- Invariantes adiabáticos

Considere um sistema cíclico no qual temos que um dos parâmetros de controle muda muito lentamente

$$\tau_{\text{mudança}} \gg \text{Período do movimento}$$

Queremos saber o que acontece com o nosso sistema nessas situações. Vamos começar com um exemplo, nosso suspeito usual o oscilador harmônico 1D. A diferença é que assumimos que sua frequência muda (muito lentamente) no tempo

$$H = p^2/2m + \tfrac{1}{2} m\, \omega^2(t)\, q^2 \,, \quad \frac{d\omega}{dt} \ll \tau^{-2} = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{-2}$$

Em um único período, ω não muda muito e podemos escrever $\quad \dot{\omega}/\omega \ll \omega$

$$q(t) = a \cos\left[\omega(t)t - \theta\right]$$

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2\right) = \tfrac{1}{2} m\, \omega^2 a^2 \quad \text{(uma oscilação)}$$

Essencialmente, temos que E muda no tempo bem devagar, com uma taxa dada por

$$\dot{E} = m\left(\dot{q}\ddot{q} + \omega^2 q\dot{q} + \omega\dot{\omega} q^2\right)$$

$$= m\dot{q}\Big[\underbrace{\ddot{q} + \omega^2 q}_{=\,0}\Big] + m\omega\dot{\omega} q^2$$

(Eq. do movimento)

Vamos agora calcular a média da energia em uma oscilação

$$\langle E\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} E\,dt \equiv E = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2$$

Por outro lado:

$$\langle \dot{E}\rangle = \langle m\omega\dot{\omega} q^2\rangle = \overbrace{m\omega\dot{\omega}}^{\text{variam lentamente!}}\langle q^2\rangle = \frac{1}{2} m\omega\dot{\omega} a^2$$

Temos também que

$$\langle \dot{E}\rangle = \frac{d}{dt}\langle E\rangle$$

E assim

$$\frac{d}{dt}\langle E\rangle = \frac{1}{2} m\omega\dot{\omega} a^2 \equiv \langle E\rangle\frac{\dot{\omega}}{\omega}$$

Se agora calculamos

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\langle E\rangle}{\omega}\right] = \frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\langle E\rangle - \frac{\dot{\omega}}{\omega^2}\langle E\rangle = 0$$

Devemos lembrar E e λ não podem mudar de modo arbitrário:

$$\dot{E} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}\dot{\lambda}$$

De nossa discussão das variáveis de ação e ângulo, podemos escrever que:

- $$1/\omega(\lambda) = \left.\frac{\partial I}{\partial E}\right|_\lambda = \frac{T(\lambda)}{2\pi}$$ → período para λ fixo

→ desprezamos mudanças nos extremos

- $$\left.\frac{\partial I}{\partial \lambda}\right|_E = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{\partial}{\partial \lambda}\right|_E \oint p\,dq = \frac{1}{2\pi}\oint \left.\frac{\partial p}{\partial \lambda}\right|_E dq$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{T(\lambda)} \left.\frac{\partial p}{\partial \lambda}\right|_E \left.\frac{\partial H}{\partial p}\right|_\lambda dt$$

- Escrevemos agora $E = H(p,q,\lambda)$

$$\underbrace{\left.\cancel{\frac{\partial E}{\partial \lambda}}\right|_E}_{0} = \left.\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right|_E = \left.\frac{\partial H}{\partial p}\right|_\lambda \left.\frac{\partial p}{\partial \lambda}\right|_E + \left.\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right|_p$$

Acima, consideramos que $p = \sqrt{2m}\sqrt{E(t) - V(q,\lambda(t))}$

Com essa última equação podemos escrever

$$\left.\frac{\partial I}{\partial \lambda}\right|_E = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{T(\lambda)} \left.\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right|_p dt$$

Ou seja, a ação do oscilador

$$I = E/\omega$$ é invariante se realizamos variações adiabáticas no sistema.

I é um invariante adiabático: para mudanças lentas em um parâmetro da Hamiltoniana, a média de I em um período não muda.

Com esse exemplo simples, podemos ter uma demonstração um pouco mais geral, mas ainda pouco rigorosa, em uma dimensão

$$H = p^2/2m + V(q, \lambda(t)), \quad p = \sqrt{2m}\sqrt{E(t) - V(q,\lambda(t))}$$

↳ parâmetro variado adiabaticamente

Vamos argumentar que

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\, dq$$ é um invariante adiabático

$$I \equiv I(E, \lambda)$$ nova dependência

$$\dot{I} = \left.\frac{\partial I}{\partial E}\right|_\lambda \dot{E} + \left.\frac{\partial I}{\partial \lambda}\right|_E \dot{\lambda}$$

Podemos combinar todos esses resultados

$$\dot{I} = \left[T(\lambda)\frac{\partial H}{\partial \lambda} - \int_0^{T(\lambda)} \frac{\partial H}{\partial \lambda}\, dt \right] \frac{\dot{\lambda}}{2\pi}$$

se agora a mudança em λ é lenta, podemos dizer que ao efetuarmos a média sobre um período λ = constante

$$\langle \dot{I} \rangle = T(\lambda)\left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle \frac{\dot{\lambda}}{2\pi} - T(\lambda)\left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle \frac{\dot{\lambda}}{2\pi} = 0$$

Desse modo, generalizamos a discussão do oscilador harmônico

O conceito de invariância adiabática foi muito importante na transição para a mecânica quântica

$$I_i = \frac{1}{2\pi}\oint p_i\, dq_i \equiv n\hbar \;, n \in \mathbb{Z} \quad \text{(Bohr - Sommerfeld)}$$

$$E = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad n = n_1 + n_2 + n_3 \quad \text{(Átomo de hidrogênio, } K = e^2\text{)}$$

Como pode mudar por inteiro apenas? I_i é um invariantes. Pequenas modificações não o afetam! Similar para $E = n\hbar\omega$, E/ω invariante

Considere agora que B varie lentamente no espaço: $B \equiv B(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial x}B, \frac{\partial}{\partial y}B << R$

$\Rightarrow$ B é aproximadamente constante em uma órbita.

Para B = constante temos

$$H = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 = \frac{e^2 R^2 B^2}{2m} = \text{constante}$$

(substitua as soluções em H)

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \sum_i p_i dq_i = \int_0^T (p_x \dot{x} + p_y \dot{y}) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^T m R^2 \omega^2 [\underbrace{\sin^2 \omega (t-t_0) + \cos^2 \omega (t-t_0)}_{=1}] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} m R^2 \omega^2 T = m R^2 \omega = e B R^2$$

De H temos $B^2 R^2 = \text{constante}$
De I temos $B R^2 = \text{constante}$
} B e R se conservam individualmente

Isso quer dizer que a partícula não pode se mover para regiões de maior ou menor campo. Ela tem que se mover ao longo de linhas de campo constante.

– Exemplo: Pêndulo simples cujo comprimento varia lentamente (pequenas oscilações):

$$I = E/\omega = \frac{1}{2} m \omega a^2, \quad \omega = \sqrt{g/l}$$

$$I = \frac{1}{2} m \sqrt{g l^3} \, (\theta_{max})^2, \quad a = l \theta_{max}$$

Considerando que I seja invariante, vem que $\theta_{max}^2 \, l^{3/2} = \text{constante}$

$$\Rightarrow \theta_{max} \propto l^{-3/4}.$$

– Exemplo: Partícula em um campo magnético

$\vec{B} = B\hat{K} \Rightarrow$ partícula descreve círculos no plano xy com $\omega = \frac{eB}{m}$ (frequência do ciclotron)

$\vec{A} = (-By, 0, 0)$, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x + eBy\right)^2 + \frac{1}{2m} p_y^2$$

$$x = \frac{a}{eB} + R \sin \omega (t - t_0); \quad y = -\frac{b}{eB} + R \cos \omega (t - t_0)$$

a, b, R e t_0 = constantes fixadas pelas condições iniciais

- Ângulo de Hannay

J. H. HANNAY, J. PHYS. A: MATH. GEN 18, 221 (1985)

Nós vimos que na medida em que variamos um parâmetro λ, associado ao potencial do problema, de maneira lenta, o caminho descrito pela partícula no espaço de fase muda, mas área percorrida permanece a mesma

$$I = \oint p\,dq \quad \text{é invariante}$$

Após um tempo T muito longo, $T \gg \tau$ (período de uma órbita) nós retornamos aos parâmetros iniciais se $\lambda(T) = \lambda(0)$. A questão que queremos estudar agora é como a fase ϕ muda. No caso em que $\lambda =$ constante temos:

$$\Delta\phi = \phi(T) - \phi(0) = \frac{\partial}{\partial I}\oint p\,dq$$ (saímos e voltamos para o mesmo ponto)

$$\Delta\phi = \frac{\partial}{\partial I}\, 2\pi I = 2\pi$$

Temos então o resultado intuitivo de que o ângulo muda de 2π ao percorrermos um circuito fechado no espaço de fase

No caso de λ fixo, sabemos também que $\phi = \phi(I,\lambda)$ obedece

$$\dot{\phi} = \omega(I,\lambda) = \frac{\partial H}{\partial I} \quad (\phi = \omega(I,\lambda)t + \beta)$$

Se agora variarmos lentamente os parâmetros esperamos um deslocamento de fase dado por

$$\Delta\phi_{din} = \int d\phi = \int \dot{\phi}\, dt = \int \omega(I,\lambda(t))\, dt$$

Esse deslocamento de fase, que chamo de dinâmico, sempre existe. Contudo ele não é a única contribuição. Existe uma segunda que só foi entendida formalmente em <u>1985</u> por Hannay.

Para investigá-la, escrevemos

$$\dot{\phi} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial\lambda}\dot{\lambda} \quad , \text{donde}$$

$$\Delta\phi = \int\dot{\phi}\, dt = \int_0^T \omega\, dt + \int \frac{\partial\phi}{\partial\lambda}\dot{\lambda}\, dt$$

$$= \int_0^T \omega\, dt + \int \frac{\partial\phi}{\partial\lambda}\, d\lambda$$

Essa última contribuição é conhecida como <u>fase geométrica</u>, pois depende do caminho tomado (parametrização) no espaço de fase. Seu sentido só fica bem definido se considerarmos um caminho fechado no qual saímos e voltamos para o mesmo ponto com

$$\Delta\phi_{geo} \equiv \boxed{\gamma = \oint \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} d\lambda}$$

Ângulo de Hannay

Essa ideia de integrar quantidades ao longo de laços é um exemplo de holonomia, que é um conceito importante na física atual. É interessante ressaltar que temos o análogo quântico dessa fase, que é a fase de Berry. Vocês a estudarão em detalhes em seus cursos de Quântica e derivados.

Vamos agora discutir exemplos nos quais esse ângulo aparece antes de darmos uma interpretação mais geral para ele em termos de um fluxo de "campo magnético".

- Conta em um fio rígido: Ângulo de Hannay

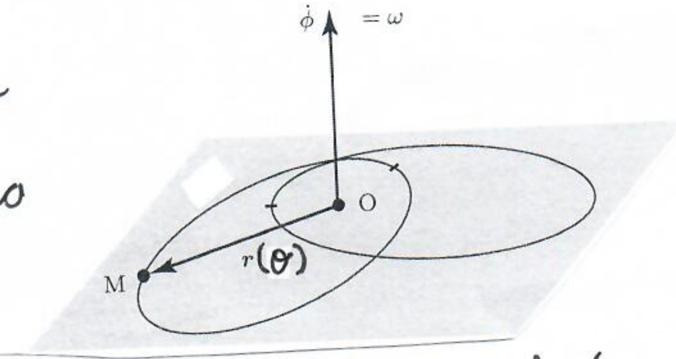
J.H. HANNAY, J. PHYS. A: MATH GEN 18, 221 (1985)

Considere uma conta, de massa m, obrigada a mover-se sem atrito em um fio rígido, plano e fechado:

$L \rightarrow$ diâmetro do fio

$S \rightarrow$ área englobada

$M \rightarrow$ posição da conta no fio especificada pela coordenada curvilínea $\theta(t)$



$O \rightarrow$ origem arbitrária

• Experimento 1: o fio é mantido fixo no plano. A conta gira com velocidade constante v_0. O período do movimento é então:

$$\tau = L/v_0 \quad \text{(tempo de uma volta completa)}$$

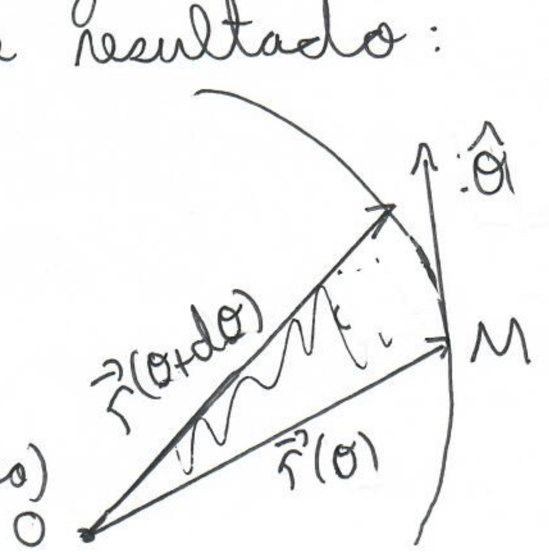
• Experimento 2: agora o fio é obrigado a girar no plano com velocidade angular $\dot{\phi}(t)$, com o período de revolução do fio sendo T. Assumimos que $\dot{\phi}(0) = 0$, esse valor aumenta, chega ao máximo, diminui e vai a zero movimento em T: $\dot{\phi}(T)=0$. A forma particular de $\dot{\phi}(t)$ é irrelevante, desde que a mudança seja adiabática:

$$\boxed{T \gg \tilde{\tau}}$$

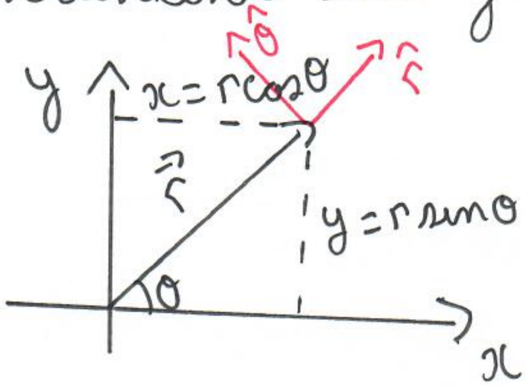
Em ambos experimentos, a conta parte das mesmas condições iniciais. Nosso objetivo é medir a posição relativa das duas contas após um tempo T, que corresponde a uma volta completa do fio. A propriedade interessante é a que diferença da distância percorrida pela conta nos dois casos permanece constante, e assim fornece uma assinatura inconfundível da rotação do sistema. Além disso, essa diferença depende apenas da forma do fio e, por isso, dizemos tratar-se de uma propriedade de natureza geométrica.

Vamos agora obter esse resultado:

Raio vetor $\vec{r}(\theta)$ no fio.
Mostramos também o elemento de área dA
$\hat{\theta}$ → vetor tangente (unitário)



Por se tratar de uma curva planar, é conveniente utilizarmos coordenadas polares:



$$\begin{cases} \hat{r} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j} \\ \hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{r}} = -\sin\theta\,\dot{\theta}\,\hat{i} + \dot{\theta}\cos\theta\,\hat{j} = \dot{\theta}\,\hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{i} - \dot{\theta}\sin\theta\,\hat{j} = -\dot{\theta}\,\hat{r} \end{cases}$$

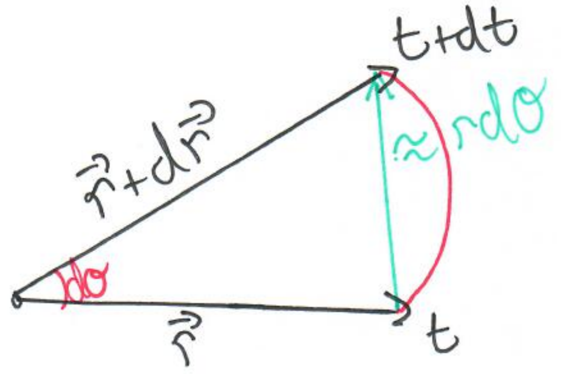
Dependem de t por meio de $\theta \equiv \theta(t)$.

$\vec{r} = r\,\hat{r}$, vetor posição

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\hat{r}} = \underbrace{\dot{r}}_{v_r}\,\hat{r} + \overbrace{r\dot{\theta}}^{v_\theta}\,\hat{\theta}.$$

Para esse problema, temos $\dot{r} = 0$ pois o fio é rígido (sua forma não muda com o tempo).
Também assumimos que $v_\theta = r(t)\,\theta(t) = cte$.
Em todos os pontos, $|\vec{v}| = v_\theta$ é sempre o mesmo.

$$\vec{v} = v_\theta\,\hat{\theta} \Rightarrow \vec{a} = \dot{\vec{v}} = v_\theta\,\dot{\hat{\theta}} = -v_\theta\,\hat{r}.$$



$$dA = \frac{1}{2}\,r\,(r\,d\theta) = \frac{1}{2}\,r^2\,d\theta$$

$$A' = \frac{dA}{d\theta} = \frac{1}{2}\,r^2$$

A energia cinética no caso geral é

• $T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$, $\quad \vec{v} = v_\theta \hat{\theta} + \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\quad \vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{k}$

$$\vec{v} = v_\theta \hat{\theta} + r \dot{\phi} \hat{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2} m \left[v_\theta^2 + 2 v_\theta r \dot{\phi} + \cancelto{0}{r^2 \dot{\phi}^2} \right]$$

adiabático

$r \dot{\phi} \ll v_\theta$

• $L = T - \cancelto{0}{V} = \frac{1}{2} m \left[r^2 \dot{\theta}^2 + 2 r^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \right]$

• $p_\theta = m r^2 \left[\dot{\theta} + \dot{\phi} \right] \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2} - \dot{\phi}$

• $\mathcal{H} = p_\theta \dot{\theta} - L = \frac{m r^2 \dot{\theta}^2}{2} = \frac{1}{2 m r^2} \left(p_\theta - m r^2 \dot{\phi} \right)^2$

• A variável de ação é então dada por

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p_\theta \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} m r^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \, d\theta$$

Para a primeira integral, escreva:

• $\int_0^{2\pi} r^2 \dot{\theta} \, d\theta = \int_0^{2\pi} r v_0 \, d\theta = v_0 \int_0^{2\pi} \overbrace{r \, d\theta}^{dl} = v_0 L$

Já para a segunda parte, temos:

• $\int_0^{2\pi} \overset{=2A'}{r^2} \dot{\phi} \, d\theta = 2 \dot{\phi} \int_0^{2\pi} A' \, d\theta = 2 A \dot{\phi}$

Finalmente, escrevemos que:

$$I = \frac{m}{2\pi}\left[L v_0 + 2A\dot{\phi} \right]$$, donde vem

que: $$v_0 = \frac{1}{L}\left[\frac{2\pi I}{m} - 2A\dot{\phi} \right]$$

Temos também que $\mathcal{H} = m v_0^2/2$ e assim

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2mL^2}\left[2\pi I - 2mA\dot{\phi} \right]^2 .$$

Como $\dot{\phi}$ varia adiabaticamente, podemos aplicar a invariância da ação $I(t) = I(0)$:

$$v_0(t) + \frac{2A}{L}\dot{\phi}(t) = v_0(0) + \cancel{\frac{2A}{L}\dot{\phi}(0)}^{\,0}$$ (condição inicial)

$$v_0(t) - v_0(0) = -\frac{2A}{L}\dot{\phi}(t)$$

Para o fio parado, temos que $v_0(t) = v_0(0) = v_0$

Assim, a distância percorrida pela conta durante o período T de uma volta do fio é:

$$D_0 = v_0 T$$

Quando o fio está em movimento:

$$D = \int_0^T v_\theta(t)\,dt = \int_0^T \left[v_\theta(0) - \frac{2A}{L}\dot{\phi}(t) \right] dt$$

$$D = D_0 - \frac{2A}{L}\underbrace{\left(\phi(T) - \phi(0)\right)}_{2\pi}$$ → uma volta do fio.

$$D = D_0 - \frac{4\pi A}{L}$$

A fase β para a conta pode ser definida:

$$\beta = 2\pi\, D/L$$

A fase, ângulo, de Hannay é:

$$\beta_H = \beta - \beta_0 = -\frac{8\pi^2 A}{L^2}$$

Esse valor não depende da velocidade v_θ da conta nem da posição do eixo de rotação. Ele depende apenas da geometria do fio ⇒ fase geométrica. O sinal de menos quer dizer que se a conta e o fio se movem no mesmo sentido, a conta é <u>atrasada</u> para o caso do fio em movimento. Para um fio circular $A = L^2/4\pi \Rightarrow \beta_H = -2\pi$