Solução da P1 de Geofísica Matemática - 14/04/2020

Questão 1

Solução:

A equação $\frac{dy}{dx} = \frac{3.y^2 - x^2}{2xy}$ não pode ser diretamente escrita na forma separável. Para reduzi-la à forma separável, podemos reescrê-la como:

$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{2x} - \frac{x}{2y}$. Agora, basta fazer uma mudança de variável. Chamando $\frac{y}{x} = u$, temos:

$y = u.x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}.x + \frac{dx}{dx}.u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x.\frac{du}{dx} + u$. Substituindo u e $\frac{dy}{dx}$ na equação, chegamos à:

$$x.\frac{du}{dx} + u = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2u} \Rightarrow x.\frac{du}{dx} = \frac{3}{2}u - u - \frac{1}{2u} \Rightarrow x.\frac{du}{dx} = \frac{3u^2 - 2u^2 - 1}{2u} \Rightarrow$$

$x.\frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 1}{2u} \Rightarrow \frac{2u}{u^2 - 2}du = \frac{1}{x}.dx$. Integrando-se ambos os lados da equação, temos:

$$\int \frac{2.u.du}{u^2 - 1} = \int \frac{1}{x}.dx \Rightarrow \ln|u^2 - 1| = \ln|x| - C \Rightarrow e^{\ln|u^2-2|} = e^{\ln|x| + C} \Rightarrow$$

$u^2 - 1 = D.x \Rightarrow u^2 = D.x + 1 \Rightarrow u = \pm\sqrt{D.x + 1}$. Como $u = \frac{y}{x}$, então:

$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{D.x + 1} \Rightarrow y = \pm x\sqrt{D.x + 1}$, sendo D uma constante arbitrária.

Questão 2

Solução:

a) $y dx + (2x.y - e^{-2y})dy = 0$, $M(x,y) = y$ e $N(x,y) = 2xy - e^{-2y}$

A E.D.O. será exata se $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Assim,

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1$ e $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2y$. Como $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, então a E.D.O. não é exata.

b) Como a E.D.O. não é exata, devemos procurar um fator integrante dependente de x ou de y para trazê-la à forma exata. Assim, temos:

$$R^* = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{1}{y}\left(2y - 1\right) = 2 - \frac{1}{y}$$

Como achamos R^* dependente de y, então:

$$F^*(y) = e^{\int R^*(y)dy} = e^{\int (2 - \frac{1}{y})dy} = e^{2y - \ln|y|} = e^{2y} \cdot \frac{1}{y}$$

De posse do fator integrante, temos:

$$F^* . M = e^{2y} . \frac{1}{y} . y = e^{2y}$$

$$F^* . N = e^{2y} . \frac{1}{y} . (2xy - e^{-2y}) = 2 . x . e^{2y} - \frac{1}{y}$$

E a equação trazida à forma exata será dada por:

$$e^{2y} dx + (2xe^{2y} - \frac{1}{y}) dy = 0$$

Vejam que agora a E.D.O. é de fato exata, pois $\frac{\partial}{\partial y}(e^{2y}) = \frac{\partial}{\partial x}(2xe^{2y} - \frac{1}{y}) = 2 . e^{2y}$.

Procuremos, agora, pela função $u(x,y)$, solução implícita da E.D.O. Integrando-se $M(x,y) = e^{2y}$ em relação a x, temos:

$$u(x,y) = \int e^{2y} dx = x . e^{2y} + k(y).$$

Diferenciando $u(x,y)$ em relação a y, obtemos:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 2xye^{2y} + \frac{dk(y)}{dy} = N(x,y) \therefore 2xy . e^{2y} + \frac{dk(y)}{dy} = 2xye^{2y} - \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{dk(y)}{dy} = -\frac{1}{y}$$

$\therefore$ $k(y) = -\ln|y| + C$. Assim, a solução geral será dada por:

$$\boxed{u(x,y) = x.e^{2y} - \ln|y| + c}$$

Verificando a solução:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = e^{2y} \quad e \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 2.x.e^{2y} - \frac{1}{y}$$

$$du = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)dy = 0 \Rightarrow \boxed{e^{2y}dx + (2.x.e^{2y} - \frac{1}{y})dy = 0}$$

↳ Solução verificada.

Questão 3

Solução: Sabendo que E.D.O.S lineares não-homogêneas possuem a propriedade de terem fator integrante dependente somente da variável independente, se tomarmos f(x) como o fator integrante e multiplicarmos a equação $\dot{y} + \left(\frac{1}{x}\right).y = 3.\cos(2x)$ por ele, obtemos:

$$f(x).\dot{y} + f(x).\left(\frac{1}{x}\right).y = f(x).3.\cos(2x)$$

Idealmente, o lado esquerdo poderia seria escrito como a derivada do produto entre f(x) e y, tal que:

$$\frac{d}{dx}[f(x).y(x)] = f(x).\frac{dy}{dx} + \frac{df(x)}{dx}.y$$

ou seja, o fator integrante deve satisfazer a seguinte equação:

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x).\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{df(x)}{f(x)} = \frac{dx}{x}.$$ Integrando-se ambos os lados da equação, chegamos à:

$$\int \frac{df(x)}{f(x)} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|f(x)| = \ln|x| \Rightarrow \boxed{f(x) = x}.$$ Determinamos o fator integrante. Podemos, portanto, reescrever a E.D.O. do problema como:

$$\frac{d}{dx}[f(x).y(x)] = f(x).3.\cos(2x)$$

Integrando-se a equação acima, temos:

$$\int d[f(x).y(x)] = \int f(x).3.\cos(2x)dx \Rightarrow f(x).y(x) = \int x.3\cos(2x)\,dx \Rightarrow$$

$$x.y(x) = \frac{3.x.\sin(2x)}{2} - \int \frac{3.\sin(2x)}{2}dx = \frac{3.x.\sin(2x)}{2} + \frac{3.\cos(2x)}{4} + C \Rightarrow$$

$$\boxed{y(x) = \frac{3}{2}\sin(2x) + \frac{3}{4}\frac{\cos(2x)}{x} + \frac{C}{x}}$$ -> Solução geral da E.D.O. linear não-homogênea

Verificando a solução: $y'(x) = \frac{3}{2}.2.\cos(2x) + \frac{3}{4}\frac{2.(-\sin(2x))}{x} - \frac{3}{4}\frac{\cos(2x)}{x^2} - \frac{C}{x^2}$

$$y'(x) = 3\cos(2x) - \frac{3}{2}\frac{\sin(2x)}{x} - \frac{3}{4}\frac{\cos(2x)}{x^2} - \frac{C}{x^2}$$

$$3\cos(2x) - \frac{3}{2}.\frac{\sin(2x)}{x} - \frac{3}{4}.\frac{\cos(2x)}{x^2} - \frac{C}{x^2} + \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{3}{2}\sin(2x) + \frac{3}{4}\frac{\cos(2x)}{x} + \frac{C}{x}\right) =$$

$$3.\cos(2x) - \cancel{\frac{3}{2}.\frac{\sin(2x)}{x}} - \cancel{\frac{3}{4}.\frac{\cos(2x)}{x^2}} - \cancel{\frac{C}{x^2}} + \cancel{\frac{3}{2}.\frac{\sin(2x)}{x}} + \cancel{\frac{3}{4}\frac{\cos(2x)}{x^2}} + \cancel{\frac{C}{x^2}} = 3.\cos(2x)$$

Solução verificada!

Questão 4

Solução: A E.D.O. de Lagrange possui a seguinte forma:

$$y = x.\Phi(y') + \Psi(y')$$

A E.D.O. de Lagrange pode ser transformada numa E.D.O linear de 1^a ordem da forma:

$$x' + a(p).x = b(p)$$

Sendo $a(p) = -\frac{\Phi'(p)}{p-\Phi(p)}$ e $b(p) = \frac{\Psi'(p)}{p-\Phi(p)}$, com $y' = p$. A E.D.O. de Lagrange do problema é dada por:

$$y = -x.\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$, ou seja, $\Phi(p) = -p$ e $\Psi(p) = -\frac{1}{2}p^2$

Assim,

$$\Phi'(p) = -1 \quad e \quad \Psi'(p) = -p.$$

Dessa forma, $a(p)$ e $b(p)$ serão dadas por:

$$a(p) = +\frac{1}{2p} \quad e \quad b(p) = \frac{-p}{2p} = -\frac{1}{2}$$

E a E.D.O. linear de 1ª ordem poderá ser escrita como:

$$x' + \frac{1}{2p} \cdot x = -\frac{1}{2}$$

Procurando um fator integrante para essa equação, temos:

$$f(p) \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{f(p)}{2p} \cdot x(p) = -\frac{f(p)}{2}$$

Idealmente, o lado esquerdo poderia ser escrito como a derivada do produto entre $f(p)$ e $x(p)$, tal que:

$$\frac{d}{dp}[f(p) \cdot x(p)] = \frac{df(p)}{dp} \cdot x(p) + f(p) \cdot \frac{dx(p)}{dp}$$

ou seja, o fator integrante deve satisfazer a seguinte equação:

$$\frac{df(p)}{dp} = +\frac{f(p)}{2p} \Rightarrow \frac{df(p)}{f(p)} = +\frac{dp}{2p}$$. Integrando-se ambos os lados da equação, chegamos à:

$$\int \frac{df(p)}{f(p)} = \int + \frac{dp}{2p} \Rightarrow \ln|f(p)| = +\frac{1}{2}\ln|p| \Rightarrow \ln|f(p)| = \ln|p^{1/2}| \Rightarrow$$

$$\boxed{f(p) = \sqrt{p}.}$$ Determinamos o fator integrante. Podemos, portanto, reescrever a E.D.O. linear como:

$$\frac{d}{dp}[f(p) \cdot x(p)] = -\frac{f(p)}{2}$$

Integrando-se ambos os lados da equação acima, chegamos à:

$$\int d[f(p) \cdot x(p)] = \int -\frac{f(p)}{2}dp \Rightarrow f(p) \cdot x(p) = -\int \frac{\sqrt{p}}{2}dp = -\frac{\sqrt{p^3}}{3} + C.$$

$$\sqrt{p}\cdot x(p) = -\frac{\sqrt{p}^3}{3} + c \Rightarrow \quad x(p) = -\frac{p}{3} + c\cdot\frac{1}{\sqrt{p}}$$

A solução na forma paramétrica é dada por:

$$\boxed{\begin{cases} x(p) = -\frac{p}{3} + c\cdot\frac{1}{\sqrt{p}} \\ y = -x\cdot p - \frac{1}{2}\cdot p^2 \end{cases}}$$

Questão 5

Solução: O E.D.O. que governa o sistema massa-mola do problema é uma E.D.O. linear de 2ª homogênea a coeficientes constantes:

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = 0$$

Determinando o polinômio característico da equação, temos:

$$p^2 + p + 1 = 0 \quad \therefore \quad p = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4.1.1}}{2} \quad p_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \quad p_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

Assim, duas soluções linearmente independentes da E.D.O. homogênea serão dadas por:

$$x_1(t) = e^{p_1(t)} = e^{\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)t} \quad e \quad x_2(t) = e^{p_2(t)} = e^{\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)t} \quad \therefore$$

$$x(t) = C_1\cdot e^{\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)t} + C_2\cdot e^{\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)t}$$

No entanto, estamos em busca de uma solução real. A solução real é da forma:

$$x(t) = C_1\cdot e^{\alpha.t}\cdot\cos(\beta.t) + C_2\cdot e^{\alpha.t}\cdot\sin(\beta t)$$

sendo $\alpha = -\frac{a}{2} = -\frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore$

$$x(t) = C_1\cdot e^{-\frac{1}{2}.t}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.t\right) + C_2\cdot e^{-\frac{1}{2}.t}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.t\right)$$

As condições iniciais do problema são as seguintes: $x(0) = 2$ e $\dot{x}(0) = 0$. Logo:

$$x(0) = C_1 + 0 = 2 \quad \therefore \quad \boxed{C_1 = 2}$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{2}C_1\cdot e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.t\right) + C_1\cdot e^{-\frac{1}{2}.t}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.t\right) - \frac{1}{2}C_2\cdot e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.t\right) +$$

$$C_2 \cdot e^{-1/2 \cdot t} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t\right)$$

$\dot{x}(t=0) = -\frac{1}{2} C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot C_2 = 0$. Como $C_1 = 2$, então,

$$-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} C_2 = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

Logo, a solução que atendende as condições iniciais do problema é dada por:

$$\boxed{x(t) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t\right)}$$

Questão 6

Solução: a) $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4t^2$

Verificamos que a E.D.O. acima é linear não-homogênea de segunda ordem a coeficientes constantes. Para resolvê-la, vamos primeiro determinar a solução da equação homogênea associada: $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$. O polinômio característico dessa equação é dado por:

$$p^2 - 3p + 2 = 0 \Rightarrow p = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4.1.2}}{2}$$

$$P_1 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2 \qquad P_2 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1$$

Assim, como temos duas raízes distintas, duas soluções particulares linearmente independentes da E.D.O. homogênea associada são:

$y_1 = e^{2t}$ e $y_2 = e^{t}$, com solução geral dada por: $y_h(t) = C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{t}$, sendo C_1 e C_2 duas constantes arbitrárias.

Para determinar a solução da E.D.O. não-homogênea, podemos utilizar o método de Lagrange, sendo uma solução particular da não-homogênea dada por:

$$y_p = y_1 \cdot \int \frac{r(t) \cdot y_2}{W(y_1 y_2)} dt + y_2 \cdot \int \frac{-r(t) \cdot y_1}{W(y_1, y_2)} dt, \text{ sendo } r(t) = 4t^2.$$

Vamos, portanto, calcular o Wronskiano $W(y_1, y_2)$:

$$W(y_1,y_2) = \left\| \begin{matrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 2.e^{2t} & e^{t} \\ e^{2t} & e^{t} \end{bmatrix} \right\| = 2.e^{2t}.e^{t} - e^{t}.e^{2t} = e^{3t} \therefore$$

$$y_p(t) = e^{2t}.\int \frac{4.t^2.e^{t}}{e^{3t}}dt + e^{t}.\int \frac{-4.t^2.e^{2t}}{e^{3t}}dt \Rightarrow$$

$$y_p(t) = 4.e^{2t}\underbrace{\int t^2.e^{-2t}dt}_{\mathrm{I}} - 4.e^{t}\underbrace{\int t^2.e^{-t}dt}_{\mathrm{II}}$$

I $\rightarrow$ $$\int t^2.e^{-2t}dt = -\frac{t^2.e^{-2t}}{2} - \int \frac{-2.t.e^{-2t}}{2}dt = -\frac{t^2.e^{-2t}}{2} + \int t.e^{-2t}dt = -\frac{t^2}{2}.e^{-2t} - \frac{t.e^{-2t}}{2} -$$
$$\int -\frac{e^{-2t}}{2}dt = -\frac{t^2.e^{-2t}}{2} - \frac{t.e^{-2t}}{2} + \int \frac{e^{-2t}}{2}dt = -\frac{t^2.e^{-2t}}{2} - \frac{t e^{-2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{4}$$

II $\rightarrow$ $$\int t^2.e^{-t}dt = -t^2.e^{-t} - \int -2t.e^{-t}dt = -t^2.e^{-t} + \int 2t.e^{-t}dt = -t^2.e^{-t} - 2t.e^{-t} -$$
$$\int -2.e^{-t}dt = -t^2.e^{-t} - 2.t.e^{-t} + \int 2.e^{-t}dt = -t^2.e^{-t} - 2.t.e^{-t} - 2.e^{-t}$$

$$y_p(t) = 4.e^{2t}.\left(-\frac{t^2.e^{-2t}}{2} - \frac{t.e^{-2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{4}\right) - 4.e^{t}.\left(-t^2.e^{-t} - 2t.e^{-t} - 2.e^{-t}\right) \Rightarrow$$

$$y_p(t) = 4.\left(-\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + t^2 + 2.t + 2\right) \Rightarrow y_p = 4\left(\frac{t^2}{2} + \frac{3}{2}.t + \frac{7}{4}\right) = 2.t^2 + 6.t + 7$$

Como a solução geral da E.D.O. linear não-homogênea é dada pela soma da solução da homogênea associada e de uma solução particular da não-homogênea, então:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \Rightarrow$$

$$\boxed{y(t) = C_1.e^{2t} + C_2.e^{t} + 2t^2 + 6t + 7}$$ $\rightarrow$ Solução geral da E.D.O. não-homogênea.

b) Para determinar a solução particular que atende as condições iniciais, vamos determinar as constantes C_1 e C_2. Derivando $y(t)$, temos:

$$\dot{y}(t) = 2.C_1.e^{2t} + C_2.e^{t} + 4t + 6.$$

$$y(t=0) = C_1 + C_2 + 7 = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = -6$$

$\dot{y}(t=0) = 2.C_1 + C_2 + 6 = 0 \Rightarrow 2C_1 + C_2 = -6$. Assim,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -6 \\ 2C_1 + C_2 = -6 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0 \therefore C_2 = -6. \text{ Logo:}$$

$$\boxed{y(t) = -6.e^{t} + 2t^2 + 6t + 7} \rightarrow$$ É a solução geral que atende as condições iniciais

Questão 7

Solução: $x^2 . \ddot{y}(x) - 2x\dot{y}(x) - 10y(x) = 0$

Sabendo que a equação auxiliar à E.D.O. de Euler-Cauchy é dada por:

$$m^2 + (a-1).m + b = 0, \text{ sendo } a = -2 \text{ e } b = -10, \text{ então:}$$

$$m^2 - 3m - 10 = 0 \rightarrow m = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4.1.(-10)}}{2} \begin{cases} \rightarrow m_1 = \frac{3+7}{2} = 5 \\ \rightarrow m_2 = \frac{3-7}{2} = -2 \end{cases}$$

Temos, assim, o caso de raízes reais distintas. Dessa forma, a solução geral da E.D.O. será dada por:

$$\boxed{y(x) = C_1 . x^{m_1} + C_2 . x^{m_2} = C_1 . x^{5} + C_2 . x^{-2}}$$

sendo C_1 e C_2 constantes arbitrárias.