2 Modelos e semelhança

2.1 Modelos

Representação de um sistema físico (protótipo) que pode ser utilizado para predizer o comportamento de alguma característica do sistema. Podem ser matemáticos, computacionais, *físicos*, ...

2.2 Semelhança

Característica que faz com que os dados obtidos em testes com modelos possam ser transpostos por escala e predizer características do protótipo.

3 tipos:

a) **Geométrica:** dimensões¶

b) **Cinemática:** velocidades no escoamento‖

c) **Dinâmica:** forças aplicadas. Grupos adimensionais têm que ter o mesmo valor no modelo e no protótipo.

$$\text{Dinâmica} \quad \Rightarrow \quad \text{Cinemática} \quad \Rightarrow \quad \text{Geométrica}$$

2.3 Escalas

Razão entre o valor de uma grandeza no modelo e o valor da mesma grandeza no protótipo.

¶razão de escala linear, ângulos e direções do escoamento preservados.

‖partículas homólogas atingem pontos homólogos em tempos homólogos

$$\text{Comprimento: } \lambda_L = \frac{L_m}{L_p}, \qquad \text{Velocidade: } \lambda_V = \frac{V_m}{V_p}$$

$$\text{Massa específica: } \lambda_\rho = \frac{\rho_m}{\rho_p}$$

Exemplo: números de Reynolds iguais

$$Re_m = Re_p \quad \Rightarrow \quad \frac{V_m L_m}{\nu_m} = \frac{V_p L_p}{\nu_p} \quad \Rightarrow \quad \lambda_V = \frac{\lambda_\nu}{\lambda_L}$$

Exercício 2

Um hélice de 6 m de diâmetro desloca um barco com $V = 7{,}5\,\mathrm{m/s}$, girando a 120 rpm. Para um modelo geometricamente semelhante, escala 1:10, usado para medir a força axial F, determine qual a velocidade e rotação do modelo, V_m e n_m, para que haja semelhança completa. Nessa condição, qual a escala das forças? *Dado:* $F = f(\rho, V, D, n, g)$.

Solução: do exercício 1, $\dfrac{F}{\rho V^2 D^2} = \phi\left(\dfrac{nD}{V}, \dfrac{gD}{V^2}\right)$

Igualando os adimensionais para semelhança completa:

$$\frac{n_m D_m}{V_m} = \frac{n_p D_p}{V_p} \Rightarrow \lambda_n = \frac{\lambda_V}{\lambda_D}; \qquad \frac{\cancel{g} D_m}{V_m^2} = \frac{\cancel{g} D_p}{V_p^2} \Rightarrow \lambda_V = \lambda_D^{1/2}$$

$$\lambda_D = \frac{1}{10} \Rightarrow \lambda_V = \sqrt{\frac{1}{10}}; \qquad V_m = \lambda_V V_p = \sqrt{\frac{1}{10}} \times 7{,}5 = 2{,}37\,\mathrm{m/s}$$

$$\lambda_n = \frac{\lambda_D^{1/2}}{\lambda_D} = \lambda_D^{-1/2} = \sqrt{10} \qquad n_m = \lambda_n n_p = \sqrt{10} \times 120 = 379\,\mathrm{rpm}$$

$$\frac{F_m}{\cancel{\rho_m} V_m^2 D_m^2} = \frac{F_p}{\cancel{\rho_p} V_p^2 D_p^2} \Rightarrow \lambda_F = \lambda_V^2 \lambda_D^2 = \left(\lambda_D^{1/2}\right)^2 \lambda_D^2 = \lambda_D^3 = \frac{1}{1000}$$

Exercício 3

A queda de pressão num escoamento permanente incompressível viscoso através de um tubo retilíneo horizontal é função da massa específica, ρ, velocidade média do escoamento, $\bar{V}$, diâmetro do tubo, D, comprimento do tubo, ℓ, viscosidade dinâmica do fluido, μ e rugosidade média da parede interna do tubo, ε. Expresse esta relação funcional em forma adimensional.

Solução: $\Delta p = f(\rho, \bar{V}, D, \ell, \mu, \varepsilon)$

$\boxed{1}$ $\Delta p, \rho, \bar{V}, D, \ell, \mu, \varepsilon \quad \{n = 7\}$

$\boxed{2}$ Usaremos MLt $\{r = 3\}$

$\boxed{3}$ $\Delta p \doteq \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Lt}^2};\ \rho \doteq \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}^3};\ \bar{V} \doteq \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{t}};\ D \doteq \mathrm{L};\ \ell \doteq \mathrm{L};\ \mu \doteq \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Lt}};\ \varepsilon \doteq \mathrm{L}$

Matriz dimensional:

	Δp	ρ	$\bar{V}$	D	ℓ	μ	ε
M	1	1	0	0	0	1	0
L	-1	-3	1	1	1	-1	1
t	-2	0	-1	0	0	-1	0

$(m = \text{posto} = 3)$

$\boxed{4}$ Usaremos ρ, $\bar{V}$ e D

$\boxed{5}$ $\{n - m = 4 \text{ eqs.}\}$

$$\Pi_1 = \Delta p\, \rho^a \bar{V}^b D^c = (\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{t}^{-2})(\mathrm{ML}^{-3})^a(\mathrm{Lt}^{-1})^b(\mathrm{L})^c = \mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{t}^0$$

$[\mathrm{M}]$: $1 + a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -1$

$[\mathrm{L}]$: $-1 - 3a + b + c = 0$

$[\mathrm{t}]$: $-2 - b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -2$

Substituindo os valores de b e c na eq. de L: $c = 1 + 2 - 3 = 0$

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho V^2}$$

$\Pi_2 = \ell\, \rho^a \bar{V}^b D^c = (\mathrm{L})(\mathrm{ML}^{-3})^a(\mathrm{Lt}^{-1})^b(\mathrm{L})^c = \mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{t}^0$

[M]: $a = 0$

[L]: $-1 - 3a + b + c = 0$

[t]: $-b = 0$

Substituindo os valores de a e b na eq. de L: $c = 1$

$$\Pi_2 = \frac{\ell}{D}$$

$\Pi_3 = \mu\, \rho^a \bar{V}^b D^c = (\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{t}^{-1})(\mathrm{ML}^{-3})^a(\mathrm{Lt}^{-1})^b(\mathrm{L})^c = \mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{t}^0$

[M]: $1 + a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -1$

[L]: $-1 - 3a + b + c = 0$

[t]: $-1 - b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -1$

Substituindo os valores de a e b na eq. de L: $c = 1 + 1 - 3 = -1$

$$\Pi_3 = \frac{\mu}{\rho V D}$$

$\Pi_4 = \varepsilon\,\rho^a \bar{V}^b D^c = (\mathrm{L})(\mathrm{ML}^{-3})^a(\mathrm{Lt}^{-1})^b(\mathrm{L})^c = \mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{t}^0$

[M]: $a = 0$

[L]: $-1 - 3a + b + c = 0$

[t]: $-b = 0$

Substituindo os valores de a e c na eq. de L: $c = 1$

$$\Pi_4 = \frac{\varepsilon}{D}$$

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = \phi\left(\frac{\ell}{D}, \frac{\mu}{\rho V D}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$