CARTEIRAS DE RISCO ÓTIMAS

Profa. Maria Paula Vieira Cicogna

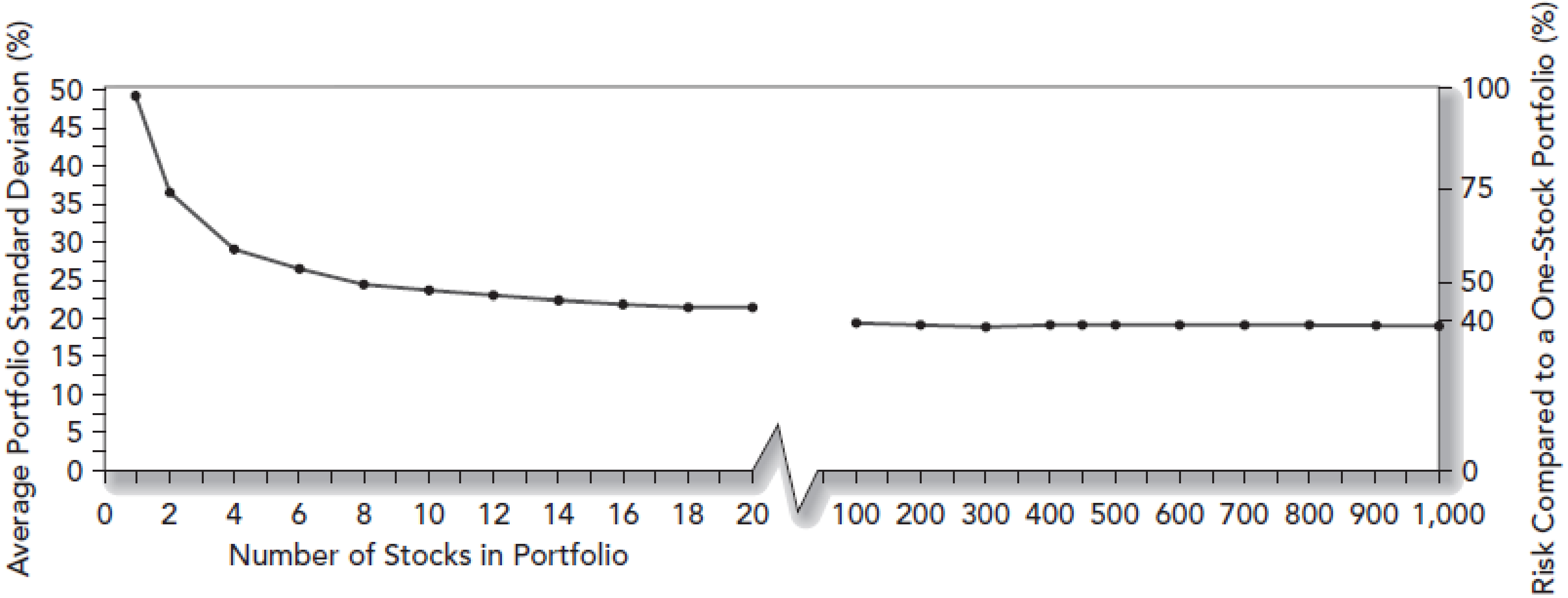
Bodie et. al. (2014), cap. 7

Diversificação e Portfolio de Risco

Fontes de risco da carteira com risco

Risco do Mercado	Condições gerais do mercado que afetam todas os ativos	Ciclos econômicos, inflação, taxa de juros, taxa de câmbio, coronavirus, crises financeiras	Risco não diversificável; Risco sistemático
Risco Específico	Fontes de risco que dependem apenas da empresa (independente das outras empresas)	Forma de gestão, negócio / produto, governança corporativa, sustentabilidade	**Risco diversificável; Risco não-sistemático**

Risco do portfolio cai com a diversificação, mas o poder da diversificação do risco é limitado pelo risco sistemático



Diversificação e Portfolio de Risco

O percentual investido em ações e títulos de uma carteira de risco é definido para gerar uma taxa de recompensa pelo risco específico que ofereça a oportunidade de alcançar uma dada taxa de retorno esperado do investimento em troca da disposição em aceitar um dado montante de risco

Diversificação eficiente: portfolios de risco que oferecem um dado retorno esperado ao menor nível de risco possível

Vamos começar com uma carteira de risco composta por apenas dois ativos: um título de dívida (D), com proporção w_D no portfolio, e uma ação (E), com proporção w_E. Neste caso, a taxa de retorno do portfolio é:

$$r_P = w_D . r_D + w_E . r_E$$

em que: $w_E = 1 - w_D$; r_D: taxa de retorno do título; r_E: taxa de retorno da ação

Como não conhecemos os retornos, mas apenas temos uma estimativa do retorno esperado, então:

$$E(r_P) = w_D . E(r_D) + w_E . E(r_E)$$

Sendo o risco da carteira (variância) dada por:

$$\sigma_P{}^2 = w_D^2 . \sigma_D^2 + w_E^2 . \sigma_E^2 + 2 . w_D w_E . cov(r_D, r_E)$$

Diversificação e Portfolio de Risco

Sendo: $cov(r_D, r_E) = \rho_{DE}.\sigma_D\sigma_E$, em que ρ_{DE} = coeficiente de correlação entre D e E, temos:

$$\sigma_P{}^2 = w_D^2.\sigma_D^2 + w_E^2.\sigma_E^2 + 2.w_D w_E.\rho_{DE}.\sigma_D\sigma_E$$

A variância da carteira de risco é reduzida pela covariância entre os ativos, a menos que os ativos sejam perfeitamente positivamente correlacionados

Se os ativos forem perfeitamente positivamente correlacionados $\rho_{DE} = 1$, logo a variância da carteira de risco torna-se um trinômio quadrado perfeito:

$$\sigma_P{}^2 = (w_D.\sigma_D + w_E.\sigma_E)^2 \Rightarrow \sigma_P = w_D.\sigma_D + w_E.\sigma_E$$

Em todos os outros casos ($\rho_{DE} < 1$): o desvio-padrão do portfolio de risco é menor do que a soma ponderada do desvio-padrão dos ativos de risco

- Ativos com correlação negativa são chamados ativos de proteção (hedge): inclusão de ativos de hedge diminuem o risco total da carteira
- Retorno esperado da carteira não é afetado pela correlação entre os retornos
- É sempre preferível diversificar a carteira por ativos com baixa correlação ou correlação negativa: maior ganho de eficiência na diversificação

Diversificação e Portfolio de Risco

No caso de ativos perfeitamente negativamente correlacionados, $\rho_{DE} = -1$, a variância da carteira de risco torna-se:

$$\sigma_P{}^2 = (w_D.\sigma_D - w_E.\sigma_E)^2 \Rightarrow \sigma_P = abs(w_D.\sigma_D - w_E.\sigma_E)$$

Assim, uma posição com hedge perfeito pode ser obtiva pela escolha do portfolio que resolve:

$$w_D.\sigma_D - w_E.\sigma_E = 0$$

A solução é: $w_D = \frac{\sigma_E}{\sigma_D+\sigma_E}$ e $w_E = \frac{\sigma_D}{\sigma_D+\sigma_E} = 1 - w_D \Rightarrow$ ***portfolio com o menor risco possível***

Diversificação e Portfolio de Risco

Exemplo:

	Debt	Equity
Expected return, $E(r)$	8%	13%
Standard deviation, σ	12%	20%
Covariance, $Cov(r_D, r_E)$	72	
Correlation coefficient, ρ_{DE}	.30	

			Portfolio Standard Deviation for Given Correlation			
w_D	w_E	$E(r_P)$	$\rho = -1$	$\rho = 0$	$\rho = .30$	$\rho = 1$
0.00	1.00	13.00	20.00	20.00	20.00	20.00
0.10	0.90	12.50	16.80	18.04	18.40	19.20
0.20	0.80	12.00	13.60	16.18	16.88	18.40
0.30	0.70	11.50	10.40	14.46	15.47	17.60
0.40	0.60	11.00	7.20	12.92	14.20	16.80
0.50	0.50	10.50	4.00	11.66	13.11	16.00
0.60	0.40	10.00	0.80	10.76	12.26	15.20
0.70	0.30	9.50	2.40	10.32	11.70	14.40
0.80	0.20	9.00	5.60	10.40	11.45	13.60
0.90	0.10	8.50	8.80	10.98	11.56	12.80
1.00	0.00	8.00	12.00	12.00	12.00	12.00

$$E(r_p) = 8w_D + 13w_E$$

$$\sigma_p^2 = 12^2 w_D^2 + 20^2 w_E^2 + 2 \times 12 \times 20 \times .3 \times w_D w_E$$

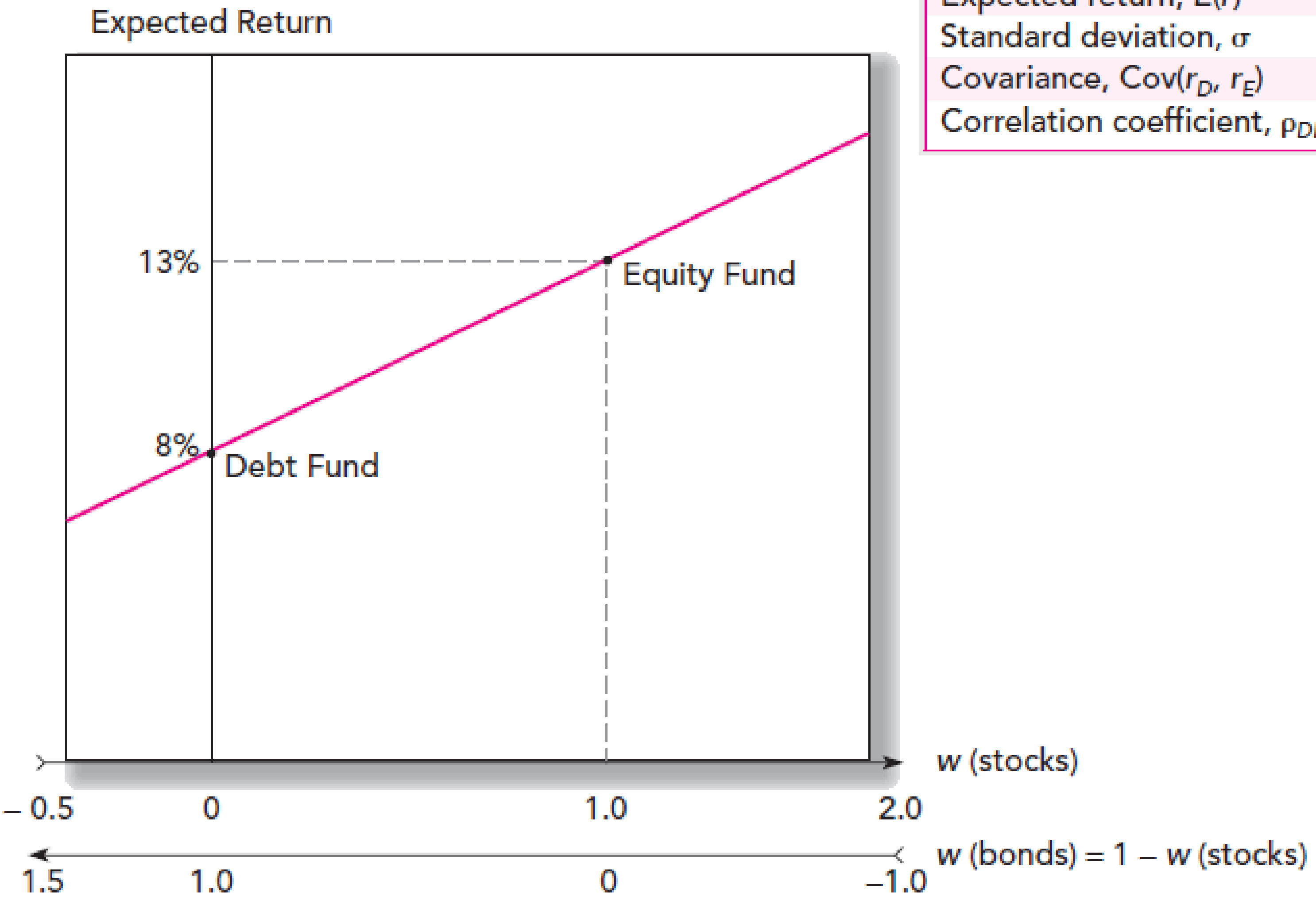
$$= 144 w_D^2 + 400 w_E^2 + 144 w_D w_E$$

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2}$$

Diversificação e Portfolio de Risco

Exemplo:

	Debt	Equity
Expected return, $E(r)$	8%	13%
Standard deviation, σ	12%	20%
Covariance, $Cov(r_D, r_E)$	72	
Correlation coefficient, ρ_{DE}	.30	



Diversificação e Portfolio de Risco

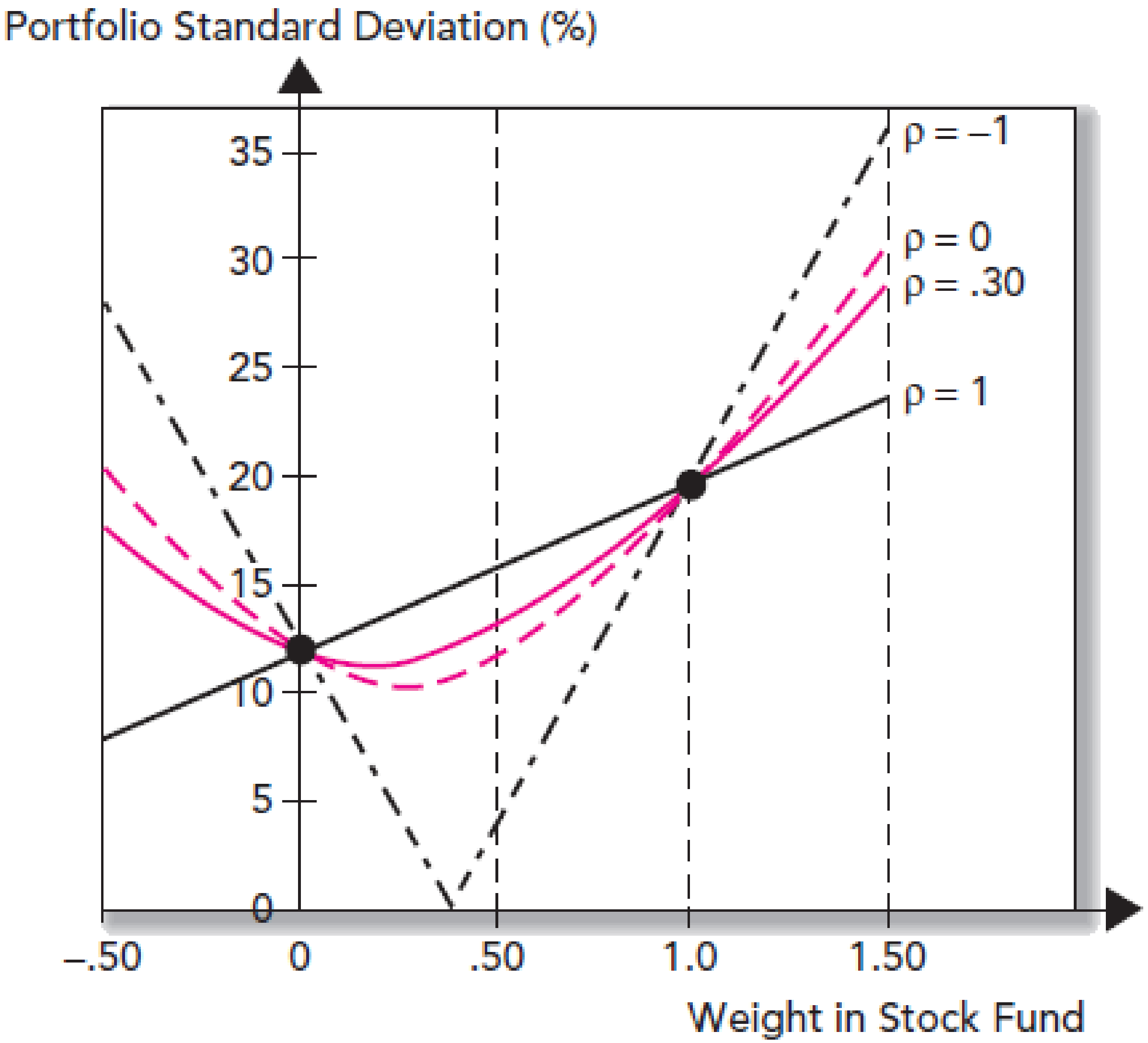
Exemplo:

Se correlação entre os ativos não for elevada: $\rho < \frac{\sigma_D}{\sigma_E}$, então:

✓ desvio-padrão da carteira com risco diminui com a diversificação inicial de títulos para ações (aumento em w_E), mas depois volta a subir conforme a concentração em ações se torna elevada

Se correlação for próxima a 1: $\rho \cong 1$, então:

✓ Desvio-padrão da carteira com risco aumenta de forma linear entre o ativo com menor risco para o ativo com maior risco



Carteira de Risco de Mínima Variância

A carteira de risco eficiente é aquela que minimiza o risco, dado um retorno esperado, ou seja:

$$\min_{w_D} \; w_D^2 . \sigma_D^2 + (1 - w_D)^2 . \sigma_E^2 + 2 . w_D . (1 - w_D) . cov(r_D, r_E)$$

Sujeito a: $E(r_P) = w_D . E(r_D) + w_E . E(r_E)$

Condição de Primeira Ordem: $\frac{dVar\,(w_D)}{dw_D} = 0$

A solução de alocação que minimiza a variância é: $w_D^* = \frac{\sigma_E^2 - cov(r_D, r_E)}{\sigma_D^2 + \sigma_E^2 - 2cov(r_D, r_E)}$

Carteira de Risco de Mínima Variância

No exemplo: $w_D^* = 0{,}82$ e $w_E^* = 1 - 0{,}82 = 0{,}18$

	Debt	Equity
Expected return, $E(r)$	8%	13%
Standard deviation, σ	12%	20%
Covariance, $\text{Cov}(r_D, r_E)$	72	
Correlation coefficient, ρ_{DE}	.30	

Neste caso, a variância mínima é: $\sigma_{min}^2 = 0{,}82^2 . 0{,}12^2 \; + 0{,}18^2 . 0{,}20^2 + 2.0{,}82.0{,}18.0{,}0072 = 0{,}0131$

Portanto, $\sigma_{min} = 0{,}1145 = 11{,}45\%$ e $E(r_P) = 0{,}82.0{,}08 + 0{,}18.0{,}13 = 0{,}089 = 8{,}9\%$

A carteira de mínima variância tem um desvio-padrão menor do que os ativos de risco individualmente ⇨ efeito da diversificação

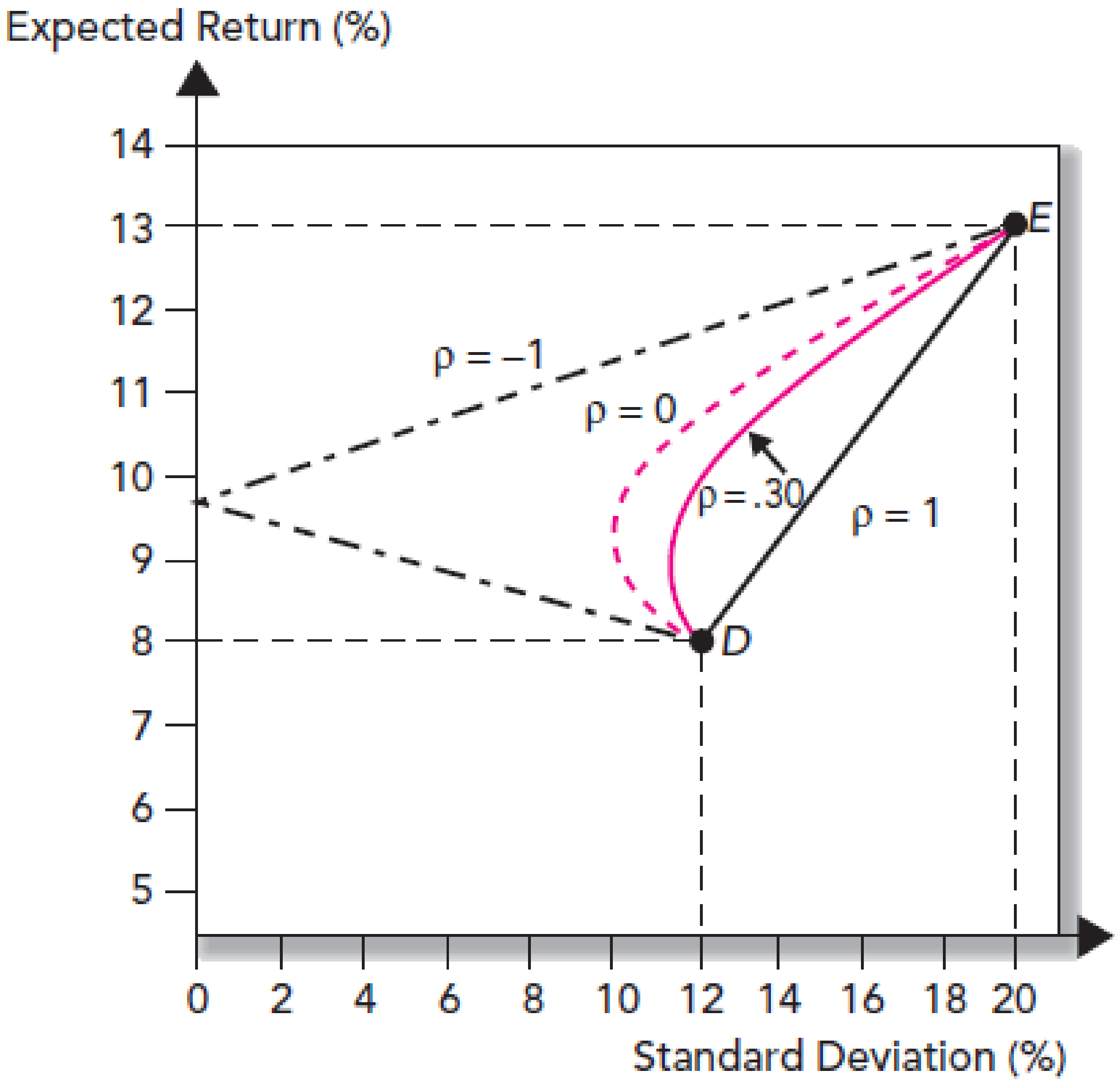
A tabela ao lado mostra diferentes alocações ótimas nos ativos com risco, dependendo do nível de correlação entre os ativos.

	Portfolio Standard Deviation for Given Correlation			
	$\rho = -1$	$\rho = 0$	$\rho = .30$	$\rho = 1$
	Minimum Variance Portfolio			
w_D	0.6250	0.7353	0.8200	—
w_E	0.3750	0.2647	0.1800	—
$E(r_P)$	9.8750	9.3235	8.9000	—
σ_P	0.0000	10.2899	11.4473	—

Carteira de Risco de Mínima Variância

Colocando no mesmo gráfico o retorno esperado em função do risco, temos o **conjunto de oportunidade de carteiras** ⇨ combinações de retorno esperado e desvio-padrão que podem ser construídos com os dois ativos de risco

- ✓ Quando Coef. Correlação = 1: não há benefícios pela diversificação
- ✓ Quando Coef. Correlação = -1: conjunto de oportunidade é linear e oferece o hedge perfeito, com a máxima vantagem da diversificação
- ✓ Quando Coef. Correlação = 0: menor correlação possível entre dois ativos ⇨ diversificação é mais efetiva e o risco do portfolio é menor, dentre os portfolios com correlação não negativa



Carteira de Risco e Máxima Utilidade

A escolha do melhor portfolio de mínima variância depende da aversão ao risco do investidor

Dado um nível de aversão ao risco A, podemos determinar a carteira de risco que maximiza a utilidade do investidor

- Seja a função utilidade dada por: $U = E(r_P) - {}^1/_2 \,.\, A.\,\sigma_P^2$
- O retorno esperado e a variância do portfolio de risco são determinadas pelos pesos dos ativos de risco: w_D e w_E

A proporção de investimentos em cada ativo é aquela que maximiza a utilidade. Neste caso, o problema do investidor é dado por:

$$\max_{w_D} \boldsymbol{U = E(r_P) - {}^1/_2 \,.\, A.\,\sigma_P^2}$$

$$\text{Restrições: } \begin{cases} E(r_P) = w_D.\,E(r_D) + w_E.\,E(r_E) & (1) \\ {\sigma_P}^2 = w_D^2.\,\sigma_D^2 + w_E^2.\,\sigma_E^2 + 2.\,w_D w_E.\,cov(r_D, r_E\,) & (2) \\ w_D + w_E = 1 & (3) \end{cases}$$

A carteira ótima de ativos com risco de mínima variância não necessariamente é aquela que maximiza a utilidade

Pela condição de primeira ordem, chegamos a:

Pesos ótimos maximizadores da utilidade:

$$w_D = \frac{E(r_D) - E(r_E) + A(\sigma_E^2 - \sigma_D\sigma_E\rho_{DE})}{A(\sigma_D^2 + \sigma_E^2 - 2\sigma_D\sigma_E\rho_{DE})}$$

$$w_E = 1 - w_D$$

Carteira de Risco e Máxima Utilidade

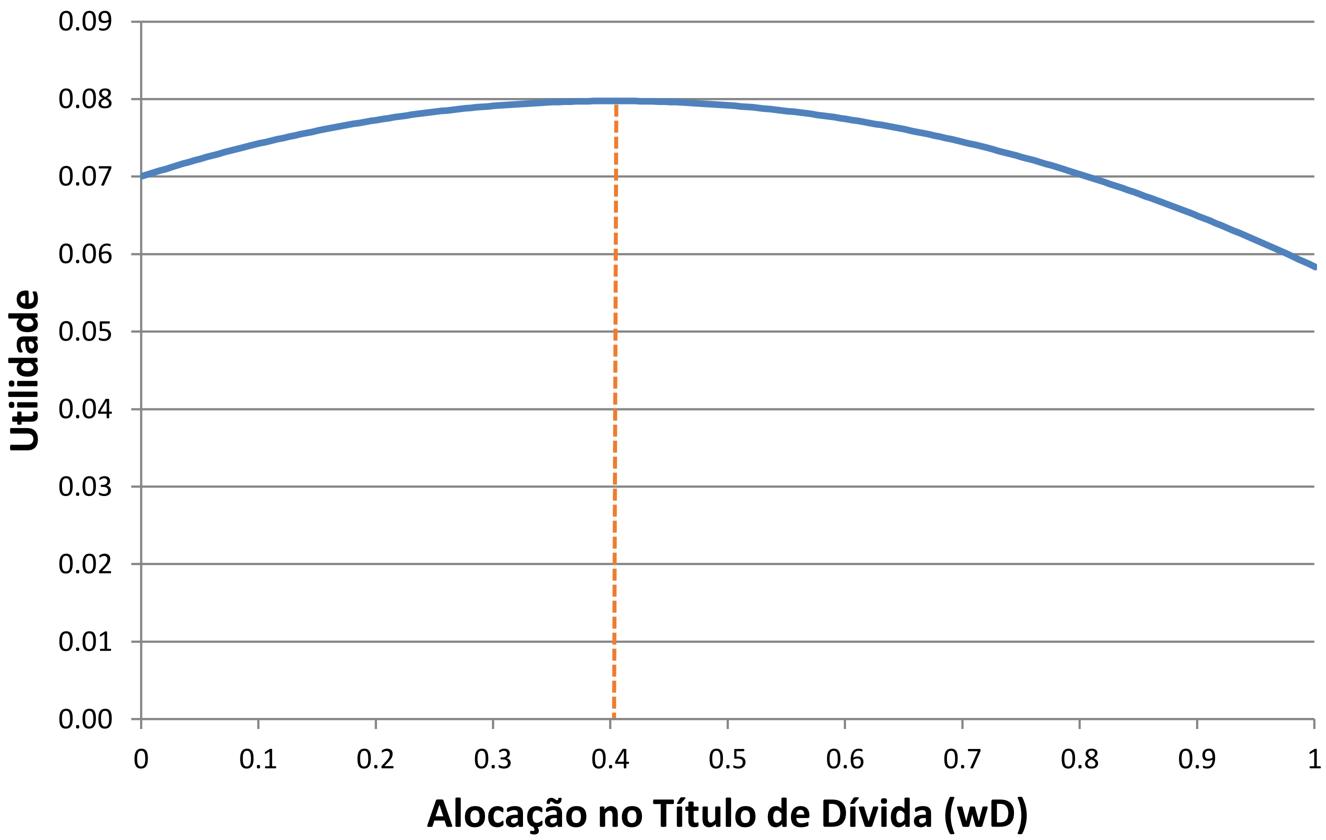
Exemplo: calcule a carteira ótima que maximiza a utilidade do investidor, sendo A =3:

	Debt	Equity
Expected return, $E(r)$	8%	13%
Standard deviation, σ	12%	20%
Covariance, $Cov(r_D, r_E)$	72	
Correlation coefficient, ρ_{DE}	.30	

A composição que maximiza a utilidade do investidor é:

$w_D^* = 0{,}4033$ e $w_E^* = 0{,}5967$

A utilidade máxima é: U = 0,0798



Enquanto a carteira ótima que maximiza a utilidade depende da aversão ao risco e do prêmio de risco, a carteira ótima de variância mínima depende apenas das variâncias e covariâncias.

Carteira de Risco de Mínima Variância

Exercício: calcule e construa o conjunto de oportunidade de carteiras com correlação igual a 0,25 e a -0,25, utilizando dos demais dados do exemplo anterior. Calcule as alocações nos ativos de risco que mínima variância e de máxima utilidade para cada uma das duas correlações.

Ativo Livre de Risco e Carteira de Risco

Qual a melhor alocação para um investidor se considerarmos dois ativos de risco e um ativo livre de risco?

Considere o retorno do ativo livre de risco igual a 5% e os dados dos ativos de risco dados na tabela ao lado:

	Debt	Equity
Expected return, $E(r)$	8%	13%
Standard deviation, σ	12%	20%
Covariance, $Cov(r_D, r_E)$	72	
Correlation coefficient, ρ_{DE}	.30	

Vamos considerar 2 carteiras diferentes e calcular a CAL delas:

Portfolio A: proporção dos ativos com risco que minimiza a variância da carteira

$w_D = 82\%$ e $w_E = 18\%$

Nesse caso: $E(r_P) = 8.9\%$ e $vol(P) = 11.45\%$

$$S_A = \frac{E(r_A) - r_f}{\sigma_A} = \frac{8.9 - 5}{11.45} = .34$$

Portfolio B: outra proporção dos ativos com risco

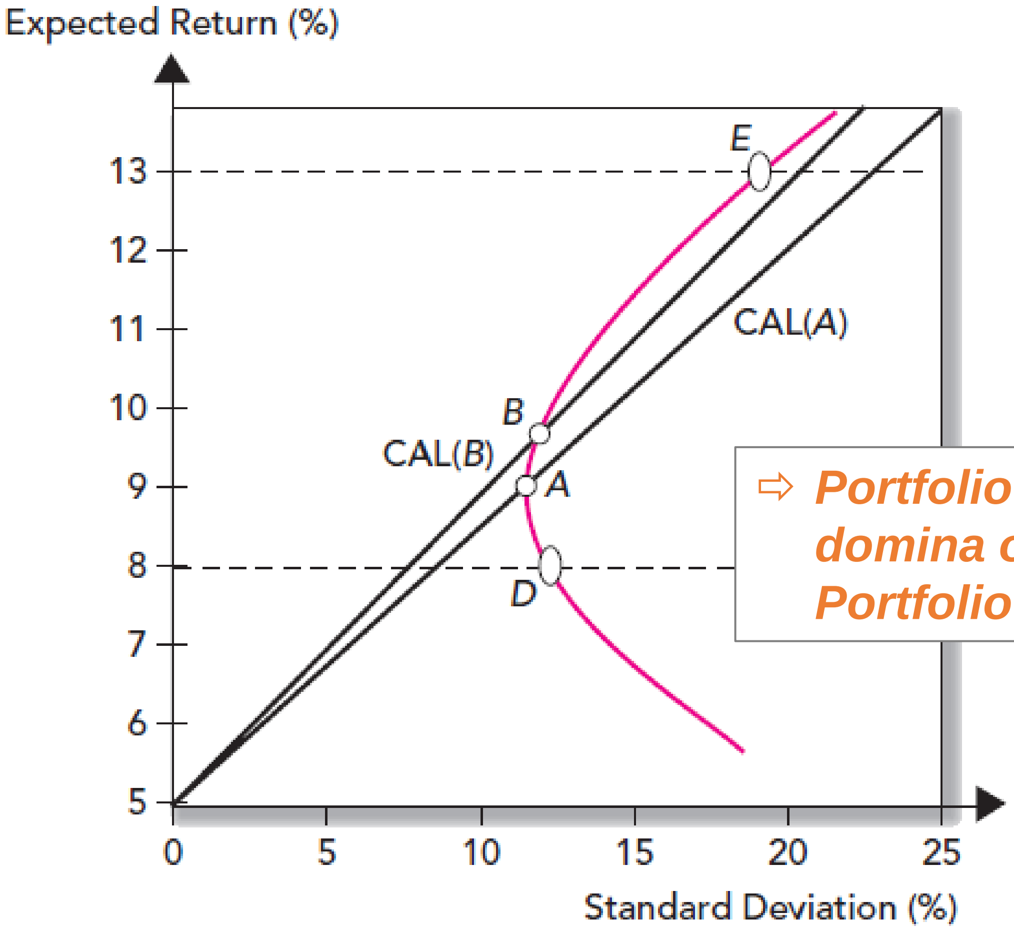
$w_D = 70\%$ e $w_E = 30\%$

Nesse caso: $E(r_P) = 9.5\%$ e $vol(P) = 11.7\%$

$$S_B = \frac{9.5 - 5}{11.7} = .38$$

Ativo Livre de Risco e Carteira de Risco

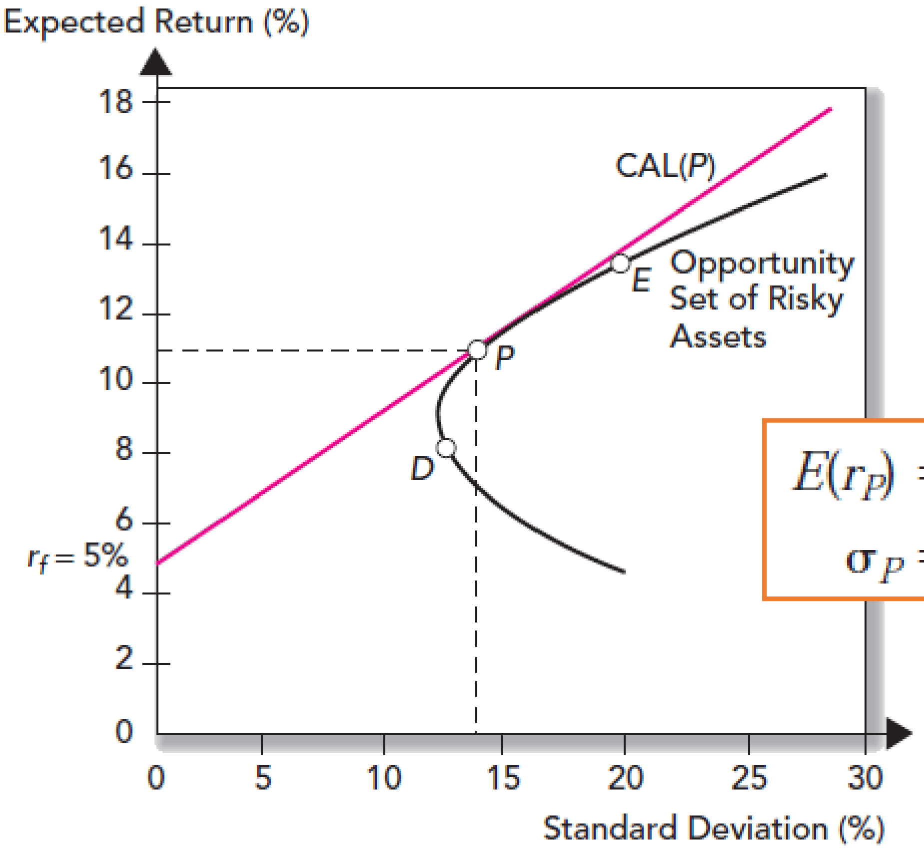
Note que a taxa de recompensa pela volatilidade do Portfolio B é maior do que do Portfolio A (carteira de mínima variância), como pode ser visto abaixo



⇨ ***Portfolio B domina o Portfolio A***

Podemos definir outros portfolios, que nos darão outras CALs

O ***Portfolio P*** é aquele com a maior taxa de recompensa pela volatilidade: tangência entre a CAL e a linha de Conjunto de Oportunidades



$$E(r_P) = 11\%$$
$$\sigma_P = 14.2\%$$

Ativo Livre de Risco e Carteira de Risco

Para o caso simples em que há dois ativos de risco (D e E) e um ativo livre de risco, o ***problema do portfolio eficiente*** pode ser escrito como: encontrar os pesos dos ativos com risco que maximizam a taxa de recompensa pela volatilidade (S) para qualquer carteira de risco ***p***:

$$\max_{w_D} S_p = \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p}$$

Restrições:

$$\begin{cases} E(r_p) = w_D.E(r_D) + w_E.E(r_E) & (1) \\ \sigma_p = [w_D^2.\sigma_D^2 + w_E^2.\sigma_E^2 + 2.w_D w_E.cov(r_D, r_E)]^{1/2} & (2) \\ w_D + w_E = 1 & (3) \end{cases}$$

Pela condição de primeira ordem, chegamos a:

$$w_D = \frac{E(R_D)\sigma_E^2 - E(R_E)\mathrm{Cov}(R_D, R_E)}{E(R_D)\sigma_E^2 + E(R_E)\sigma_D^2 - [E(R_D) + E(R_E)]\mathrm{Cov}(R_D, R_E)}$$

$$w_E = 1 - w_D$$

Note que na solução acima são utilizados $E(R_D)$ e $E(R_E)$, que são os excessos de retorno entre o ativo com risco e o ativo livre de risco (prêmio de risco de CADA ativo), não o retorno esperado de cada ativo (r)

Para o caso de mais de dois ativos com risco, na restrição (3) a soma dos pesos de todos os ativos de risco deve ser igual a 1, além das extensões das variâncias e covariâncias nas demais restrições

Ativo Livre de Risco e Carteira de Risco

O ***portfolio eficiente*** para o exemplo anterior é:

$$w_D = \frac{(8-5)400-(13-5)72}{(8-5)400+(13-5)144-(8-5+13-5)72} = .40$$

$$w_E = 1 - .40 = .60$$

O retorno esperado do portfolio eficiente, sua volatilidade e o valor da taxa de recompensa pela volatilidade são:

$$E(r_P) = (.4 \times 8) + (.6 \times 13) = 11\%$$

$$\sigma_P = [(.4^2 \times 144) + (.6^2 \times 400) + (2 \times .4 \times .6 \times 72)]^{1/2} = 14.2\%$$

$$S_P = \frac{11-5}{14.2} = .42$$

Maior inclinação possível para o conjunto factível de carteiras dado pelo Conjunto de Oportunidades e o retorno do ativo livre de risco ⇨ portfolio eficiente: P

Ativo Livre de Risco e Carteira de Risco

Uma vez definida a composição do portfolio eficiente de risco (aquele que tem a maior taxa de recompensa pela volatilidade ou Índice de Sharpe), o alocação ótima entre o ativo livre de risco e a carteira com risco P, do investidor com aversão ao risco A é dada por:

$$y = \frac{E(r_P) - r_f}{A\sigma_P^2}$$

No exemplo, y* = 0,7439 para uma aversão ao risco igual a 4 ⇨ o investidor aloca 74.39% de sua riqueza na carteira com risco P e 25.61% no ativo livre de risco

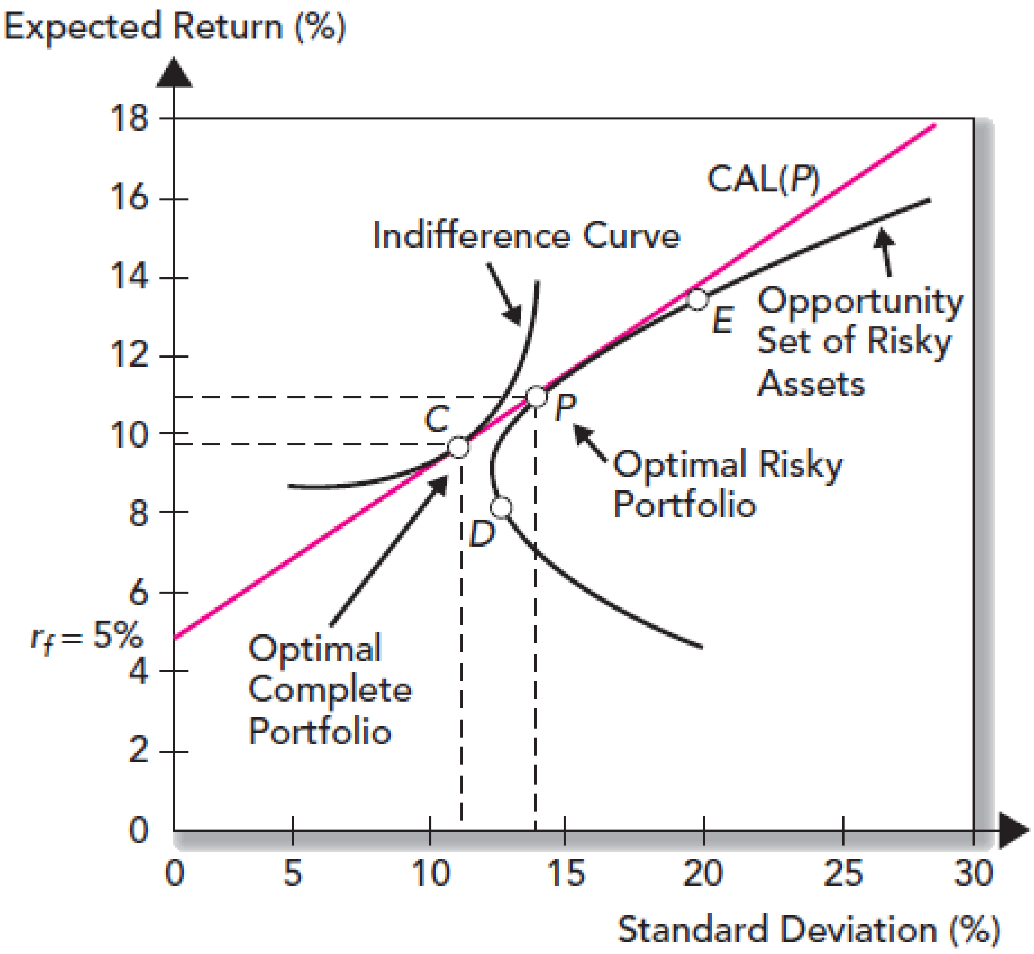
O portfolio P é composto por 40% de títulos de dívida e 60% de ações, assim, a alocação ótima da riqueza do investidor é de:

Títulos = 0,4 x 0,7439 = 0,2976

Ações = 0,6 x 0,7439 = 0,4463

Ativo Livre de Risco = 0,2561

Graficamente, a solução está apresentada ao lado:



Ativo Livre de Risco e Carteira de Risco

Exercício 1: Quais os valores do risco e retorno do portfolio associados à máxima utilidade do consumidor (Portfolio C)?

Carteira de Risco de Mínima Variância

Exercício 2: Considere dois ativos de risco (A e B) e o ativo livre de risco. Os dados de risco e retorno de cada ativo estão na tabela abaixo.

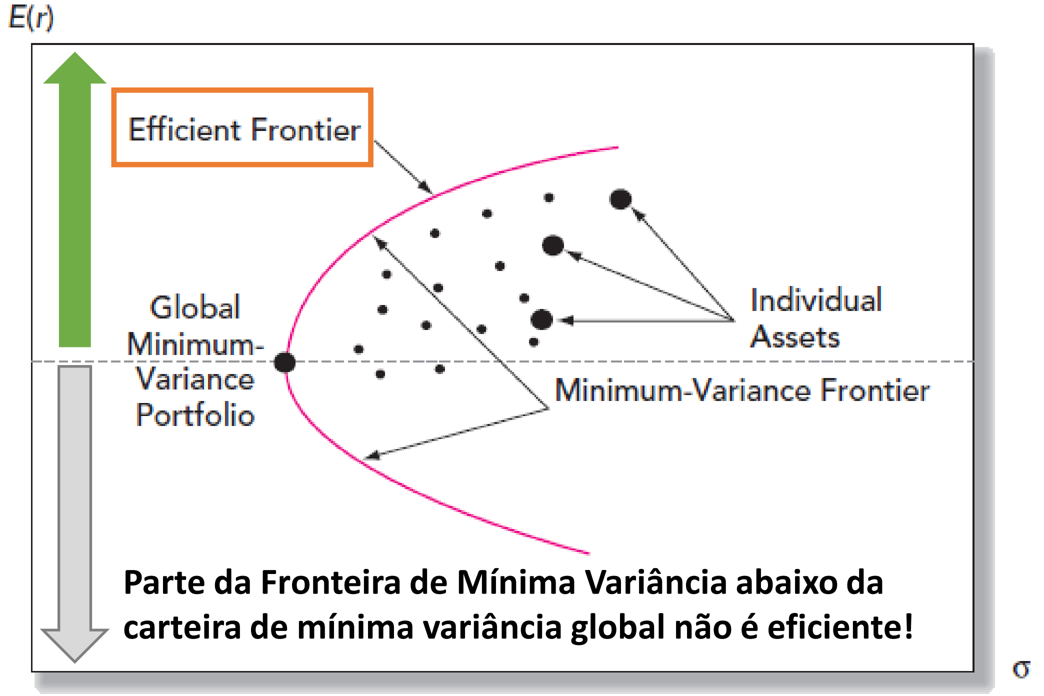
Sendo o coeficiente de correlação entre A e B igual a -0,2, responda:

a) Faça o gráfico do conjunto de oportunidades entre A e B.
b) Encontre o portfolio de risco P e calcule seu retorno esperado e sua volatilidade.
c) Calcule a inclinação da CAL do portfolio eficiente.
d) Dada aversão ao risco igual a 5, qual a alocação que maximiza a utilidade do investidor?
e) Faça o gráfico que mostra o ponto de tangência entre a CAL do portfolio ótimo e o Conjunto de Oportunidades de Carteiras e entre a CAL e a Curva de Indiferença.

	Expected Return	Standard Deviation
A	10%	20%
B	30	60
T-bills	5	0

Modelo de Seleção de Carteiras de Markowitz

Determinar as carteiras de risco com base na melhores combinações risco-retorno, formando a Fronteira de Mínima Variância



As carteiras de risco que minimizam a variância (carteiras eficientes) formam a ***Fronteira de Mínima Variância***:

⇨ Menor variância que pode ser obtida pela combinação de ativos de risco, para um dado nível de retorno esperado

Todos os ativos (individuais) de risco estão dentro da Fronteira de Mínima Variância: não é eficiente investir em um único ativo quando a possibilidade de venda a descoberto existe ("ficar vendido") ⇨ a diversificação leva a carteiras com maiores retornos esperados e menor desvios-padrão

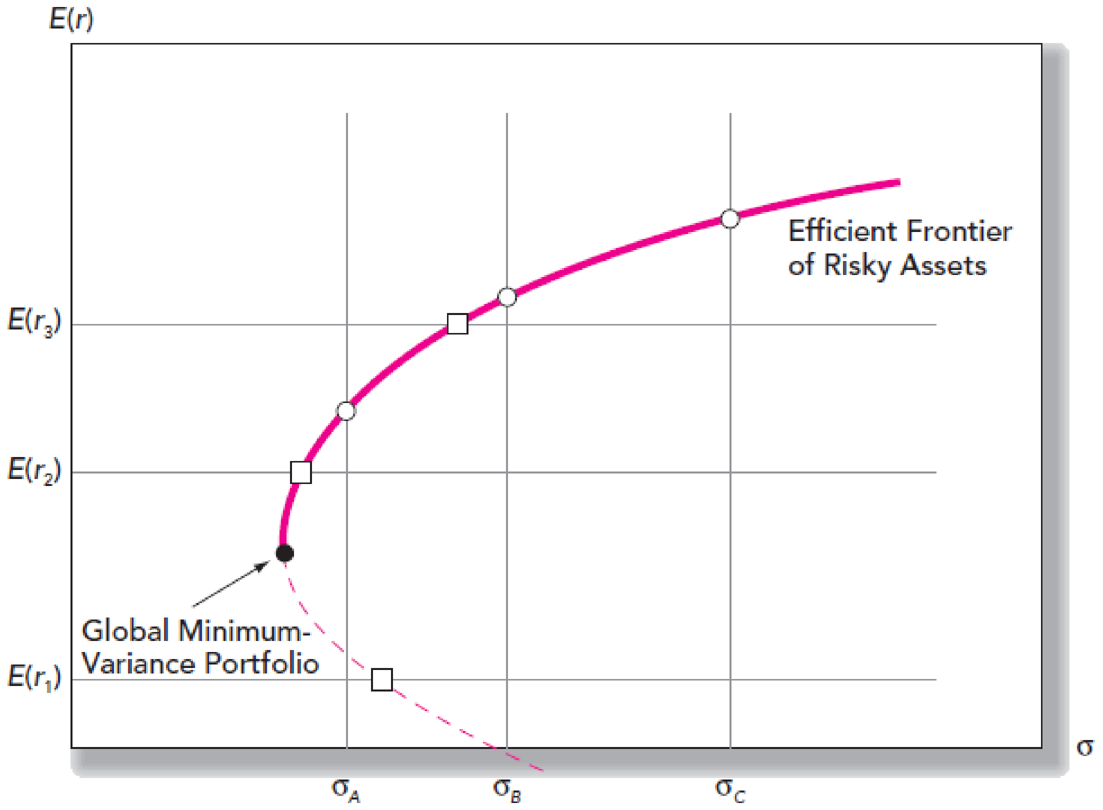
- ✓ *Quando a venda a descoberto é possível, sempre será melhor formar uma carteira de risco que combina um ativo com um dado nível de risco e elevado retorno, com outros ativos que oferecem o mesmo retorno, mas com menor variância*
- ✓ *Quando a venda a descoberto não é possível, alguns ativos podem estar em cima da fronteira, como o ativo com o maior retorno esperado*

Modelo de Seleção de Carteiras de Markowitz

Determinar as carteiras de risco com base na melhores combinações risco-retorno, formando a Fronteira de Mínima Variância

Para formar a Fronteira de Mínima Variância (e a Fronteira Eficiente), é necessário obter todas as estimativas dos retornos esperados e da matriz de variância-covariância entre os ativos de risco

O retorno esperado e a variância das carteiras de risco, com peso $\boldsymbol{w_i}$ para cada ativo, são calculados como:



$$E(r_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(r_i) \qquad \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \mathrm{Cov}(r_i, r_j)$$

Lista de inputs do Modelo

O Modelo de Markowitz identifica o conjunto eficiente de carteiras: Fronteira Eficiente dos ativos de risco

- ✓ Para um dado nível de risco, busca-se a carteira com o maior retorno esperado

OU:

- ✓ Para um dado nível de retorno, busca-se a carteira de menor variância

Modelo de Seleção de Carteiras de Markowitz

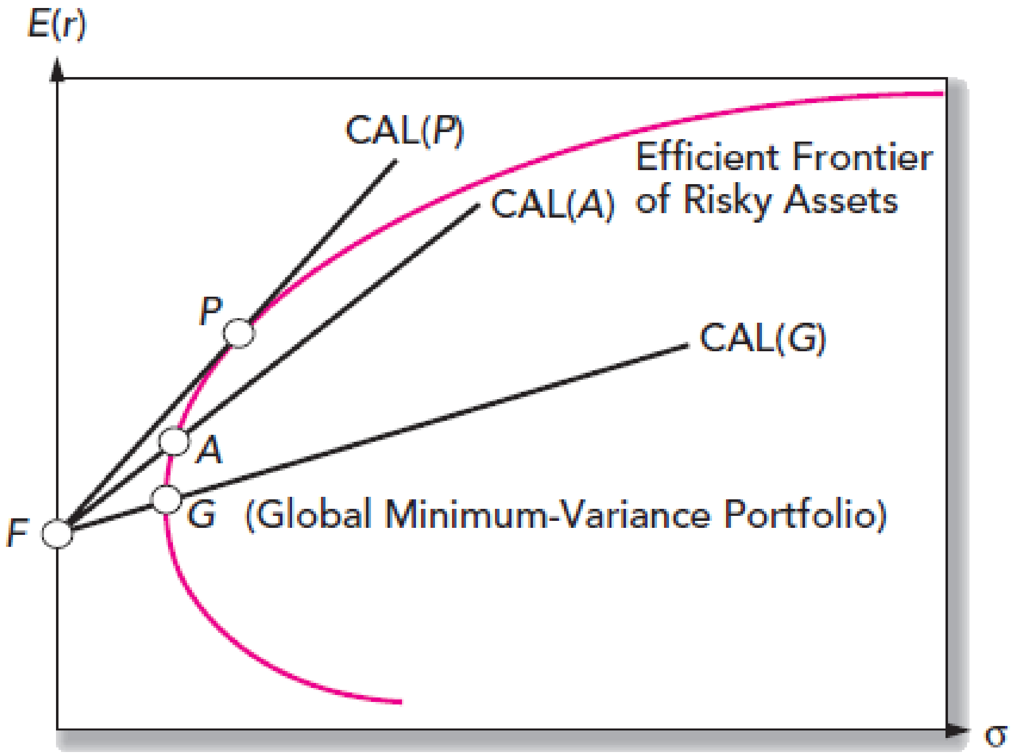
De acordo com o modelo de Markowitz, as duas formas de encontrar as carteiras da Fronteira Eficiente são equivalentes:

Minimizar a variância, dado o retorno desejado	Maximizar o retorno, dada um nível de risco tolerado
$\min_{w_i} \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \mathrm{Cov}(r_i, r_j)$	$\max_{W_i} E(r_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(r_i)$
Sujeito a: $E(r_P) = \bar{r}_P$	Sujeito a: $\sigma_P^2 = \bar{\sigma}_P^2$

- Outras restrições podem ser acrescentadas no modelo, como restrição para a venda a descoberto, nível máximo de alocação em um ativo / grupo de ativos, alocação obrigatória em um ativo específico etc
- A cada nova restrição, a solução da otimização se afasta da solução ótima com restrição apenas ao risco ou retorno

Modelo de Seleção de Carteiras de Markowitz

Identificar a carteira de risco ótima P que maximiza a taxa de recompensa pela volatilidade



Dado o ativo livre de risco F, o portfolio P maximiza a inclinação da CAL, dominando todas as demais carteiras de risco

⇨ Portfolio P é o ponto de tangência entre a CAL e a Fronteira Eficiente

O portfolio P é a carteira ótima de risco independentemente da aversão ao risco do investidor

(a aversão ao risco do investidor interfere na alocação entre o ativo livre de risco F e o portfolio de risco P)

Propriedade da Separação (James Tobin, 1958): o problema da escolha do portfolio pode ser separado em duas tarefas independentes:

(i) determinação do portfolio ótimo de risco (P); e

(ii) alocação entre o ativo livre de risco e a carteira ótima com risco.

O Poder da Diversificação

Seja a variância do portfolio P dada por:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \text{Cov}(r_i, r_j)$$

Supondo que todos os ativos de risco tenham o mesmo peso ⇨ *wi = 1/n*.

Se separarmos os termos em que i=j e escrevermos $Cov(r_i, r_i) = \sigma_i^2$, então, a variância de P pode ser escrita como:

(há *n* variâncias e *(n-1)* covariâncias)

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \sigma_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} \text{Cov}(r_i, r_j)$$

Podemos definir as variâncias e covariâncias médias como:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \qquad \overline{\text{Cov}} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \sum_{i=1}^{n} \text{Cov}(r_i, r_j)$$

Logo, a variância de P pode ser escrita como:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n} \bar{\sigma}^2 + \frac{n-1}{n} \overline{\text{Cov}}$$

- Quando a covariância média entre os ativos de risco é zero (o que ocorre quando todo o risco é específico da firma, ou não sistemático) ⇨ conforme *n* aumenta, $\frac{1}{n}\bar{\sigma}^2 \to 0$, logo: $\sigma_P^2 \to 0$: o poder da diversificação leva o risco do portfolio a zero quando os ativos são não correlacionados
- Quando a covariância entre os ativos de risco é positiva ⇨ conforme n aumenta, o risco específico é diversificado ($\frac{1}{n}\bar{\sigma}^2 \to 0$) e o segundo termo da variância de P se aproxima de $\overline{Cov}$. Logo: a parte não redutível do risco de um portfolio diversificado depende da covariância dos retornos dos ativos, que é função dos fatores sistemáticos da economia

O Poder da Diversificação

Por simplificação, considere que todos os ativos de risco tenham um desvio-padrão igual a σ e que todos os pares de ativos tenham uma correlação igual a ρ.

Nesse caso, a covariância entre todos os pares de ativos é dada por $\rho\sigma^2$, resultando na seguinte expressão para a variância do portfolio P:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n}\sigma^2 + \frac{n-1}{n}\rho\sigma^2$$

Conforme n aumenta, $\sigma_P^2 \rightarrow \rho\sigma^2$ = risco sistemático

Em carteiras diversificadas, a contribuição de um ativo de risco para o risco da carteira depende da covariância deste ativo com os demais ativos da carteira e não da variância do ativo que está sendo incorporado!

Universe Size n	Portfolio Weights $w = 1/n$ (%)	$\rho = 0$: Standard Deviation (%)	$\rho = 0$: Reduction in σ	$\rho = .4$: Standard Deviation (%)	$\rho = .4$: Reduction in σ
1	100	50.00	14.64	50.00	8.17
2	50	35.36		41.83	
5	20	22.36	1.95	36.06	0.70
6	16.67	20.41		35.36	
10	10	15.81	0.73	33.91	0.20
11	9.09	15.08		33.71	
20	5	11.18	0.27	32.79	0.06
21	4.76	10.91		32.73	
100	1	5.00	0.02	31.86	0.00
101	0.99	4.98		31.86	

Pelo exemplo ao lado é possível perceber que:

- ✓ O risco da carteira diminui menos conforme n aumenta, no caso de correlação positiva ⇨ a correlação entre os retornos limita o poder da diversificação
- ✓ Se considerássemos um número infinito de ativos de risco, então:

$$\sigma_P = \sqrt{\rho\sigma^2} = \sqrt{0{,}4.\,0{,}5^2} = 0{,}3162 = 31{,}62\%$$

O Poder da Diversificação

Exercício

Suponha que o universo de ativos com risco consista em um grande número de ações, identicamente distribuídas com E(r)=15%, $\sigma = 60\%$ e coeficiente de correlação comum igual a 0,5. Responda:

a) Qual o retorno esperado e o desvio-padrão de um portfolio igualmente distribuído entre 25 ações?
b) Qual o menos número de ações necessário para gerar um portfolio eficiente com um desvio-padrão igual ou menor a 43%?
c) Qual o valor do risco sistemático em todo o universo de ações?
d) Se houver um ativo livre de risco com retorno de 10%, qual a inclinação da CAL no universo de ações?