Lista de Exercício I

1. Construa todas as transformações no plano que deixam um quadrado invariante. Determine o grupo de simetrias e construa sua tabela de multiplicação.

2. Considere o grupo S_3 das permutações de 3 objetos, que tem 3! elementos. Determine o centro de S_3. Construa todos os automorfismos internos de S_3, e detemine a estrutura do grupo destes automosfismos. Ele é isomórfico a S_3?

3. Verifique se o conjunto de matrices abaixo forma um grupo pela operação de multiplicação de matrizes.

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ M_4 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad M_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ M_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M_8 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Considere o exemplo 1.14 na página 11 da apostila. Determine os cosets dos espaços G/H_n, $n = 1, 2, \ldots$, e H_m/H_n, $m < n$, $m, n = 1, 2, \ldots$. Os subgrupos são invariantes? Em caso positivo, determine a estrutura dos grupos quocientes correspondentes.

5. Prove que se D e D' são duas representações irredutíveis de um grupo G, de dimensões d e d' respectivamente, e se uma matriz A satisfaz

$$D(g)A = AD'(g)$$

para todo $g \in G$, então segue que

   (a) se $d \neq d'$ então $A = 0$

   (b) se $d = d'$ então $A = 0$ ou então D e D' são equivalentes.

6. Construa a representação de S_3 que é o produto direto de duas cópias da representação irredutível D'' definida em (1.91) da apostila (construa as matrizes 4×4). Verifique se esta representação é redutível. No caso de ser, calcule como ela se decompõe em reps. irredutíveis de S_3.

7. Considere um sistema físico que possua uma simetria descrita por um grupo G. Com isto queremos dizer que existem transformações nos estados

$$T_g \; : \qquad \mid \psi \rangle \to T_g \mid \psi \rangle$$

tal que a composição das tranformações satisfaz

$$T_{g_1} T_{g_2} = T_{g_1 \cdot g_2}$$

com $g_1, g_2 \in G$.

Por simetria queremos dizer que existe um Hamiltoniano H tal que se

$$H \mid \psi\rangle = E \mid \psi\rangle$$

então

$$HT_g \mid \psi\rangle = ET_g \mid \psi\rangle$$

Seja V_E o conjunto dos estados com energia E (autovalor de H), e suponha que G atue transitivamente em V_E. Mostre que

(a) se K é o subgrupo das transformações de G que deixam um dado estado de V_E invariante, i.e.

$$T_h \mid \psi_0\rangle = \mid \psi_0\rangle \qquad h \in K$$

então mostre que o subgrupo de simetria de qualquer outro estado de V_E é necessariamente isomórfico a K.

(b) Mostre que V_E é isomórfico ao espaço coset G/K.

Obviamente V_E constitute uma representação de G. Então:

- O fato de G atuar em V_E transitivamente implica que V_E é irredutível?
- O fato de V_E ser irredutível implica que G age transitivamente em V_E?

8. Mostre que um grupo finito cuja ordem é um número primo, é necessariamente um grupo cíclico.