III EBED
Escola Brasileira de
Equações Diferenciais
4 a 8 de maio de 2009

EXEMPLO – EDO de 2ª ORDEM REDUTÍVEL

$$x^2 y'' = 2xy' + (y')^2$$

Não aparece a variável dependente y

Fazemos a mudança de variável $p = y'$

$$x^2 p' = 2xp + p^2 \iff x^2\,dp = (2xp + p^2)\,dx$$

$$\iff \underbrace{(2xp + p^2)}_{P}\,dx - \underbrace{x^2}_{Q}\,dp = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial p} = -2x - 2x - 2p = -(4x + 2p)$$

Divindo por Q e por P vemos que não possui fator integrante que dependa só de x ou só de p.

III EBED
Escola Brasileira de
Equações Diferenciais
4 a 8 de maio de 2009

Mas

$$x^2 \frac{dp}{dx} = 2xp + p^2 \iff$$

$$\frac{dp}{dx} = 2\left(\frac{p}{x}\right) + \left(\frac{p}{x}\right)^2 \quad \text{(Eq. homogênea)}$$

Fazendo $z = p/x$, $p = xz$

$$\frac{dp}{dx} = z + x \cdot \frac{dz}{dx} \quad \text{e então}$$

$$z + x\frac{dz}{dx} = 2z + z^2 \iff x\frac{dz}{dx} = z^2 + z$$

$$\iff x\,dz = (z^2 + z)\,dx$$

$$\iff \frac{1}{z^2+z}\,dz = \frac{1}{x}\,dx$$

(variáveis separadas)

(3)

(1)

Integrando os dois lados da equação

$$\int \frac{1}{z^2+z}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx + C$$

Agora $\frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{z(z+1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1}$

$$\begin{cases} 1 = Az + A + Bz \\ 1 = (A+B)z + A \\ \therefore A=1,\ B=-1 \end{cases}$$

$$\therefore \int \frac{1}{z^2+z}\,dz = \int \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \ln(|z|) - \ln(|z+1|) + c$$

$$= \ln\left(\frac{|z|}{|z+1|}\right) + C$$

e $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

$$\therefore \ln\left(\frac{|z|}{|z+1|}\right) = \ln|x| + C \iff$$

$$\frac{|z|}{|z+1|} = e^c\,|x| \iff \frac{z}{z+1} = K\cdot x$$

III EBED
Escola Brasileira de
Equações Diferenciais
4 a 8 de maio de 2009

$$\Leftrightarrow \quad z = kxz + kx \Leftrightarrow kx = (1-kx)z$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \frac{kx}{1-kx} \Leftrightarrow z = \frac{k}{k}\,\frac{x}{\frac{1}{k}-x}$$ (ou $z=0$

$$\Leftrightarrow \quad z = \frac{x}{k_1 - x}$$

Agora $p = xz \Rightarrow p = \dfrac{x^2}{k_1 - x}$

$$\therefore \quad y = \int \frac{x^2}{k_1-x}\,dx + k_2 = \int\left(-x - k_1 + \frac{k_1^2}{k_1-x}\right)dx$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & k_1 - x \\ \hline \underline{x^2 - k_1 x} & -x - k_1 \\ k_1 x & \\ \underline{k_1 x - k_1^2} & \\ k_1^2 & \end{array}$$

$$\frac{x^2}{k_1-x} = \frac{-(x+k_1)\cdot(k_1-x)+k_1^2}{k_1-x}$$

$$= -(x+k_1) + \frac{k_1^2}{k_1-x}$$

$$\therefore\ y = \int -(x+k_1) + \frac{k_1^2}{k_1 - x}\, dx$$

$$= \frac{-x^2}{2} - k_1 x + k_1^2 \ln\left(|k_1 - x|\right) + k_2$$