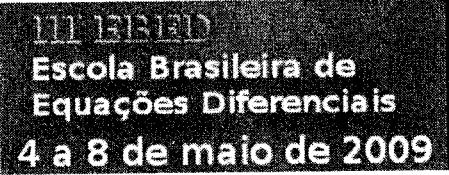


①



EXEMPLO - EDO de 2ª ORDEM REDUTÍVEL

$$x^2 y'' = 2xy' + (y')^2$$

Não aparece a variável de pendente y

Fazemos a mudança de variável $P = y'$

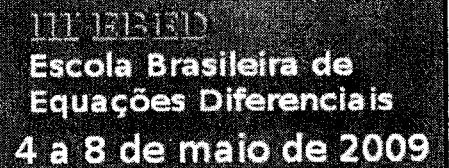
$$\begin{aligned} x^2 p' &= 2xp + p^2 \Leftrightarrow x^2 dp = (2xp + p^2)dx \\ \Leftrightarrow \underbrace{(2xp + p^2)}_P dx - \underbrace{x^2 dp}_Q &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial p} = -2x - 2x - 2p = - (4x + 2p)$$

Divindo por Q e por P vemos que

não possui fator integrante que dependa só de x ou só de p .

(2)



Mas

$$x^2 \frac{dp}{dx} = 2xp + p^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{dp}{dx} = 2\left(\frac{p}{x}\right) + \left(\frac{p}{x}\right)^2 \quad (\text{Eq. homogênea})$$

Fazendo $z = \frac{p}{x}$, $p = xz$

$$\frac{dp}{dx} = z + x \cdot \frac{dz}{dx} \quad \text{e então}$$

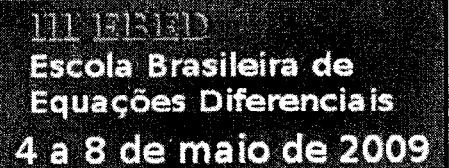
$$z + x \frac{dz}{dx} = 2z + z^2 \Leftrightarrow x \frac{dz}{dx} = z^2 + z$$

$$\Leftrightarrow x dz = (z^2 + z) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{z^2 + z} dz = \frac{1}{x} dx$$

(Variáveis separadas)

(3)



10

Integrando os dois lados da equação

$$\int \frac{1}{z^2+z} dz = \int \frac{1}{x} dx + C$$

Agora $\frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{z(z+1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1}$

$$\begin{cases} 1 = Az + A + Bz \\ 1 = (A+B)z + A \end{cases} \quad \therefore A=1, B=-1$$

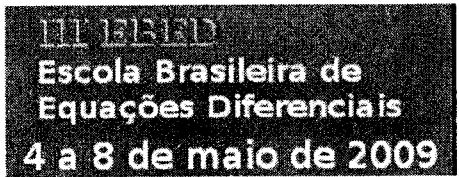
$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{1}{z^2+z} dz &= \int \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \ln(|z|) - \ln(|z+1|) \\ &= \ln\left(\frac{|z|}{|z+1|}\right) + C \end{aligned}$$

$$\text{e } \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\therefore \ln\left(\frac{|z|}{|z+1|}\right) = \ln|x| + C \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{|z|}{|z+1|} = e^C |x| \Leftrightarrow \frac{z}{z+1} = K \cdot x$$

(4)



$$\Leftrightarrow z = kxz + k_0 \Leftrightarrow kx = (1 - kx)z$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{kx}{1 - kx} \Leftrightarrow z = \frac{k}{k - x} \quad (\text{ou } z = 0)$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{x}{k_1 - x}$$

Agora $p = xz \Rightarrow p = \frac{x^2}{k_1 - x}$

$$y = \int \frac{x^2}{k_1 - x} dx + K_2 = \int \left(x + K_1 + \frac{K_1^2}{k_1 - x} \right) dx$$

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{k_1 - x} \\ & \frac{x^2 - kx}{k_1 x} - x \cancel{- K_1} \\ & \frac{k_1 x - K_1^2}{K_1^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{k_1 - x} = -\frac{(x + K_1) \cdot (k_1 - x) + K_1^2}{k_1 - x} \\ & = -\frac{(x + K_1)}{k_1 - x} + \frac{K_1^2}{k_1 - x} \end{aligned}$$

(5)

$$y = \int -(x + k_1) + \frac{k_2^2}{k_1 - x} dx$$

$$= -\frac{x^2}{2} - k_1 x + k_1^2 \ln(1/k_1 - x) + k_2$$