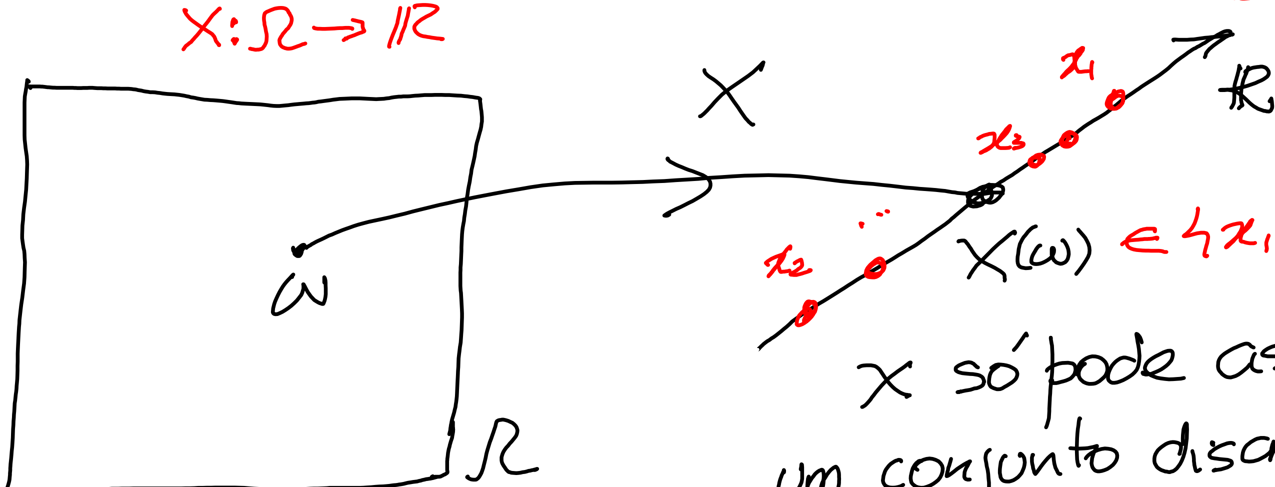
DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Vimos na aula passada:

Variáveis aleatórias Discretas

$X: \Omega \to \mathbb{R}$

Principal exemplo:
Binomial
$Bin(n,p)$



$X(\omega) \in \{x_1, x_2, \dots\}$

Ω = "espaço amostral"

X só pode assumir um conjunto discreto de valores

finito $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$

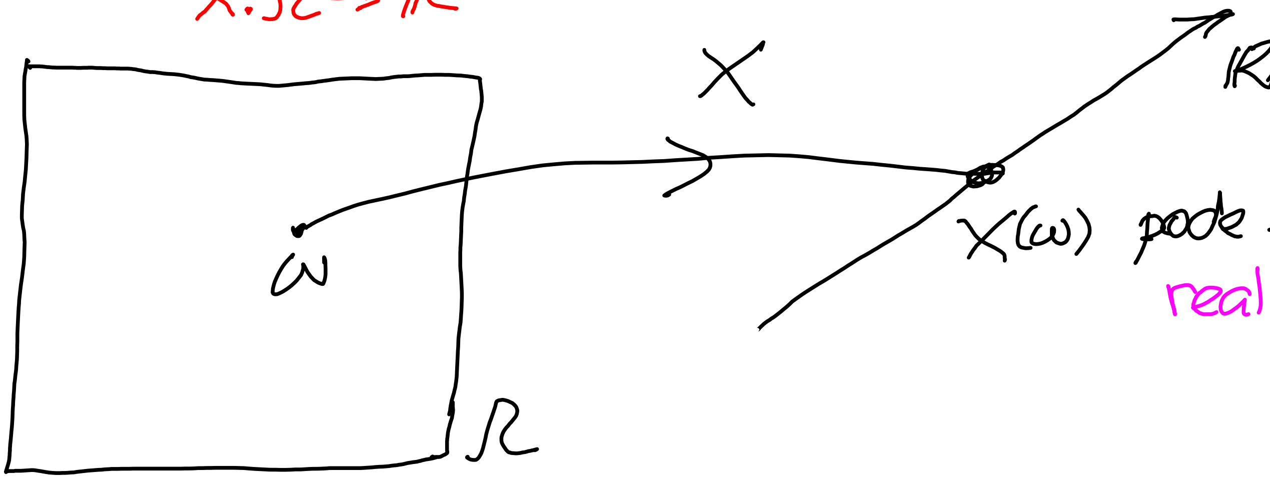
ou infinito $\{x_1, x_2, \dots\}$

Aula de Hoje:

Variáveis aleatórias contínuas

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

Principal exemplo:
Normal
$N(\mu, \sigma^2)$

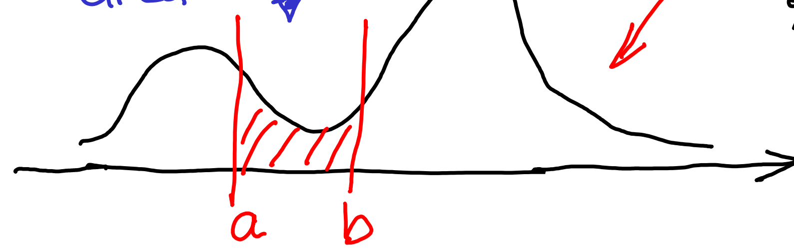


$X(\omega)$ pode ser qualquer número real num intervalo.

f = "função densidade de probabilidade de X"

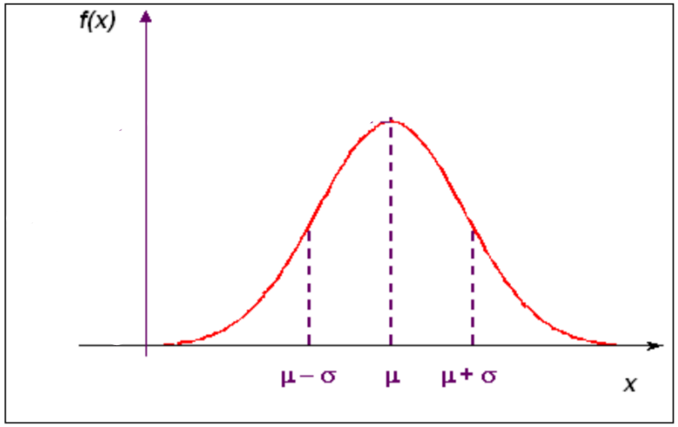
$P(a \leq X \leq b) =$ área

$f \geq 0$



Distribuição Normal

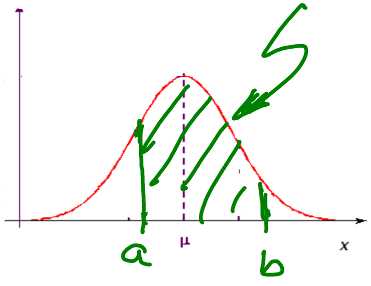
Propriedades de $X \sim N(\mu\,;\,\sigma^2)$



- $E(X) = \mu$ (média ou valor esperado);
- $Var(X) = \sigma^2$ (e portanto, $DP(X) = \sigma$);

$P(a \leq X \leq b) =$

Área



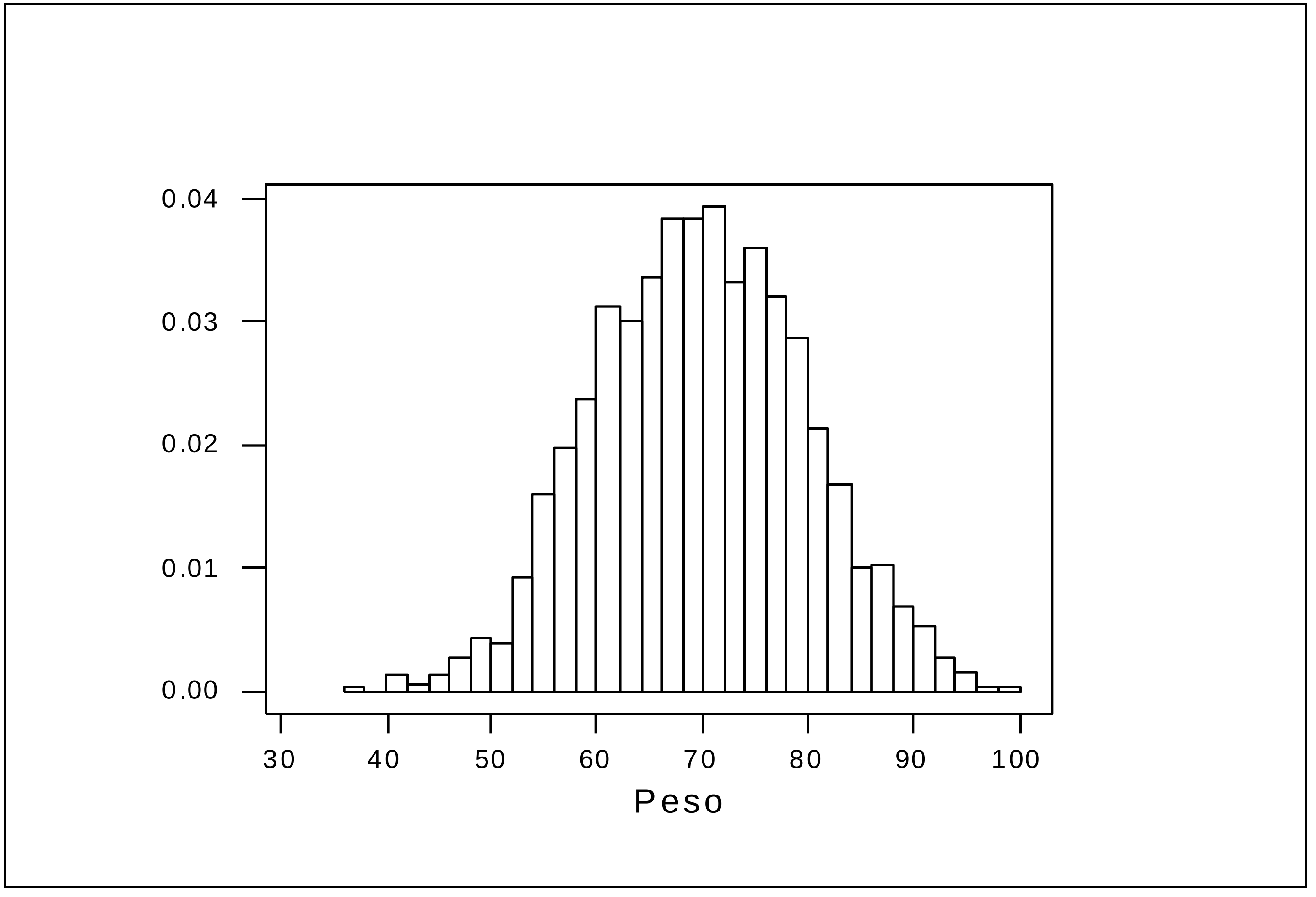
Normal "Padrão" Z

$Z \sim N(0\,;\,1)$

A distribuição normal é uma das mais importantes em situações do "mundo real."

Exemplo : Observamos o peso, em *kg*, de 1500 pessoas adultas selecionadas, ao acaso, em uma população.

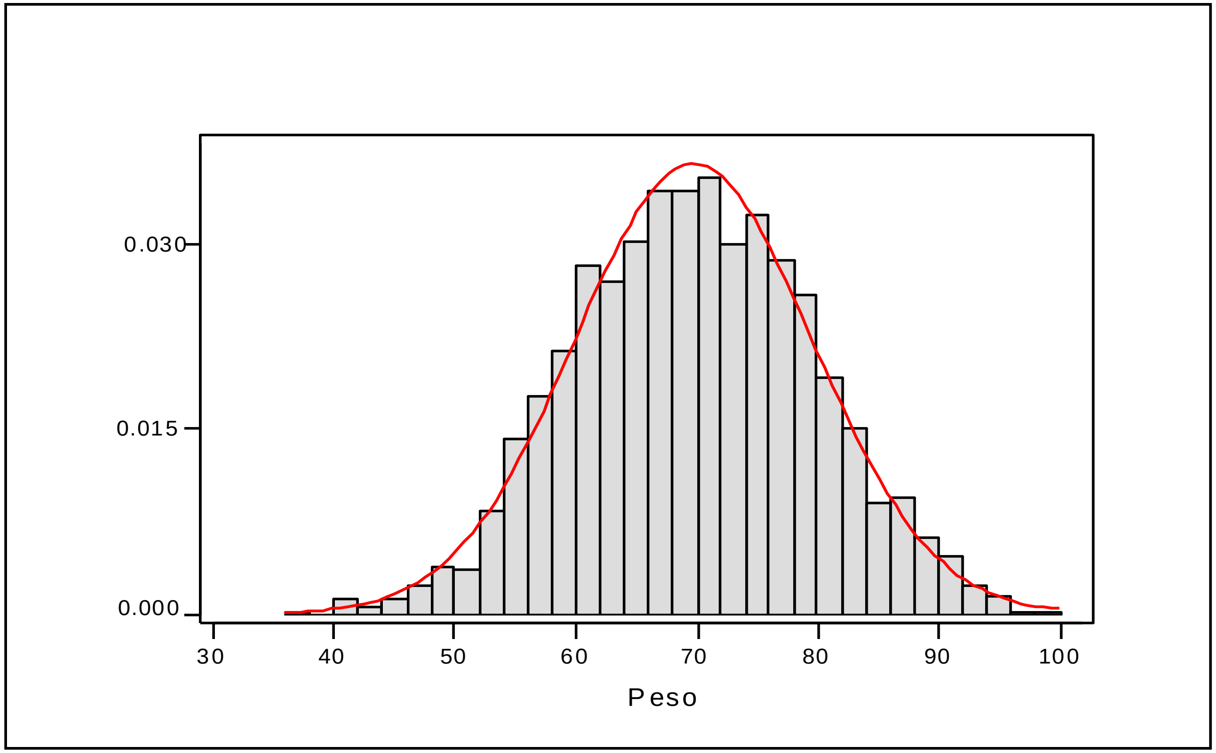
O histograma por densidade dos pesos é o seguinte:



Vamos definir a variável aleatória

X: peso, em kg, de uma pessoa adulta escolhida, ao acaso, **da população**.

Como se distribuem os valores da variável aleatória X, isto é, qual é a **distribuição de probabilidades** de X ?



A curva contínua da figura denomina-se ***curva Normal*** (ou ***curva de Gauss***).

A distribuição Normal é uma das mais importantes distribuições <u>contínuas</u> de probabilidade pois:

- Muitos fenômenos aleatórios comportam-se próximos a essa distribuição:
    1. altura;
    2. pressão sangüínea;
    3. Peso

    etc...

- Pode ser utilizada para calcular, de forma aproximada, probabilidades para outras distribuições, como por exemplo, para a distribuição binomial.

"Teorema Limite Central"

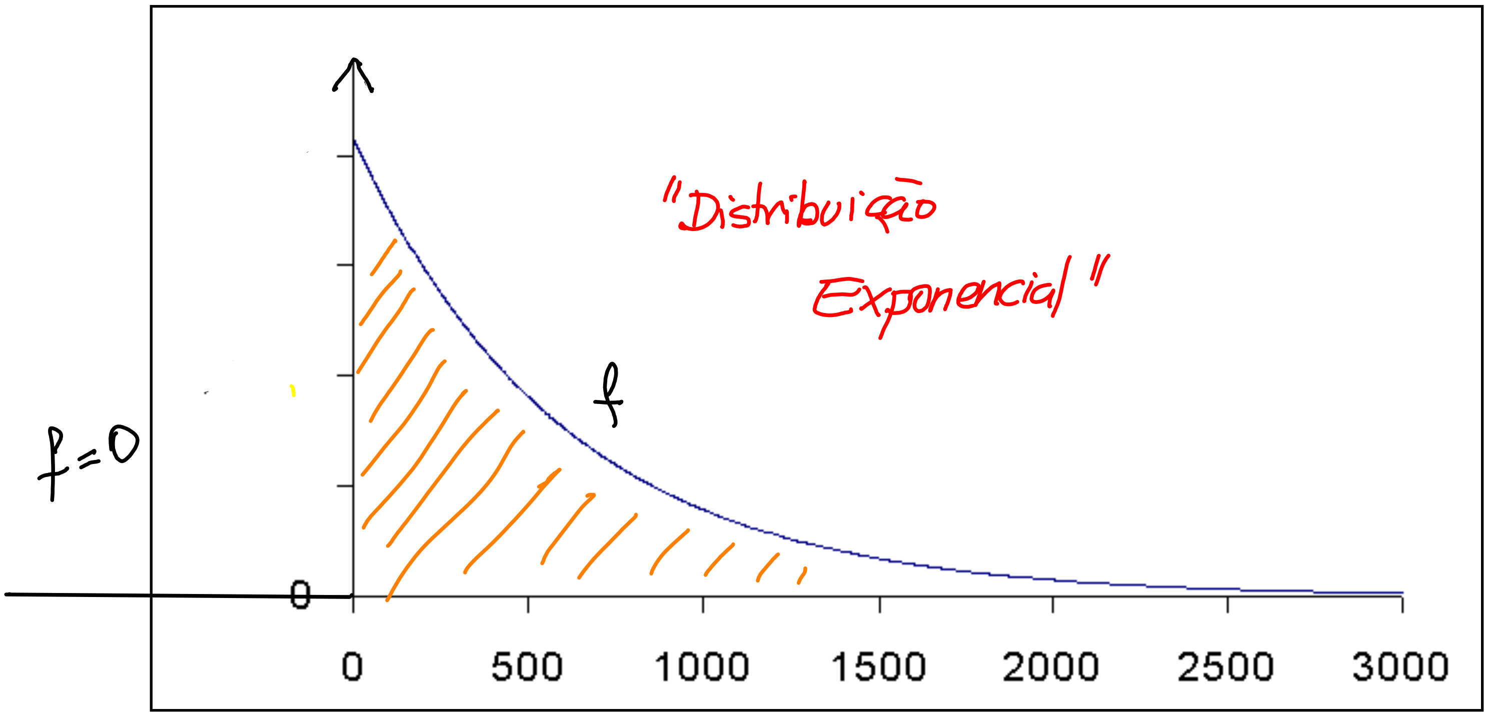
→ O modelo normal de probabilidade foi desenvolvido por ***Carl Friedrich Gauss***

Há outras distribuições contínuas importantes.

Exemplo: Considere a variável Exponencial.

Y: Duração, em horas, de uma lâmpada de certa marca, selecionada ao acaso.

A experiência sugere que esta distribuição deve ser *assimétrica*: grande proporção de valores entre 0 e 500 horas e pequena proporção de valores acima de 1500 horas.



Variável Aleatória Contínua

- Assume valores num intervalo de números reais.
- Não é possível listar, individualmente, todos os possíveis valores da variável aleatória contínua.
- Associamos probabilidades a intervalos de valores da variável.

Propriedades

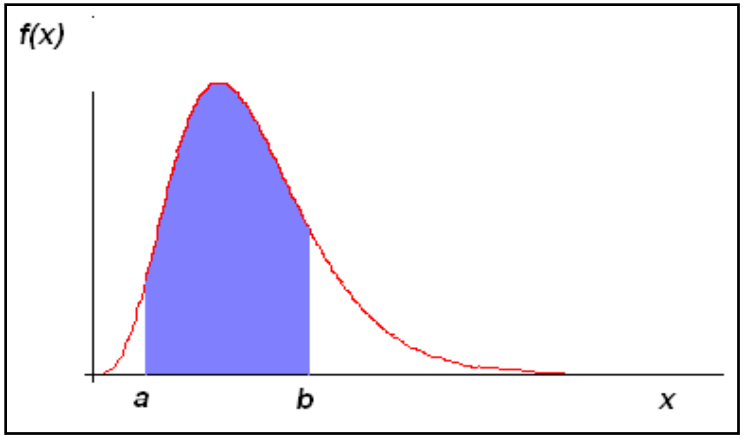
Uma *v.a.* X contínua é caracterizada por sua ***função densidade de probabilidade f(x)***, com as propriedades:

(i) A área sob a curva de densidade $f(x)$ é 1;

(ii) $P(a \leq X \leq b)$ = área sob a curva da densidade $f(x)$ e acima do eixo x, entre os pontos a e b;

(iii) $f(x) \geq 0$, para todo x;

(iv) $P(\underbrace{X = x_0}_{\text{"área de uma linha"}}) = 0$, para x_0 fixo.



Assim,

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b).$$

A DISTRIBUIÇÃO NORMAL
(ou *Gaussiana*)

A *v. a.* X tem <u>distribuição Normal</u> com parâmetros μ e σ^2 se sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

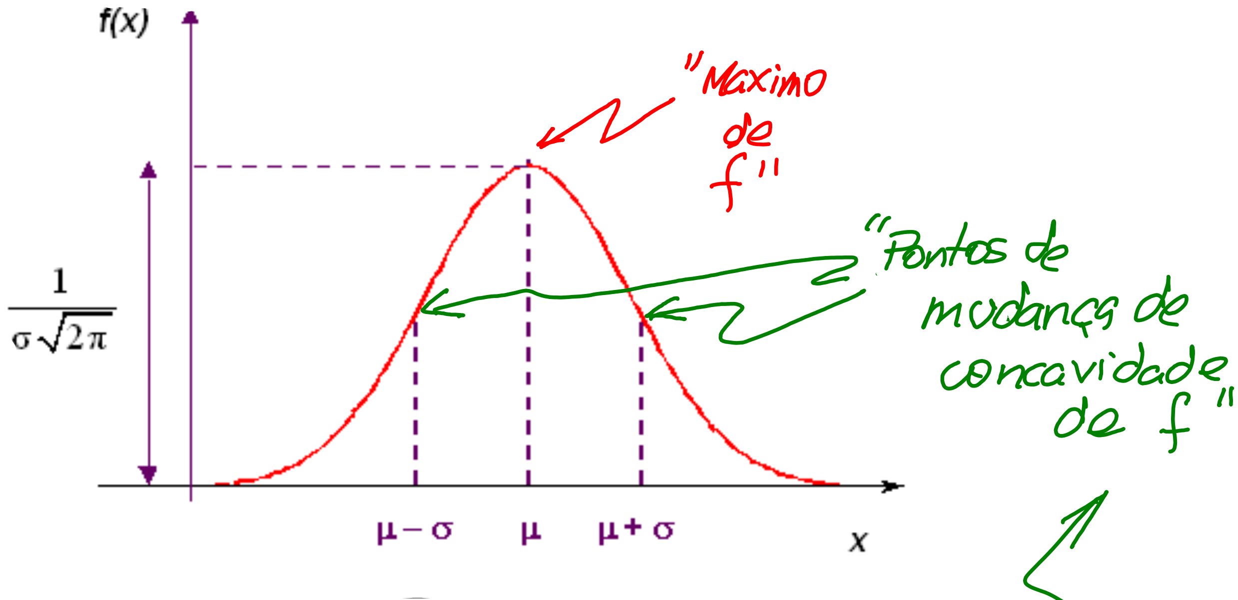
Pode ser mostrado que:

1. μ é o valor esperado (média) de X, com $-\infty < \mu < \infty$;

2. σ^2 é a variância de X, com $\sigma^2 > 0$.

Notação : $X \sim N(\mu\,;\,\sigma^2)$

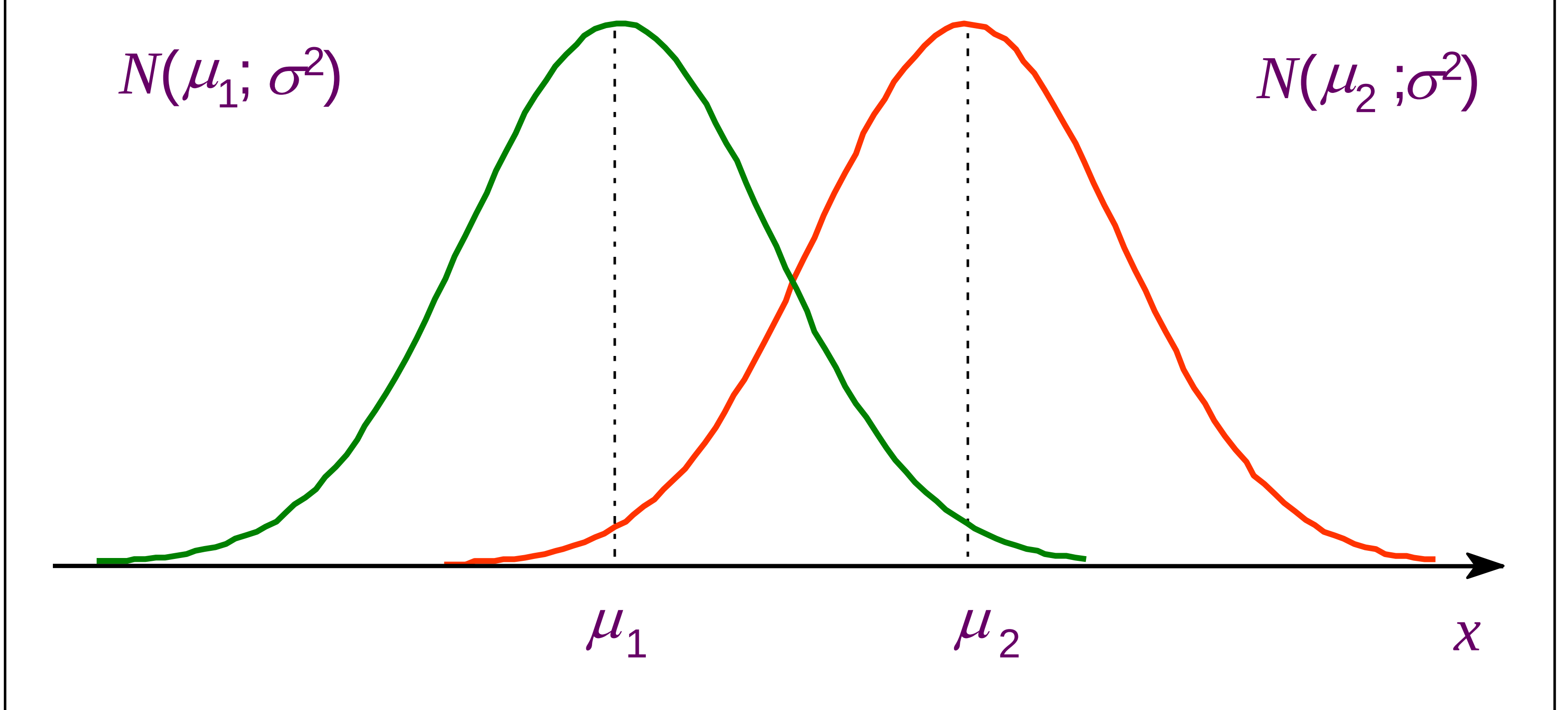
Propriedades de $X \sim N(\mu\,;\,\sigma^2)$



- $E(X) = \mu$ (média ou valor esperado);
- $Var(X) = \sigma^2$ (e portanto, $DP(X) = \sigma$);
- $f(x) \to 0$, quando $x \to \pm\infty$;
- $x = \mu$ é ponto de máximo de $f(x)$;
- $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são pontos de inflexão de $f(x)$;
- a curva Normal é simétrica em torno da média μ.

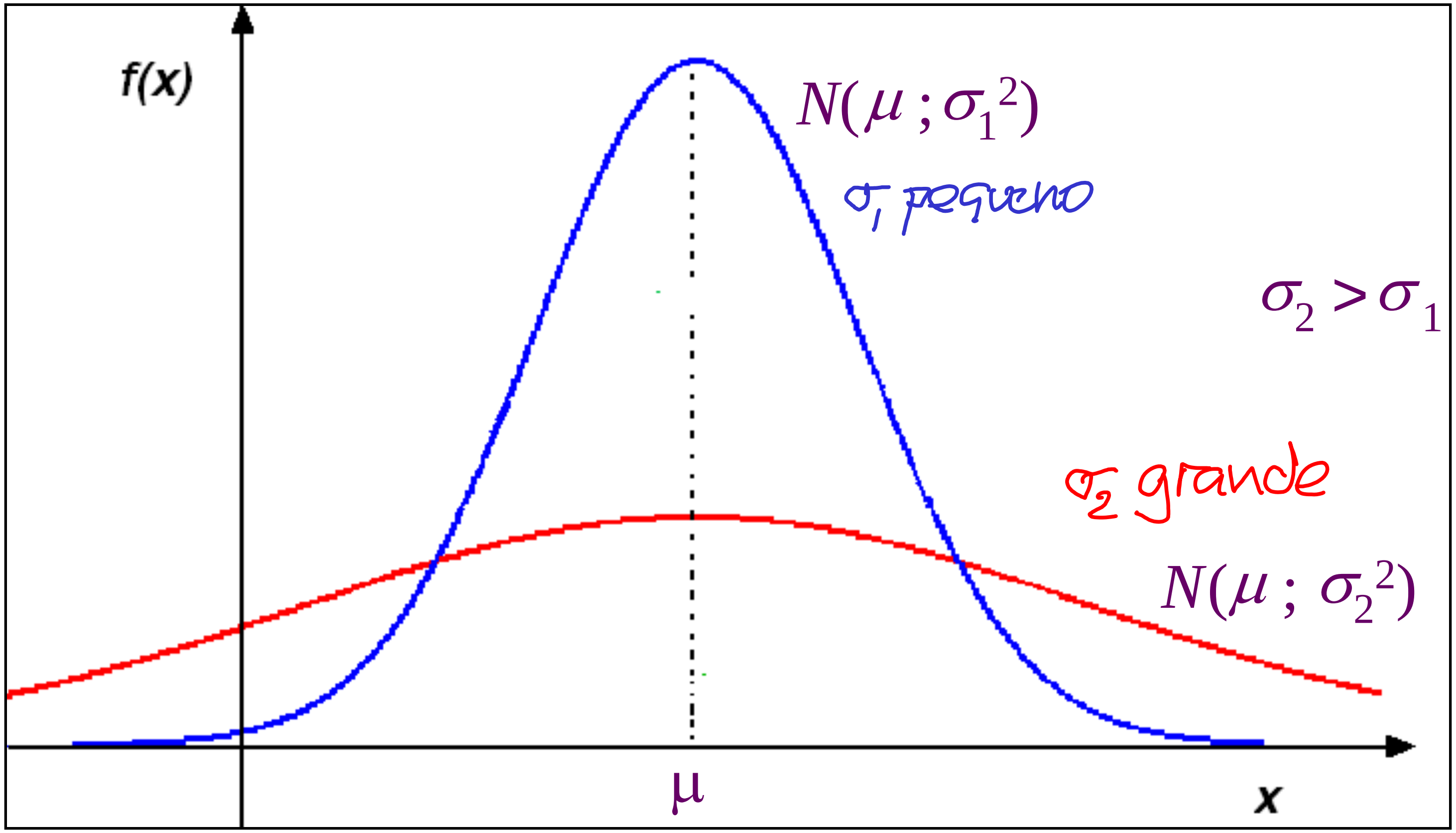
Parâmetro μ = "Posição do ponto de máximo"

μ = Valor médio



Curvas Normais com <u>mesma variância</u> σ^2
mas <u>médias diferentes</u> ($\mu_2 > \mu_1$).

Parâmetro σ mede quão "achatada" é a distribuição



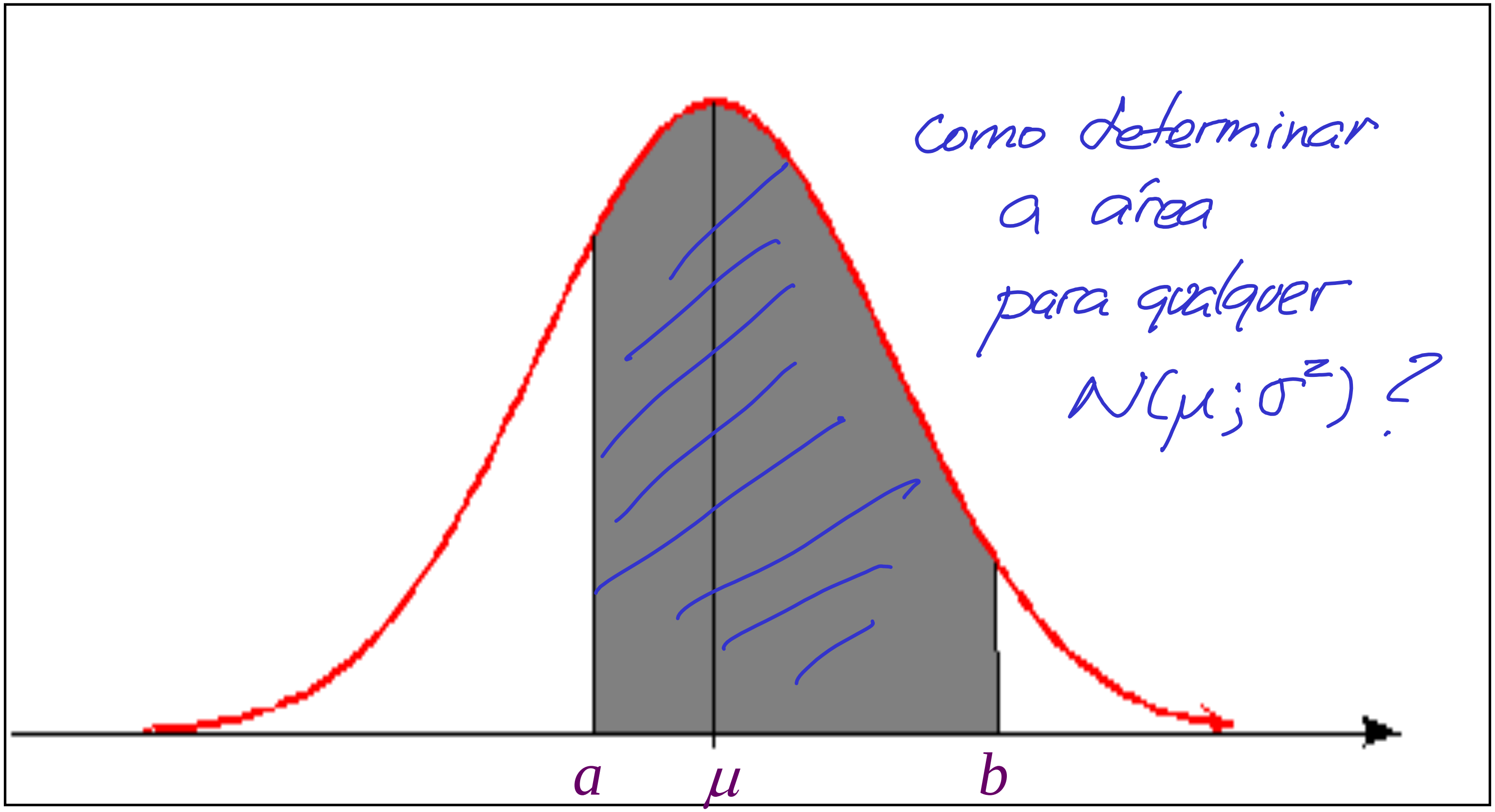
Curvas Normais com <u>mesma média μ</u>
mas com <u>variâncias diferentes</u> ($\sigma_2 > \sigma_1$).

Cálculo de probabilidades

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$$

$$\Downarrow$$

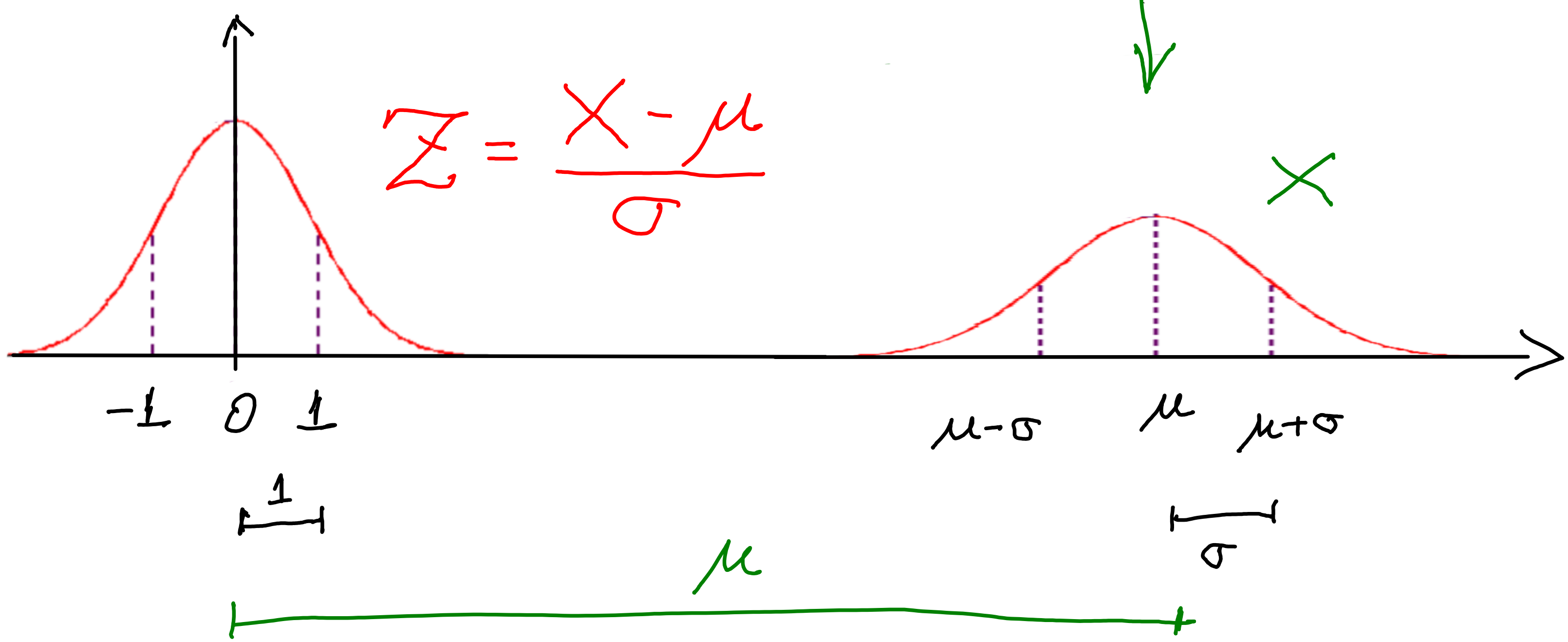
Área sob a curva e acima do eixo horizontal (x) entre a e b.



Basta saber determinar a área para um caso particular: Normal Padrão $Z \sim N(0,1)$

Suponha $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$



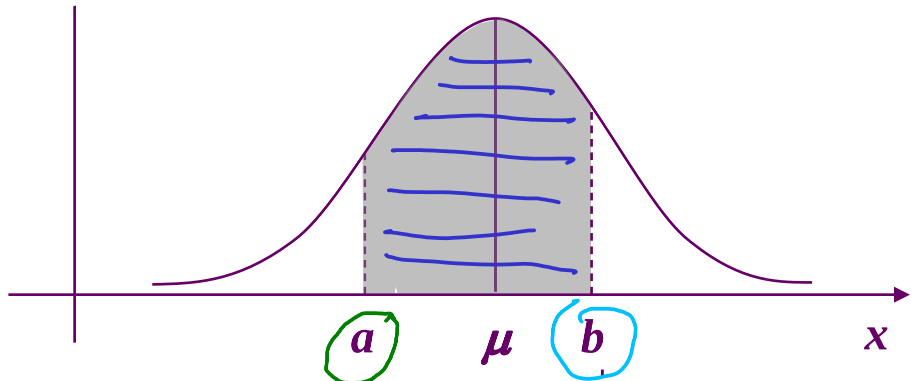
Se $X \sim N(\mu\,;\sigma^2) \implies \boxed{Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}} \sim N(0,1)$

$$P(a \le X \le b)$$

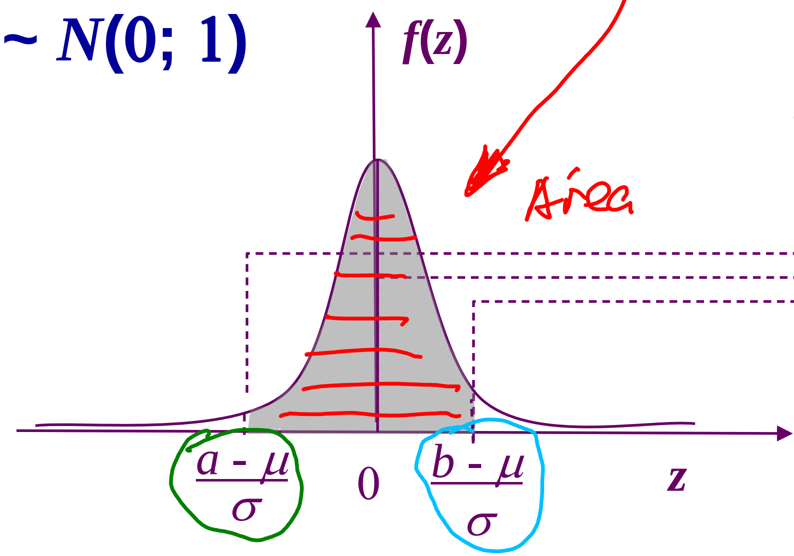
$$=$$

$$P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$X \sim N(\mu\,;\sigma^2)$



$Z \sim N(0;1)$



"Mesmas áreas"

(apesar de não parecer na figura...)

A *v.a.* $\boldsymbol{Z \sim N(0;1)}$ denomina-se ***normal padrão*** ou ***reduzida***.

Portanto,

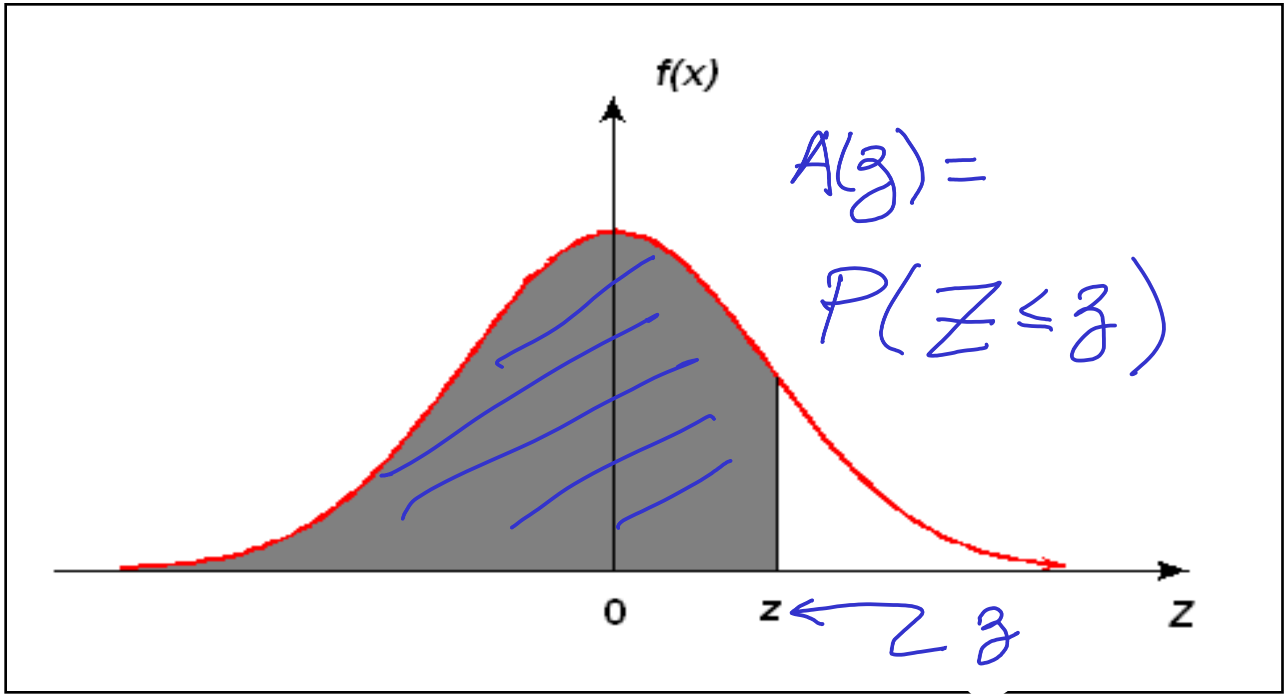
$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

Dada a *v.a.* $\boldsymbol{Z \sim N(0\,;\,1)}$ podemos obter a *v.a.* $\boldsymbol{X \sim N(\mu\,;\,\sigma^2)}$ através da transformação inversa

$$\boldsymbol{X = \mu + Z \times \sigma} \iff Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

ou

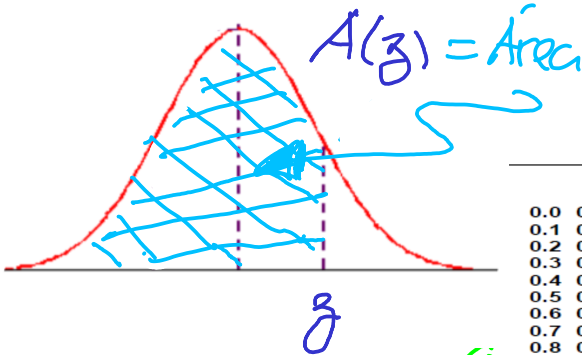
USO DA TABELA NORMAL PADRÃO



Denotamos : $\boldsymbol{A(z) = P(Z \leq z)}$, para $z \geq 0$.

Tabela

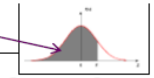
Neste curso vamos usar a seguinte tabela de $Z \sim N(0,1)$



segunda casa decimal de z

Parte inteira e primeira decimal de z

Distribuição Normal : Valores de $P(Z \leq z) = A(z)$



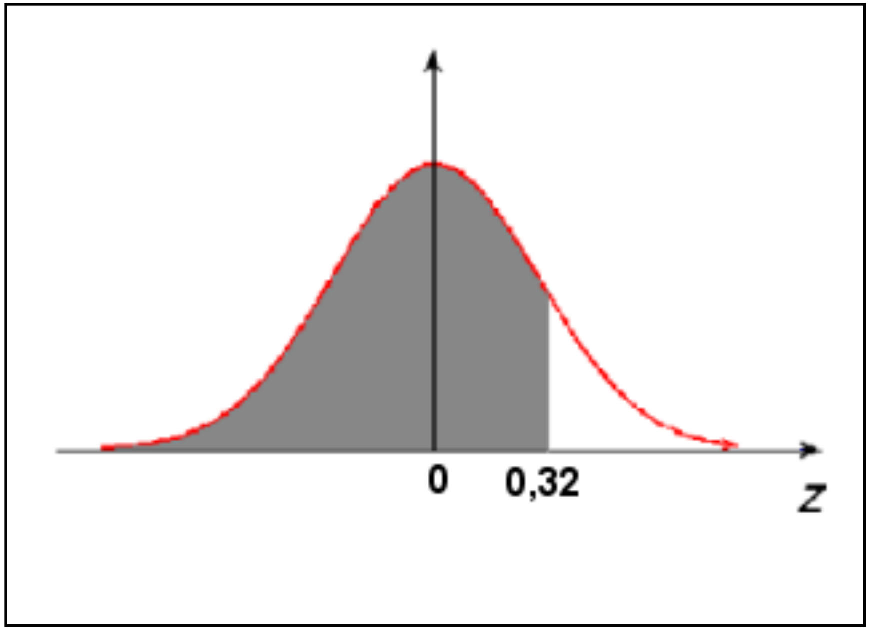
Segunda decimal de z

Parte inteira e primeira decimal de z

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Exemplo: Seja $Z \sim N(0;\ 1)$, calcular

a) $P(Z \leq 0{,}32)$



$P(Z \leq 0{,}32) = A(0{,}32) = 0{,}6255.$

Tabela

Encontrando o valor na Tabela $N(0;1)$:

3

z	0	1	2
0,0	0,5000	0,5039	0,5079
0,1	0,5398	0,5437	0,5477
0,2	0,5792	0,5831	0,5870
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
⋮	⋮	⋮	⋮

Tabela

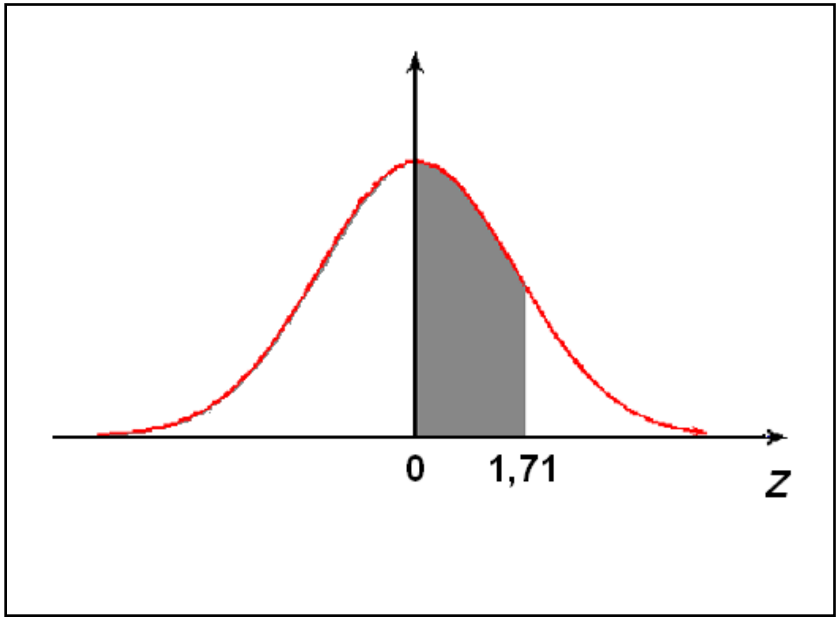
$P(Z \leq 0,32)$

b) $P(0 < Z \leq 1{,}71)$

$= P(Z \leq 1{,}71) - P(Z \leq 0)$

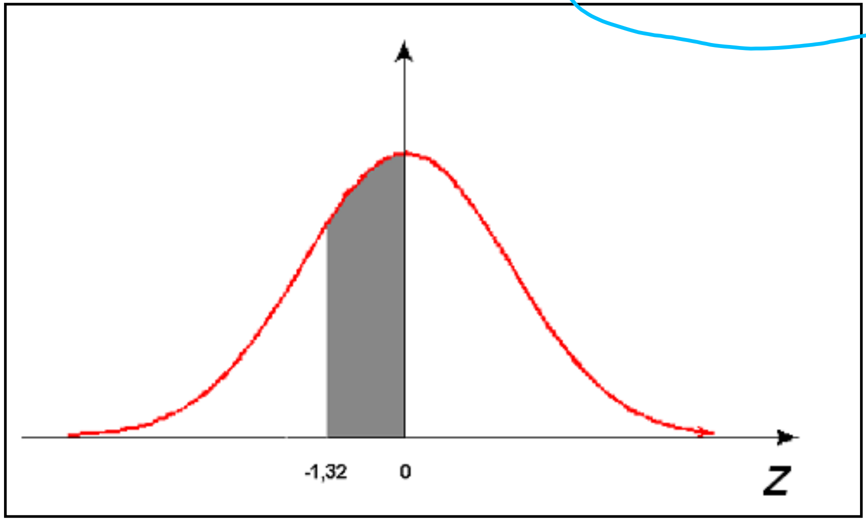
$= A(1{,}71) - A(0)$

$= 0{,}9564 - 0{,}5 = 0{,}4564.$



Obs.: $A(0)=P(Z < 0)=P(Z > 0)=0{,}5.$

c) $P(-1{,}32 < Z < 0) = P(0 < Z < 1{,}32)$ Por simetria



$= P(Z \leq 1{,}32) - P(Z \leq 0)$

$= A(1{,}32) - 0{,}5$

$= 0{,}9066 - 0{,}5 = 0{,}4066.$

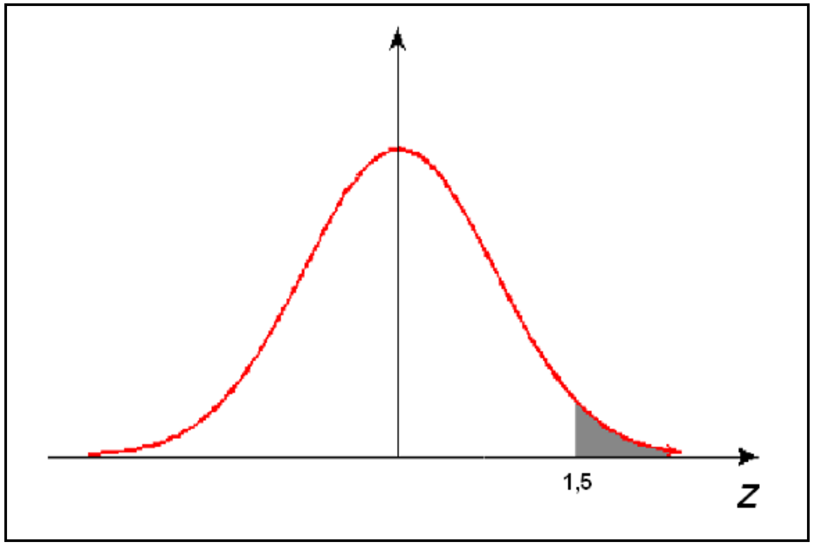
Tabela

d) $P(Z \geq 1{,}5)$

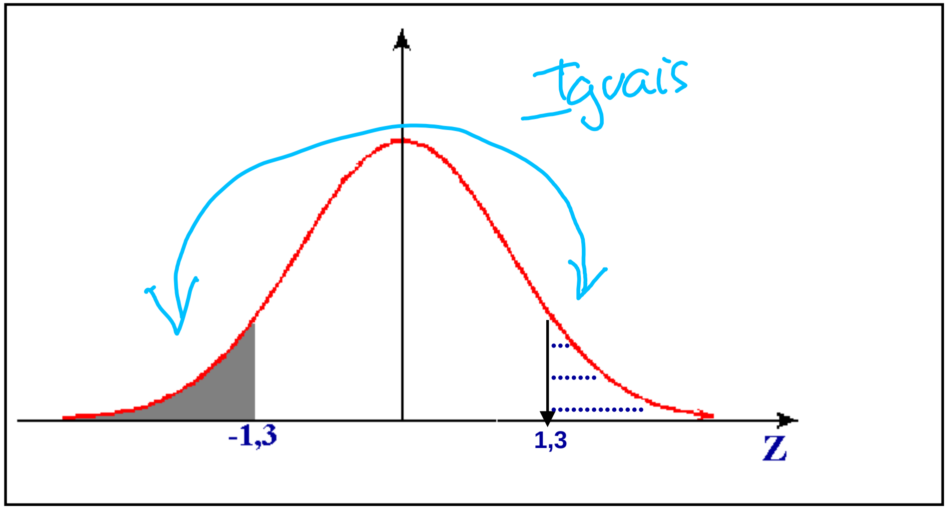
$= 1 - P(Z \leq 1{,}5)$

$= 1 - A(1{,}5)$

$= 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668.$



e) $P(Z \leq -1{,}3)$



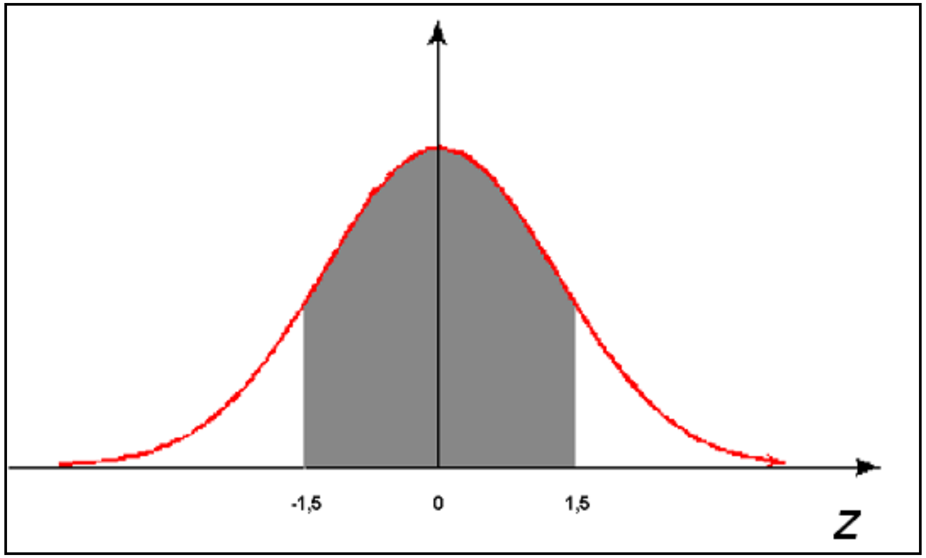
$= P(Z \geq 1{,}3) = 1 - A(1{,}3)$

$= 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968.$

Tabela

Obs.: Pela simetria, $P(Z \leq -1{,}3) = P(Z \geq 1{,}3)$.

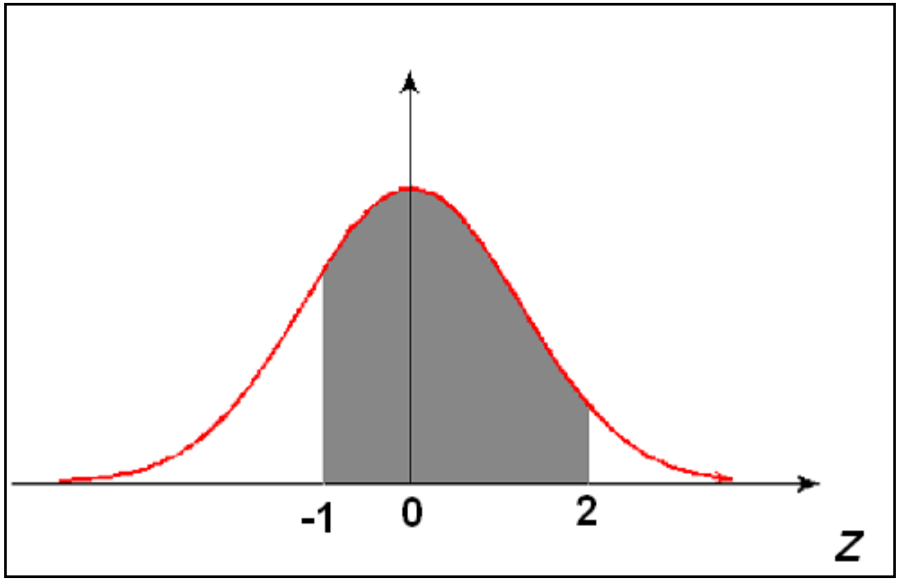
f) $P(-1{,}5 \leq Z \leq 1{,}5)$



$= P(Z \leq 1{,}5) - P(Z \leq -1{,}5)$
$= A(1{,}5) - [1 - A(1{,}5)]$

$= 0{,}8664.$

g) $P(-1 \leq Z \leq 2)$



$= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1)$

$= A(2) - P(Z \geq 1) = A(2) - (1 - A(1))$

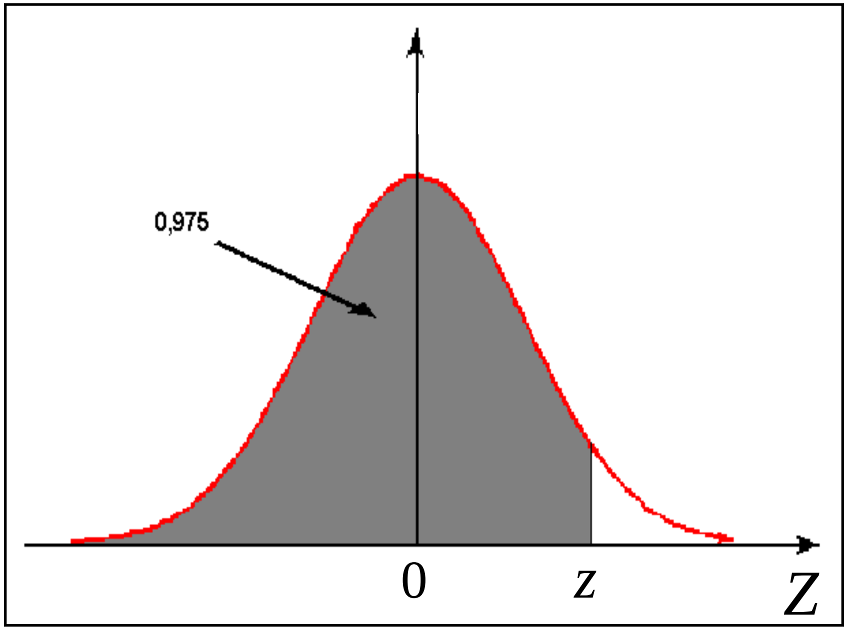
$= 0{,}9773 - (1 - 0{,}8413)$

$= 0{,}9773 - 0{,}1587 = 0{,}8186.$

Tabela

Como encontrar o valor z da distribuição $N(0;1)$ tal que:

(i) $P(Z \leq z) = 0{,}975$

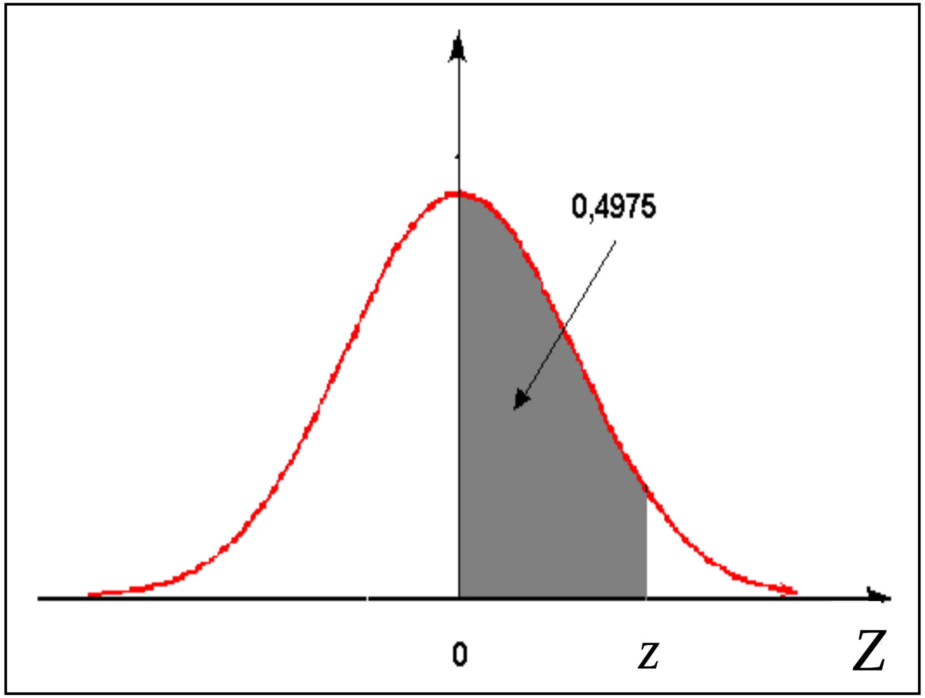


z é tal que $A(z) = 0{,}975$.

Pela tabela, $z = 1{,}96$.

	3	6
1,9		0,975

(ii) $P(0 < Z \leq z) = 0{,}4975$

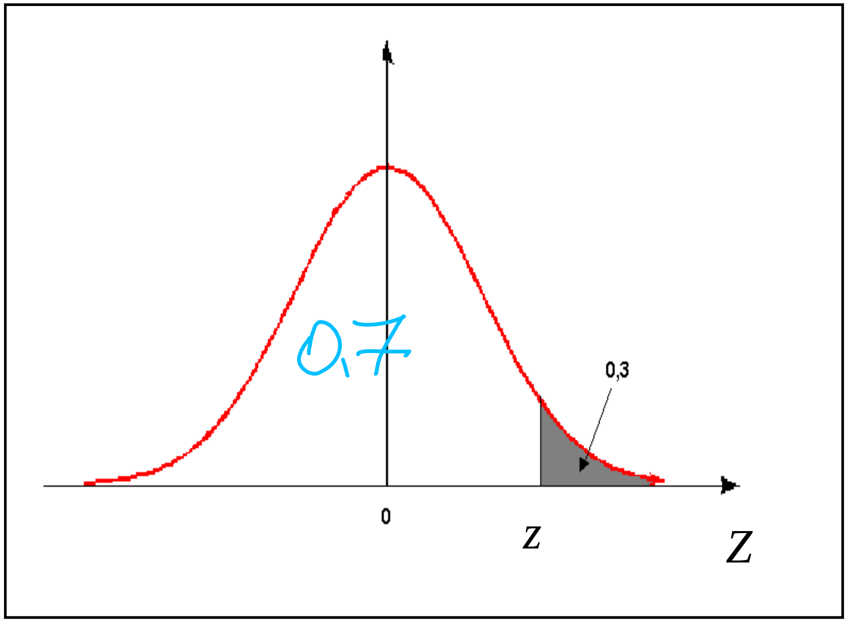


z é tal que $A(z) = 0{,}5 + 0{,}4975 = 0{,}9975$.

Pela tabela $z = 2{,}81$.

Tabela

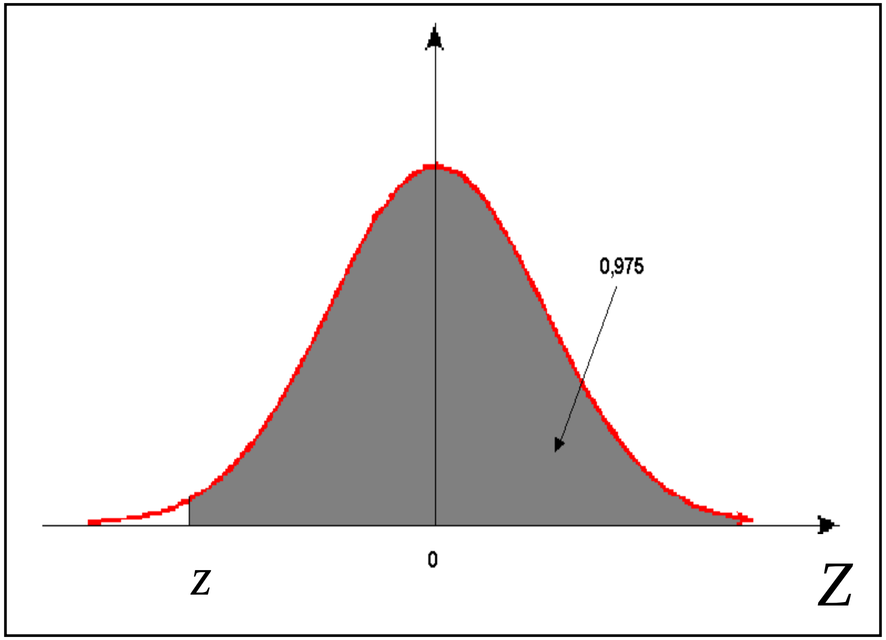
(iii) $P(Z \geq z)$ = 0,3



z é tal que $A(z)$ = 0,7.

Pela tabela, z = 0,53.

(iv) $P(Z \geq z)$ = 0,975



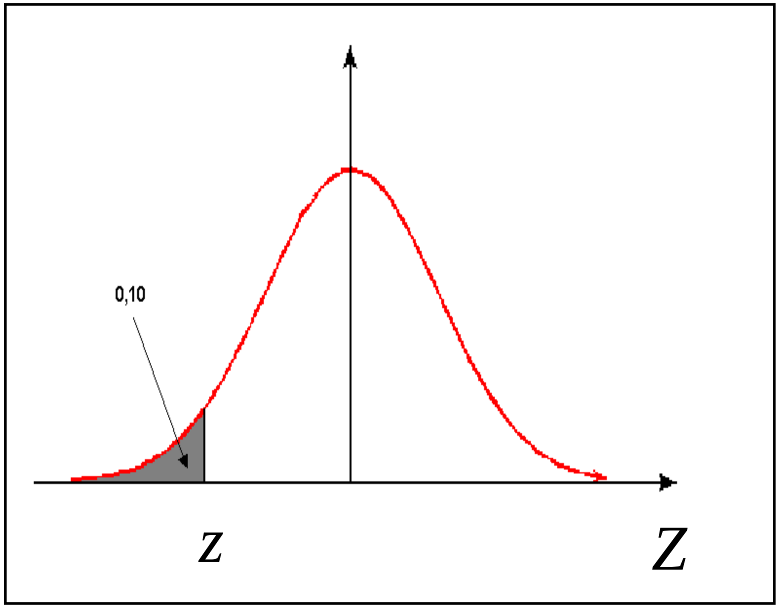
a é tal que $A(a)$ = 0,975 e $z = -\,a$.

Pela tabela a = 1,96.

Então, $z = -\,1{,}96$.

Tabela

(v) $P(Z \leq z) = 0{,}10$

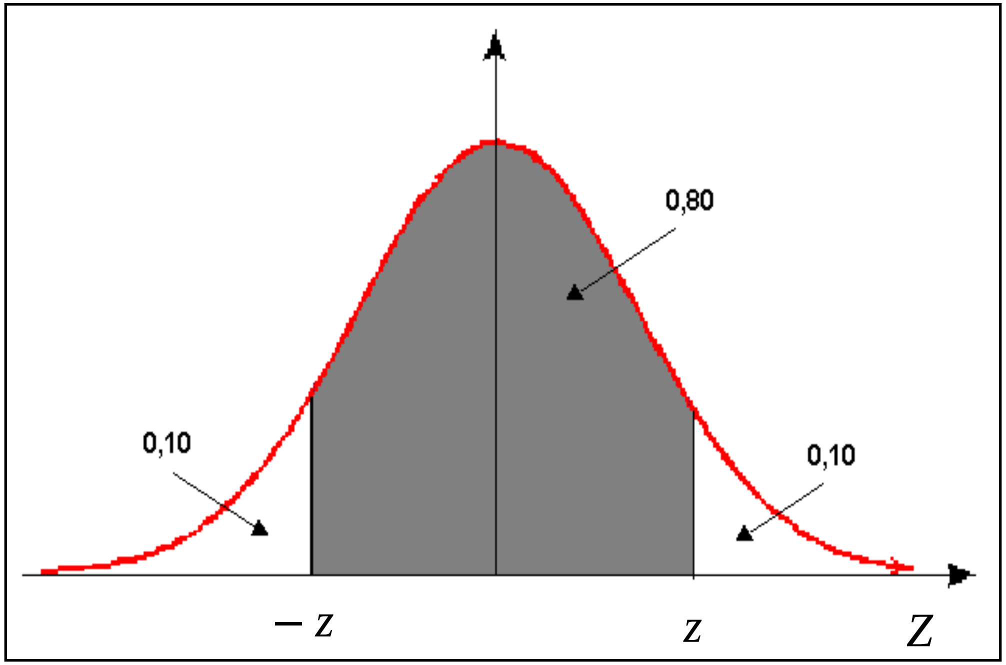


a é tal que $A(a)$=0,90 e $z = -\, a$.

Pela tabela, $a = 1{,}28$

e, assim, $z = -\,1{,}28$.

(vi) $P(-\,z \leq Z \leq z) = 0{,}80$



z é tal que $P(Z < -z) = P(Z > z) = 0{,}1$.

Isto é, $P(Z < z) = A(z) = 0{,}90$

$\Rightarrow z = 1{,}28$ (pela tabela).

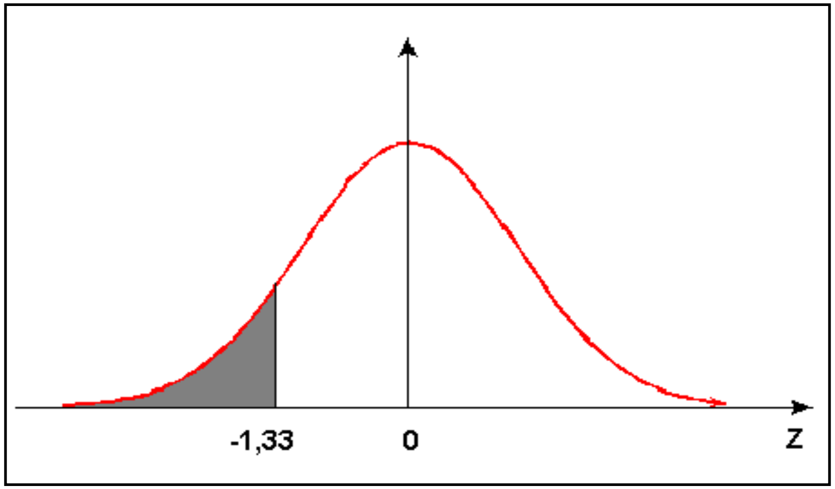
Tabela

Exemplo: O tempo gasto no exame vestibular de uma universidade tem distribuição Normal, com média 120 min e desvio padrão 15 min.

a) Sorteando-se um aluno ao acaso, qual é a probabilidade dele terminar o exame antes de 100 minutos? μ σ^2

X: tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120; 15^2)$

$$P(X \leq 100) = P\left(Z \leq \frac{100-120}{15}\right) = P(Z \leq -1{,}33)$$



$= 1 - A(1{,}33)$

$= 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918.$

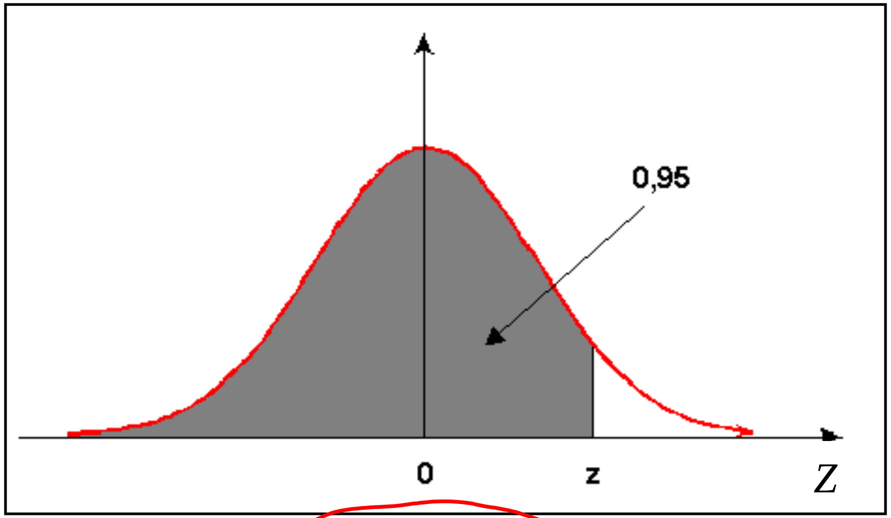
Outra interpretação: 9,18% dos estudantes que prestam esse exame concluem em menos de 100 min. Tabela

b) Qual deve ser o tempo de prova, de modo a permitir que 95% dos vestibulandos terminem no prazo estipulado?

X: tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120;\, 15^2)$

$x = ?$ tal que $P(X \le x) = 0{,}95 \Rightarrow P\left(Z \le \dfrac{x-120}{15}\right) = 0{,}95$

Z



z = ? tal que $A(z)$ = 0,95.

Pela tabela z = 1,64.

$P(Z \le 1{,}64) = 0{,}95$

Então, $z = 1{,}64 = \dfrac{x-120}{15}$ $\Rightarrow x = 120 + 1{,}64 \times 15 = 120 + 24{,}6$

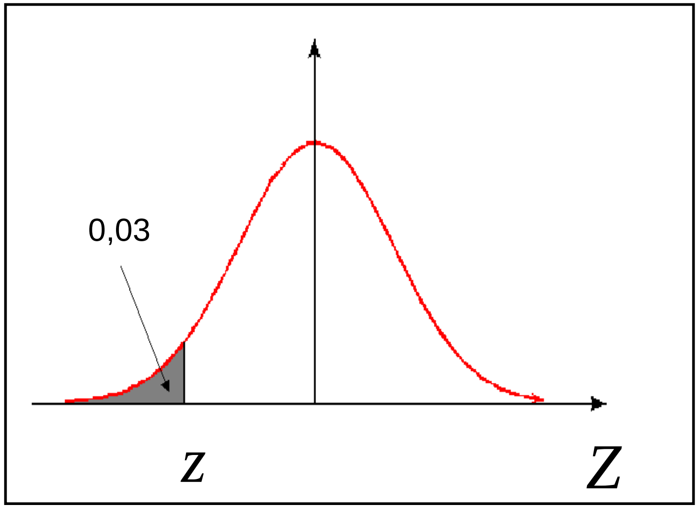
$\Rightarrow x = 144{,}6$ *min*.

Tabela

c) Qual é o valor do tempo tal que apenas 3% dos vestibulandos completam o exame até esse tempo de prova?

X: tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120;\ 15^2)$

$$x = ?\ \text{tal que}\ P(X \le x) = 0{,}03 \Rightarrow P\left(Z \le \underbrace{\frac{x - 120}{15}}_{z}\right) = 0{,}03$$



$a > 0$ é tal que $A(a) = 0{,}97$ e $z = -a$

Pela tabela, $a = 1{,}88$

e, assim, $z = -1{,}88$.

Então, $z = -1{,}88 = \dfrac{x - 120}{15}$ $\Rightarrow x = 120 - 1{,}88 \times 15 = 120 - 28{,}2$

$\Rightarrow x = 91{,}8\ min$.

Tabela

$\Rightarrow$ 3% dos vestibulandos terminam o exame em até 91,8 min

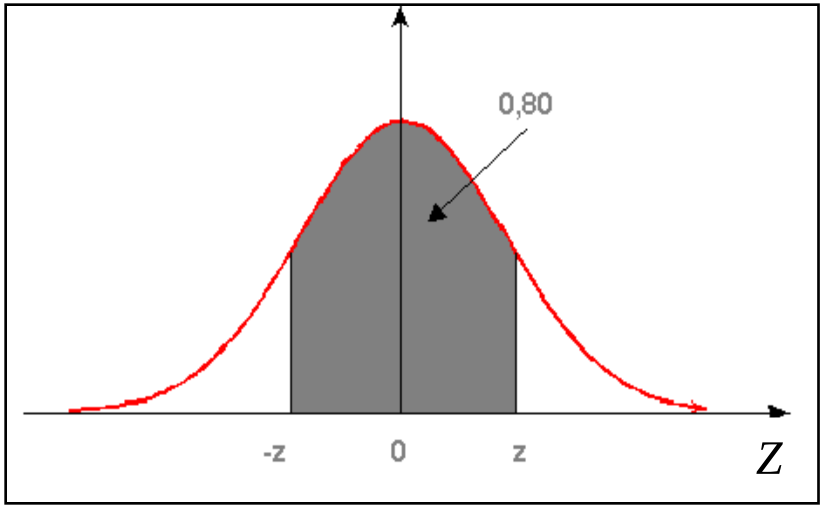
d) Qual é o intervalo de tempo, simétrico em torno da média (intervalo central), tal que 80% dos estudantes gastam para completar o exame?

X: tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120, 15^2)$

Obter o intervalo **(120-*a*; 120+*a*)** tal que $P(120\text{-}a<X<120+a)=0{,}80$

$$P(120-a \le X \le 120+a) = 0{,}80 \Rightarrow P\left(\frac{120-a-120}{15} \le Z \le \frac{120+a-120}{15}\right) = 0{,}80$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{-a}{15} \le Z \le \frac{a}{15}\right) = 0{,}80 \Rightarrow P(-z \le Z \le z) = 0{,}80$$



z = ? tal que $A(z)$ = 0,90.

Pela tabela, z = 1,28.

Tabela

Mas

$$z = 1{,}28 = \frac{a}{15} \Rightarrow a = 1{,}28 \times 15 = 19{,}2$$

Logo, o intervalo procurado é

(120 – 19,2; 120+ 19,2) = (100,8 min; 139,2 min)

Observação : Se $X \sim N(\mu\ ;\ \sigma^2)$, então

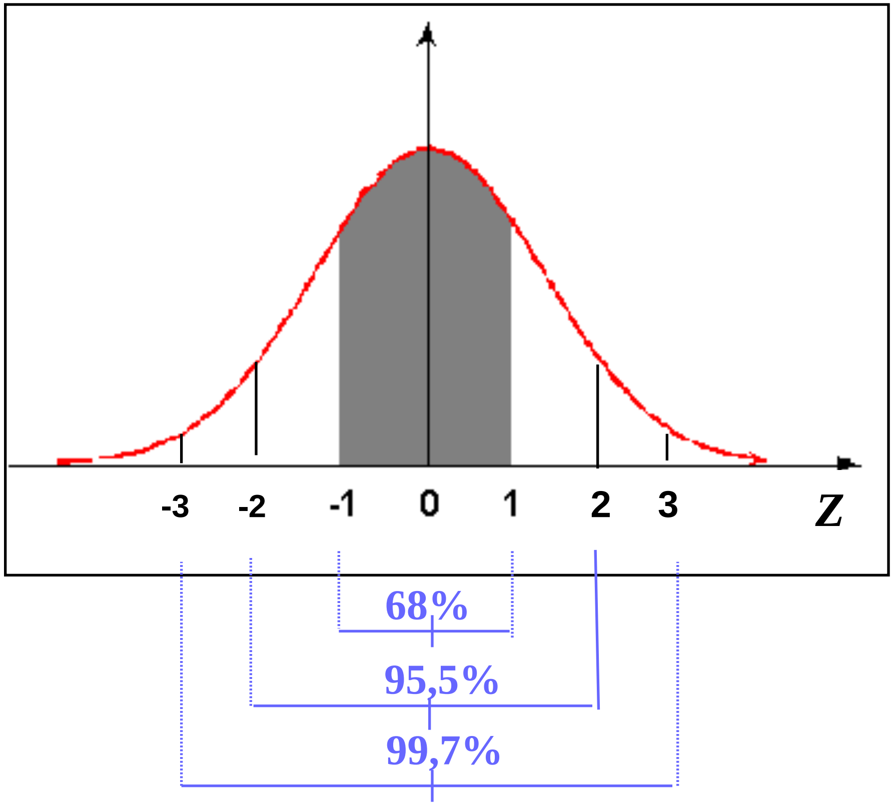
(i) $P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = P\left(\dfrac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} \le Z \le \dfrac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right)$

$= P(-1 \le Z \le 1)$

$= 2 \times (A(1) - 0{,}5)$

$= 2 \times (0{,}8413 – 0{,}5)$

$= 0{,}6826$



ou seja, SEMPRE TEMOS

$P(\ \mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma\ ) =\ 0{,}683.$

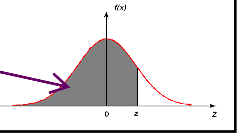
Analogamente,

(ii) $P(\ \mu - 2\sigma \le\ X\ \le \mu + 2\sigma\ ) = P(-2 \le Z \le 2\ ) =\ 0{,}955.$

Tabela

(iii) $P(\ \mu - 3\sigma \le\ X\ \le \mu + 3\sigma\ ) = P(-3 \le Z \le 3\ ) =\ 0{,}997.$

Distribuição Normal : Valores de P(Z ≤ z) = A(z)



Segunda decimal de z

Parte inteira e primeira decimal de z

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Volta