

PME5011

Mecânica dos Meios Contínuos

Equação da Navier-Stokes

Parte 2

1)Equação de Navier-Stokes

A equação de Navier-Stokes é dada por:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \rho g_i \quad (1.1)$$

Essa é a forma mais geral da Equação de Navier-Stokes. Particularizando para as direções x , y e z :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \\
& \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\
& \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} \right) + \rho g_x
\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w v)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \\
& \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \\
& \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} \right) + \rho g_y
\end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v w)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w w)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \\
& \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\
& \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} \right) + \rho g_z
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Para um escoamento incompressível, da continuidade:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (1.5)$$

Aplicando esse resultado na Eq. (1.1):

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \rho g_i \quad (1.6)$$

Essa é a equação de Navier-Stokes para um escoamento incompressível.

Se, além de incompressível, o escoamento tiver propriedades uniformes (por exemplo, não temos gradientes significativos de temperatura afetando a distribuição da viscosidade):

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \rho g_i \quad (1.7)$$

Como podemos, no penúltimo termo do lado direito, inverter a ordem de derivação entre x_j e x_i :

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \underbrace{\mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)}_0 + \rho g_i \quad (1.8)$$

E obtemos a equação de Navier-Stokes para um escoamento incompressível e com propriedades uniformes:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho g_i \quad (1.9)$$

Essa forma da equação é chamada forma conservativa pois foi obtida a partir do Teorema do Transporte da Reynolds para um Volume Elementar (ver Cap. III). Na forma conservativa, a integração do termo convectivo num volume produz fluxos de Quantidade de Movimento através das faces. Em geral, a equação de Navier-Stokes é encontrada na literatura no que se chama forma não-conservativa, obtida subtraindo o produto do vetor da velocidade pela equação da continuidade do lado esquerdo da equação:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} - u_i \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} \right)}_0 = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho g_i \quad (1.10)$$

Resulta:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho g_i \quad (1.11)$$

Ou:

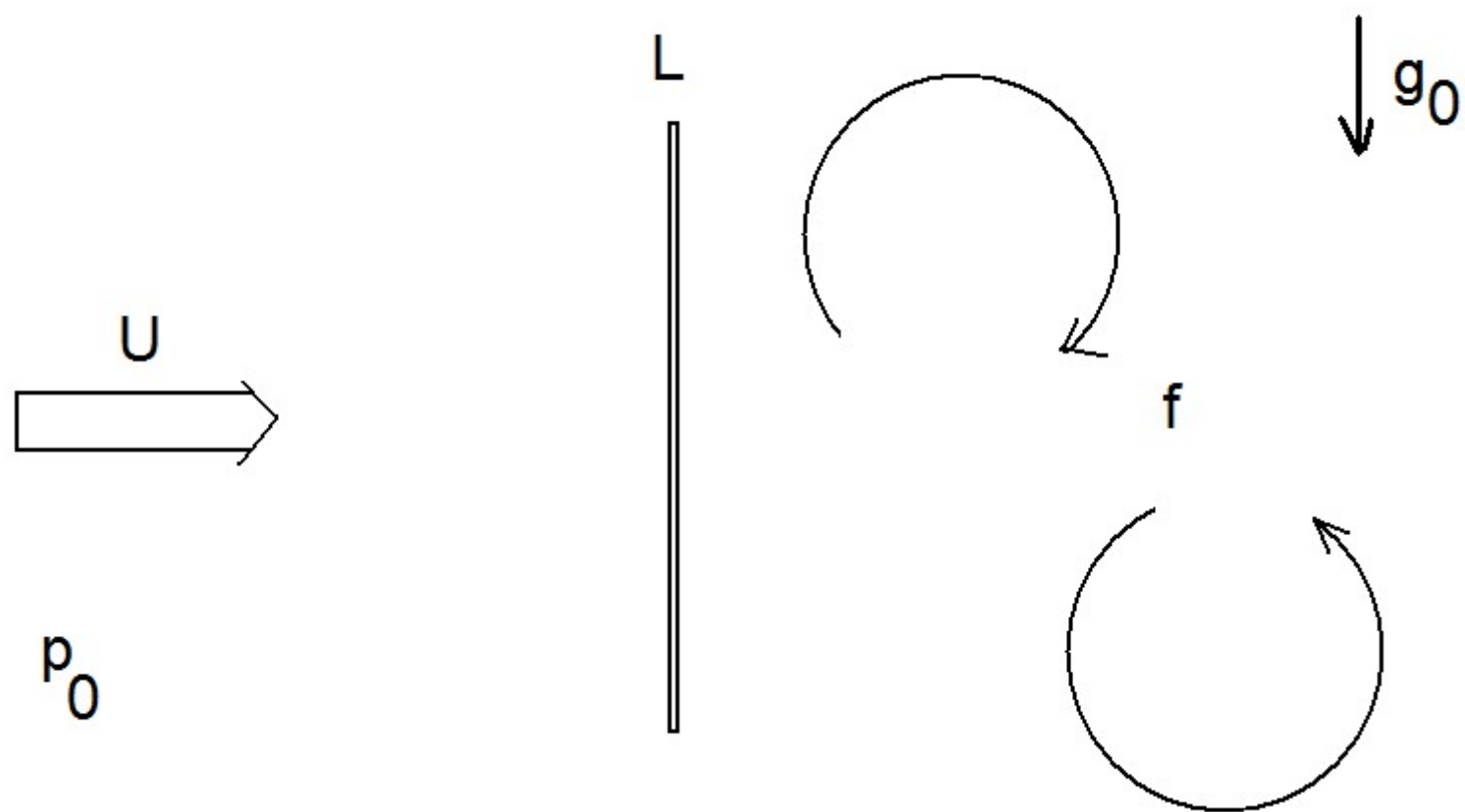
$$\boxed{\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i} \quad (1.12)$$

Que pode ser escrita, na forma simbólica ou vetorial:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{g}} \quad (1.13)$$

2)Análise Dimensional

A equação de Navier-Stokes pode ser usada para obter os principais grupos adimensionais usados na Mecânica dos Fluidos. Usualmente, na maioria dos textos de Mecânica dos Fluidos, esses grupos adimensionais são obtidos através do teorema de Buckingham, com uma análise matemática mais complexa. Mas a equação de Navier-Stokes pode ser adimensionalizada da seguinte forma:



Sejam U , L , f , p_0 e g_0 representativos da velocidade da corrente, dimensão linear, frequência, pressão e gravidade num escoamento qualquer. A equação de Navier-Stokes pode ser multiplicada por L/U^2 :

$$\frac{L}{U^2} \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{f}{f} + \frac{L}{U^2} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{L}{U^2} \frac{p_0}{p_0} + \frac{L}{U^2} \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \frac{L}{L} + g_i \frac{L}{U^2} \frac{g_0}{g_0} \quad (2.1)$$

Se fizermos:

$$u/U = u^* ; x/L = x^* ; t f = t^* ; p/p_0 = p^* ; g_i/g_0 = g_i^*$$

Obtemos:

$$\frac{f L}{U} \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} \frac{p_0}{\rho U^2} + \frac{\nu}{UL} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} + g_i^* \frac{L g_0}{U^2} \quad (2.2)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \frac{f L}{U} = St & \quad (\text{n}^\circ \text{ de Strouhal}) & \frac{p_0}{\rho U^2} = Eu & \quad (\text{n}^\circ \text{ de Euler}) \\ \frac{U L}{\nu} = Re & \quad (\text{n}^\circ \text{ de Reynolds}) & \frac{U}{\sqrt{L g_0}} = Fr & \quad (\text{n}^\circ \text{ de Froude}) \end{aligned}$$

Obtemos a forma adimensional da Eq. de Navier-Stokes:

$$St \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = -Eu \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} + g_i^* \frac{1}{Fr^2} \quad (2.3)$$

Por esta equação, percebemos que existe uma relação funcional entre os números adimensionais:

$$Eu = F(St, Re, Fr) \quad (2.4)$$

3) Sistema Cilíndrico de Coordenadas

Dado que o sistema cilíndrico de coordenadas é não-inercial, teremos termos extras nas equações da Mecânica dos Fluidos. A equação da continuidade, para um escoamento incompressível, fica:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

E a equação de Navier-Stokes, para um escoamento incompressível, fica:

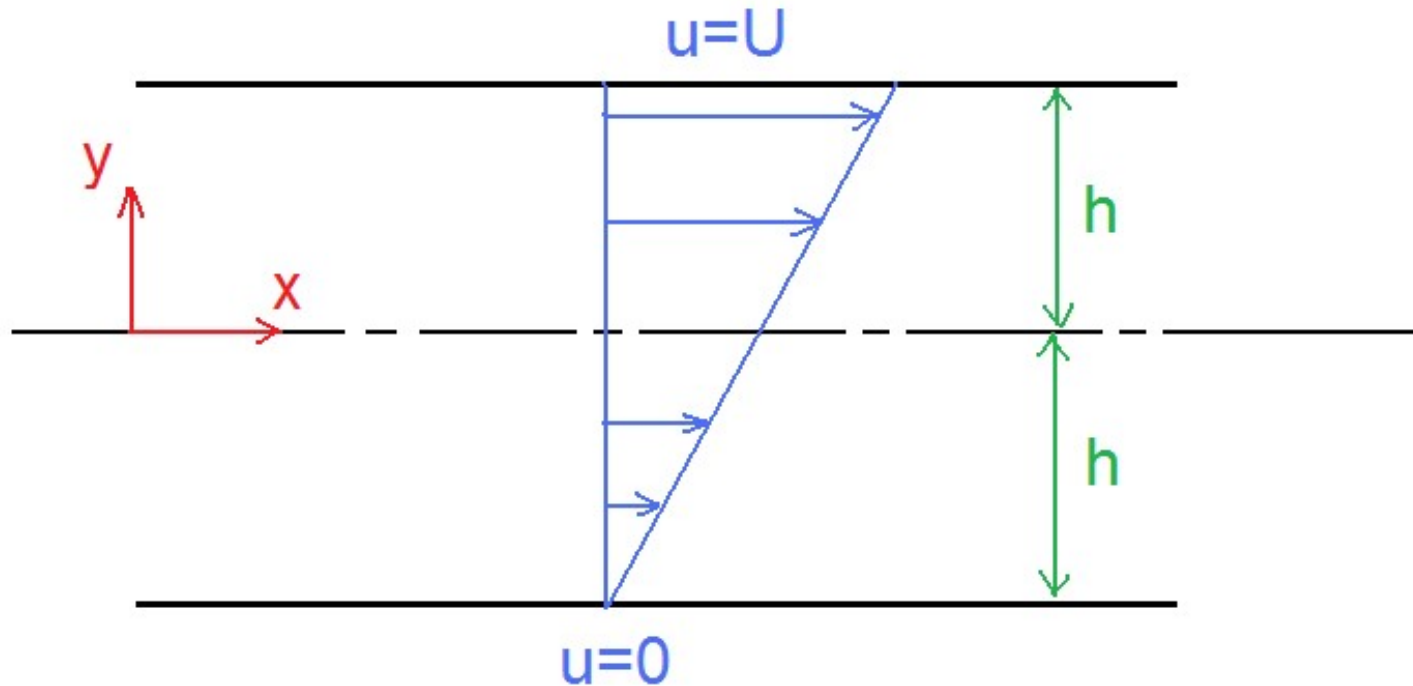
$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} = & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \\ & \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_\theta u_r}{r} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} + g_\theta + \\
& \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad (3.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \\
& \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right) \quad (3.4)
\end{aligned}$$

4) Soluções Analíticas da Equação de Navier-Stokes

a) Escoamento de Couette entre uma placa fixa e uma placa móvel de velocidade U .



Hipóteses:

- escoamento permanente, incompressível, bidimensional;
- escoamento desenvolvido ($\partial u / \partial x = 0$);
- escoamento laminar;
- sem gradiente de pressão;
- efeitos gravitacionais desprezíveis.

Da equação da continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Como o escoamento é desenvolvido, temos que:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_0 + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Como, para qualquer x , $v=0$ na parede ($y=h$ ou $y=-h$), se v não varia com y , $v=0$ em todo o campo de escoamento.

Da equação de Navier-Stokes na direção x :

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_0 + u \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_0 + \underbrace{v}_0 \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_0 + \nu \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_0 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Como u é função apenas de y , podemos usar o sinal de derivada total:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 0$$

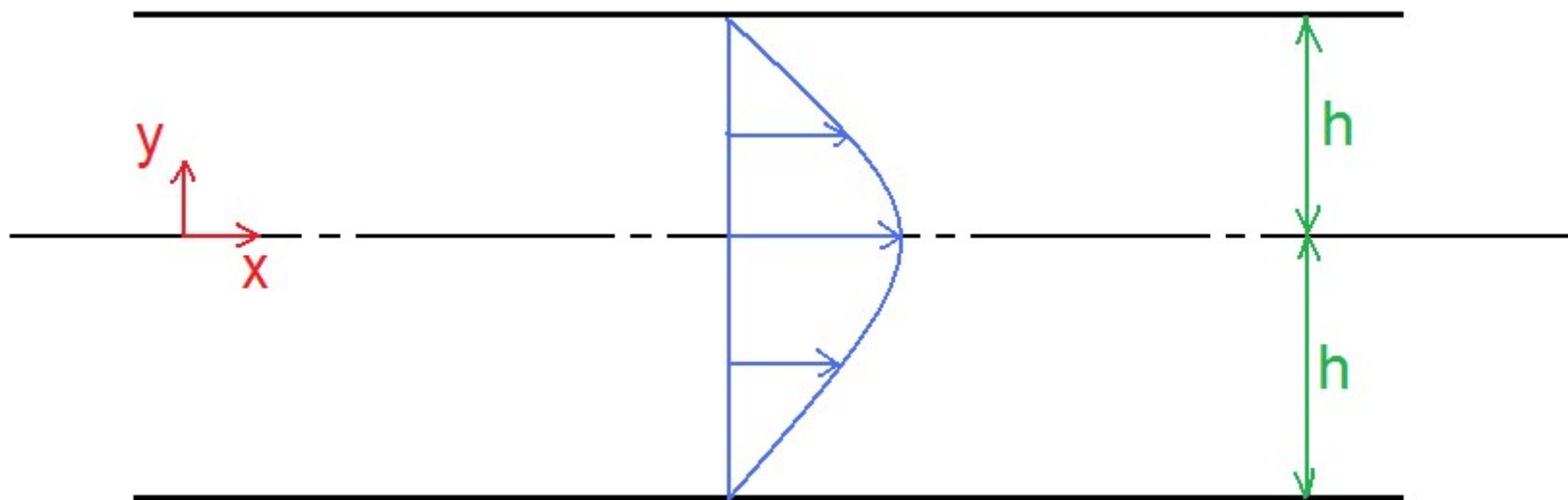
Integrando duas vezes:

$$u = C_1 y + C_2$$

As constantes são determinadas através das condições de contorno, $u=0$ para $y=-h$ e $u=U$ para $y=+h$:

$$u = \frac{U}{2h} y + \frac{U}{2}$$

b) Escoamento entre duas placas fixas com gradiente de pressão.



Hipóteses:

- escoamento permanente, incompressível, bidimensional;
- escoamento desenvolvido ($\partial u / \partial x = 0$);
- escoamento laminar;
- efeitos gravitacionais desprezíveis.

Novamente, como o escoamento é desenvolvido, $v=0$ em todo o campo.
A equação de Navier-Stokes na direção x fica:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_0 + u \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_0 + \underbrace{v}_0 \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_0 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

A equação de Navier-Stokes na direção y fica:

$$\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_0 + u \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_0 + v \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_0 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_0 + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_0 \right)$$

Logo:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Temos que u só varia com y e p só varia com x . Podemos escrever, usando derivadas totais:

$$\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} = \frac{d^2 u}{dy^2}$$

Além disso, dp/dx tem que ser constante, pois se derivarmos os dois lados da expressão em relação a x , como u não é função de x o resultado será nulo.

Integrando em y :

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

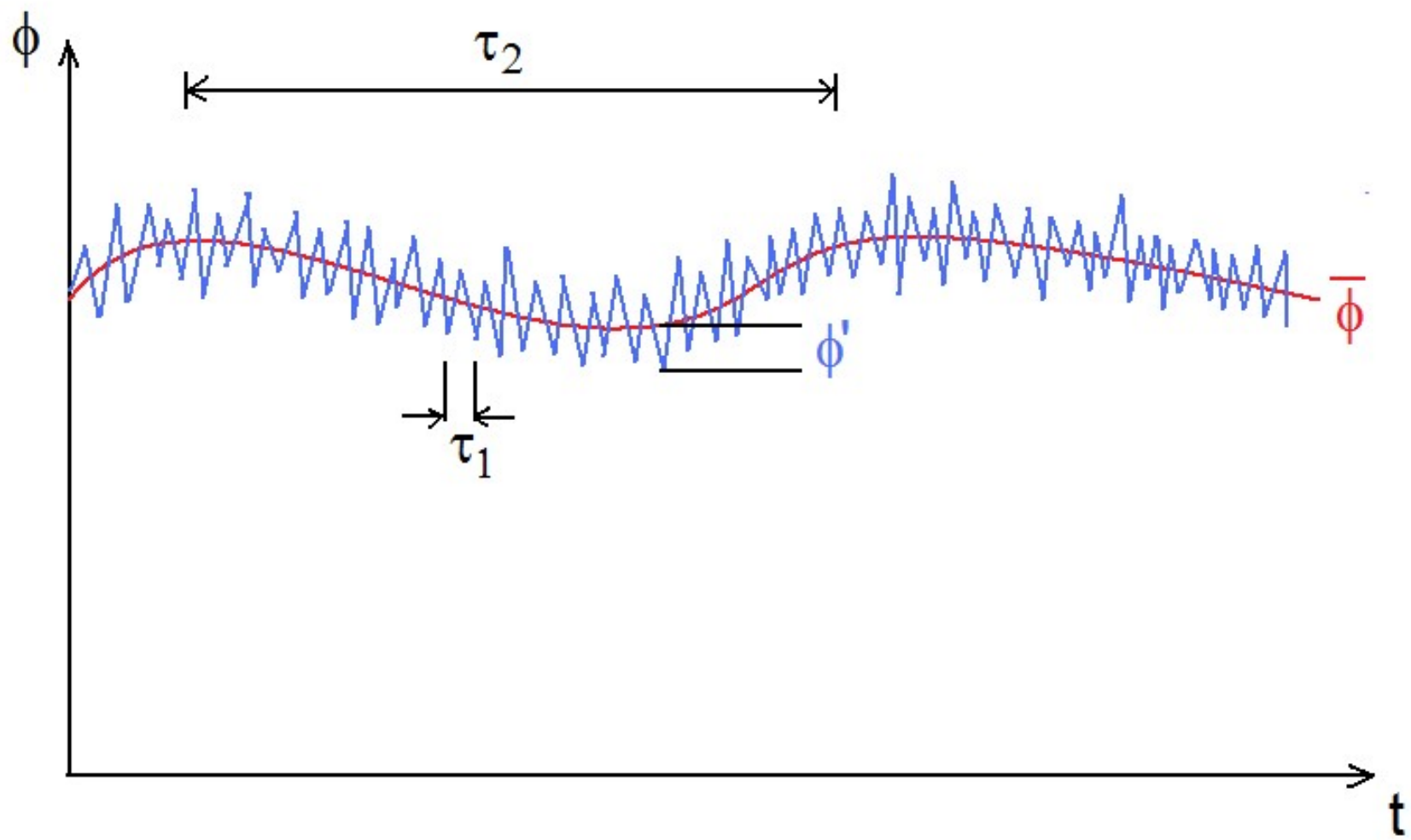
Temos as condições de contorno $u=0$ para $y=+h$ e $y=-h$, o que resulta:

$$u = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right)$$

5)Turbulência

Só obtemos soluções analíticas da equação de Navier-Stokes para escoamentos em geometrias muito simples e com hipóteses simplificadoras muito restritivas. Além disso, soluções analíticas só são possíveis para escoamentos laminares, ou seja, para baixos valores de número de Reynolds. A turbulência é caracterizada por flutuações randômicas nos valores das variáveis do escoamento, o que inviabiliza soluções analíticas e obriga o uso de métodos estatísticos acoplados a modelos baseados em resultados experimentais.

Seja ϕ uma variável do escoamento (velocidade, pressão, etc.). Num escoamento turbulento, se medirmos ϕ ao longo do tempo em um ponto:



Podemos escrever o sinal como a superposição de um sinal principal e uma flutuação turbulenta:

$$\phi(t) = \bar{\phi}(t) + \phi'(t) \quad (5.1)$$

A escala de tempo τ_2 é a escala de tempo do escoamento principal, e a escala de tempo τ_1 é a escala de tempo característica dos maiores turbilhões que caracterizam a turbulência. Suponha que ambas as escalas estejam bem separadas, ou seja, $\tau_2 \gg \tau_1$. É possível efetuar uma média temporal, chamada média de Reynolds, usando um intervalo de tempo de amostragem T , $T \gg \tau_1$ de forma a ter uma média estatística confiável, mas também $T \ll \tau_2$ de modo a não apagarmos o sinal do escoamento principal, e teremos:

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \phi(t) dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\bar{\phi}(t) + \phi'(t)) dt = \underbrace{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \bar{\phi}(t) dt}_{\bar{\phi}(t)} + \underbrace{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \phi'(t) dt}_0 \quad (5.2)$$

A média temporal de um processo randômico é nula, logo:

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \phi(t) dt = \bar{\phi}(t) \quad (5.3)$$

Podemos aplicar a operação de média de Reynolds às equações diferenciais válidas para um ponto do escoamento. Assim, para a continuidade, em um escoamento incompressível:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_j} dt = 0 \quad (5.5)$$

Vamos indicar a operação de média simplesmente por uma barra sobre a equação:

$$\frac{\partial(\overline{\bar{u}_j + u'_j})}{\partial x_j} = 0 \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial(\overline{u_j} + \overline{u'_j})}{\partial x_j} = 0 \quad (5.7)$$

Como a média temporal de uma média é a própria média, e a média temporal de uma variável randômica é nula:

$$\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} = 0 \quad (5.8)$$

Essa é a equação da continuidade para um escoamento incompressível turbulento.

Aplicando o mesmo princípio para a equação de Navier-Stokes na forma conservativa, no caso de um escoamento incompressível com propriedades constantes:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho(\bar{u}_i + u'_i))}{\partial t} + \frac{\partial(\rho(\bar{u}_j + u'_j)(\bar{u}_i + u'_i))}{\partial x_j} = & -\frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \\ & \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

É fácil ver que:

$$\overline{\bar{u}_i + u'_i} = \bar{u}_i \quad (5.11)$$

$$\overline{\bar{p} + p'} = \bar{p} \quad (5.12)$$

Já o termo de transporte convectivo tem um resultado menos simples:

$$(\overline{\bar{u}_j + u'_j})(\overline{\bar{u}_i + u'_i}) = \overline{\bar{u}_j \bar{u}_i} + \overline{\bar{u}_j u'_i} + \overline{u'_j \bar{u}_i} + \overline{u'_j u'_i} \quad (5.13)$$

$$(\overline{\bar{u}_j + u'_j})(\overline{\bar{u}_i + u'_i}) = \overline{\bar{u}_j \bar{u}_i} + \overline{\bar{u}_j u'_i} + \overline{u'_j \bar{u}_i} + \overline{u'_j u'_i} \quad (5.14)$$

$$(\overline{\bar{u}_j + u'_j})(\overline{\bar{u}_i + u'_i}) = \overline{\bar{u}_j \bar{u}_i} + \overline{\bar{u}_j \underbrace{u'_i}_0} + \overline{\bar{u}_i \underbrace{u'_j}_0} + \overline{u'_j u'_i} \quad (5.15)$$

Assim, a equação de Navier-Stokes para um escoamento turbulento incompressível resulta:

$$\frac{\partial(\rho \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_j \bar{u}_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right) \quad (5.16)$$

O termo $\overline{\rho u'_i u'_j}$ representa o transporte de Quantidade de Movimento relacionado com as flutuações turbulentas, e é chamado tensor das Tensões de Reynolds. Sua existência inviabiliza a obtenção de soluções analíticas para a equação de Navier-Stokes mesmo para geometrias simples. Em geral, a solução de escoamentos turbulentos exige o uso de modelos e correlações baseados em resultados experimentais.

6)Equações de Euler e Bernoulli

Se tomarmos a forma geral da equação de Navier-Stokes, Eq. (1.1), e fizermos a hipótese de fluido ideal (ou perfeito), ou seja, se fizermos a hipótese que o fluido escoa sem atrito, isso é equivalente a considerarmos que o fluido tem viscosidade nula ($\mu=0$). A equação de Navier-Stokes fica:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i \quad (6.1)$$

Essa é a chamada equação de Euler, que pode ser escrita:

$$\vec{a} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} \quad (6.2)$$

A aceleração pode ser escrita, usando a o que se conhece por fórmula de Lagrange da aceleração:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} \right) + (\nabla \times \vec{u}) \times \vec{u} \quad (6.3)$$

O produto escalar da velocidade por ela mesma gera um termo relacionado com a energia cinética, e o rotacional da velocidade é representativo do movimento de rotação do fluido e é a chamada vorticidade:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} \quad (6.4)$$

Substituindo na equação (6.3):

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \frac{u^2}{2} + \vec{\omega} \times \vec{u} \quad (6.5)$$

Assim, a equação de Euler fica:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \frac{u^2}{2} + \vec{\omega} \times \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} \quad (6.6)$$

Podemos dizer que a aceleração da gravidade deriva de uma energia potencial através de:

$$\vec{g} = -\nabla(gz) \quad (6.7)$$

Por outro lado, se o escoamento for barotrópico, ou seja, se a massa específica for função da pressão, ou seja, $\rho = \rho(p)$, podemos escrever uma função da pressão $f = f(p)$ dada por:

$$f = \int \frac{1}{\rho} dp \quad (6.8)$$

Essa função tem como propriedade que seu gradiente é dado por:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} = \frac{df}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{df}{dp} \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{df}{dp} \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} = \frac{df}{dp} \nabla p \quad (6.9)$$

Mas, da equação (6.8) temos que:

$$\frac{df}{dp} = \frac{1}{\rho} \quad (6.10)$$

E resulta, das equações (6.9) e (6.10):

$$\nabla f = \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (6.11)$$

Das equações (6.7) e (6.11) a equação (6.6) de Euler pode ser escrita:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{u^2}{2} + f + gz \right) + \vec{\omega} \times \vec{u} = 0 \quad (6.12)$$

Esta última equação admite dois casos:

a) Escoamento permanente e irrotacional ($\vec{\omega} = 0$) de um fluido ideal:

Neste caso, a equação (6.12) fica:

$$\nabla \left(\frac{u^2}{2} + f + gz \right) = 0 \quad (6.13)$$

Se o gradiente de uma grandeza escalar é nulo, isso significa que essa grandeza não varia em nenhuma das três direções do sistema de coordenadas, ou seja, é espacialmente constante. Logo:

$$\frac{u^2}{2} + f + gz = \text{constante em todo o escoamento} \quad (6.14)$$

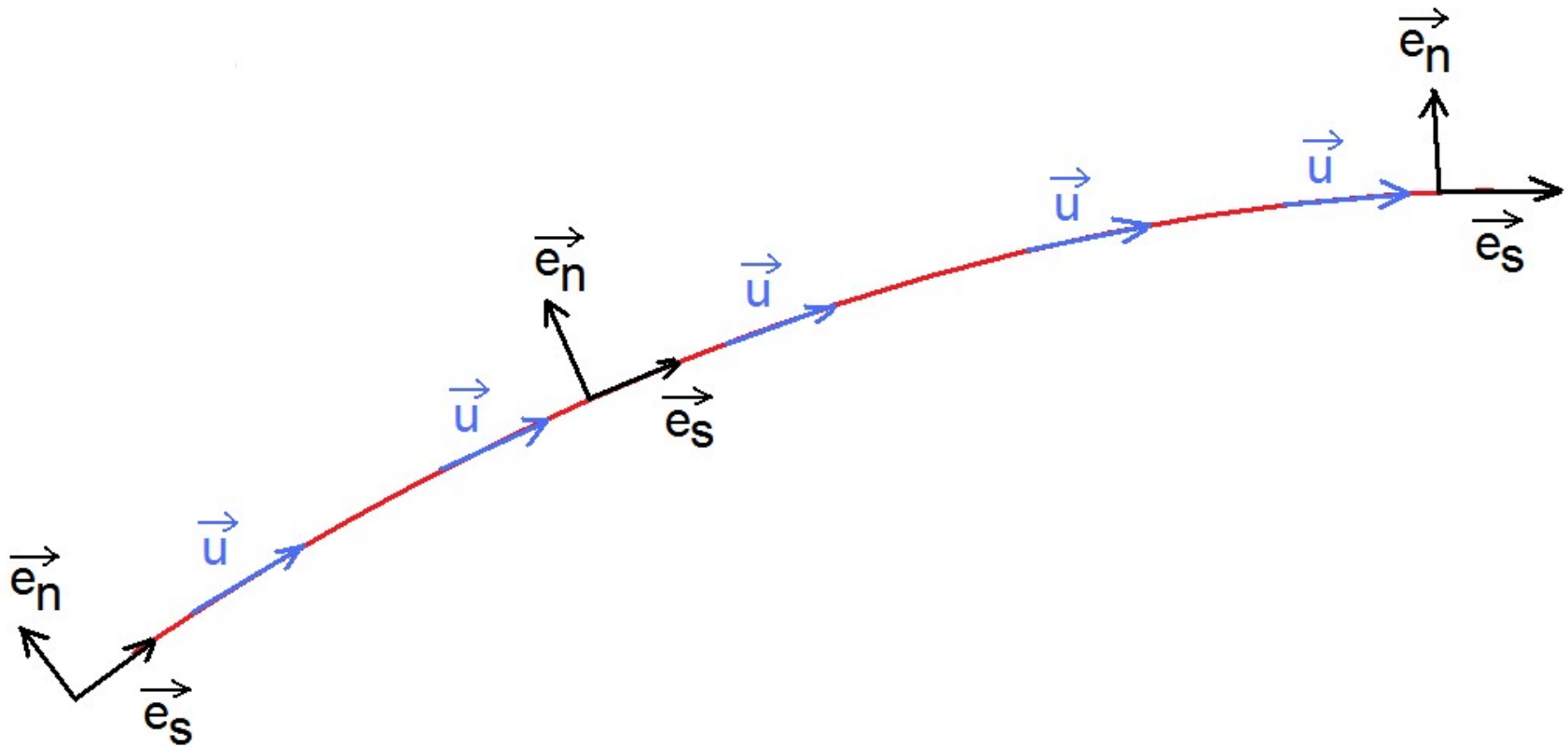
Essa é a equação de Bernoulli para um escoamento permanente e irrotacional sem atrito viscoso.

b)Escoamento permanente e rotacional ($\vec{\omega} \neq 0$) de um fluido ideal:

Nesse caso, a equação de Euler fica:

$$\nabla \left(\frac{u^2}{2} + f + gz \right) + \vec{\omega} \times \vec{u} = 0 \quad (6.15)$$

Vejamos como se comporta a grandeza entre parênteses sobre uma linha de corrente:



Sobre uma linha de corrente, podemos determinar um versor tangente dado por:

$$\vec{e}_s = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \quad (6.16)$$

Se fizermos, para um ponto qualquer da linha de corrente, o produto escalar da eq. (6.15) pelo versor tangente:

$$\nabla \left(\frac{u^2}{2} + f + gz \right) \cdot \vec{e}_s + \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{u}) \cdot \vec{e}_s}_0 = 0 \quad (6.17)$$

O segundo termo do lado esquerdo é nulo porque o produto vetorial do vetor vorticidade pelo vetor da velocidade é ortogonal ao vetor da velocidade, e o versor tangente à linha de corrente é paralelo ao vetor da velocidade. Já o primeiro termo representa a variação da grandeza entre parênteses ao longo do comprimento s da linha de corrente:

$$\frac{\partial \left(\frac{u^2}{2} + f + gz \right)}{\partial s} = 0 \quad (6.18)$$

Ou seja, temos que a grandeza entre parênteses não varia ao longo de uma mesma linha de corrente:

$$\frac{u^2}{2} + f + gz = \text{constante sobre uma mesma linha de corrente} \quad (6.19)$$

Essa é a equação de Bernoulli para um escoamento permanente e rotacional sem atrito viscoso.

Exemplo: Determine a forma da função f para um escoamento adiabático de um gás, $\frac{p}{\rho^\gamma} = C$.

Se $f = \int \frac{1}{\rho} dp$:

$$f = \int \left(\frac{C}{p} \right)^{\frac{1}{\gamma}} dp = C^{\frac{1}{\gamma}} \int p^{-\frac{1}{\gamma}} dp$$

Mas, lembrando que $\frac{p}{\rho^\gamma} = C$:

$$f = \frac{p^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma-1}$$

Isso resulta:

$$f = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$$

E a equação de Bernoulli fica:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + gz = \text{constante}$$

Em geral, essa forma da equação de Bernoulli é usada para estudar o escoamento compressível de um gás. Nesse caso, em geral despreza-se o termo devido à gravidade e temos:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \text{constante}$$

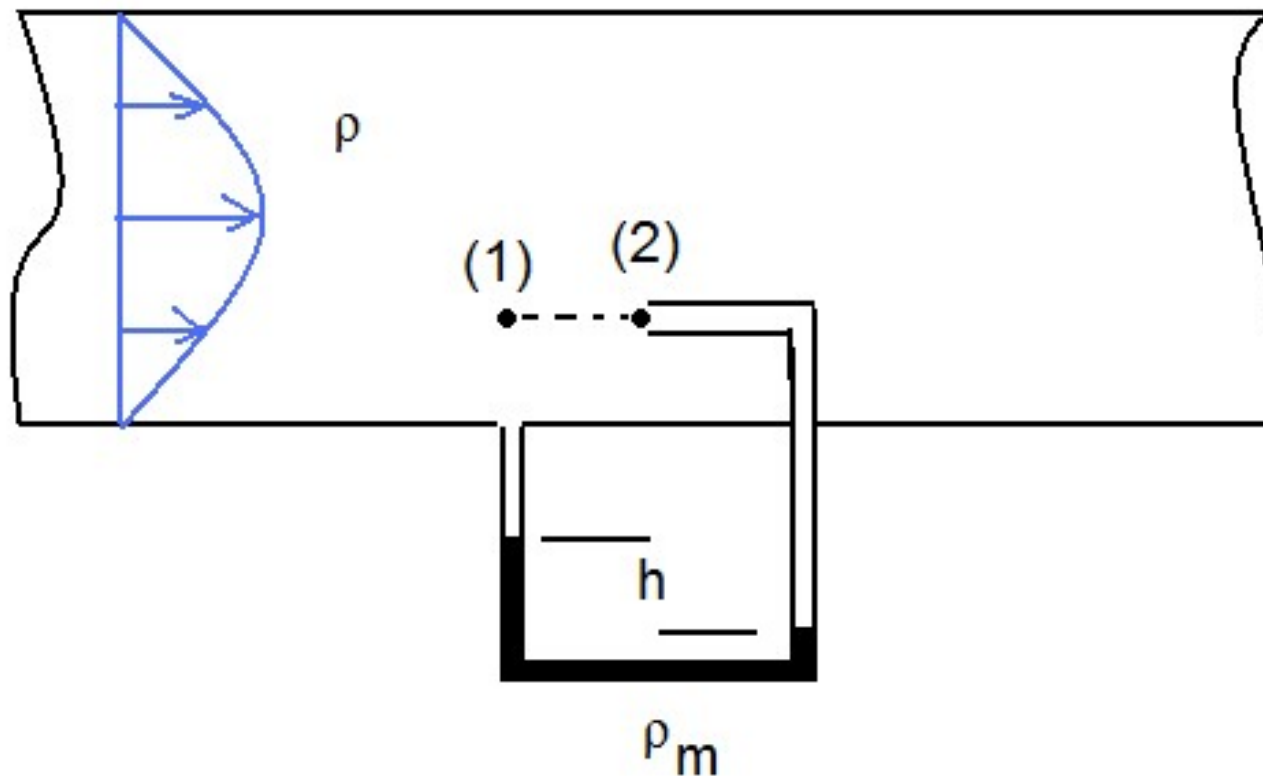
Exemplo: Determine a forma da função f para um escoamento com ρ uniforme (incompressível).

$$f = \int \frac{1}{\rho} dp = \frac{1}{\rho} \int dp = \frac{p}{\rho}$$

E a equação de Bernoulli, para o escoamento permanente, incompressível e sem atrito fica:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{constante}$$

Aplicação: Um dos mais simples instrumentos para medida de velocidade é o Tubo de Pitot. A medida de velocidade é obtida através considerando uma linha de corrente que vai do ponto (1) até o ponto (2).



O Tubo de Pitot é acoplado a um manômetro U com fluido manométrico de massa específica ρ_m . O fluido escoando no conduto tem massa específica ρ . O ponto (2) é um ponto de estagnação (velocidade nula). Se os pontos (1) e (2) são próximos, podemos ignorar o efeito do atrito viscoso e aplicar a equação de Bernoulli na linha de corrente:

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 = \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2$$

Isso resulta:

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{p_2}{\rho}$$

Ou:

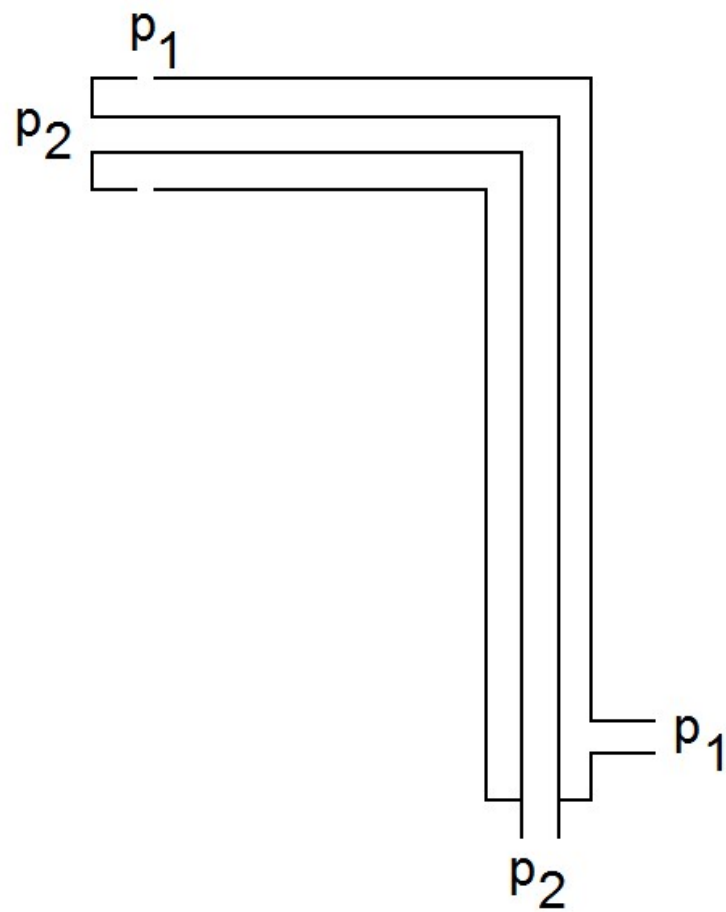
$$u_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}}$$

Do manômetro U:

$$p_1 + \rho_m g h = p_2 + \rho g h$$

Logo:

$$u_1 = \sqrt{\frac{2gh(\rho_m - \rho)}{\rho}}$$



Tubo de Pitot

Bibliografia:

White, F.M., “Mecânica dos Fluidos”, 5º edição, Ed. McGraw Hill, 2010.

Potter, M.C.; Wiggert, D.C., “Mecânica dos Fluidos”, Ed. Thomson Learning, 2004.

Mase, G.T.; Mase, G.E., “Continuum Mechanics for Engineers”, third edition, CRC Press, 1999.

Munson, Young, Okiishi, “Fundamentos da Mecânica dos Fluidos, Ed. Edgard Blucher, 4ª edição, 1999.