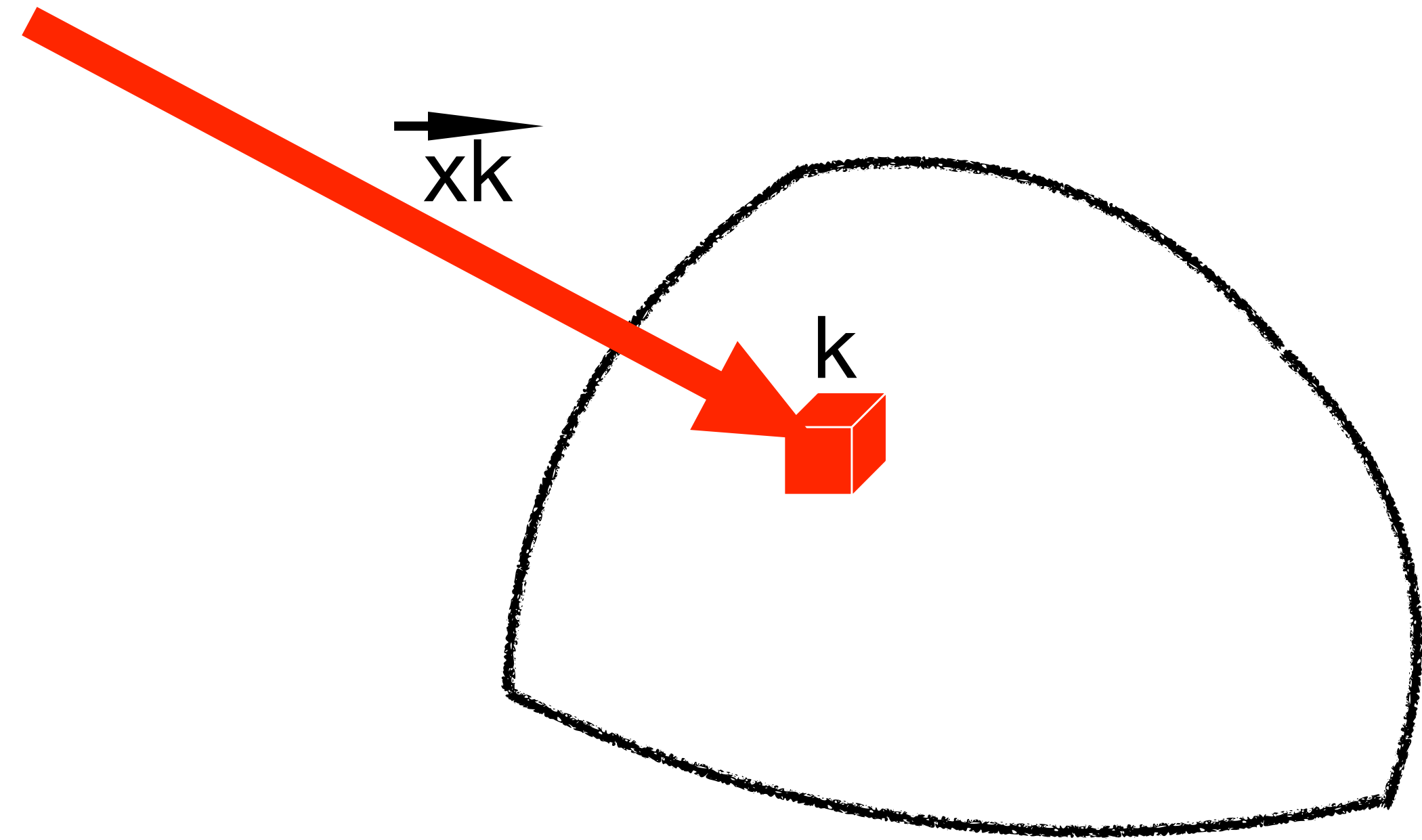
1.c Distribuição contínua da matéria:

white board 6 e 7



1.c Distribuição contínua da matéria:

- Divido o espaço em volumes pequenos
- Somo sobre todos volumes
- Tomo o limite do volume indo a zero



$$\vec{R} = \frac{\sum_k m_k \vec{x}_k}{M} \simeq \frac{1}{M} \sum_v dm_k \vec{x}_k \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = \frac{1}{M} \int dm \vec{x}$$

ou ainda usando que $dm = dV \rho$

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int dV \rho(\vec{x}) \vec{x}$$

Exemplo: quadrado com distribuição de massa uniforme

- Por simetria este está no centro no quadrado!

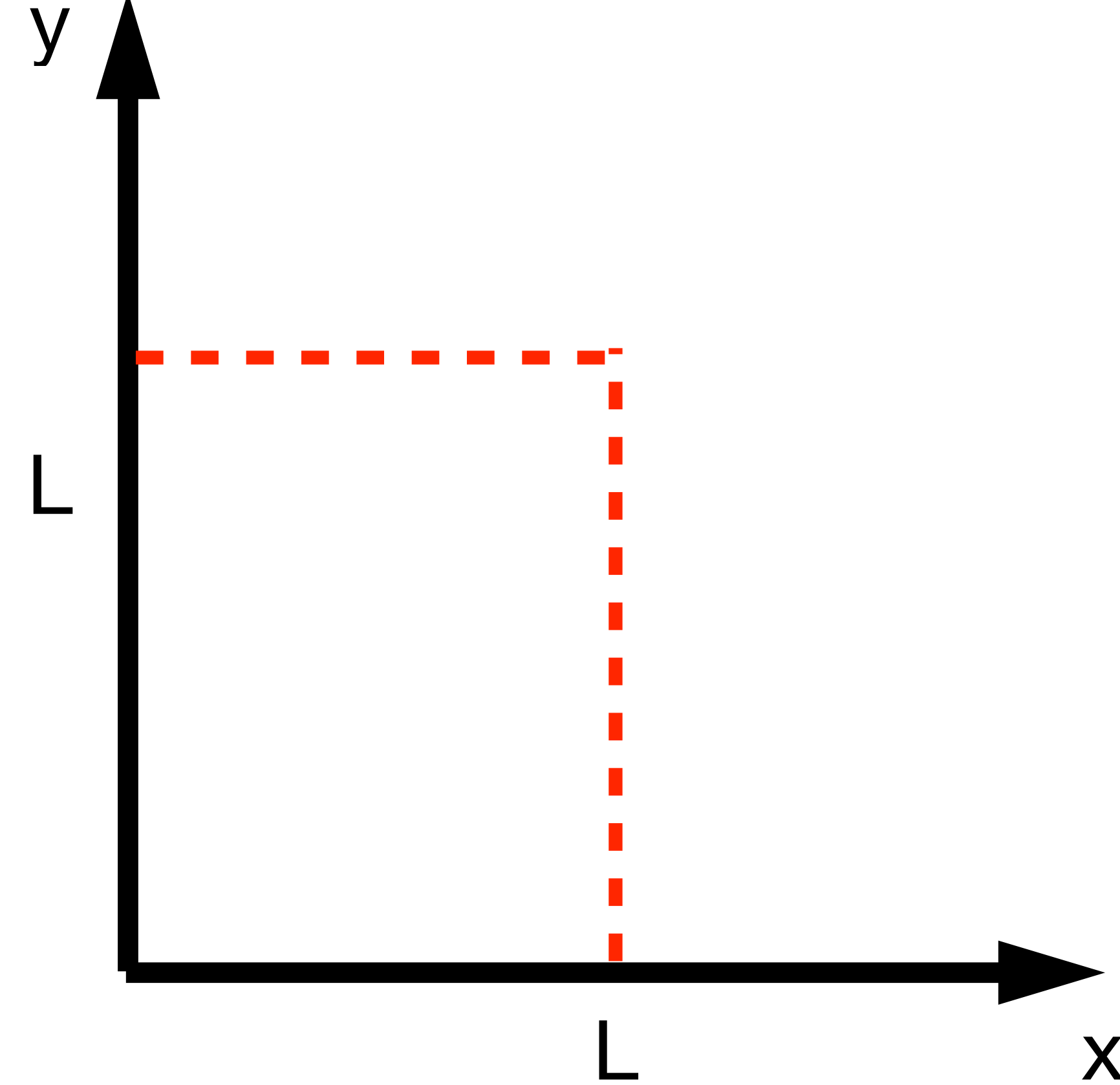
$$dm = \sigma dx dy$$

$$M = \int dm = \int_0^L dx \int_0^L dy \sigma = \sigma L^2$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \int dm \vec{x} &= \int_0^L dx \int_0^L dy \sigma (x\vec{i} + y\vec{j}) \\ &= \sigma \left(\int_0^L dy \int_0^L dx x\vec{i} + \int_0^L dx \int_0^L dy y\vec{j} \right) \\ &= \sigma \frac{L^3}{2} (\vec{i} + \vec{j}) \end{aligned}$$

$$\text{Logo } \vec{R} = \frac{L}{2} (\vec{i} + \vec{j})$$



2. Coordenadas relativas

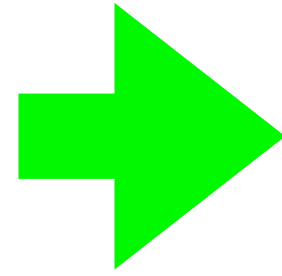
white boards 8, 9, 10

2. Coordenadas relativas

2.a Duas partículas

$$\vec{x}'_1 \equiv \vec{x}_1 - \vec{R}$$

$$\vec{x}'_2 \equiv \vec{x}_2 - \vec{R}$$

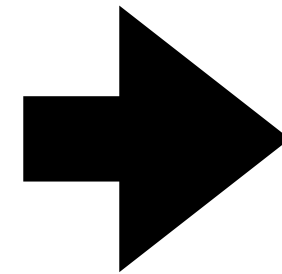


$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM}$$

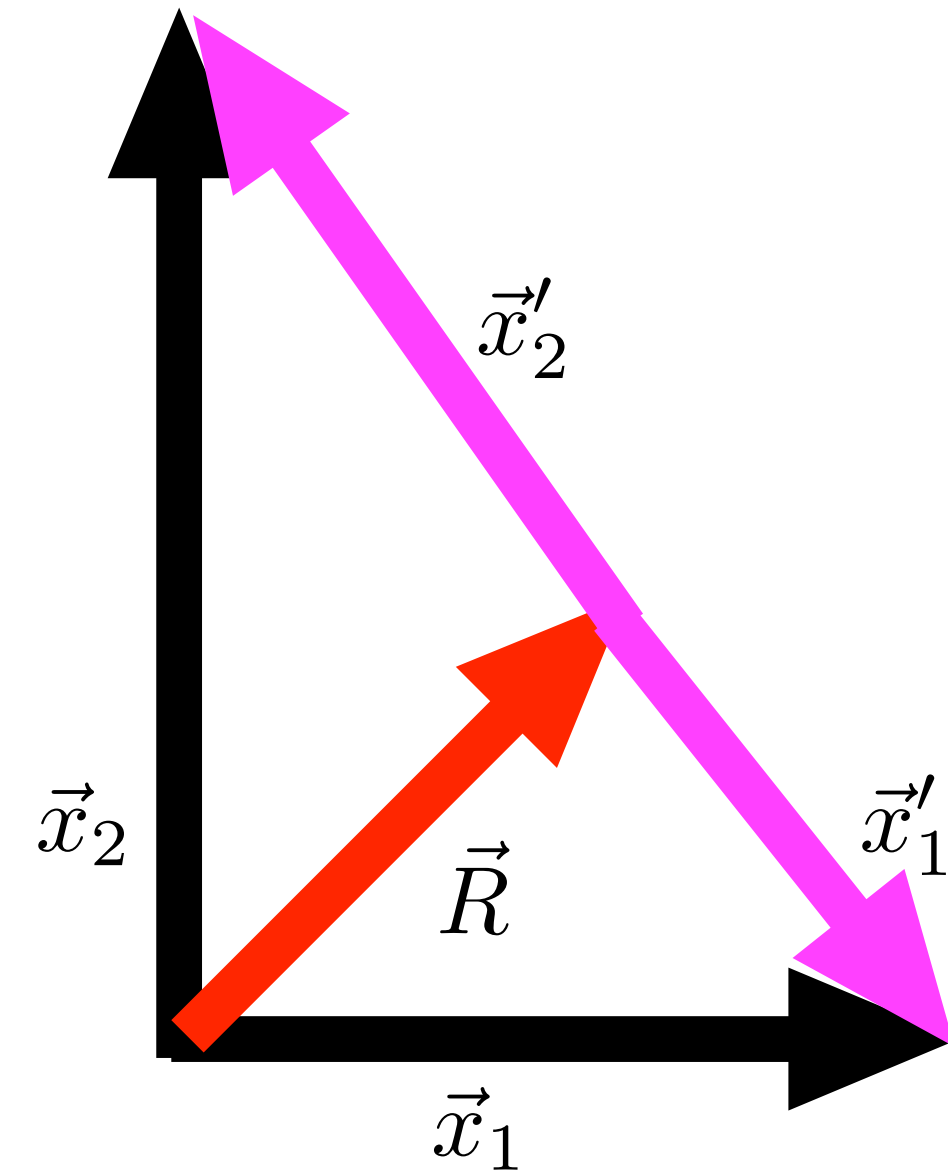
$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM}$$

$$\vec{p}'_1 = m_1 \vec{v}'_1$$

$$\vec{p}'_2 = m_2 \vec{v}'_2$$



$$\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = 0$$



No referencial do centro de massa

$$\vec{R}' = 0 \implies m_1 x'_1 + m_2 x'_2 = 0 \implies \vec{x}'_1 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{x}'_2$$

e também

$$\vec{v}' = -\frac{m_2}{m_1} \vec{v}'_2$$

Particular de 2 partículas: na ausência de forças externas

$$m_1 \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = \frac{1}{m_1} \vec{F}_{12}$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = \frac{1}{m_2} \vec{F}_{21}$$

Subtraindo as duas equações temos

$$\frac{d^2}{dt^2} (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \frac{1}{m_1} \vec{F}_{12} - \frac{1}{m_2} \vec{F}_{21} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12}$$

Definimos a massa reduzida e a coordenada:

$$\frac{1}{\mu} \equiv \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

$$\vec{r} \equiv \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{x}'_1 - \vec{x}'_2$$

tal que $\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{12}$ para $\vec{F}_{12}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$ temos $\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{12}(\vec{r})$

2.b N partículas:

Com respeito ao CM

$$\vec{x}'_j = \vec{x}_j - \vec{R} \implies \vec{v}'_j = \vec{v}_j - \vec{v}_{CM}$$

$$\vec{p}'_j = m_j \vec{v}'_j$$

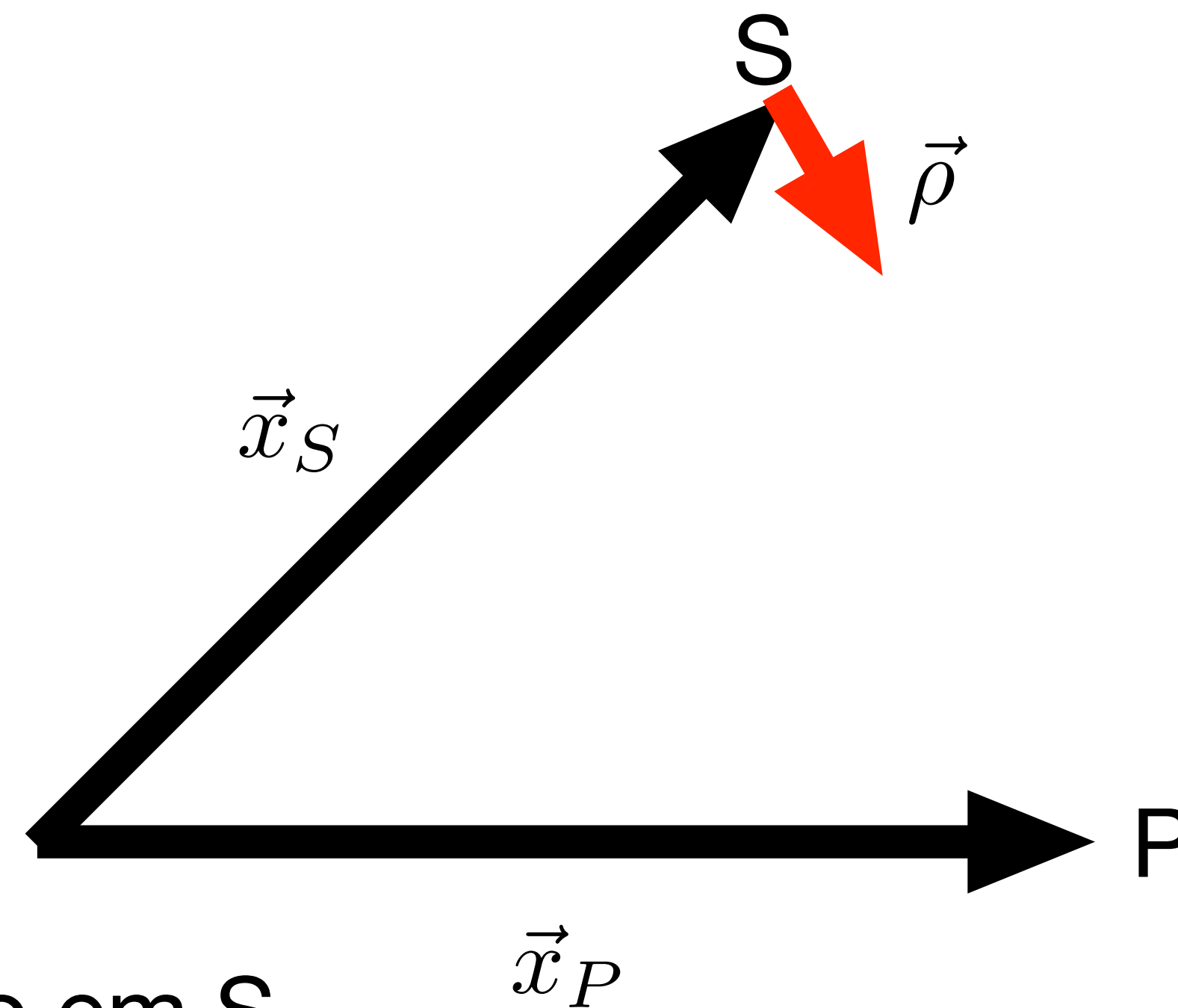
$$\begin{aligned} \sum_j \vec{p}'_j &= \sum_j m_j (\vec{v}_j - \vec{v}_{CM}) \\ &= \sum_j \vec{p}_j - M \vec{v}_{CM} \\ &= \sum_j \vec{p}_j - \sum_j \vec{p}_j = 0 \end{aligned}$$

Logo, o momento total é nulo com respeito ao referencial do CM

2.c Exemplo: exoplanetas

A força gravitacional em um planeta devida a seu sol é

$$\vec{F}_{grav} = -G_N \frac{m_P M_S}{|\vec{x}_P - \vec{x}_S|^2} \vec{\rho}$$



Usando $\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{12}(\vec{r})$ e coordenadas polares com centro em S

(referencial do centro de massa)

procuramos uma solução que é um círculo, a equação de movimento é

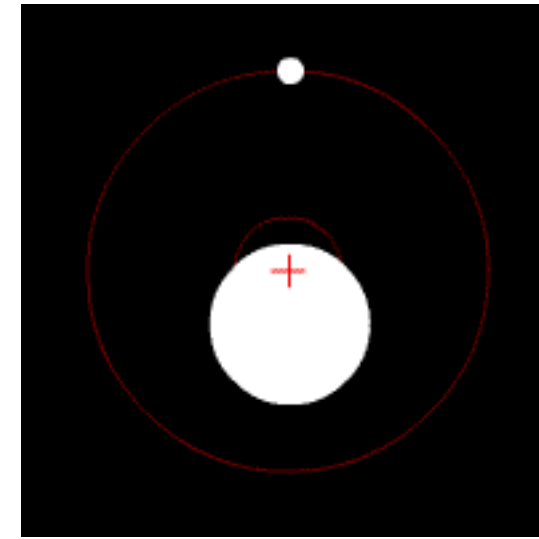
$$\mu r \dot{\theta}^2 = \frac{G_N m_P M_S}{r} \implies \dot{\theta} = \sqrt{\frac{G_N m_P M_S}{\mu r^3}}$$

até aqui tudo é exato.

$$\vec{r} = \vec{x}_P - \vec{x}_S \quad \text{e que} \quad m_S \vec{x}_S + m_P \vec{x}_P = 0 \quad \text{temos} \quad \vec{x}_S = \frac{m_P}{m_S - m_P} \vec{r}$$

$$\vec{r} = \vec{x}_P - \vec{x}_S \quad \text{e que} \quad m_S \vec{x}_S + m_P \vec{x}_P = 0 \quad \text{temos} \quad \vec{x}_S = \frac{m_P}{m_S + m_P} \vec{r}$$

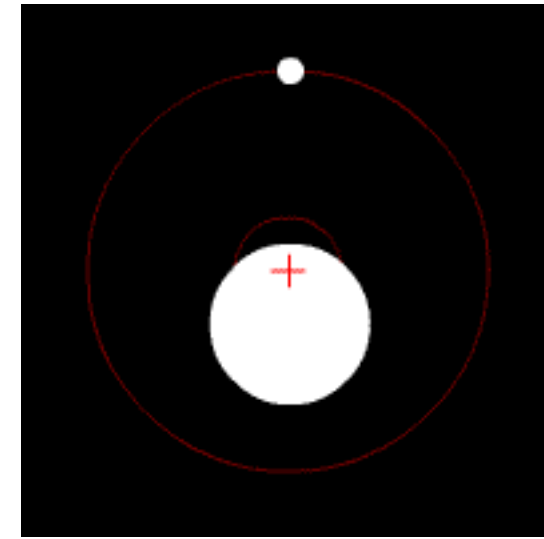
Então o sol descreve uma trajetória circular em torno do centro de massa



Para um observador estacionário o Sol possui uma velocidade radial que depende do tempo senoidalmente!

$$\vec{r} = \vec{x}_P - \vec{x}_S \quad \text{e que} \quad m_S \vec{x}_S + m_P \vec{x}_P = 0 \quad \text{temos} \quad \vec{x}_S = \frac{m_P}{m_S + m_P} \vec{r}$$

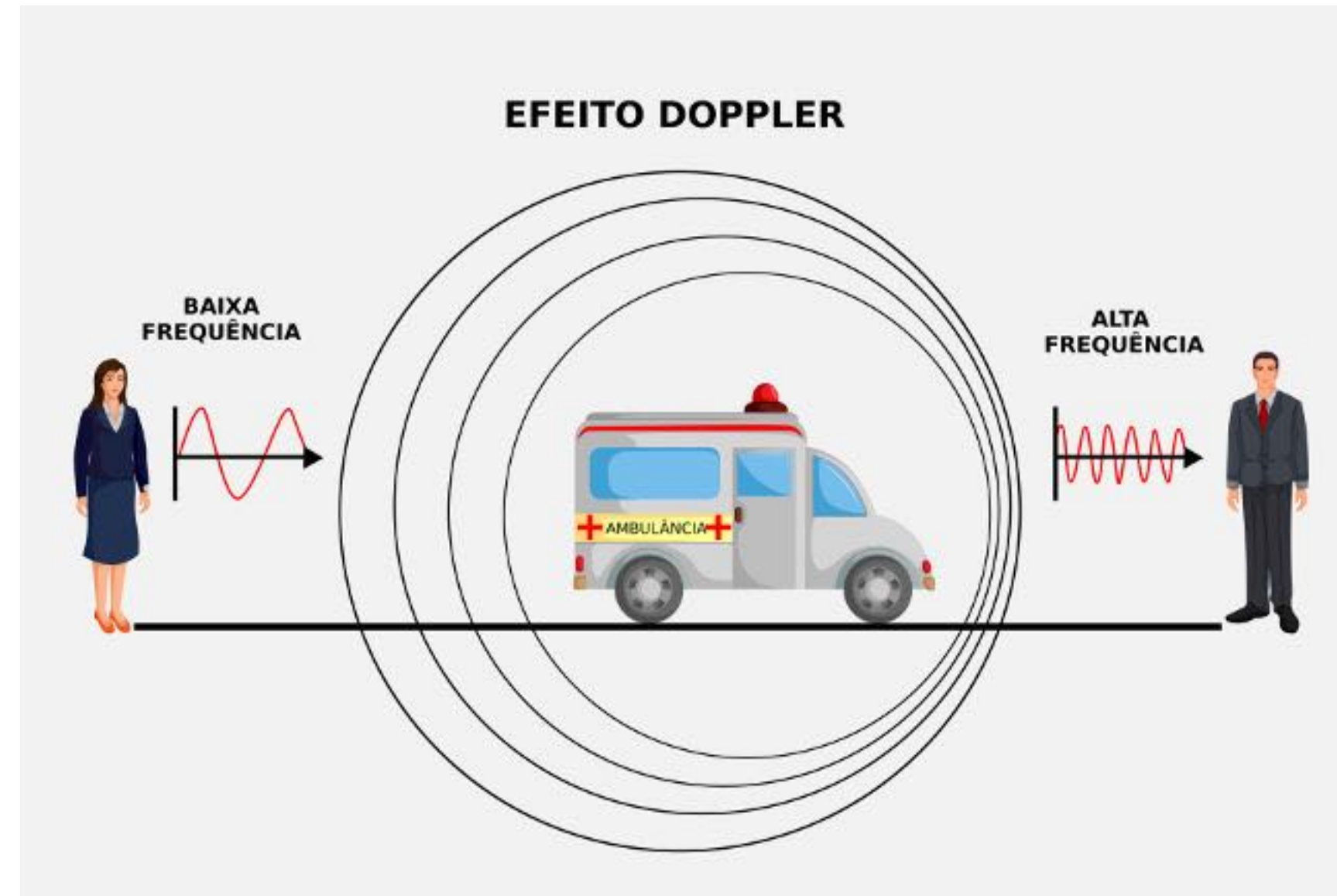
Então o sol descreve uma trajetória circular em torno do centro de massa



Para um observador estacionário o Sol possui uma velocidade radial que depende do tempo senoidalmente!

Como aproveitamos isso?

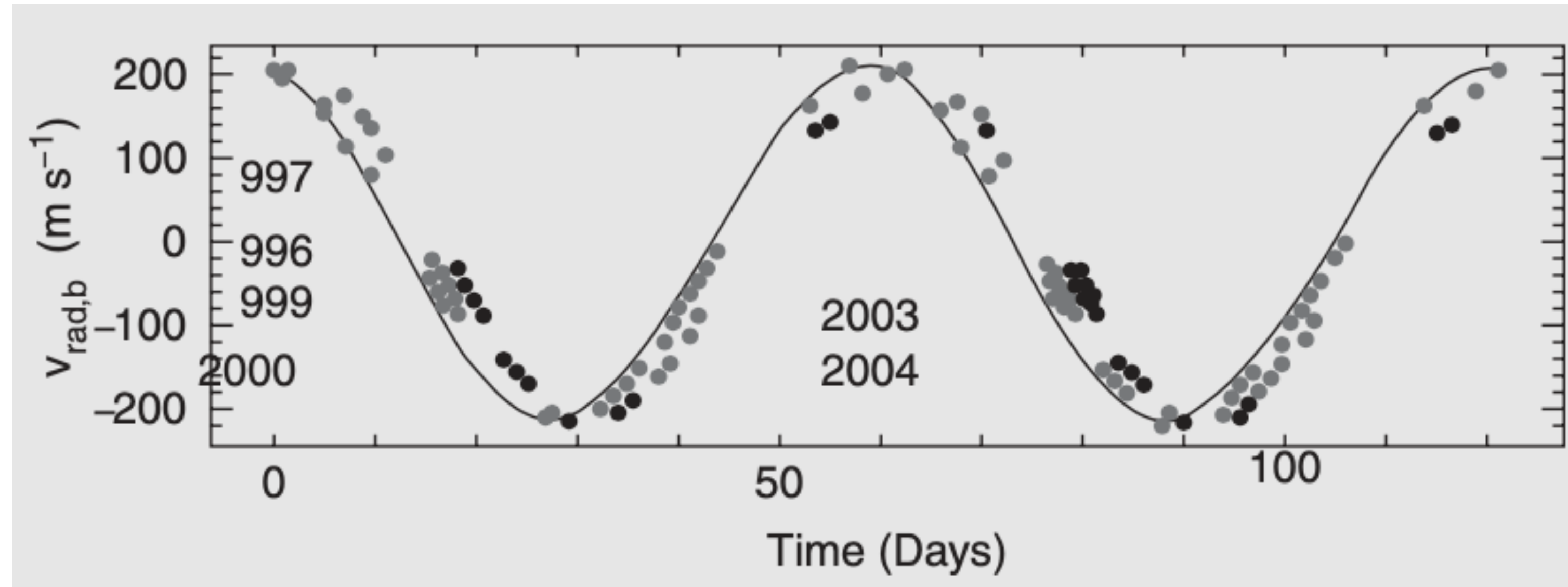
Com o efeito doppler!



<https://www.youtube.com/watch?v=qiq9OGAdUA8&feature=youtu.be>

Para a luz: quando a fonte se aproxima luz muda na direção do azul
quando a fonte se afasta a luz desvia para o vermelho

Por exemplo para a estrela Gliese 876 a 15,3 anos luz da terra



A velocidade da estrela com respeito ao CM é

$$v_S = \dot{\theta} r_S = \sqrt{\frac{G_N M_S r_S^2}{r_P^3}} = \sqrt{\frac{G_N m_P^2}{M_S r_P}}$$

onde usamos que $\dot{\theta} \simeq \sqrt{\frac{G_N M_S}{r_P^3}}$ e $r_S = \frac{M_S}{m_P} r_P$

2.d Energia cinética em diferentes referenciais

white board 12

2.d Energia cinética em diferentes referenciais

- Consideremos um referencial S e o CMR

$$\begin{aligned}T_S &= \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}_j^2 \\&= \frac{1}{2} \sum_j m_j (\vec{v}_j' + \vec{v}_{CM}) \cdot (\vec{v}_j' + \vec{v}_{CM}) \\&= \frac{1}{2} \sum_j m_j [\vec{v}_j'^2 + \vec{v}_{CM}^2 + 2\vec{v}_j' \cdot \vec{v}_{CM}] \\&= \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}_j'^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_j m_j \right) \vec{v}_{CM}^2 + \left(\sum_j m_j \vec{v}_j' \right) \cdot \vec{v}_{CM} \\&= \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}_j'^2 + \frac{1}{2} M \vec{v}_{CM}^2 \\&= T_{CM} + \frac{1}{2} M \vec{v}_{CM}^2\end{aligned}$$

Lembre-se do vídeo da raquete!

3. Conservação de momento linear

Em um sistema, cuja força externa total é nula, o momento linear total é conservado!

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_{total}^{ext} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(M \frac{d\vec{R}}{dt} \right) = 0$$

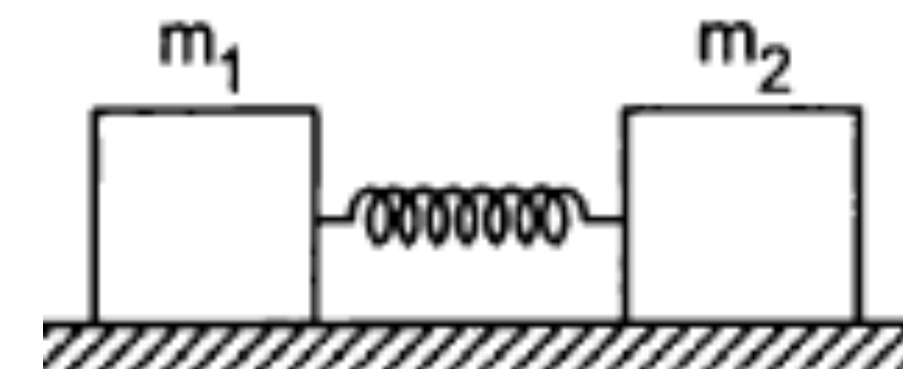
$$\frac{d}{dt} (M \vec{v}_{CM}) = 0$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{P}_{CM}) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_j m_j \vec{p}_j \right) = 0$$

exemplos white board 13

Exemplo 1: massas unidas por mola



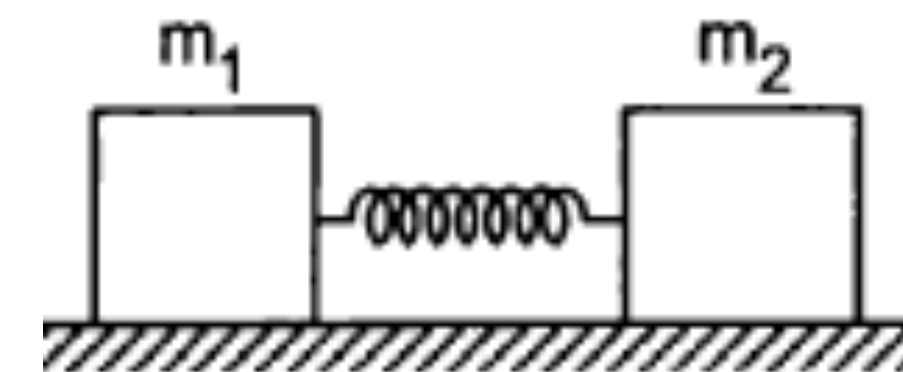
- Soltamos o sistema do repouso com a mola comprimida
- CM inicialmente parado em relação ao plano
- Consideremos que o atrito é nulo
- CM não se move pois a força externa resultante é zero
- CMR coincide com o referencial do plano

$$\vec{v}'_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}'_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 = \frac{1}{2} \frac{m_2^2}{m_1} v_2'^2 = \frac{m_2}{m_1} T_2$$

mesma razão

Exemplo 1: massas unidas por mola



- Soltamos o sistema do repouso com a a mola comprimida
- CM inicialmente parado em relação ao plano
- Consideremos que o atrito é nulo
- CM não se move pois a força externa resultante é zero
- CMR coincide com o referencial do plano

$$\vec{v}'_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}'_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 = \frac{1}{2} \frac{m_2^2}{m_1} v_2'^2 = \frac{m_2}{m_1} T_2$$

mesma razão

Pro lar: em que direção o sistema anda se há atrito?

Exemplo 2: recuo de arma de fogo



CM inicialmente parado com respeito ao solo. Novamente

$$\vec{v}'_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}'_2$$

que leva a $v_{pistola} = 1,5 \text{ m/s} = 5,4 \text{ km/h}$

<https://www.youtube.com/watch?v=mqHKVMrINZM>

<https://www.youtube.com/watch?v=EL13quhcUMw>