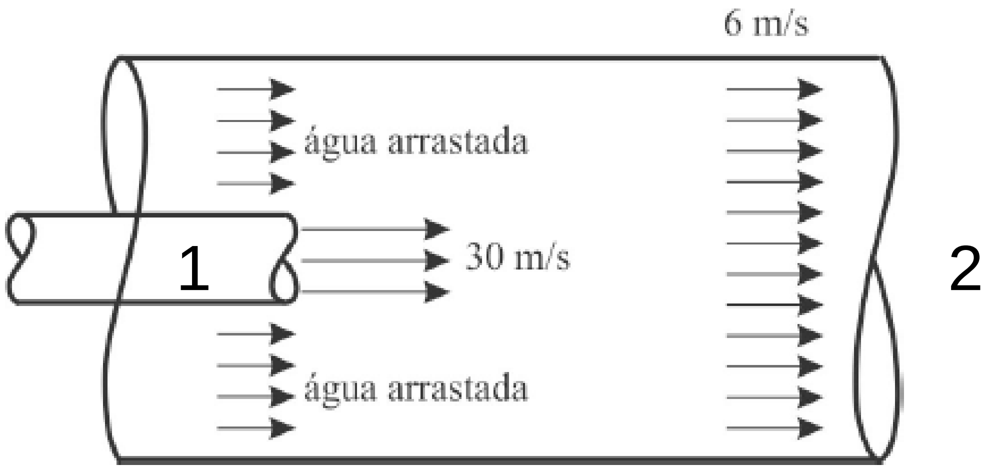
Aula de exercícios – Equação da continuidade

1- A figura mostra o esboço de um ejetor líquido–líquido. A área da seção transversal do jato d'água é igual a 0,01 m^2 e a velocidade média do jato é de 30 m/s. Este jato provoca o arrastamento da água que, inicialmente, escoa pela seção anular do tubo, conforme ilustra a figura. A área da seção transversal do tubo é igual a 0,075 m^2. Determine a vazão de água que é arrastada pelo jato sabendo que a velocidade do escoamento no tubo é uniforme e igual a 6 m/s a jusante do ponto de descarga do jato.



$$A_1 = 0{,}01\, m^2 \quad V_1 = 30\, m/s \quad A_2 = 0{,}075\, m^2 \quad V_2 = 6\, m/s$$

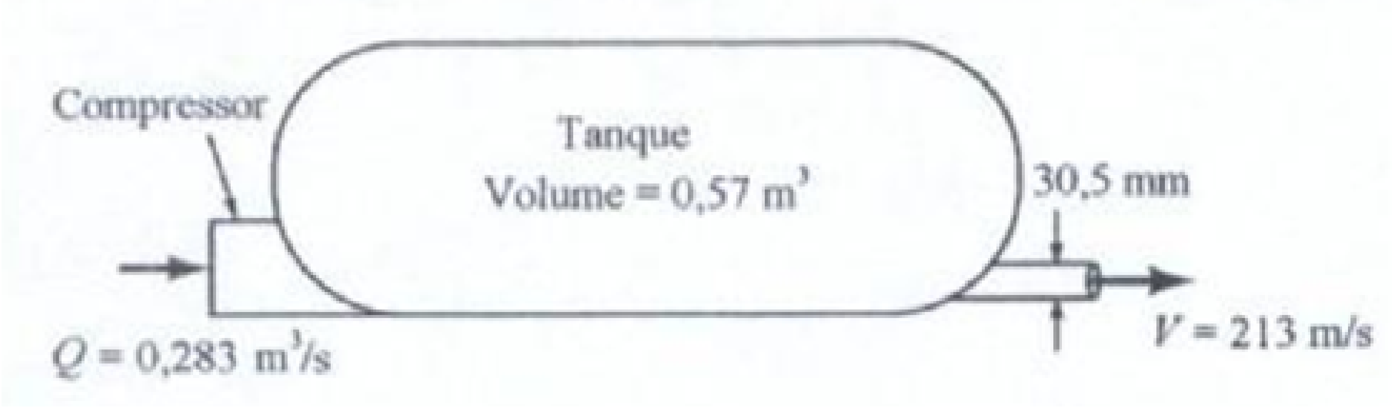
$$Vazão\ volumétrica\ do\ jato\ de\ água \Rightarrow \dot{Q}_{jato\ de\ água} = V_1 \times A_1 = 30 \times 0{,}01 = 0{,}3\, m^3/s$$

$$Vazão\ volumétrica\ na\ saída \Rightarrow \dot{Q}_{saída} = V_2 \times A_2 = 6 \times 0{,}075 = 0{,}45\, m^3/s$$

Pela equação da continuidade: $\dot{Q}_{arrastada} = \dot{Q}_2 - \dot{Q}_1 = 0{,}45 - 0{,}30 = 0{,}15\, m^3/s$

Aula de exercícios – Equação da continuidade

2- O compressor indicado na figura é alimentado com 0,283 m^3/s de ar na condição padrão. O ar é descarregado do tanque através de uma tubulação que apresenta diâmetro igual a 30,5 mm. A velocidade e a massa específica do ar que escoa no tubo de descarga são iguais a 213 m/s e 1,80 kg/m^3. Determine a taxa de variação da massa de ar contida no tanque, em kg/s, e a taxa média de variação da massa específica de ar contida no tanque.



Aula de exercícios – Equação da continuidade

Aplicando a equação da continuidade para o volume de controle do compressor:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} d\forall + \rho \int_{SC} \vec{V} . \hat{n} dA = 0 \Rightarrow \frac{\partial m_{\forall C}}{\partial t} + \rho_s V_s A_s - \rho_e V_e A_e = 0$$

Logo: $\dot{m}_e = \rho_e V_e A_e$

Para a condição padrão: p_e=101,325 kPa e T_e=15°C

$$p_e = \rho_e R_{ar} T_e \Rightarrow \rho_e = \frac{p_e}{R_{ar} T_e} = \frac{101,325x10^3}{287 \times (15 + 273)} = 1,225\, kg/m^3$$

$$\dot{Q}_e = V_e A_e = 0,283\, m^3/s$$

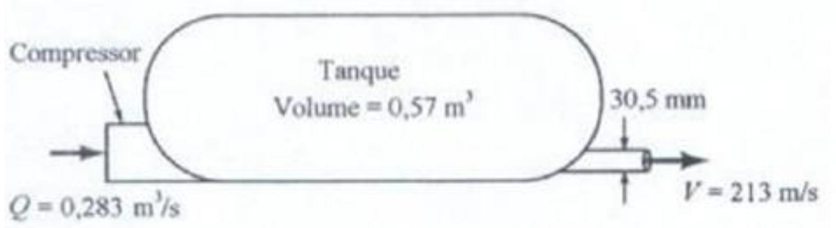
Portanto: $\dot{m}_e = 1,225 \times 0,283 = 0,347\, kg/s$

De forma similar: $\dot{m}_s = \rho_s V_s A_s$

Mas: $\rho_s = 1{,}80\ kg/m^3$ $\quad V_s = 213\, m/s$ $\quad A_s = \dfrac{\pi D_s^2}{4} = \dfrac{\pi(30{,}5x10^{-3})^2}{4} = 7{,}3062x10^{-4} m^2$

$$\dot{m}_s = 1{,}80 \times 213 \times 7{,}3062x10^{-3} = 0{,}28\, kg/s$$

Portanto: $\dfrac{\partial m_{\cancel{V}C}}{\partial t} + 0{,}347 - 0{,}28 = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial m_{\cancel{V}C}}{\partial t} = 0{,}067\, kg/s$



Taxa média de variação da massa específica:

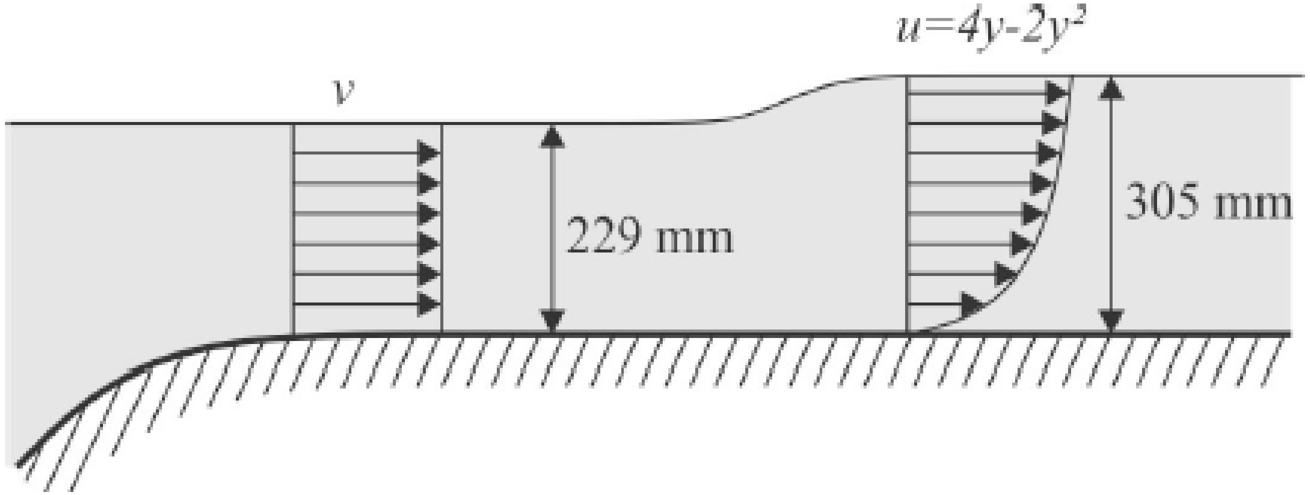
Como:

$$\frac{\partial \rho_{\cancel{V}C}}{\partial t} = \frac{\partial \left(\frac{m}{\cancel{V}}\right)_{\cancel{V}C}}{\partial t} = \frac{\partial m_{\cancel{V}C}}{\partial t} \cdot \frac{1}{\cancel{V}_{\cancel{V}C}} + m_{\cancel{V}C} \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{V_{\cancel{V}C}}\right)}{\partial t}$$

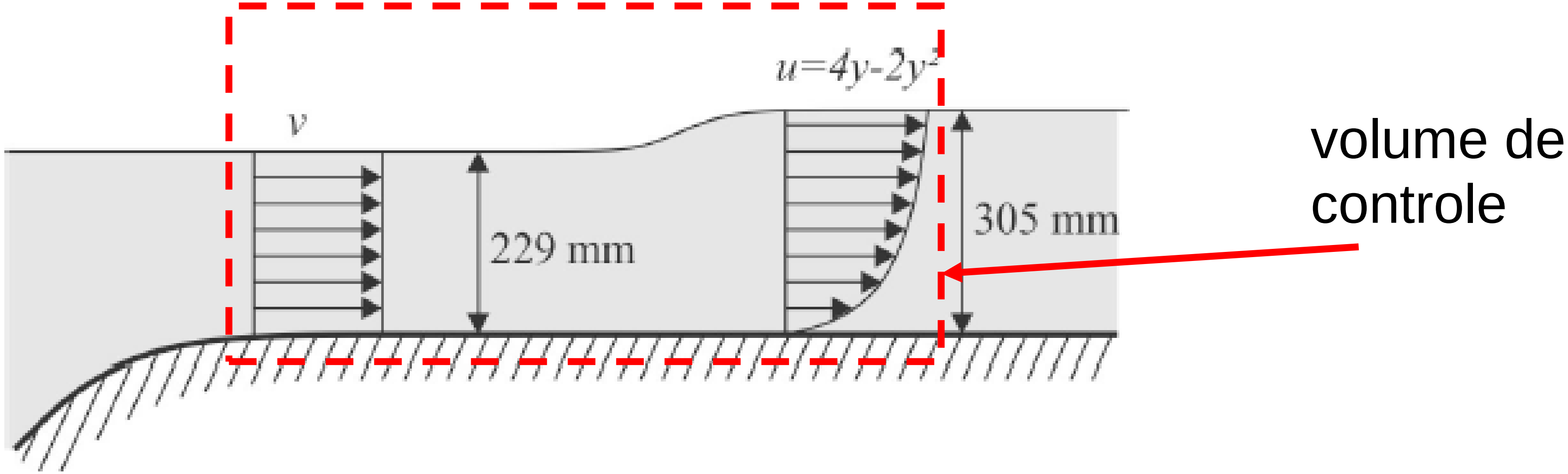
$$\frac{\partial \rho_{\cancel{V}C}}{\partial t} = \frac{\partial m_{\cancel{V}C}}{\partial t} \cdot \frac{1}{\cancel{V}_{\cancel{V}C}} = 0{,}067 \times \frac{1}{0{,}57} = 0{,}1175\, kg/m^3$$

Aula de exercícios – Equação da continuidade

3- A figura mostra a vista lateral da região de entrada de um canal que apresenta largura igual a 0,91 m. Observe que o perfil de velocidade na seção de entrada do canal é uniforme e que, ao longe, o perfil de velocidade é dado por $u = 4y - 2y^2$, no qual u está especificado em m/s e y em m. Nestas condições, determine o valor de v, de acordo com a figura.



Aula de exercícios – Equação da continuidade

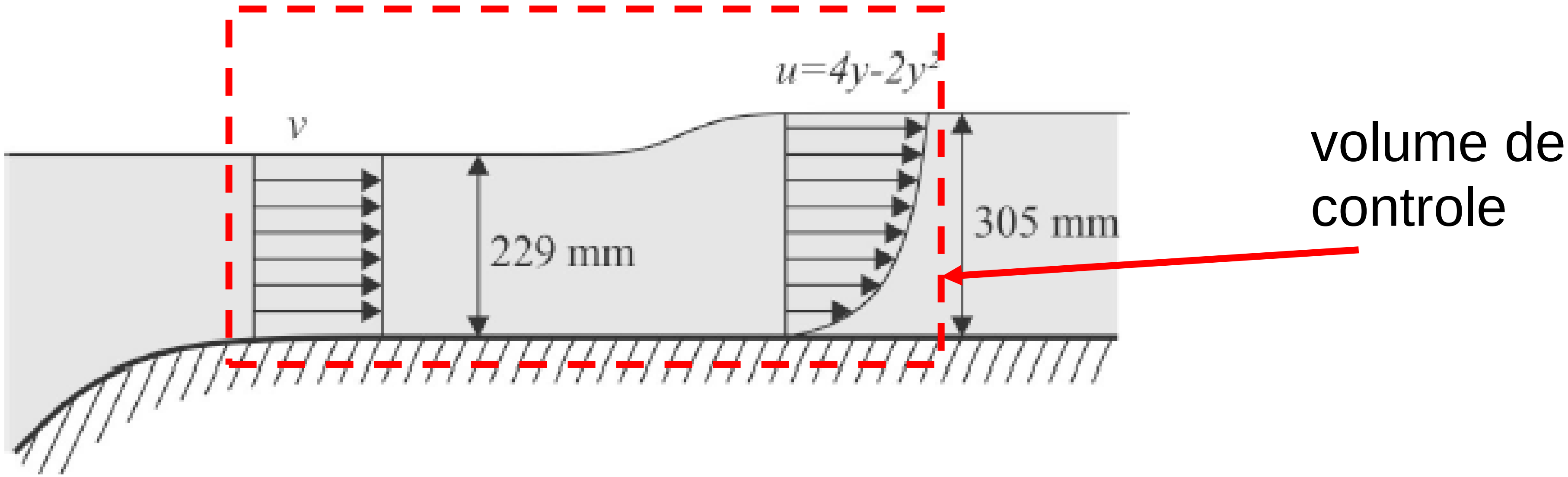


Aplicando a equação da continuidade para o volume de controle definido acima:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} d\forall + \rho \int_{SC} \vec{V}.\hat{n} dA = 0 \Rightarrow \frac{\partial m_{\forall C}}{\partial t} + \int \rho_s V_s dA_s - \int \rho_e V_e dA_e = 0$$

Assumindo regime permanente (derivada no tempo=0),
fluido incompressível ($\rho_e = \rho_s$); V_e=v=constante e dS_s=0,91dy :

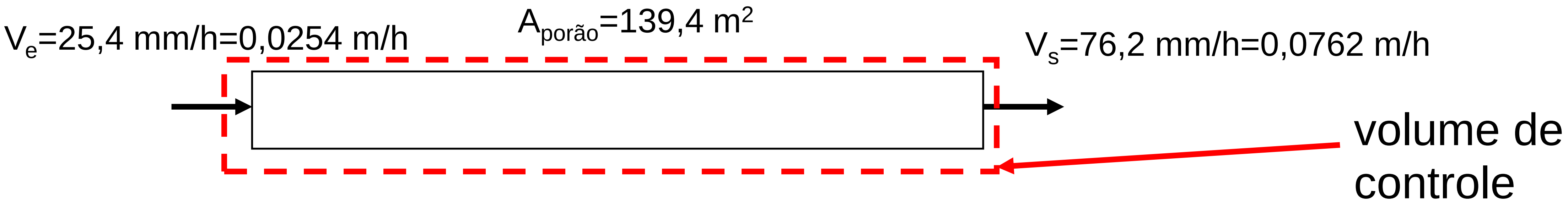
Aula de exercícios – Equação da continuidade



$$\int \rho_s V_s dA_s = \int \rho_e V_e dA_e \Rightarrow 0{,}91 \int_0^{0{,}305} (4y - 2y^2)dy = v \cdot A_e$$

$$0{,}91 \left(2y^2 - \frac{2}{3} y^3 \right) \Big|_0^{0{,}305} = v \cdot (0{,}91 * 0{,}229) \Rightarrow v = 0{,}7298\, m/s$$

4- A velocidade da superfície de água infiltrada no porão de um edifício é igual 25,4 mm/h. A área do chão do porão é 139,4 m^2. Qual deve ser a capacidade da bomba, em m^3/min, para reduzir o nível da água no porão com uma velocidade de 76,2 mm por hora.



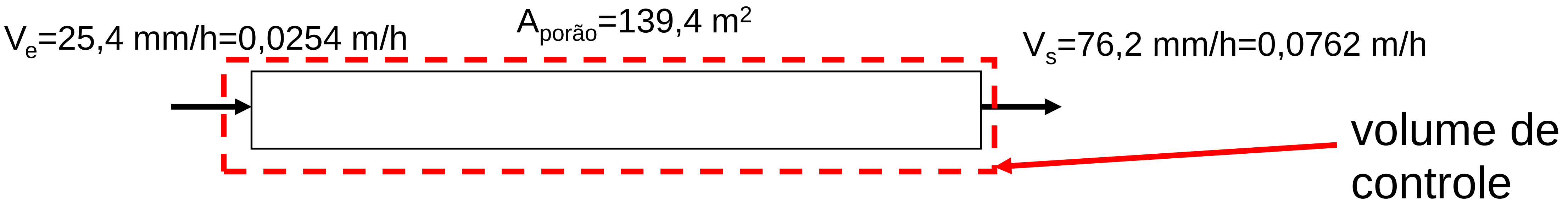
Aplicando a equação da continuidade para o volume de controle definido acima:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} d\forall + \rho \int_{SC} \vec{V}.\hat{n} dA = \dot{m}_{bomba} \Rightarrow \frac{\partial m_{\forall C}}{\partial t} + \int \rho_s V_s dA_s + \int \rho_e V_e dA_e = \dot{m}_{bomba}$$

Assumindo regime permanente (derivada no tempo=0), fluido incompressível ($\rho_e = \rho_s$) :

$$\dot{Q}_{bomba} = (V_s + V_e)A_{porão} = (0{,}0762 + 0{,}0254) \times 139{,}4 = 14{,}16\, m^3/h = 0{,}236\, m^3/min$$

4- A velocidade da superfície de água infiltrada no porão de um edifício é igual 25,4 mm/h. A área do chão do porão é 139,4 m^2. Qual deve ser a capacidade da bomba, em m^3/min, para reduzir o nível da água no porão com uma velocidade de 76,2 mm por hora.



Aplicando a equação da continuidade para o volume de controle definido acima:

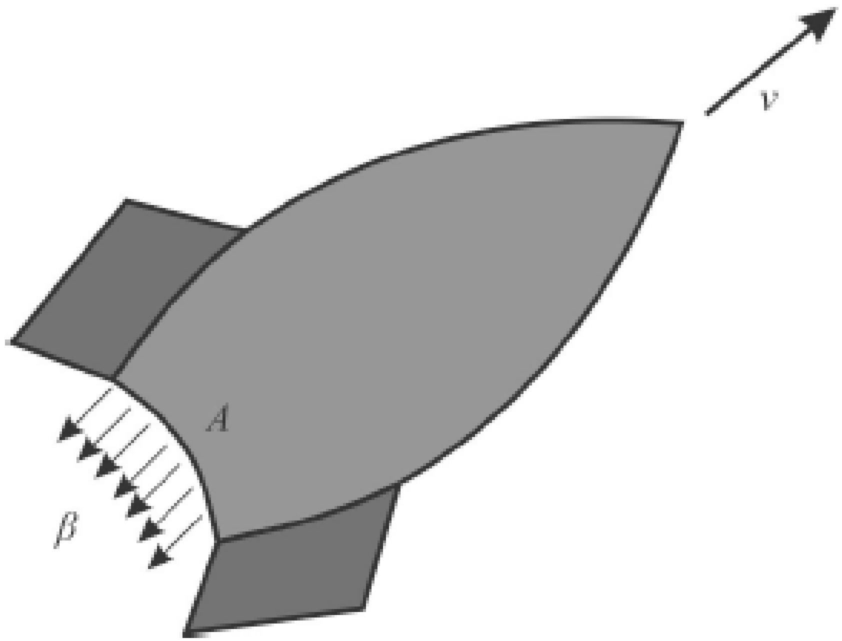
$$\rho \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} d\forall + \rho \int_{SC} \vec{V}.\hat{n}dA = 0 \Rightarrow \frac{\partial m_{\forall C}}{\partial t} + \int \rho_s V_s dA_s + \int \rho_e V_e dA_e = \dot{m}_{bomba}$$

Assumindo regime permanente (derivada no tempo=0), fluido incompressível ($\rho_e = \rho_s$) :

$$\dot{Q}_{bomba} = (V_s + V_e)A_{porão} = (0{,}0762 + 0{,}0254) \times 139{,}4 = 14{,}16\, m^3/h = 0{,}236\, m^3/min$$

Aula de exercícios – Equação da continuidade

5- O foguete da figura viaja a uma velocidade v e queima fluido combustível a uma vazão mássica β e tem inicialmente uma massa m_0. A boca de exaustão tem área A e os gases atravessam com massa específica de ρ. Determine a velocidade de saída v_s dos gases que um pesquisador no solo observa, através de um equipamento apropriado.'



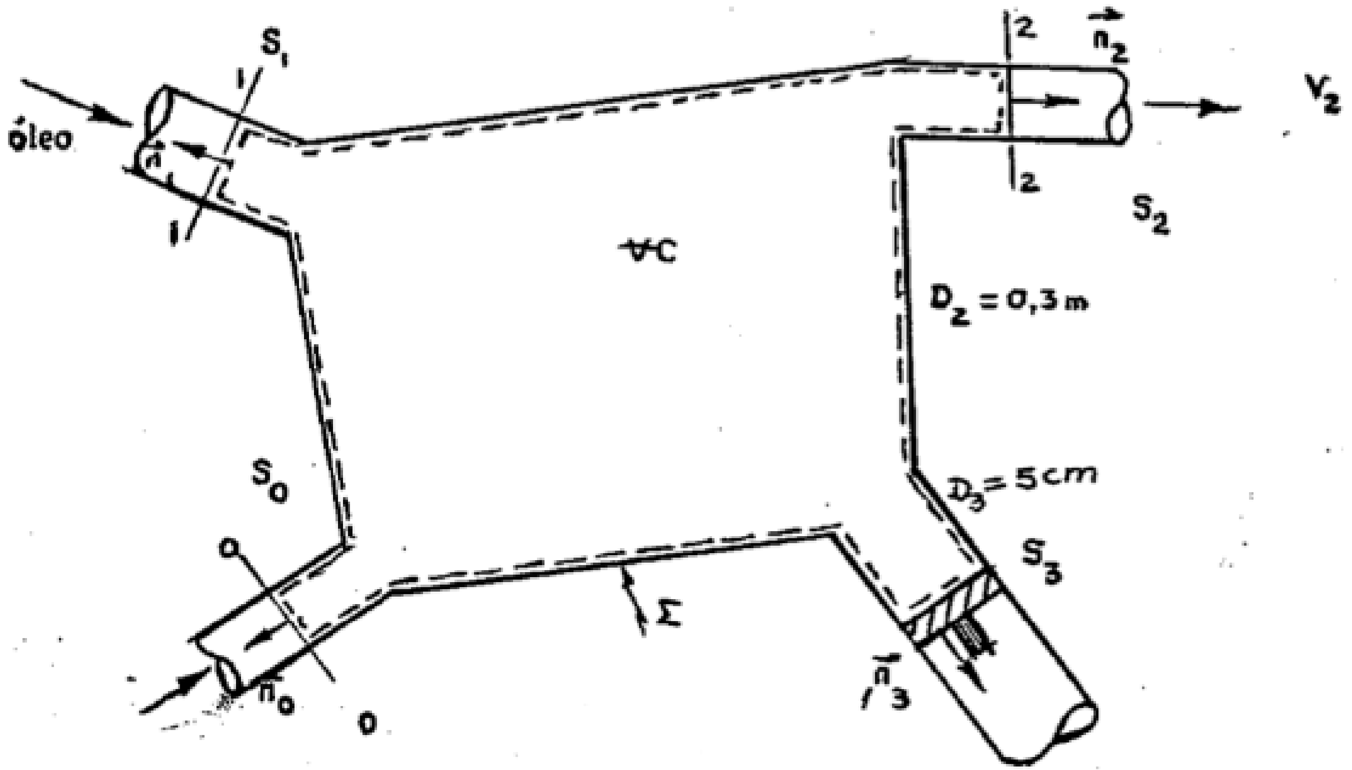
$$\dot{m}_{foguete} = \rho V_{gases,foguete} A \Rightarrow \beta = \rho V_{gases,foguete} A \Rightarrow V_{gases,foguete} = \frac{\beta}{\rho A}$$

Para um observador no solo:

$$V_{gases,solo} = V_{foguete} - V_{gases,foguete} = v - \frac{\beta}{\rho A}$$

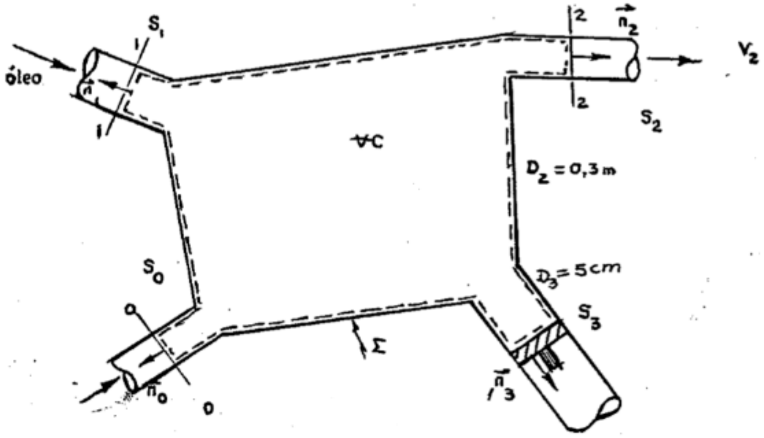
Aula de exercícios – Equação da continuidade

6- Pelas seções 0-0 e 1-1 de um misturador entram, respectivamente, água com a vasão de Q_0 = 0,3 ℓ/s e óleo com a vazão de Q_1 = 0,06 ℓ/s. Determine a velocidade média da mistura homogênea na seção 2-2 de diâmetro D_2 = 30 cm, para as condições seguintes: a) o pistão imóvel no cilindro e b) o pistão se desloca para o interior do cilindro com velocidade de 30 cm/s. Adotar o peso específico do óleo igual a 8000 N/m^3 e diâmetro do cilindro D_3 = 5 cm.



Aula de exercícios – Equação da continuidade

$\dot{Q}_0 = \dot{Q}_{H_2O} = 3x10^{-4}\,m^3/s$ $\dot{Q}_1 = \dot{Q}_{óleo} = 6x10^{-5}\,m^3/s$

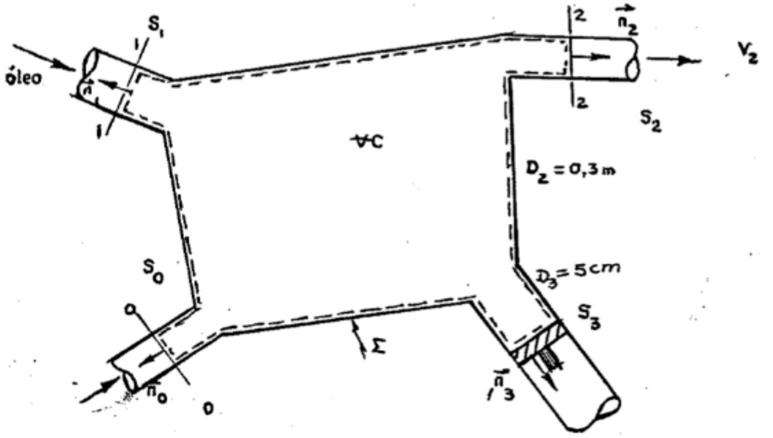


$\rho_{H_2O} = 9.800\ N/m^3$ $\rho_{óleo} = 8.000\ N/m^3$

$D_2 = 0{,}30\,m$

Inicialmente deve-se calcular a massa específica da mistura:

$$\rho_{mistura} = \frac{\rho_{H_2O}\cdot\dot{Q}_{H_2O} + \rho_{óleo}\cdot\dot{Q}_{óleo}}{\dot{Q}_{H_2O} + \dot{Q}_{óleo}} = 9.500\ N/m^3$$



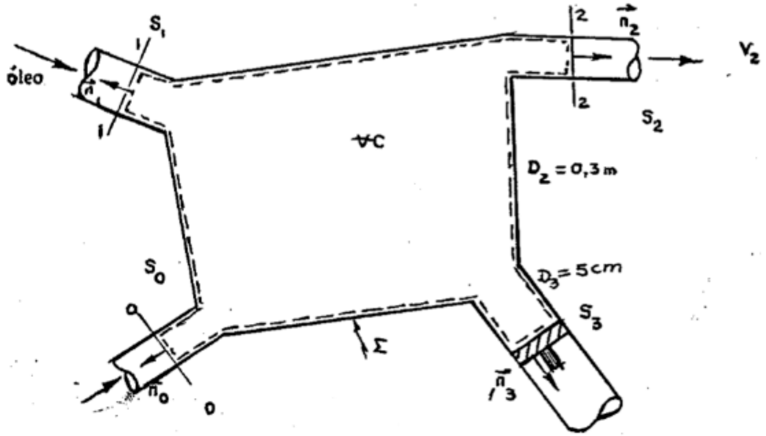
a) Para o volume de controle definido pelas linhas tracejadas na figura e o pistão imóvel, aplica-se a equação da continuidade:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} d\forall + \rho \int_{SC} \vec{V}.\hat{n}dA = 0 \Rightarrow \frac{\partial m_{\forall C}}{\partial t} + \int \rho_s V_s dA_s - \int \rho_e V_e dA_e = 0$$

Como o pistão está imóvel → volume constante: $\frac{\partial m_{\forall C}}{\partial t} = 0$

$$\rho_{mistura} \cdot V_{mistura} \cdot \frac{\pi D_2^2}{4} = \rho_{H_2O} \cdot \dot{Q}_{H_2O} + \rho_{óleo} \cdot \dot{Q}_{óleo} \Rightarrow V_{mistura} = 0{,}0051\, m/s$$

Aula de exercícios – Equação da continuidade



b) Para o volume de controle definido pelas linhas tracejadas na figura e o pistão móvel com V_3=0,30 m/s e D_3=0,05 m, aplica-se a equação da continuidade:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} d\forall + \rho \int_{SC} \vec{V}.\hat{n}dA = 0 \Rightarrow \frac{\partial m_{\forall C}}{\partial t} + \int \rho_s V_s dA_s - \int \rho_e V_e dA_e = 0$$

Como o pistão está móvel: $\dfrac{\partial m_{\forall C}}{\partial t} \neq 0$

$$\frac{\partial m_{\forall C}}{\partial t} = \rho_{mistura} \cdot (-V_3) \cdot \frac{\pi D_3^2}{4} = -5{,}5960 \ kg/s$$

$$\frac{\partial m_{\forall C}}{\partial t} + \rho_{mistura} \cdot V_{mistura} \cdot \frac{\pi D_2^2}{4} - \rho_{H_2O} \cdot \dot{Q}_{H_2O} - \rho_{óleo} \cdot \dot{Q}_{óleo} = 0$$

$$\Rightarrow V_{mistura} = 0{,}0134\, m/s$$