PME5011
Mecânica dos Meios Contínuos
Equação da Navier-Stokes
Parte 1

1)Teorema do Transporte de Reynolds

Seja ϕ uma grandeza qualquer por unidade de massa que caracteriza o escoamento (por exemplo, ϕ pode ser o vetor da velocidade ou uma de suas componentes, representando Quantidade de Movimento por unidade de massa de fluido). Da expressão de derivada material:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \phi \qquad (1.1)$$

Podemos multiplicar essa expressão por ρ e somar nela a equação da continuidade multiplicada por ϕ (pois estaremos somando zero):

$$\rho\frac{D\phi}{Dt}=\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}+\rho\vec{u}\cdot\nabla\phi+\phi\left[\underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\vec{u}\right)}_{0}\right] \tag{1.2}$$

Reorganizando os termos:

$$\rho\frac{D\phi}{Dt}=\underbrace{\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}+\phi\frac{\partial\rho}{\partial t}}_{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}}+\underbrace{\rho\vec{u}\cdot\nabla\phi+\phi\nabla\cdot\left(\rho\vec{u}\right)}_{\nabla\cdot\left(\rho\vec{u}\phi\right)} \tag{1.3}$$

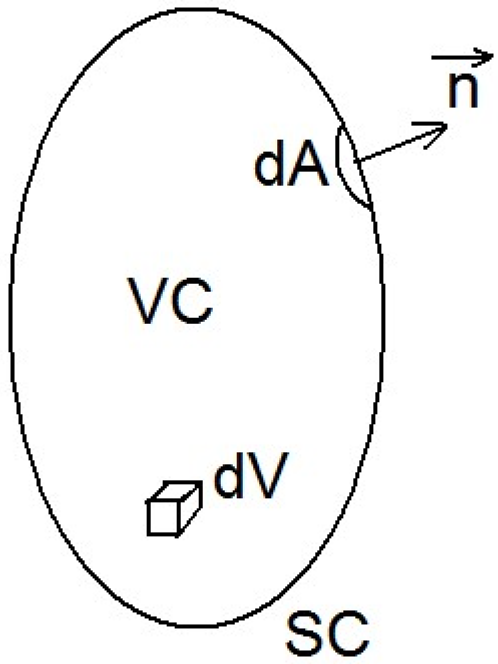
Temos então:

$$\rho \frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \phi) \qquad (1.4)$$

Na forma indicial:

$$\rho \frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} \qquad (1.5)$$

Suponha que um corpo fluido móvel (que podemos chamar de sistema) de volume *V(t)* ocupa, instantaneamente, uma região fixa do espaço que chamaremos de um Volume de Controle *VC*, com um contorno fixo que chamaremos de Superfície de Controle *SC*:



$$\int_{V(t)} \rho \frac{D\phi}{Dt} dV = \int_{VC} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{VC} \nabla \cdot (\rho \vec{u} \phi) dV \qquad (1.6)$$

Usando o teorema de Gauss, podemos transformar a última integral de volume em uma integral de superfície:

$$\int_{V(t)} \rho \frac{D\phi}{Dt} dV = \int_{VC} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{SC} \phi \rho \vec{u} \cdot \vec{n}\, dA \qquad (1.7)$$

Esse é o chamado Teorema do Transporte de Reynolds, que, na forma indicial, pode ser escrito:

$$\int_{V(t)} \rho \frac{D\phi}{Dt} dV = \int_{VC} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{SC} \phi \rho u_j n_j\, dA \qquad (1.8)$$

Suponha que a grandeza a ser dividida pela de massa do corpo para obter ϕ seja a própria massa do corpo móvel. Nesse caso, ϕ é igual a 1 e obtemos a forma integral da Equação da Continuidade (ou Conservação da Massa):

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{SC} \rho u_j n_j \, dA = 0 \tag{1.8}$$

Se a grandeza a a ser dividida pela massa do sistema for a Quantidade de Movimento, ϕ é o vetor da velocidade u_i:

$$\int_{V(t)} \rho \frac{Du_i}{Dt} dV = \int_{VC} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} dV + \int_{SC} \rho u_i \, u_j n_j \, dA \tag{1.9}$$

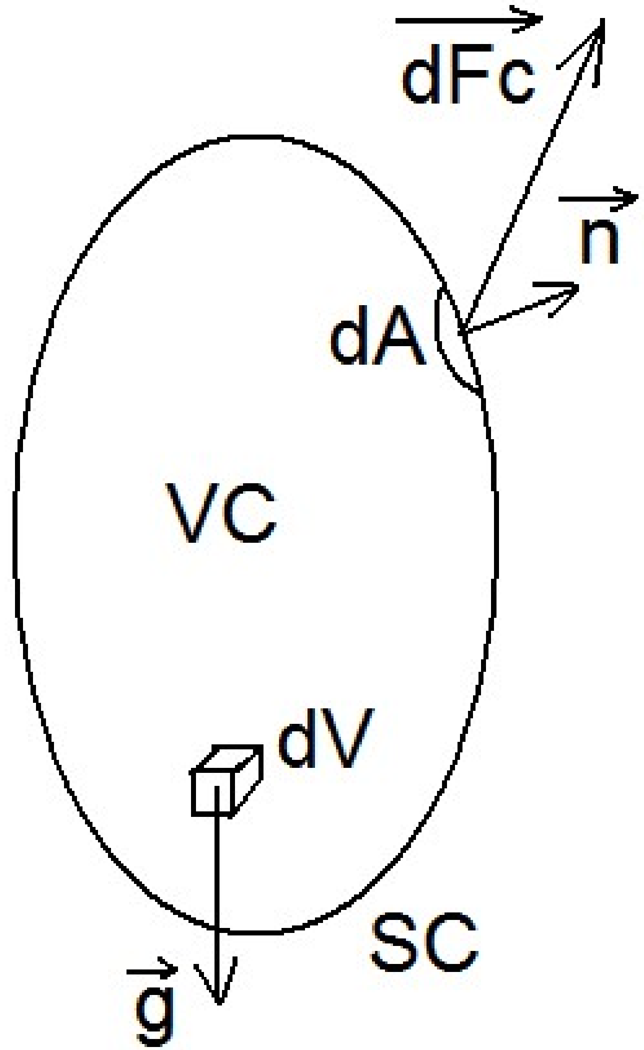
Essa equação é a Equação da Quantidade de Movimento. O termo da esquerda corresponde ao produto de massa por aceleração, e para um sistema móvel representa a somatória das forças externas agindo sobre o sistema:

$$\int_{VC} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} dV + \int_{SC} \rho u_i \, u_j \, n_j \, dA = \sum \vec{F}_{ext} \tag{1.10}$$

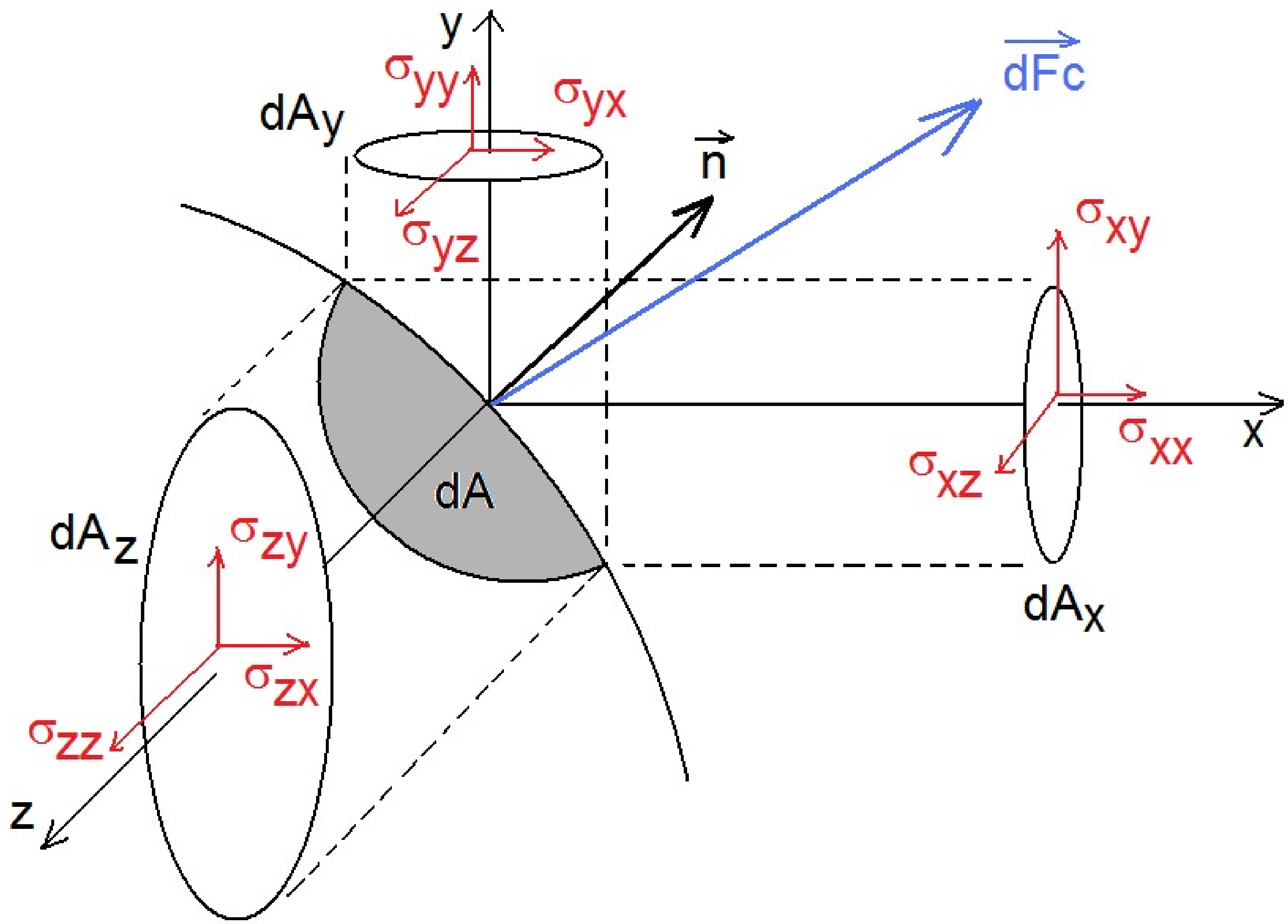
2)Equação Integral da Quantidade de Movimento

As forças externas vão ser de dois tipos: forças de campo, caracterizadas por um vetor aceleração g_i (que, no caso mais simples em que a única força de campo é a gravitacional, será a aceleração da gravidade) e forças de contato. Se tivermos, em um elemento de área dA, um vetor de força de contato dFc_i, a equação da Quantidade de Movimento fica:

$$\int_{VC} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} dV + \int_{SC} \rho u_i \, u_j \, n_j \, dA = \int_{VC} \rho g_i \, dV + \int_{SC} dFc_i \qquad (2.1)$$



$\overrightarrow{dFc}$
$\vec{n}$
dA
VC
dV
SC
$\vec{g}$



y
σ_{yy}
σ_{yx}
dA_y
$\overrightarrow{dFc}$
$\vec{n}$
σ_{yz}
σ_{xy}
x
σ_{xx}
σ_{xz}
dA
dA_z
σ_{zy}
dA_x
σ_{zx}
σ_{zz}
z

A força de contato dFc_i pode ser relacionada com o tensor das tensões calculado no centróide do elemento de área dA. Esse elemento de área tem projeções dA_x, dA_y e dA_z nos planos ortogonais aos eixos x, y e z. o tensor das tensões é um tensor do tipo:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Temos nove componentes, sendo que o tensor é simétrico ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$). O primeiro índice representa a direção normal ao plano onde atua a tensão, e o segundo índice representa a direção da tensão. Assim, σ_{xx} é uma tensão atuando num plano normal ao eixo x e na direção x, σ_{zy} representa uma tensão agindo num plano normal ao eixo z e na direção y, etc.

Retornando ao nosso elemento de área dA, a força de contato dFc_i pode ser representada pela soma de todas as tensões agindo sobre as projeções do elemento. Assim:

$$
\begin{aligned}
dFc_x &= \sigma_{xx}\, dA_x + \sigma_{yx}\, dA_y + \sigma_{zx}\, dA_z \\
dFc_y &= \sigma_{xy}\, dA_x + \sigma_{yy}\, dA_y + \sigma_{zy}\, dA_z \\
dFc_z &= \sigma_{xz}\, dA_x + \sigma_{yz}\, dA_y + \sigma_{zz}\, dA_z
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Como as projeções são dadas por:

$$
\begin{aligned}
dA_x &= dA\ n_x \\
dA_y &= dA\ n_y \\
dA_z &= dA\ n_z
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Temos então:

$$
\begin{aligned}
dFc_x &= \left(\sigma_{xx}\, n_x + \sigma_{yx}\, n_y \; + \sigma_{zx}\, n_z \;\right) dA \\
dFc_y &= \left(\sigma_{xy}\, n_x + \sigma_{yy}\, n_y \; + \sigma_{zy}\, n_z \right) dA \\
dFc_z &= \left(\sigma_{xz}\, n_x + \sigma_{yz}\, n_y \; + \sigma_{zz}\, n_z \right) dA
\end{aligned}
\qquad (2.5)
$$

Essas expressões podem ser representadas, na forma indicial, por:

$$dFc_i = \sigma_{ji}\, n_j \, dA \qquad (2.6)$$

Substituindo na Eq. (2.1), chegamos na forma integral da Equação da Quantidade de Movimento:

$$\int_{VC} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} dV + \int_{SC} \rho u_i \, u_j \, n_j \, dA = \int_{VC} \rho g_i \, dV + \int_{SC} \sigma_{ji} \, n_j \, dA \tag{2.7}$$

Essa é a equação que, em última análise, é integrada nas células em métodos numéricos de Volumes Finitos. A forma diferencial é obtida quando generalizamos o teorema da Gauss.

3)Forma Generalizada do Teorema de Gauss e Equação Diferencial da Quantidade de Movimento

O teorema de Gauss, quando aplicado a um escalar λ, é conhecido como teorema do Gradiente, e tem a forma:

$$\int_V \nabla\lambda \, dV = \int_S \vec{n}\,\lambda \, dA \qquad (3.1)$$

Na forma indicial, com o índice j representando a direção da componente do vetor, podemos escrever:

$$\int_V \frac{\partial\lambda}{\partial x_j} \, dV = \int_S n_j \, \lambda \, dA \qquad (3.2)$$

Quando aplicado a um vetor $\vec{a}$, o teorema de Gauss é conhecido como Teorema do Divergente:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{a} \; dV = \int_S \vec{n} \cdot \vec{a} \, dA \qquad (3.3)$$

Na forma indicial, escrevemos:

$$\int_V \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dV = \int_S n_j \, a_j \, dA \qquad (3.4)$$

O Teorema de Gauss, na realidade, pode ser aplicado a um tensor de ordem qualquer (lembre-se que um escalar é um tensor de ordem zero, um vetor é um tensor de 1ª ordem, o tensor das tensões é um tensor de 2ª ordem). Seja *T* um tensor de ordem qualquer; o Teorema de Gauss se escreve:

$$\int_V \nabla \cdot T \; dV = \int_S \vec{n} \cdot T \, dA \tag{3.5}$$

Na forma indicial, isso se escreve:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_j} T_{jklmn...} \, dV = \int_S n_j \, T_{jklmn...} \, dA \tag{3.6}$$

Quando aplicado ao tensor das tensões, o Teorema de Gauss fica:

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \, dV = \int_S n_j \, \sigma_{ji} \, dA \qquad (3.7)$$

Aplicando o teorema de Gauss para a Eq. (2.7), a Equação Integral da Quantidade de Movimento fica:

$$\int_{VC} \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} dV + \int_{VC} \frac{\partial (\rho \, u_i \, u_j)}{\partial x_j} \, dV = \int_{VC} \rho g_i \, dV + \int_{VC} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \, dV \qquad (3.7)$$

Essa equação deve ser válida para um Volume de Controle VC qualquer, inclusive para um volume que tende ao elemento volumétrico infinitesimal dV. Assim, se $VC \rightarrow dV$, a integração da equação resulta:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} dV + \frac{\partial(\rho u_i \, u_j)}{\partial x_j} dV = \rho g_i \, dV + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV \qquad (3.8)$$

Podemos eliminar dV e obtemos a Equação Diferencial da Quantidade de Movimento:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i\, u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i \tag{3.8}$$

Usualmente, na literatura, os índices no termo relacionado com o tensor das tensões são vistos trocados, ou seja, temos $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j$ no lugar de $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j$. Isso é indiferente, dada a simetria do tensor das tensões. Neste material preferimos deixar a equação na forma da Eq. (3.8) pois, no tensor das tensões, é o segundo índice que em geral designa a direção da tensão, e parece mais coerente a forma apresentada para uma equação vetorial em que o índice *i* designa a componente do vetor.

4)Equação de Navier-Stokes

A Eq. (3.8) é uma equação geral, válida para um fluido newtoniano ou não-newtoniano dependendo da forma constitutiva do tensor das tensões. Para um fluido newtoniano, o tensor das tensões é dado por:

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + 2\mu\,S_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\,\mu\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \tag{4.1}$$

Nesta última expressão, temos uma relação linear entre o tensor das tensões e o tensor de Taxa de Deformação S_{ij}, dado por:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{4.2}$$

O tensor δ_{ij} é conecido como Tensor Delta de Kronecker, e é dado por:

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{se } i \neq j \;\; ; \quad \delta_{ij} = 1 \quad \text{se } i = j \tag{4.3}$$

Aplicando a forma constitutiva da Eq. (4.3) na Eq. (3.8):

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i\, u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\delta_{ij} p + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\delta_{ij}\frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) + \rho g_i \tag{4.4}$$

É fácil ver que, pelas propriedades do Tensor Delta de Kronecker:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\delta_{ij}\,p = \frac{\partial}{\partial x}\delta_{ix}\,p + \frac{\partial}{\partial y}\delta_{iy}\,p + \frac{\partial}{\partial z}\delta_{iz}\,p = \frac{\partial p}{\partial x_i}\delta_{ii} = \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{4.5}$$

Assim, a equação (4.4) fica:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i\, u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \\ \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) + \rho g_i\end{aligned} \tag{4.6}$$

Essa é a forma mais geral da Equação de Navier-Stokes. Particularizando para as direções x, y e z:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w u)}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial x}+$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)+ \tag{4.7}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}\mu\nabla.\vec{u}\right)+\rho g_x$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u v)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v v)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w v)}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial y}+$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)+ \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2}{3}\mu\nabla.\vec{u}\right)+\rho g_y$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u w)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v w)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w w)}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial z}+$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)+ \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2}{3}\mu\nabla.\vec{u}\right)+\rho g_z$$

Bibliografia:

White, F.M., "Mecânica dos Fluidos", 5º edição, Ed. McGraw Hill, 2010.

Potter, M.C.; Wiggert, D.C., "Mecânica dos Fluidos", Ed. Thomson Learning, 2004.

Mase, G.T.; Mase, G.E., "Continuum Mechanics for Engineers", third edition, CRC Press, 1999.