Vetores no espaço

Teorema:

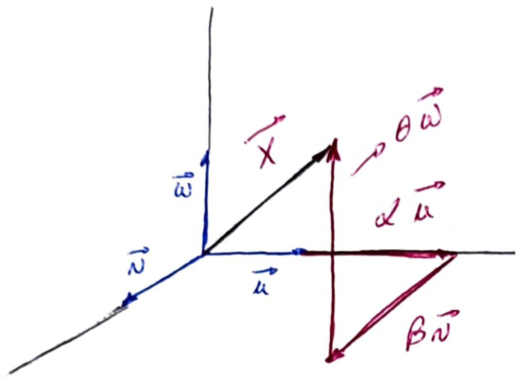
Se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI, então qualquer vetor $\vec{x}$ é combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Qualquer vetor $\vec{x} \in \mathbb{V}^3$.

Note que se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ são LI então eles não são coplanares, pois se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ fossem coplanares então pelo Teorema (vetores no plano) $\vec{w}$ seria combinação linear de $\vec{u}, \vec{v}$, isto é, existiriam α, β tais que:

$$\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$$

isto é, temos escalares $\alpha, \beta, -1$ não todos nulos e, portanto, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ não seria LI.



$$\vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \theta \vec{w}$$

<u>Nota</u>: • Este Teorema diz que três vetores LI geram todos os vetores no espaço.

• Também é consequência do Teorema que qualquer conjunto com quatro ou mais vetores no espaço é LD.

<u>Base do espaço</u>

Um conjunto ordenado $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ linearmente independente é chamado de base do espaço.

<u>Teorema</u>: Se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base do espaço, então todo vetor $\vec{x}$ do espaço pode ser escrito de maneira única como combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$

prova: Suponha que $\vec{x}$ pode ser escrito de duas maneiras diferentes, como combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, isto é:

$$\vec{x} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} + \theta\,\vec{w}$$

e

$$\vec{x} = \tilde{\alpha}\,\vec{u} + \tilde{\beta}\,\vec{v} + \tilde{\theta}\,\vec{w}$$

Logo: $(\alpha - \tilde{\alpha})\,\vec{u} + (\beta - \tilde{\beta})\,\vec{v} + (\theta - \tilde{\theta})\,\vec{w} = \vec{0}$

e como $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI, temos:

$\alpha = \tilde{\alpha}$, $\beta = \tilde{\beta}$ e $\theta = \tilde{\theta}$, logo a combinação linear é única.

<u>Observação</u>: Se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é base do espaço, então todo vetor $\vec{x} \in \mathbb{V}^3$ é representado univocamente pelas coordenadas na base. Ou seja,

$$\vec{x} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} + \theta\,\vec{w}$$

podemos escrever:

$$\vec{x} = (\alpha, \beta, \theta)_E \qquad \text{(ordem importa)}$$

<u>Propriedades</u>:

Seja $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ base do $\mathbb{V}^3$, então se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{x} = (\alpha_1, \beta_1, \theta_1)_E$ e $\vec{z} = (\alpha_2, \beta_2, \theta_2)_E$

- $\vec{x} + \vec{z} = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \theta_1 + \theta_2)_E$
- $\lambda\vec{x} = (\lambda\alpha_1, \lambda\beta_1, \lambda\theta_1)_E$

Exercício: Verifique se são LI ou LD os vetores $\vec{u} = (1, -1, 2)_E$, $\vec{v} = (0, 1, 3)_E$, $\vec{w} = (4, -3, 11)_E$.

Para que sejam LD, temos:

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \theta \vec{w} = \vec{0}$$

$$\alpha(1, -1, 2) + \beta(0, 1, 3) + \theta(4, -3, 11) = \vec{0}$$

$$\begin{cases} 1\alpha + 0\beta + 4\theta = 0 & \times 3 \\ -\alpha + 1\beta - 3\theta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 11\theta = 0 & \times(-1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 3\alpha + 0\beta + 12\theta = 0 \\ -\alpha + 1\beta - 3\theta = 0 \\ -2\alpha - 3\beta - 11\theta = 0 \\ \hline 0\alpha - 2\beta - 2\theta = 0 \end{array}$$

$$\beta = \frac{+2\theta}{-2} = -\theta$$

$$\begin{array}{l} 1\alpha + 0\beta + 4\theta = 0 \\ 3\alpha - 3\beta + 9\theta = 0 \quad \times(-3) \\ 2\alpha + 3\beta + 11\theta = 0 \\ \hline 6\alpha + 0\beta + 24\theta = 0 \end{array}$$

$$\alpha = -\frac{24\theta}{6} = -4\theta$$

$$\alpha = -4\theta$$

$$1(-4\theta) + 0\beta + 4\theta = 0$$

$$-4\theta + 4\theta = 0 \quad ✓$$

$$-(-4\theta) + (-\theta) - 3\theta = 0$$

$$4\theta - \theta - 3\theta = 0 \quad ✓$$

Se $\alpha = 1$

$\theta = -\frac{1}{4}$

$\beta = \frac{1}{4}$

- $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\theta = -\frac{1}{4}$

ou

- $\alpha = 4$, $\beta = 1$, $\theta = -1$

Logo, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são LD.

Uma outra maneira seria:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$1\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} - (-1)\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$1(11+9) + 1(0-12) + 2(0-4)$$

$$20 + (-12) + (-8)$$

$$20 - 20 = 0$$

Logo, se $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0$ os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são LD.

Teorema:

Os vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_E$ e $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)_E$ são LD se, e somente se,

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0$$

Exercício:

Sabendo que $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ é base e que

$\vec{f_1} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2}$, $\vec{f_2} = \vec{e_1} + (-\vec{e_2}) + 2\vec{e_3}$,

$\vec{f_3} = \vec{e_1} + 2\vec{e_3}$

a) mostre que $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é base;

b) calcule as coordenadas de $\vec{v} = (1, 1, 1)_E$ na base F.

Resolução:

a) Para que F seja base, $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ tem que ser LI

$$\therefore \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$2 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - (-1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2(-2) + 1(2-2) + 0$$

$-4 \neq 0$ $\therefore$ $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é LI, e portanto uma base.

b) $\vec{v} = (1, 1, 1)_E$

$$\vec{v} = 1\vec{e_1} + 1\vec{e_2} + 1\vec{e_3}$$

Portanto, temos que determinar $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ e $\vec{e_3}$.

$$\begin{cases} \vec{f_1} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2} + 0\vec{e_3} \\ \vec{f_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + 2\vec{e_3} \\ \vec{f_3} = \vec{e_1} + 0\vec{e_2} + 2\vec{e_3} \end{cases}$$

$$-\vec{f_1} = -2\vec{e_1} + \vec{e_2} + 0\vec{e_3}$$
$$\vec{f_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + 2\vec{e_3}$$

$$\vec{f_3} = \vec{e_1} + 2\vec{e_3}$$
$$\vec{e_3} = \frac{\vec{f_3}}{2} - \frac{\vec{e_1}}{2}$$

$$-\vec{f_1} + \vec{f_2} = -\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + 2\vec{e_3}$$

$$\therefore \quad -\vec{f_1} + \vec{f_2} = -\vec{e_1} + 2\left(\frac{\vec{f_3}}{2} - \frac{\vec{e_1}}{2}\right)$$
$$-\vec{f_1} + \vec{f_2} = -\vec{e_1} + \vec{f_3} - \vec{e_1}$$
$$-\vec{f_1} + \vec{f_2} - \vec{f_3} = -2\vec{e_1}$$
$$\vec{e_1} = \frac{\vec{f_1}}{2} - \frac{\vec{f_2}}{2} + \frac{\vec{f_3}}{2}$$

$$\vec{f_1} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2}$$
$$\vec{e_2} = -\vec{f_1} + 2\vec{e_1}$$
$$\vec{e_2} = -\vec{f_1} + 2\left(\frac{\vec{f_1}}{2} - \frac{\vec{f_2}}{2} + \frac{\vec{f_3}}{2}\right)$$
$$\vec{e_2} = -\vec{f_1} + \vec{f_1} - \vec{f_2} + \vec{f_3}$$
$$\vec{e_2} = -\vec{f_2} + \vec{f_3}$$

$$\vec{f_3} = \vec{e_1} + 2\vec{e_3}$$

$$\vec{e_3} = \frac{\vec{f_3}}{2} - \frac{\vec{e_1}}{2}$$

$$\vec{e_3} = \frac{\vec{f_2}}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{f_1}}{2} - \frac{\vec{f_2}}{2} + \frac{\vec{f_3}}{2}\right)$$

$$\vec{e_3} = -\frac{\vec{f_1}}{4} + \frac{\vec{f_2}}{4} + \frac{\vec{f_3}}{4}$$

$$\therefore \quad \vec{v} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$$

$$\vec{v} = \left(\frac{\vec{f_1}}{2} - \frac{\vec{f_2}}{2} + \frac{\vec{f_3}}{2}\right) + \left(-\vec{f_2} + \vec{f_3}\right) + \left(-\frac{\vec{f_1}}{4} + \frac{\vec{f_2}}{4} + \frac{\vec{f_3}}{4}\right)$$

$$\vec{v} = \frac{1}{4}\vec{f_1} - \frac{5}{4}\vec{f_2} + \frac{7}{4}\vec{f_3}$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{v} = \left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right)_F}$$