

Lista de Exercício II

1. Prove as relações

$$\exp(L) T \exp(-L) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{ad}_L^n T$$

e

$$(\partial \exp(L)) \exp(-L) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \text{ad}_L^n \partial L$$

onde $\text{ad}_L T$ é a ação adjunta de L

$$\text{ad}_L T = [L, T]$$

2. Seja V uma álgebra associativa, i.e. para $a, b \in V$ então $a \cdot b \in V$ e $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Mostre então que V com a operação

$$[a, b] \equiv a \cdot b - b \cdot a$$

é uma álgebra de Lie.

3. Na seção 2.5 da apostila nós estudamos as representações espinoriais de $su(2)$ e $sl(2)$, i.e. as matrizes (2.57) e (2.77) respectivamente. Mostre que a exponenciação de uma combinação linear dos geradores T_i , $i = 1, 2, 3$, dados por (2.57), com coeficientes reais, produz matrizes 2×2 que correspondem a elementos de um grupo compacto. Isto é, mostre que estas matrizes são funções periódicas dos parâmetros reais usados na exponenciação. Por outro lado, mostre que a exponenciação de uma combinação linear dos geradores L_i , $i = 1, 2, 3$, dados por (2.77), com coeficientes reais, produz matrizes 2×2 que correspondem a elementos de um grupo não compacto.
4. Tome o espaço $\mathbb{R}^3$ com coordenadas Cartesianas x_i , $i = 1, 2, 3$, e considere as rotações de um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ em cada um dos 3 planos $(x_1 x_2)$, $(x_3 x_1)$, e $(x_2 x_3)$. Se denotarmos os vetores de $\mathbb{R}^3$ por matrizes colunas

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

então as matrizes daquelas rotações nesta representação de dimensão 3, são dadas por

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad g_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Defina um grupo G como aquele gerado livremente por todas as composições possíveis destas tres rotações.

- (a) Construa todos os elementos de G . Qual a ordem de G ?
- (b) Determine se G tem ou não subgrupos invariantes.

- (c) Construa a representação matricial para este grupo, onde o espaço da representação é o próprio $\mathbb{R}^3$.
- (d) Calcule os caracteres dos elementos do grupo nesta representação.
- (e) Esta representação é irredutível? Justifique.