

MAC0317/MAC5920

Introdução ao Processamento de Sinais Digitais

Seção 2.4: A DFT unidimensional

Seção 2.4.1 Definição da DFT

No exemplo (1.23) vimos que um vetor $x \in \mathbb{C}^N$ pode ser escrito na base das exponenciais complexas $\{E_k | k = 0, \dots, N - 1\}$ como $x = \sum_{k=0}^{N-1} c_k E_k$ onde

$$c_k = \frac{(x, E_k)}{(E_k, E_k)} = \frac{1}{N}(x, E_k).$$

Definição 2.4.1

A DFT de um vetor $x \in \mathbb{C}^N$ qualquer é o vetor $X = DFT(x) \in \mathbb{C}^N$ cujas componentes são

$$X_k = (x, E_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi k \frac{n}{N}}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Observe que $X_k = Nc_k$ na definição da DFT: isso significa que, normalmente, ao computar a DFT por uma função de biblioteca, por exemplo `numpy.fft.fft(x)`, os coeficientes X_k são N vezes maiores do que os pesos c_k associados às componentes

$$E_k \text{ na combinação linear } x = \sum_{k=0}^{N-1} c_k E_k.$$

Observação 2.1

O coeficiente $c_0 = \frac{X_0}{N}$ mede a contribuição da forma de onda constante $E_0 = (1, 1, \dots, 1)$. Em outras palavras,

$$c_0 = \frac{X_0}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n,$$

ou seja, c_0 é o valor médio do sinal x , também chamado de componente dc (*direct current*).

Observação 2.2

Na expressão da definição 2.4.1, o vetor X pode ser indexado em qualquer componente k , mesmo fora do intervalo $0 \leq k < N$, e sua expressão é periódica em k com período N :

$$X_{N+k} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi(N+k)\frac{n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \overbrace{e^{-i2\pi n}}^{=1} e^{-i2\pi k\frac{n}{N}} = X_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Frequentemente visualizamos as componentes X_k no intervalo $-\frac{N}{2} < k \leq +\frac{N}{2}$, que correspondem às frequências que respeitam a condição de Shannon-Nyquist (frequências que não produzem rebatimento).

Definição 2.4.2

A IDFT de um vetor $X \in \mathbb{C}^N$ qualquer é o vetor $x = IDFT(X) \in \mathbb{C}^N$ dado pela expressão

$$x = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k E_k,$$

de tal forma que suas componentes podem ser escritas como

$$x_n = \frac{1}{N} (X, \overline{E_n}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i2\pi k \frac{n}{N}}, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Errata: na 1a edição do livro falta a conjugação no termo $(X, \overline{E_n})$ da equação (2.7).

Observação: Existem textos e softwares que podem definir o par DFT/IDFT de maneira diferente. Poderíamos ter definido o par DFT/IDFT pelas equações

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi k \frac{n}{N}} \text{ e } x = \sum_{k=0}^{N-1} c_k E_k, \text{ onde a constante } \frac{1}{N} \text{ apareceria na DFT ao invés de na IDFT, como é mais comum.}$$

Também seria possível definir a DFT/IDFT com a mesma constante nas duas fórmulas:

$$\tilde{X}_k = \frac{1}{\sqrt{N}}(x, E_k)$$

e

$$x = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_k E_k.$$

Essa versão corresponde a usar a base ortonormal das exponenciais complexas

$$\left\{ \frac{E_k}{\|E_k\|} \mid k = 0, \dots, N-1 \right\}.$$

Em qualquer caso, as definições da DFT e da IDFT devem ser "compatíveis", ou seja, precisam satisfazer

$$IDFT(DFT(x)) = x, \forall x.$$

Exemplo de sinal com rebatimento (aliasing)

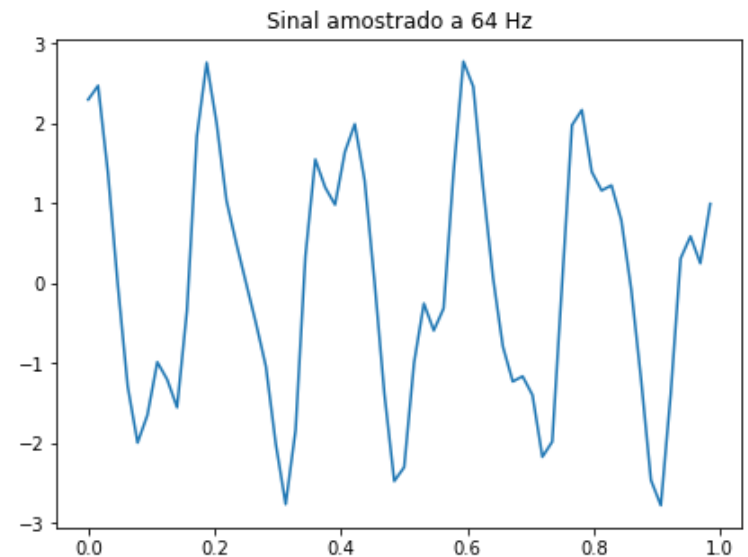
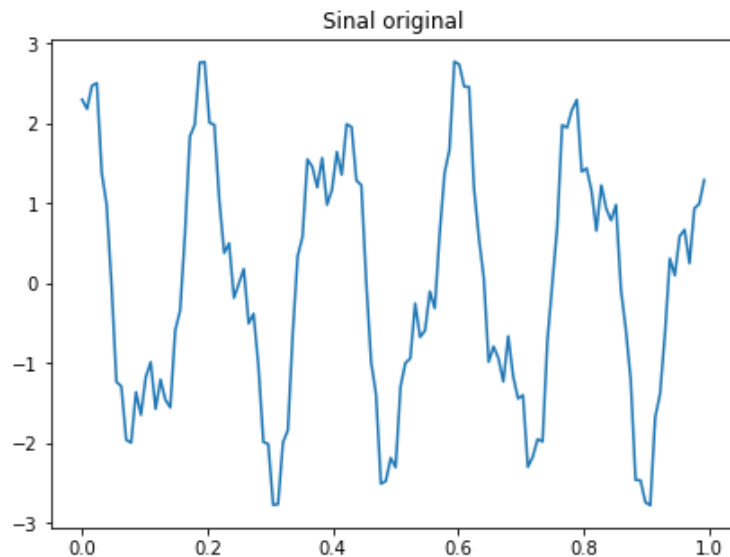
Vamos considerar outra vez o sinal da seção 2.3

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 5t) + 0.8 \sin(2\pi 12t) + 0.3 \cos(2\pi 47t)$$

amostrado no intervalo $t \in [0, 1)$ usando duas taxas de amostragem diferentes:

$N = 128$ e $N = 64$.

```
In [45]: N = 128; t = np.arange(0, 1, 1/N); N2 = N/2; t_sub = np.arange(0, 1, 1/N2)
x = 2*np.cos(2* m.pi *5*t) + 0.8*np.sin(2*m.pi*12*t) + 0.3*np.cos(2*m.pi*47*t)
x_sub = 2*np.cos(2* m.pi *5*t_sub) + 0.8*np.sin(2*m.pi*12*t_sub) + 0.3*np.cos(2
*m.pi*47*t_sub)
f, ax = plt.subplots(1,2,figsize=(15,5))
ax[0].set_title("Sinal original");ax[0].plot(t,x)
ax[1].plot(t_sub,x_sub); ax[1].set_title("Sinal amostrado a 64 Hz")
plt.show()
```



Espectro de energia das duas versões do sinal

Lembrando da expressão $\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} N|c_k|^2$, e do fato de que as duas componentes

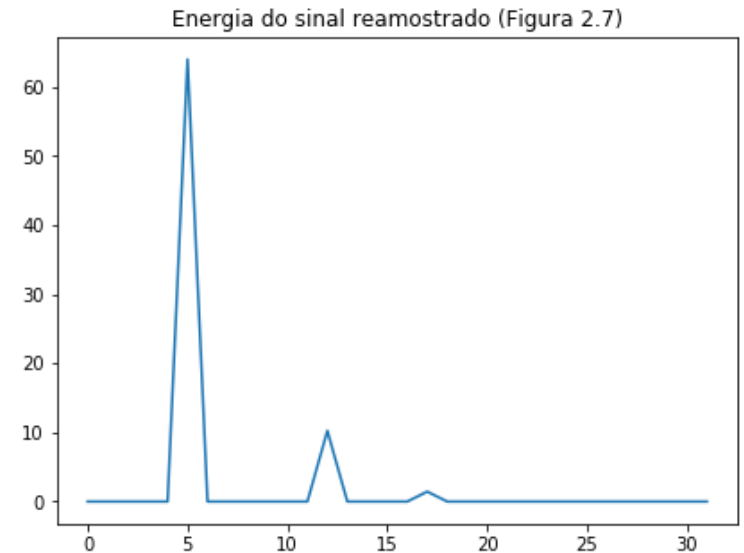
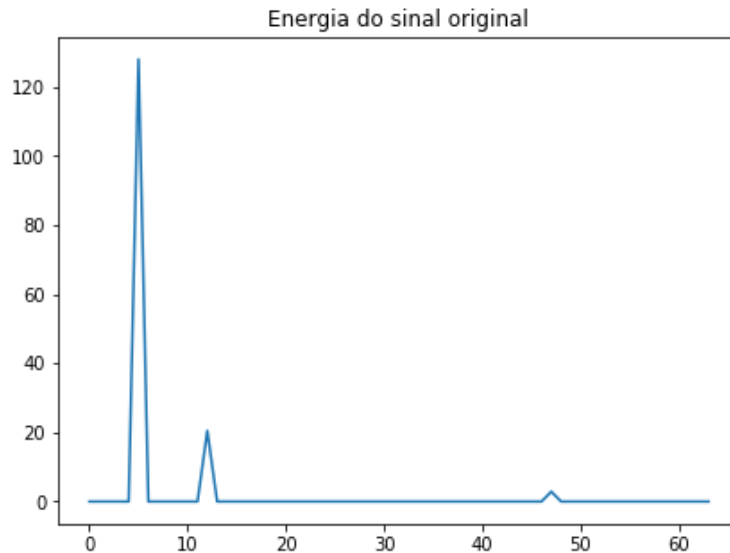
E_k e E_{-k} juntas representam uma componente real (seno ou cosseno), vamos usar como medida de energia os valores

$$N(|c_{-k}|^2 + |c_k|^2),$$

ou equivalentemente, lembrando que $c_k = \frac{X_k}{N}$,

$$\frac{|X_{-k}|^2 + |X_k|^2}{N}.$$

```
In [46]: X= np.fft.fft(x); c = X/ (N); E = N * abs(c)**2
X_sub= np.fft.fft(x_sub); c_sub = X_sub / (N/2); E_sub = (N/2) * abs(c_sub)**2
f, ax = plt.subplots(1,2,figsize=(15,5))
ax[0].plot(E[0:int(N/2)]); ax[0].set_title("Energia do sinal original");
ax[1].plot(E_sub[0:int(N/4)]); ax[1].set_title("Energia do sinal reamostrado (Fi
gura 2.7)");
plt.show(); f = 47; print("Componente de {0} Hz rebatida = {1} Hz".format(f,f%N2
if f%N2<=N2/2 else N2-f%N2))
```



Componente de 47 Hz rebatida = 17.0 Hz

Nesse exemplo o rebatimento da componente 47 Hz em uma componente de 17 Hz ocorre pois, usando uma taxa de amostragem de 64 Hz,

$$\begin{aligned}\cos\left(2\pi 47 \frac{n}{64}\right) &= \cos\left(2\pi 47 \frac{n}{64} - 2\pi n \frac{64}{64}\right) \\ &= \cos\left(2\pi(47 - 64) \frac{n}{64}\right) \\ &= \cos\left(2\pi(-17) \frac{n}{64}\right) \\ &= \cos\left(2\pi 17 \frac{n}{64}\right), \quad \forall n \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

ou seja, as componentes de 47 Hz e de 17 Hz são indistinguíveis nessa taxa de amostragem.

Exemplo com pulsos quadrados (Figuras 2.8 - 2.10)

Considere um pulso quadrado de largura R e duração N , ou seja, um sinal $x \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$x_n = \begin{cases} 1 & n < R \\ 0 & n \geq R, \end{cases}$$

cuja DFT é (exercício 2.11 resolvido):

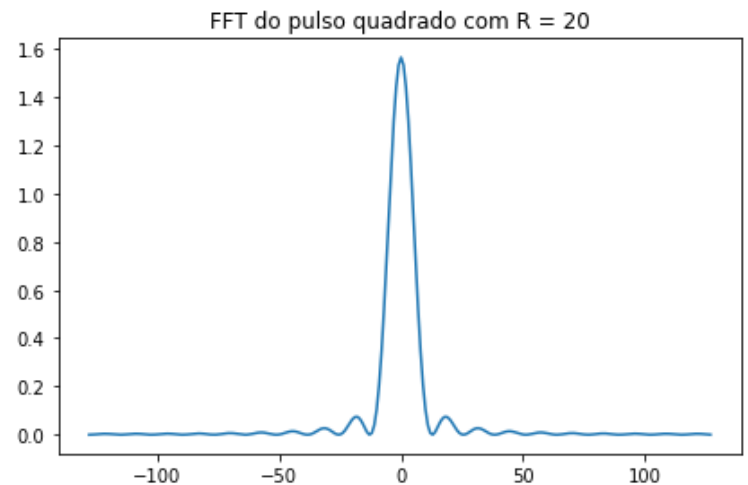
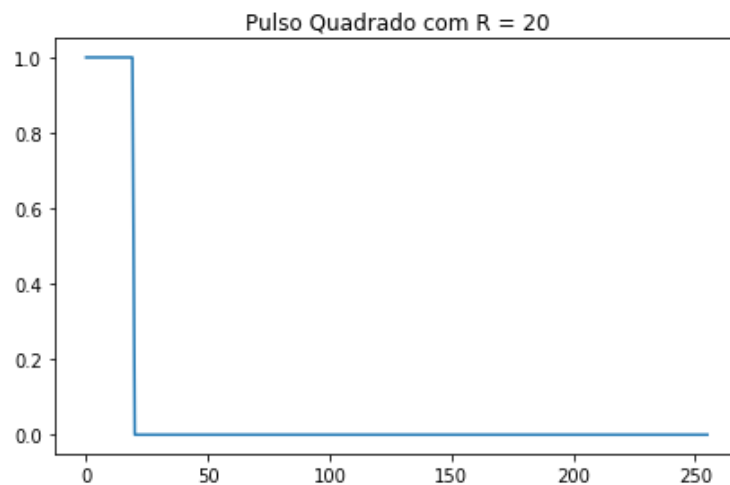
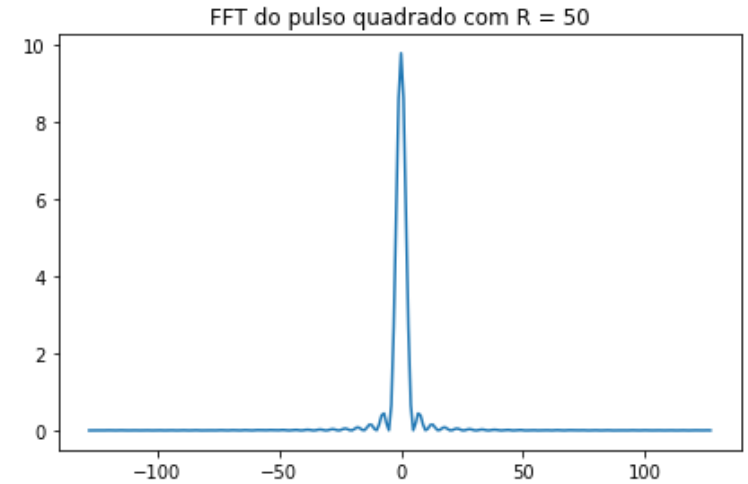
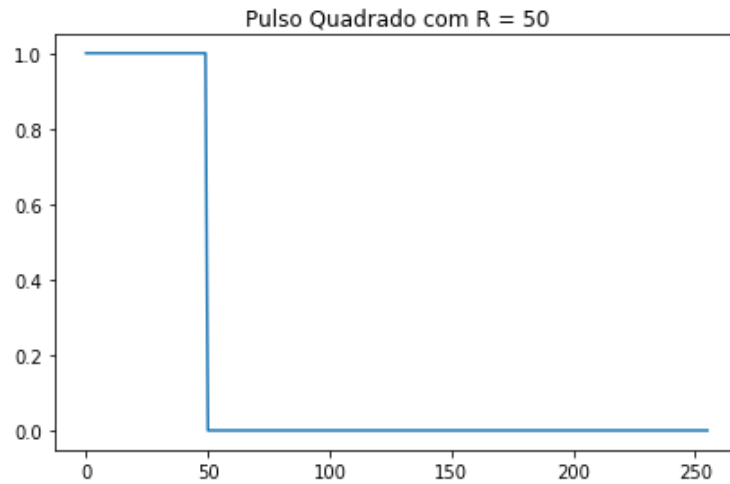
$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi k \frac{n}{N}} = \sum_{n=0}^{R-1} \overbrace{\left(e^{-i2\pi k \frac{1}{N}} \right)^n}^z = \frac{1 - z^R}{1 - z} = \frac{1 - e^{-i2\pi k \frac{R}{N}}}{1 - e^{-i2\pi k \frac{1}{N}}}.$$

Cada componente $X_k = \frac{1-e^{-i2\pi k \frac{R}{N}}}{1-e^{-i2\pi k \frac{1}{N}}}$ possui energia

$$\begin{aligned}
 |X_k|^2 &= \frac{|1-e^{-i2\pi k \frac{R}{N}}|}{|1-e^{-i2\pi k \frac{1}{N}}|} = \frac{(1-\cos(2\pi k \frac{R}{N}))^2 + (\sin(2\pi k \frac{R}{N}))^2}{(1-\cos(2\pi k \frac{1}{N}))^2 + (\sin(2\pi k \frac{1}{N}))^2} \\
 &= \frac{1-2\cos(2\pi k \frac{R}{N}) + (\cos(2\pi k \frac{R}{N}))^2 + (\sin(2\pi k \frac{R}{N}))^2}{1-2\cos(2\pi k \frac{1}{N}) + (\cos(2\pi k \frac{1}{N}))^2 + (\sin(2\pi k \frac{1}{N}))^2} = \frac{2-2\cos(2\pi k \frac{R}{N})}{2-2\cos(2\pi k \frac{1}{N})} \\
 &= \frac{1-\cos(2\pi k \frac{R}{N})}{1-\cos(2\pi k \frac{1}{N})}.
 \end{aligned}$$

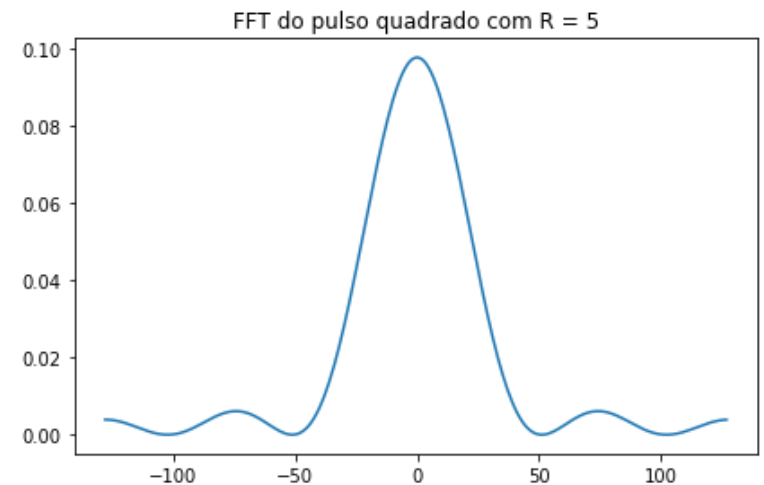
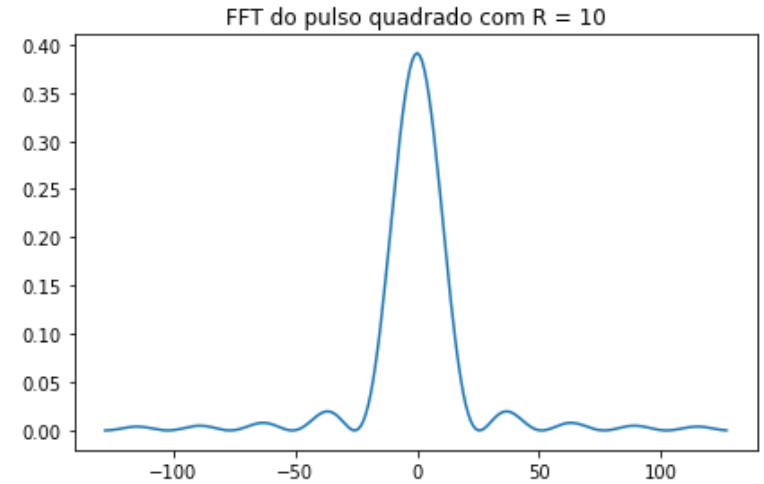
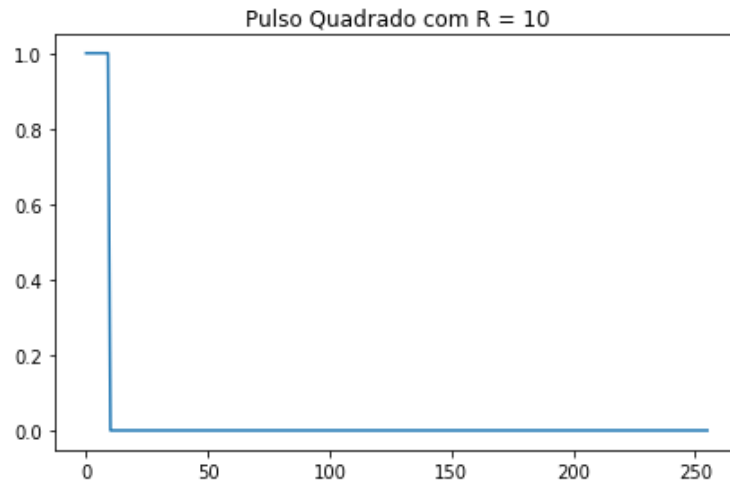
```
In [48]: pulso([50,20],"Figura 2.8")
```

Figura 2.8



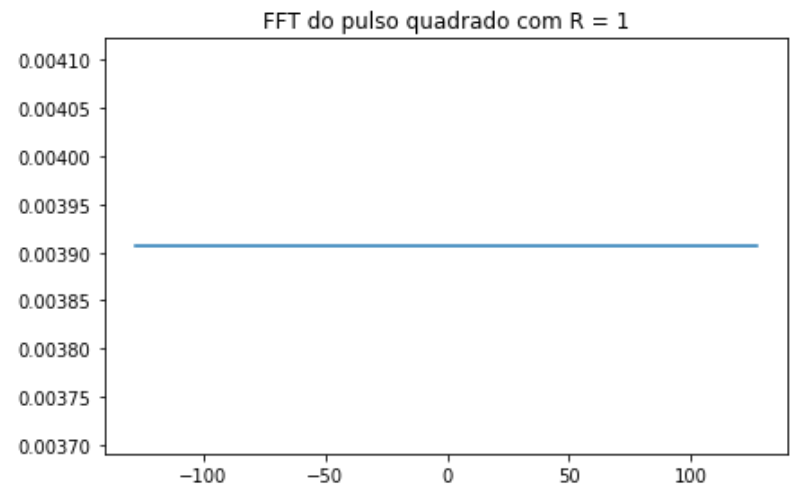
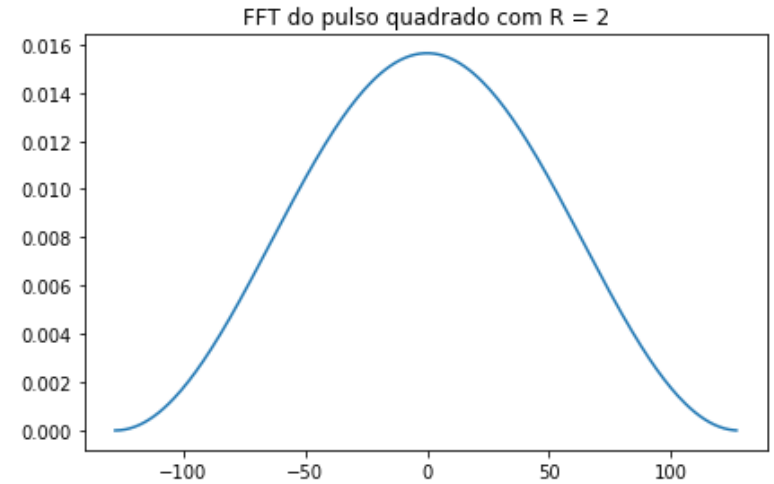

```
In [49]: pulso([10,5], "Figura 2.9")
```

Figura 2.9



```
In [50]: pulso([2,1],"Figura 2.10")
```

Figura 2.10



Exemplo de sinal aleatório e sua DFT (Figura 2.11)

Considere $x \in \mathbb{R}^N$ obtido por N sorteios aleatórios de uma mesma distribuição normal, ou seja,

$$x_n = \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

onde $\mu = 0$ é a média e σ^2 é a variância da distribuição normal.

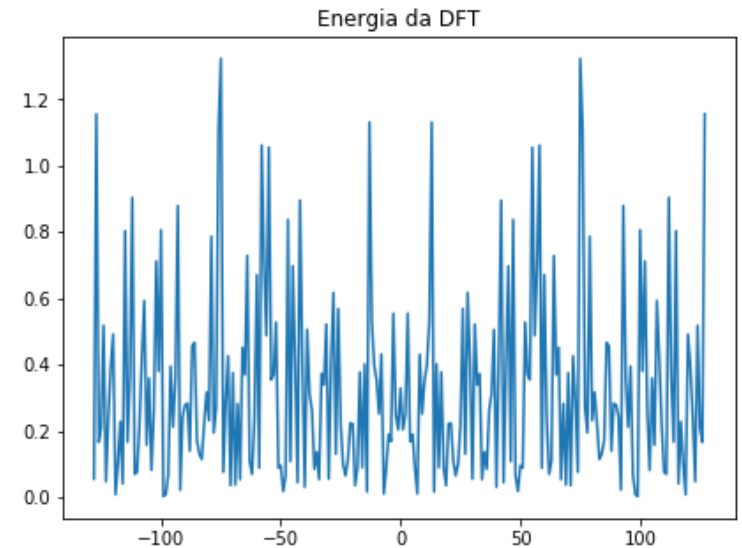
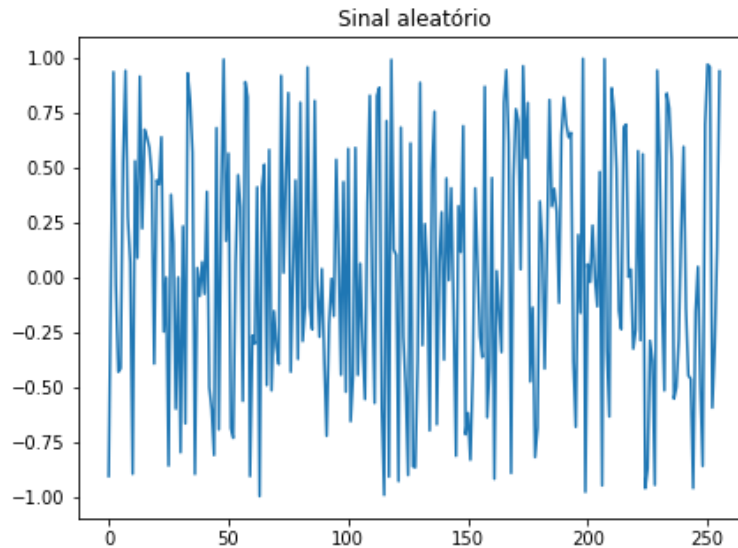
É possível provar (exercício 2.12) que as componentes de Fourier X_k , sendo elas próprias combinações lineares das amostras aleatórias x_n , também possuem distribuição normal, sendo

$$X_0 = \mathcal{N}(0, N\sigma^2)$$

e

$$X_k = \mathcal{N}\left(0, \frac{N}{2}\sigma^2\right).$$

```
In [51]: N = 256; t = np.arange(N); x = np.random.rand(N) * 2 - 1
X = np.fft.fft(x); c = X / N; E = N * abs(c)**2
f, ax = plt.subplots(1,2,figsize=(15,5))
ax[0].set_title("Sinal aleatório"); ax[0].plot(t, x)
ax[1].set_title("Energia da DFT"); ax[1].plot(np.arange(N) - N/2, np.roll(E, in
t(N/2))); plt.show()
```



Sugestões para plotar DFTs

- É usual plotarmos $|X_k|$ (magnitude) ou $|X_k|^2$ (energia), ou ainda alguma versão com mudança de escala ($|c_k| = |X_k|/N$ ou $N|c_k|^2 = |X_k|^2/N$). Apenas em algumas raras aplicações estaremos interessados no espectro de fase ($\angle X_k$).
- Quando os valores de X_k variam em uma faixa muito grande de valores, ou quando são muito baixos, é comum plotarmos espectros em escala logarítmica ($\log |X_k|$, ou $\log(1 + |X_k|)$ para evitarmos $\log 0 = -\infty$).
- Escolha a faixa de frequências mais conveniente para o que se quer ilustrar. Frequentemente estaremos interessados em combinar as componentes $-k$ e k para observar energias associadas a componentes reais (senos/cossenos), através de expressões como $(|X_{-k}|^2 + |X_k|^2)/N$, para $k = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$ (observe que as componentes $k = 0$ e $k = \frac{N}{2}$ devem ser consideradas separadamente).

Observação 2.3: Índices da DFT e Frequências em Hz

Os índices k das componentes X_k da DFT de um sinal $x \in \mathbb{C}^N$ representam frequências medidas em **número de ciclos completos no intervalo $[0, M)$** . Para traduzirmos esses índices em frequências em Hz, precisamos considerar **quantos segundos** dura o sinal x , através da expressão $T = \frac{N}{R}$. Uma componente que percorre k ciclos em N amostras percorrerá k ciclos em T segundos, o que corresponde a uma frequência de $\frac{k}{T} = \frac{kR}{N}$ Hz.

Observe que os índices $k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$ corresponderão dessa forma às frequências

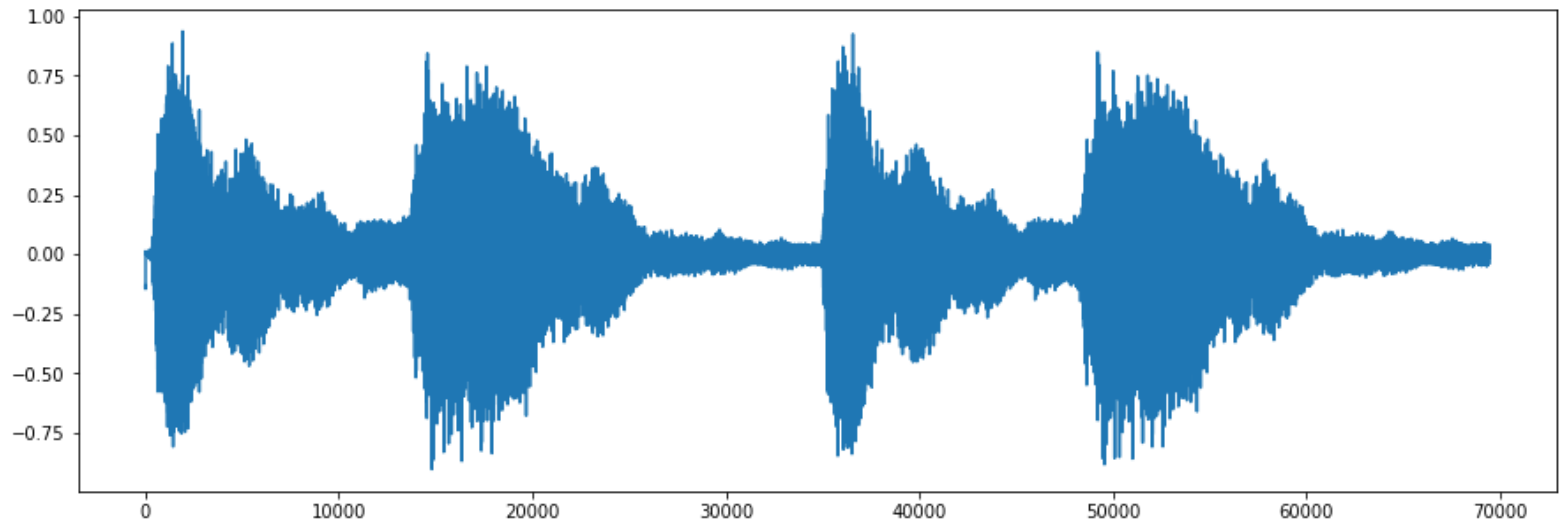
$$\frac{0R}{N} = 0, \frac{1R}{N} = \frac{R}{N}, \dots, \frac{NR}{2N} = \frac{R}{2} \quad \text{Hz.}$$

Os índices $k = \frac{N}{2} + 1, \dots, N - 1$, que equivalem (por rebatimento) aos índices $k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, -1$, correspondem às frequências

$$\frac{(-N/2 + 1)R}{N} = -\frac{R}{2} + \frac{R}{N}, \dots, \frac{-1R}{N} = -\frac{R}{N} \quad \text{Hz.}$$

Exemplo de áudio: Sinal de sino e sua DFT (Figura 2.12)

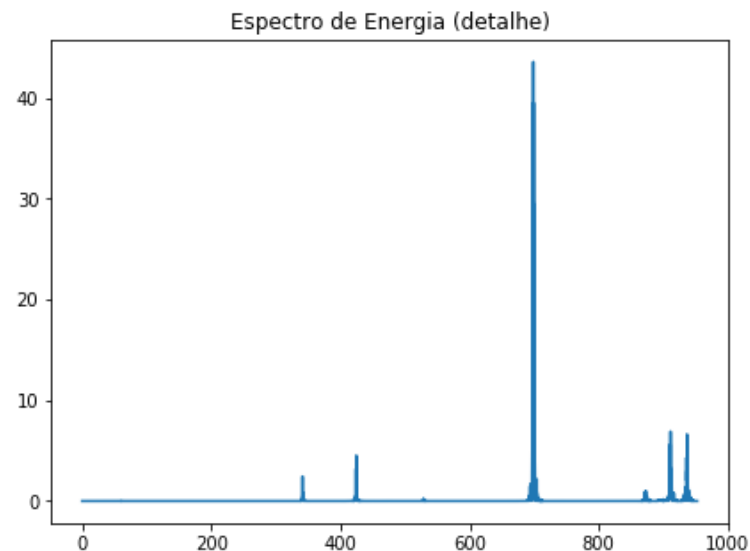
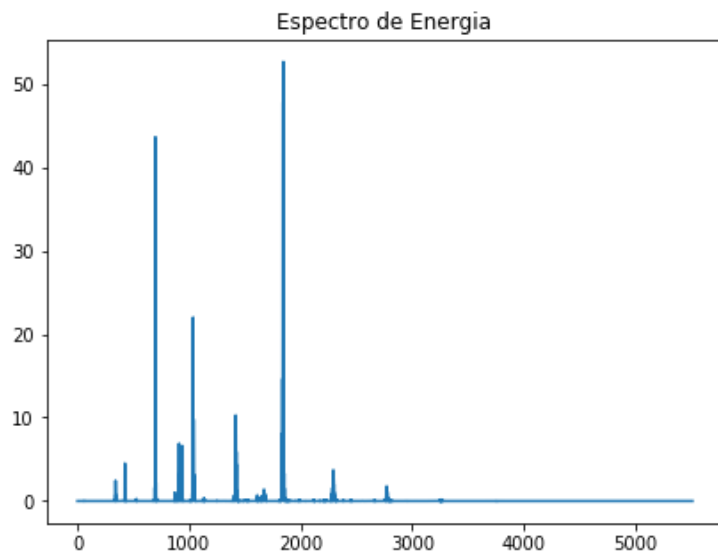
```
In [52]: url="http://static1.grsites.com/archive/sounds/bells/bells004.wav" # abre arquivo wav de url:
x, rate = sf.read(io.BytesIO(urlopen(url).read()))
x_mono = x[:,0] + x[:,1] # converte sinal estereo para mono
x_mono = x_mono-np.mean(x_mono,0) # corrige média do sinal
plt.figure(figsize=(15,5)); plt.plot(x_mono); plt.show()
ipd.Audio(x.T, rate=rate)
```



Out[52]:

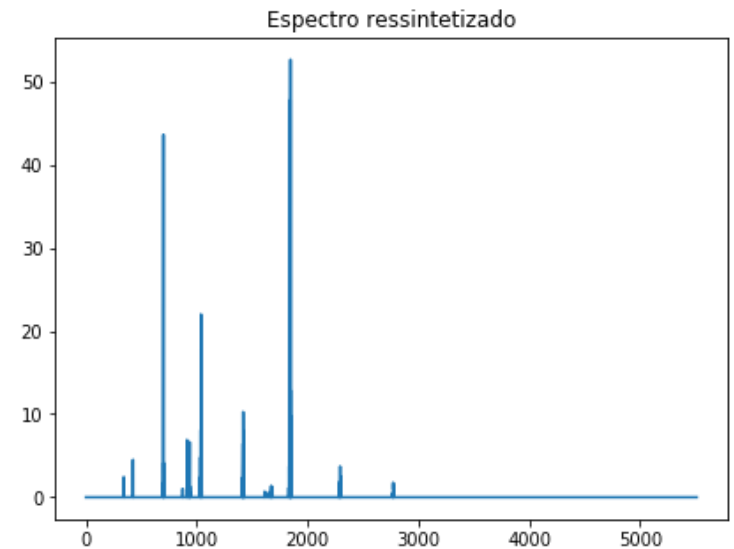
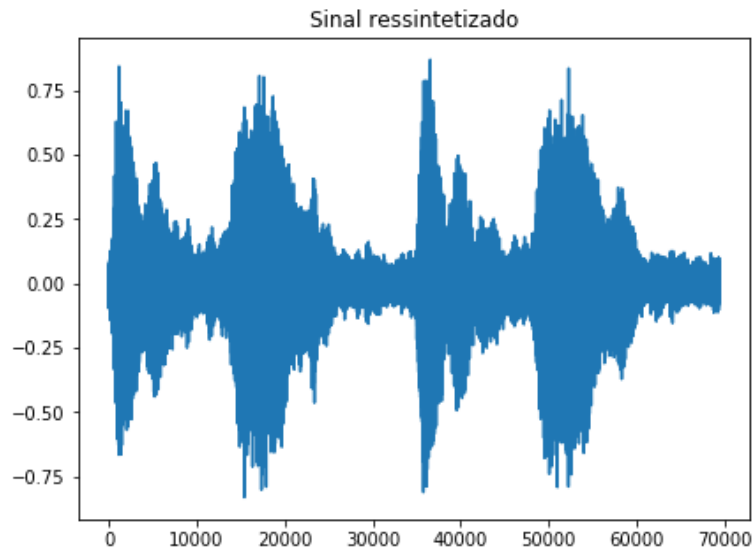
▶ 0:00 / 0:06 — 🔊 ⋮

```
In [53]: X = np.fft.fft(x_mono); N = len(x); E = 2*abs(X[0:int(N/2):1])**2/N
f, ax = plt.subplots(1,2,figsize=(15,5))
ax[0].set_title("Espectro de Energia"); ax[0].plot(np.arange(N/2) *rate/N, E)
ax[1].set_title("Espectro de Energia (detalhe)"); ax[1].plot(np.arange(6000) *r
ate/N, E[0:6000:1]); plt.show()
```



Exemplo de remoção de componentes mais fracas

```
In [54]: Y = X.copy(); C = 0.1 * abs(Y).max()
for val in np.nditer(Y, op_flags=['readwrite']):
    if abs(val) < C:
        val[...] = 0
rex = np.real(np.fft.ifft(Y)); EY = 2*abs(Y[0:int(N/2):1])**2/N
f, ax = plt.subplots(1,2,figsize=(15,5))
ax[0].set_title("Sinal ressampleado"); ax[0].plot(rex)
ax[1].set_title("Espectro ressampleado"); ax[1].plot(np.arange(N/2) *rate/N,
EY); plt.show()
ipd.Audio(rex, rate=rate)
```



Out[54]:

▶ 0:00 / 0:06 ———— 🔊 ⋮