Análise Dimensional, Semelhança e Modelos

1 Análise dimensional (A.D.)

- Ligada à abordagem experimental
- Planejamento e execução de experimentos; interpretação e correlação dos resultados obtidos
- Relação entre modelo e protótipo
- Aplicação não é restrita à Mecânica dos Fluidos

Relevância da A.D. – exemplo:

Determinação da força de arrasto no escoamento ao redor de uma automóvel, a partir do conhecimento das condições do escoamento*.

Parâmetros importantes:

$$F_a = f\left(D, V, \rho, \mu\right)$$

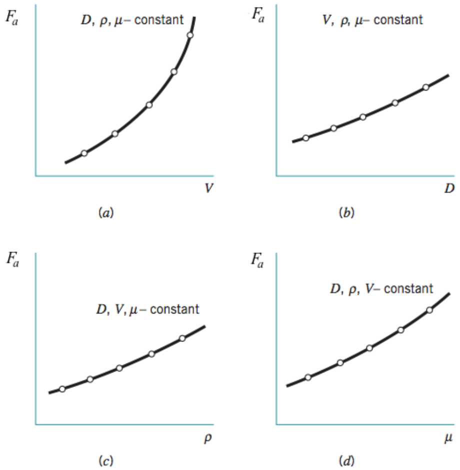
F_a: força de arrasto
D: diâmetro
V: velocidade
μ: viscosidade dinâmica
ρ: massa específica

Como determinar f?

---

*Falar sobre túnel de vento

Solução óbvia: investigar como F_a varia com cada parâmetro, mantendo os outros constantes.



Considerando 10 valores diferentes para cada parâmetro, teríamos 10^4 experimentos†.

- Custo do equipamento;
- Como combinar os resultados?

†Estimando 5min/experimento, total de 35 dias ininterruptos.

A A.D. mostra que podemos agrupar as variáveis em duas combinações (ou grupos) adimensionais:

$$\frac{F_a}{\rho V^2 D^2} = \phi\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)$$

A base para a simplificação são as dimensões envolvidas (MLt ou FLt).

1.1 Teorema Π de Buckingham

"Dada uma relação entre n parâmetros da forma $g(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0$, então os n parâmetros podem ser agrupados em $n - m$ razões independentes adimensionais, ou parâmetros Π, que podem ser expressos em forma funcional por

$$G(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-m}) = 0$$

$$\text{ou} \qquad \Pi_1 = G_1(\Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_{n-m}).$$

O número m é usualmente, mas nem sempre, igual ao número mínimo r de dimensões independentes necessárias para especificar as dimensões de todos os parâmetros $q_1, q_2, \ldots, q_n$."

O teorema[‡] não prevê a forma de G ou G_1, que deve ser determinada experimentalmente.

Determinação dos grupos Π

1. Liste os parâmetros envolvidos. $\{n\}$
2. Selecione um conjunto de dimensões fundamentais (primárias) – MLt ou FLt $\{r\}$.

[‡]Este teorema é baseado no conceito de homogeneidade dimensional.

3. Liste as dimensões dos parâmetros em termos das dimensões primárias (matriz dimensional).

4. Selecione da lista um número m de parâmetros, chamados de *repetentes*, que, em conjunto, incluam todas as dimensões primárias. Não selecione o parâmetro dependente. (m é igual ao posto da matriz dimensional)

5. Estabeleça equações dimensionais combinando os parâmetros repetentes com cada um dos remanescentes $\{n - m\text{eqs.}\}$.

6. Verifique se cada grupo obtido é adimensional.

Aplicando o método para o nosso problema:

$\boxed{1}$ $\quad F_a, D, V, \rho, \mu \quad \{n = 5\}$

$\boxed{2}$ $\quad$ Usaremos MLt $\{r = 3\}$

$\boxed{3}$ $\quad F_a \doteq \dfrac{\mathrm{ML}}{\mathrm{t}^2}; \quad D \doteq \mathrm{L}; \quad V \doteq \dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{t}}; \quad \mu \doteq \dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{Lt}}; \quad \rho \doteq \dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}^3}$

Matriz dimensional:

	F_a	D	V	ρ	μ
M	1	0	0	1	1
L	1	1	1	-3	-1
t	-2	0	-1	0	-1

$(m = \text{posto} = 3)$

$\boxed{4}$ $\quad$ Usaremos D, V e ρ

$\boxed{5}$ $\quad \{n - m = 2 \text{ eqs.}\}$

$$\Pi_1 = F_a D^a V^b \rho^c = (\mathrm{MLt}^{-2})(\mathrm{L})^a(\mathrm{Lt}^{-1})^b(\mathrm{ML}^{-3})^c = \mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{t}^0$$

[M]: $1 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -1$

[L]: $1 + a + b - 3c = 0$

[t]: $-2 - b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -2$

Substituindo os valores de b e c na eq. de L: $a = -1 + 2 - 3 = -2$

$$\Pi_1 = \frac{F_a}{\rho V^2 D^2}$$

$\Pi_2 = \mu D^a V^b \rho^c = (\mathrm{ML^{-1}t^{-1}})(\mathrm{L})^a(\mathrm{Lt^{-1}})^b(\mathrm{ML^{-3}})^c = \mathrm{M^0L^0t^0}$

[M]: $1 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -1$

[L]: $-1 + a + b - 3c = 0$

[t]: $-1 - b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -1$

Substituindo os valores de b e c na eq. de L: $a = 1 + 1 - 3 = -1$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D}$$

$\boxed{6}$ Usando FLt $\quad (\mathrm{M} = \mathrm{FL^{-1}t^2})$

$$\Pi_1 = \frac{F_a}{\rho V^2 D^2} = \frac{\mathrm{F}}{(\mathrm{FL}^{-4}\mathrm{t}^2)(\mathrm{Lt}^{-1})^2(\mathrm{L})^2} = \mathrm{F}^0\mathrm{L}^0\mathrm{t}^0 \quad \checkmark$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D} = \frac{\mathrm{FL}^{-2}\mathrm{t}}{(\mathrm{FL}^{-4}\mathrm{t}^2)(\mathrm{Lt}^{-1})(\mathrm{L})} = \mathrm{F}^0\mathrm{L}^0\mathrm{t}^0 \quad \checkmark$$

$$\therefore \quad \frac{F_a}{\rho V^2 D^2} = \phi_1\left(\frac{\mu}{\rho V D}\right)$$

Qualquer potência ou produto de adimensionais[§] também é adimensional.

$$\Pi_2' = \Pi_2^{-1} = \frac{\rho V D}{\mu}$$

$$\frac{F_a}{\rho V^2 D^2} = \phi\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right) \quad \textit{(}\phi\textit{ é determinado experimentalmente)}$$

[§]incluindo constantes numéricas

Exercício 1

A força axial exercida por um hélice, F, para deslocar um barco é função da massa específica do fluido, ρ, da velocidade do barco, V, do diâmetro do hélice, D, da rotação do hélice, n e da aceleração da gravidade, g. Encontre uma relação adimensional entre a força e os parâmetros das quais ela depende.

Solução:

$$F = f(\rho, V, D, n, g)$$

$\boxed{1}$ $\quad F, \rho, V, D, n, g \quad \{n = 6\}$

$\boxed{2}$ $\quad$ Usaremos MLt $\{r = 3\}$

$\boxed{3}$ $\quad F \doteq \frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{t}^2};\ \rho \doteq \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}^3};\ V \doteq \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{t}};\ D \doteq \mathrm{L};\ n \doteq \frac{1}{t};\ g \doteq \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{t}^2};$

Matriz dimensional:

	F	ρ	V	D	n	g
M	1	1	0	0	0	0
L	1	-3	1	1	0	1
t	-2	0	-1	0	-1	-2

$(m = \text{posto} = 3)$

$\boxed{4}$ Usaremos ρ, V e D

$\boxed{5}$ $\{n - m = 3 \text{ eqs.}\}$

$$\Pi_1 = F\,\rho^a \bar{V}^b D^c = (\mathrm{MLt}^{-2})(\mathrm{ML}^{-3})^a(\mathrm{Lt}^{-1})^b(\mathrm{L})^c = \mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{t}^0$$

[M]: $1 + a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -1$

[L]: $1 - 3a + b + c = 0$

[t]: $-2 - b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -2$

Substituindo os valores de b e c na eq. de L: $c = -1 + 2 - 3 = -2$

$$\Pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 D^2}$$

$\Pi_2 = n\,\rho^a \bar{V}^b D^c = (\mathrm{t}^{-1})(\mathrm{ML}^{-3})^a(\mathrm{Lt}^{-1})^b(\mathrm{L})^c = \mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{t}^0$

[M]: $a = 0$

[L]: $-3a + b + c = 0$

[t]: $-1 - b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -1$

Substituindo os valores de a e b na eq. de L: $c = 1$

$$\Pi_2 = \frac{nD}{V}$$

$\Pi_3 = g\,\rho^a \bar{V}^b D^c = (\mathrm{Lt}^{-2})(\mathrm{ML}^{-3})^a(\mathrm{Lt}^{-1})^b(\mathrm{L})^c = \mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{t}^0$

[M]: $a = 0$

[L]: $1 - 3a + b + c = 0$

[t]: $-2 - b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -2$

Substituindo os valores de a e b na eq. de L: $c = -1 + 2 = 1$

$$\Pi_3 = \frac{gD}{V^2}$$

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = \phi\left(\frac{nD}{V}, \frac{gD}{V^2}\right)$$

1.2 Grupos adimensionais importantes na MecFlu

Razão de forças, recebem nomes de cientistas.

Número de Reynolds $Re = \dfrac{\rho V L}{\mu} = \dfrac{\text{F. inércia}}{\text{F. viscosas}}$

Número de Euler $Eu = \dfrac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \dfrac{\text{F. pressão}}{\text{F. inércia}}$

Número de Froude $Fr = \dfrac{V}{\sqrt{gL}} = \dfrac{\text{F. inércia}}{\text{F. gravidade}}$

Número de Weber $We = \dfrac{\rho V^2 L}{\sigma} = \dfrac{\text{F. inércia}}{\text{F. tensão superficial}}$

Número de Mach $Ma = \dfrac{V}{c} = \dfrac{\text{F. inércia}}{\text{F. compressibilidade}}$

Número de Strouhal $St = \dfrac{\omega L}{V} = \dfrac{\text{F. acel. local}}{\text{F. acel. convectiva}}$

*Comentar sobre exemplo dos dinossauros.