

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA



SEM 5940 – Dinâmica Estrutural

Revisão de Conceitos Fundamentais
Sistemas com 01 GDL
Resposta Livre e Forçada

Objetivos

Objetivo principal desta aula é realizar uma revisão de conceitos básicos da teoria de vibrações mecânicas relacionados com sistemas de 01 Grau de Liberdade (01 GDL). Serão cobertos os seguintes principais tópicos:

- Resposta livre
- Determinação experimental do fator de amortecimento modal
- Resposta forçada harmônica – conceito de *FRF*
- Propriedades da FRF
- Excitação sísmica – conceito de transmissibilidade

Bibliografia:

- 1 Clough, R. e Penzien, J., Dynamics of Structures, McGraw Hill, 1993.
- 2 Craig, R., Kurdila, A., Fundamentals of Structural Dynamics, John Wiley, 2006.
- 3 McConnell, K. G., Varoto, P. S., Vibration Testing: Theory and Practice, Wiley, 2008.

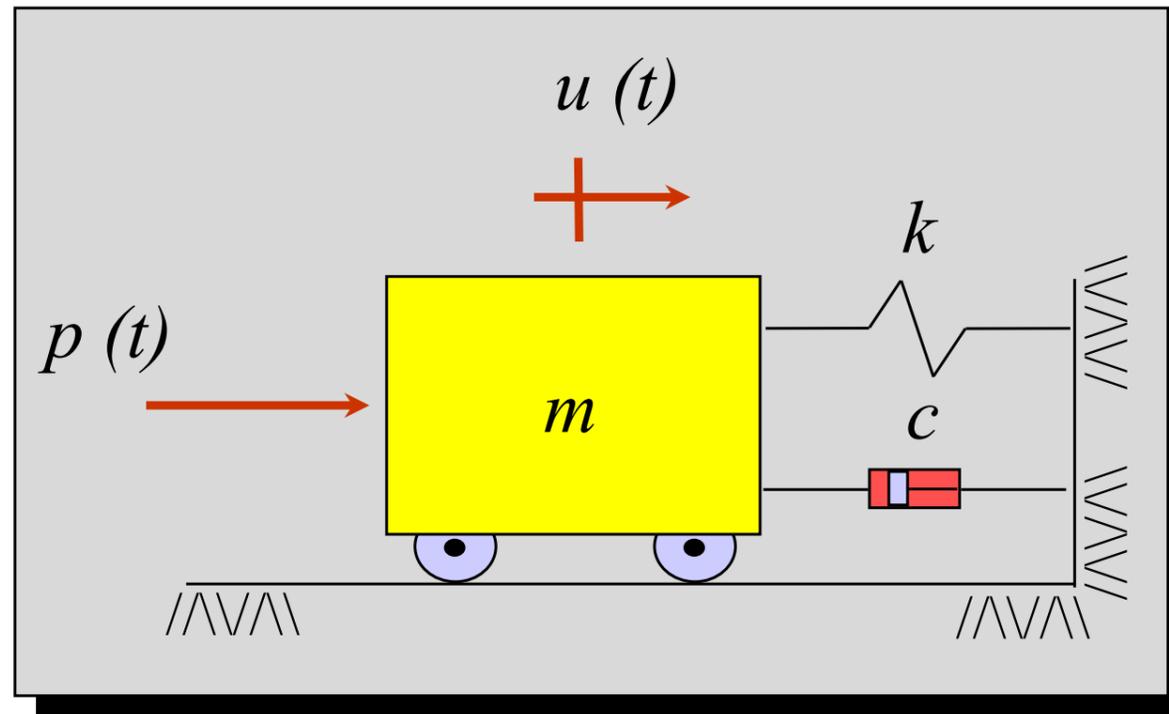
PARTE I

SISTEMAS COM 01 GDL

RESPOSTA LIVRE

Sistema com 01 GDL

Modelo de 01 GDL com amortecimento viscoso:



Equação de movimento: 2ª de Newton

$$\sum \vec{F} = m\vec{u}$$

Cont. ...

Obtém-se então a seguinte equação diferencial do movimento:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

Eq. 1

Onde:

- $m\ddot{u}$ é o termo de inércia
- $c\dot{u}$ é a força de amortecimento viscoso
- ku é a força de mola
- $p(t)$ é a força de excitação externa

A Eq. 1 admite as seguintes condições iniciais

$$u(0) = u_0 \longrightarrow \text{Posição em } t = 0$$

$$\dot{u}(0) = \dot{u}_0 \longrightarrow \text{Velocidade em } t = 0$$

Cont. ...

A Eq. 1 pode ser reescrita em função dos chamados *parâmetros modais*:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \left(\frac{\omega_n^2}{k}\right) p(t) \quad \text{Eq. 2}$$

Onde :

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \textbf{Freqüência natural não amortecida} \text{ do sistema em rad/s}$$

(Propriedade do sistema que depende somente da massa e rigidez e não é função da excitação)

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} \quad \Rightarrow \quad \textbf{Fator ou razão de amortecimento viscoso} \text{ (adimensional)}$$

(Propriedade mensurável do sistema que exprime dissipação de energia)

$$c_{cr} = 2m\omega_n = \frac{2k}{\omega_n} = 2\sqrt{km} \quad \Rightarrow \quad \text{Constante de amortecimento crítico em Ns/m}$$

01 GDL – Resposta Livre

A solução da Eq. 2 é dada pela soma das soluções particular e complementar:

$$u(t) = u_p(t) + u_c(t) \quad \text{Eq. 3}$$

Onde:

- $u_p(t)$ é a solução permanente ou de regime e depende somente da excitação $p(t)$
- $u_c(t)$ é a solução complementar ou homogênea e depende das CIs

Para o caso da vibração livre, consideramos $p(t) = 0$ e então

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0 \quad \text{Eq. 4}$$

E a solução geral da Eq. 4 é dada por:

$$u(t) = \bar{C} e^{\bar{s}t} \quad \text{Eq. 5}$$

Substituindo, vem :

$$(\bar{s}^2 + 2\zeta\omega_n\bar{s} + \omega_n^2)\bar{C}e^{\bar{s}t} = 0 \quad \text{Eq. 6}$$

Cont. ...

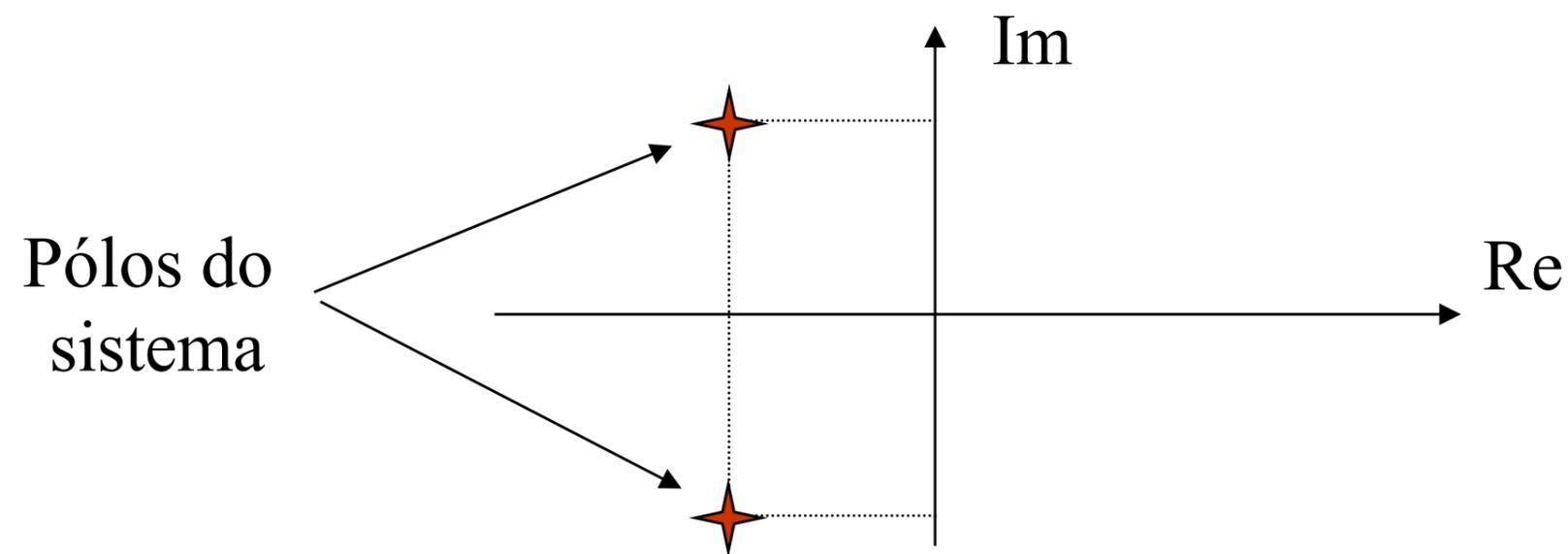
Desta última Eq. 6 obtemos a ***Equação Característica do Sistema Amortecido***, que é dada por

$$\bar{s}^2 + 2\zeta\omega_n \bar{s} + \omega_n^2 = 0$$

Eq. 7

Esta última Eq. 7 é de fundamental importância nos estudos da vibração livre e também no controle da vibração. Conforme será visto, suas raízes fornecem informação importante sobre características físicas do sistema.

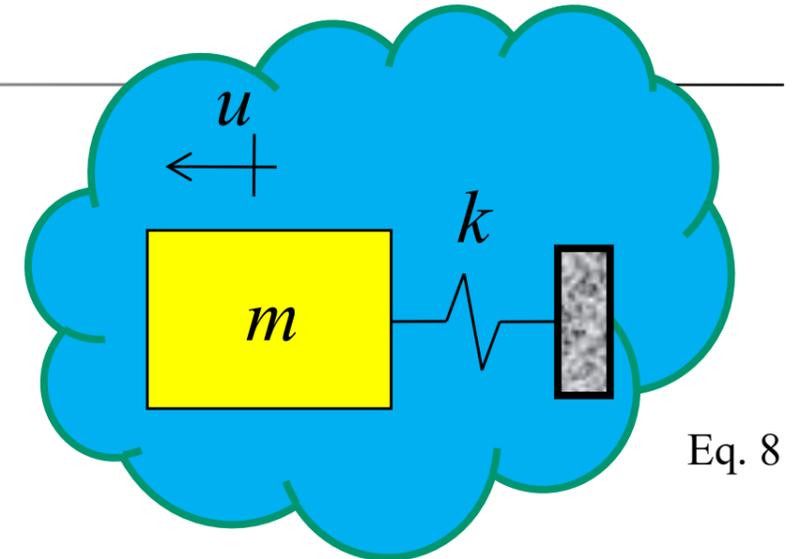
Na teoria de controle clássico tais raízes são denominadas ***pólos*** do sistema e fornecem informações sobre a ***estabilidade*** do sistema. Estas raízes são geralmente complexas e possuem parte real negativa para sistemas estáveis !



Resposta Livre Não Amortecida

Neste caso fazemos $\zeta = 0$ na Eq. 4, obtendo assim

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

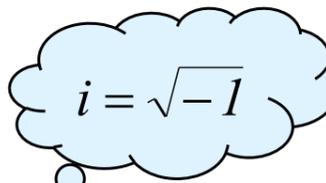


E a correspondente *equação característica não amortecida* é a seguinte

$$\bar{s}^2 + \omega_n^2 = 0$$

Cujas raízes são dadas por:

$$\bar{s}_{1,2} = \pm i\omega_n$$



Eq. 10

E recordando que

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Eq. 11

As raízes da eq. característica do sistema são complexas conjugadas e imaginárias puras. Elas são também dadas em função da frequência natural não amortecida do sistema !

Cont. ...

Então, uma vez que temos duas raízes complexas e conjugadas, a solução da Eq. 8 que é a Eq. 5 é reescrita como

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\text{Esta é na verdade } u_c(t) \text{ de } u(t) = u_c(t) + u_p(t)} \\ u(t) = \bar{C}_1 e^{i\omega_n t} + \bar{C}_2 e^{-i\omega_n t} \end{array} \quad \text{Eq. 12}$$

Onde C_1 e C_2 são constantes de integração e dependem das condições iniciais.

A solução para $u(t)$ pode ser reescrita como:

$$u(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \text{sen } \omega_n t \quad \text{Eq. 13}$$

Onde a Eq. 13 foi obtida com o auxílio das Relações de Euler

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \text{sen } \theta \quad \text{Eq. 14}$$

Agora, as constantes A_1 e A_2 são dadas por:

$$\begin{array}{l} u(0) = u_0 = A_1 \\ \dot{u}(0) = \dot{u}_0 = A_2 \omega_n \end{array} \quad \text{Eq. 15}$$

Cont. ...

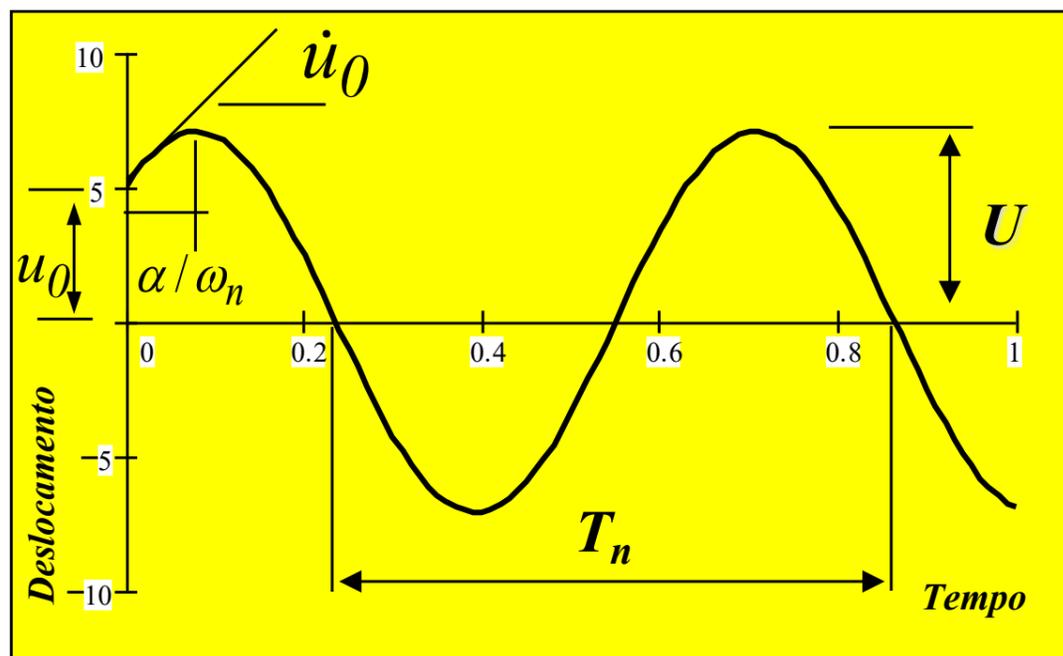
Então, em função dos parâmetros físicos temos:

$$u(t) = u_0 \cos \omega_n t + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \right) \text{sen } \omega_n t$$

O sistema vibra na sua frequência natural não amortecida!

Eq. 16

Um exemplo gráfico



$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

Período natural não amortecido [s]

Eq. 17

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

Frequência natural não amortecida [Hz]

Eq. 18

$$U = \left(A_1^2 + A_2^2 \right)^{1/2}$$

Módulo

Eq. 19

α **ângulo de fase**

Outra forma da solução

$$u(t) = U \cos(\omega_n t - \alpha) = U \cos \omega_n \left(t - \frac{\alpha}{\omega_n} \right)$$

Eq. 20

Resposta Livre Amortecida

Neste caso, a equação de movimento livre é dada por

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0 \quad \text{Eq. 21}$$

E como no caso não amortecido assumimos a solução como

$$u(t) = \bar{C} e^{\bar{s}t} \quad \text{Eq. 22}$$

Substituindo-se a Eq. 22 na Eq. 21 temos

$$(\bar{s}^2 + 2\zeta\omega_n\bar{s} + \omega_n^2)\bar{C}e^{\bar{s}t} = 0 \quad \text{Eq. 23}$$

De onde obtemos a equação característica do sistema amortecido

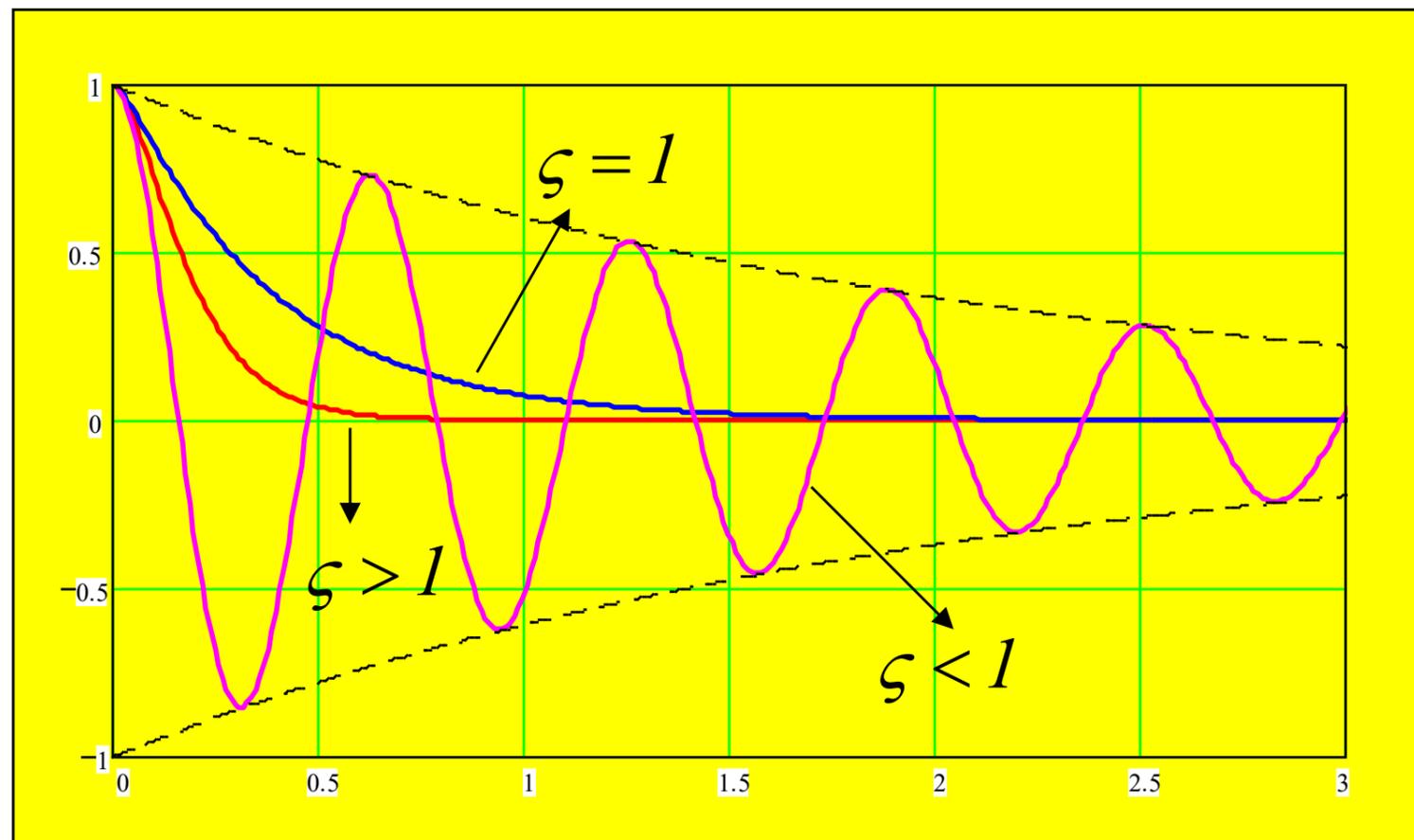
$$\bar{s}^2 + 2\zeta\omega_n\bar{s} + \omega_n^2 = 0 \quad \text{Eq. 24}$$

Cont. ...

Neste caso, a equação característica do sistema, Eq. 24 possui duas raízes *complexas conjugadas* da seguinte forma

$$\bar{s}_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \text{Eq. 25}$$

O valor do fator de amortecimento ζ define três casos possíveis:



- Sub Amortecido: $0 \leq \zeta \leq 1$
- Criticamente Amort.: $\zeta = 1$
- Sobre Amortecido: $\zeta > 1$

Veremos cada um destes casos individualmente em seguida



Cont. ...

a) Sistema sub amortecido $\zeta < 1$

Caso mais importante para a Dinâmica Estrutural !

Neste caso, escrevemos as raízes da equação característica como:

$$\bar{s}_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d \quad \text{Eq. 26}$$

Onde neste caso, a constante ω_d é frequência natural amortecida (rad.s^{-1}) do sistema:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{Eq. 27}$$

E o *período natural amortecido* T_d é dado por

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad \text{Eq. 28}$$

Deve-se notar que este caso ($\zeta < 1$) é o caso mais importante sob o ponto de vista experimental e prático. As grandezas ω_d e T_d são as grandezas mensuráveis nos problemas reais.

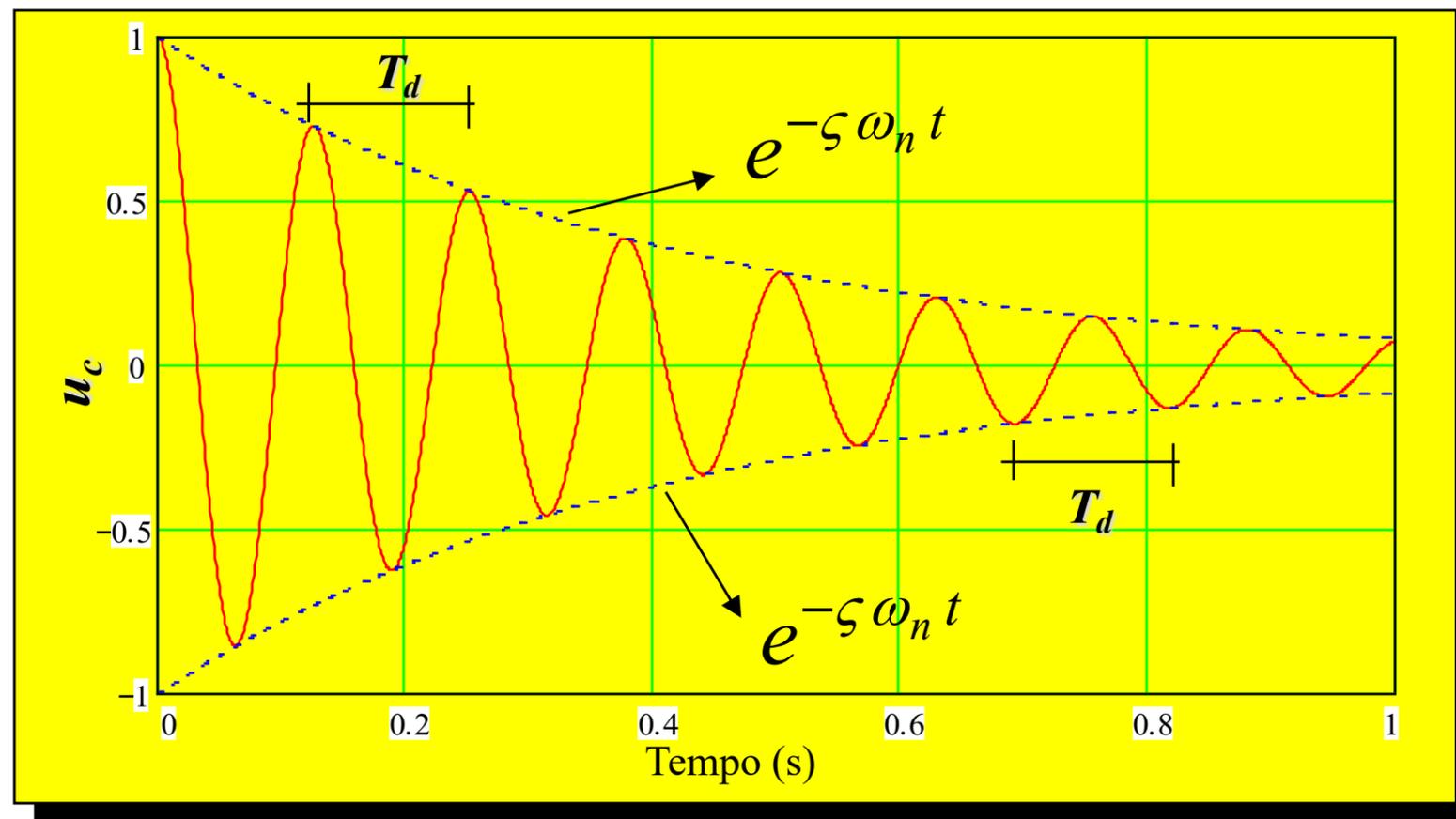
Cont. ...

A solução para a vibração livre é então escrita como (Eq. 22):

$$u(t) = e^{-\zeta \omega_n t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \text{sen } \omega_d t) \quad \text{Eq. 29}$$

Ou então em função das CIs

$$u(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left[u_0 \cos \omega_d t + \left(\frac{\dot{u}_0 + \zeta \omega_n u_0}{\omega_d} \right) \text{sen } \omega_d t \right] \quad \text{Eq. 30}$$



O sistema vibra na
frequência natural
Amortecida!

Cont. ...

Outra forma de escrevermos a solução seria:

$$u(t) = Ue^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \alpha) \quad \text{Eq. 31}$$

Com:

$$U^2 = u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d} \right)^2 \quad \text{Amplitude} \quad \text{Eq. 32}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d u_0} \quad \text{Ângulo de fase} \quad \text{Eq. 33}$$

Cont. ...

a) Sistema criticamente amortecido $\zeta = 1$

As raízes da equação característica são dadas por

$$\bar{s} = -\zeta\omega_n \quad \text{Eq. 34}$$

E a solução fica:

$$u(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\zeta\omega_n t} \quad \text{Eq. 35}$$

Ou em função das condições iniciais

$$u(t) = [i_0 + (\zeta\omega_n u_0)t] e^{-\zeta\omega_n t} \quad \text{Eq. 36}$$

b) Sistema sobre amortecido $\zeta > 1$

Definimos:

$$\omega^* = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \text{freqüência natural amortecida para } \zeta > 1 \quad \text{Eq. 37}$$

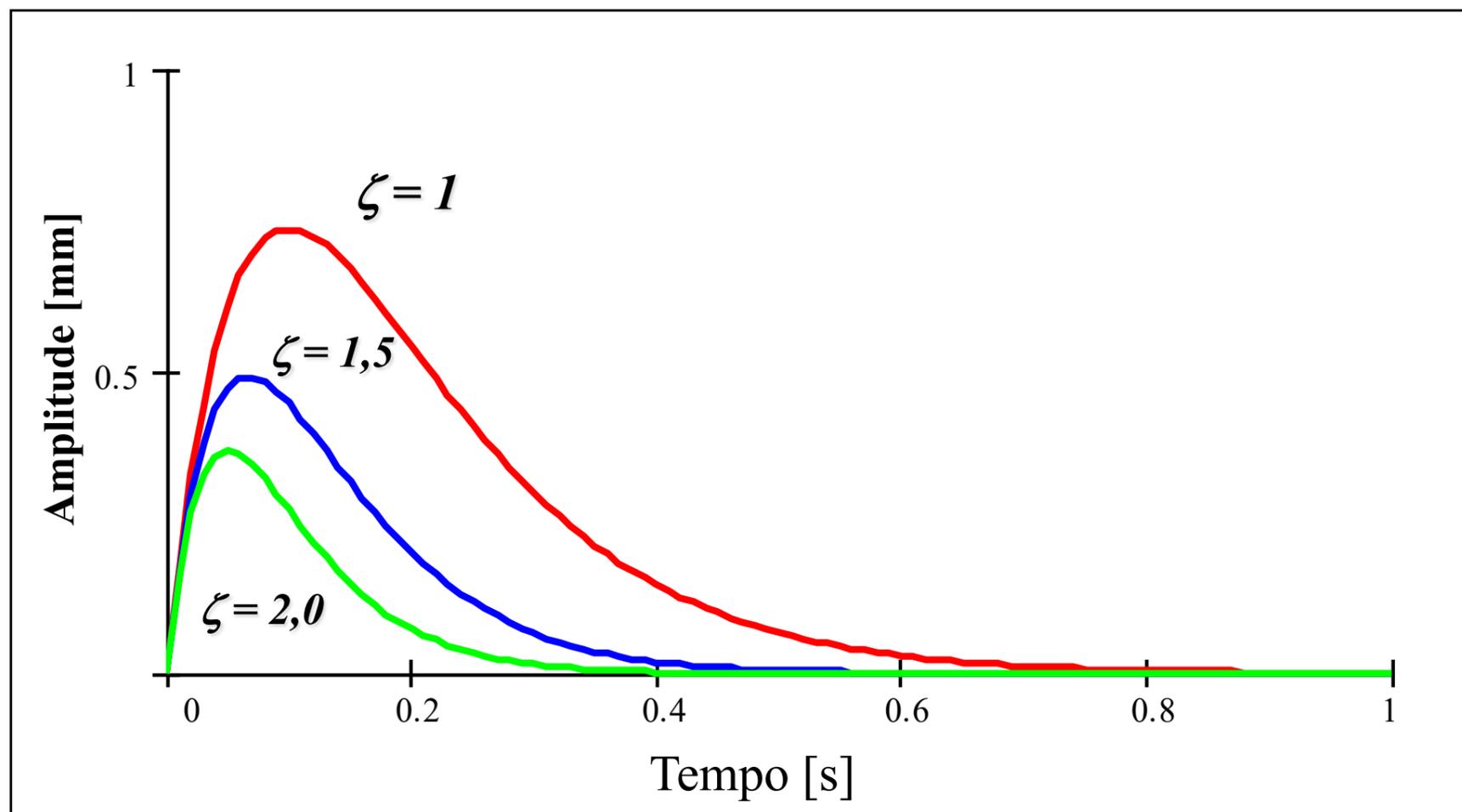
Cont. ...

E a solução é então dada por

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (C_1 \cosh \omega^* t + C_2 \sinh \omega^* t)$$

Eq. 38

Exemplos



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA



SEM 5940 – Dinâmica Estrutural

Revisão de Conceitos Fundamentais
Sistemas com 01 GDL
Resposta Livre e Forçada

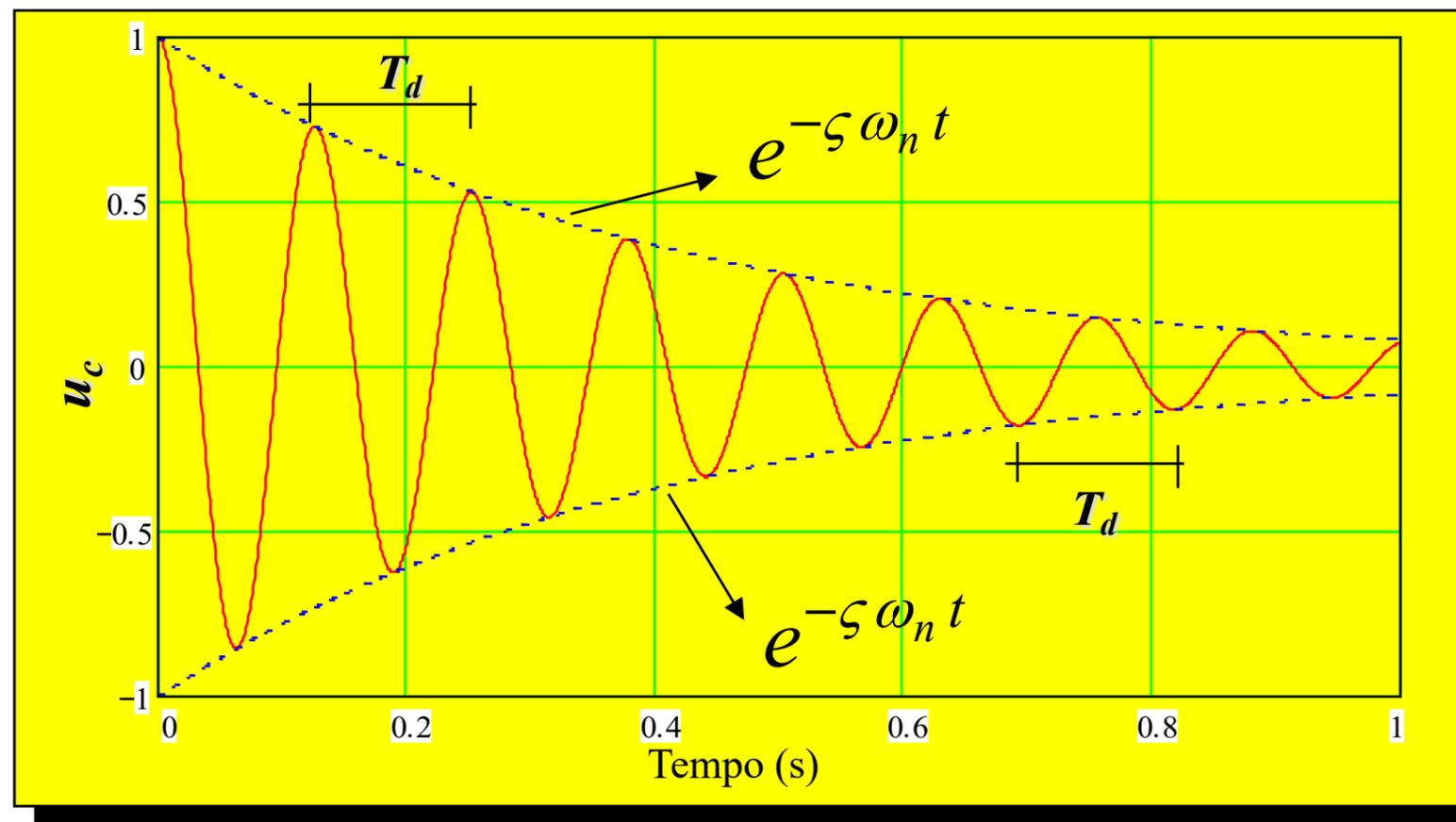
Conforme discutido !

A solução para a vibração livre é então escrita como (Eq. 22):

$$u(t) = e^{-\zeta \omega_n t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \text{sen } \omega_d t) \quad \text{Eq. 29}$$

Ou então em função das CIs

$$u(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left[u_0 \cos \omega_d t + \left(\frac{\dot{u}_0 + \zeta \omega_n u_0}{\omega_d} \right) \text{sen } \omega_d t \right] \quad \text{Eq. 30}$$



O sistema vibra na
frequência natural
Amortecida !

Cont. ...

Outra forma de escrevermos a solução seria:

$$u(t) = Ue^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \alpha) \quad \text{Eq. 31}$$

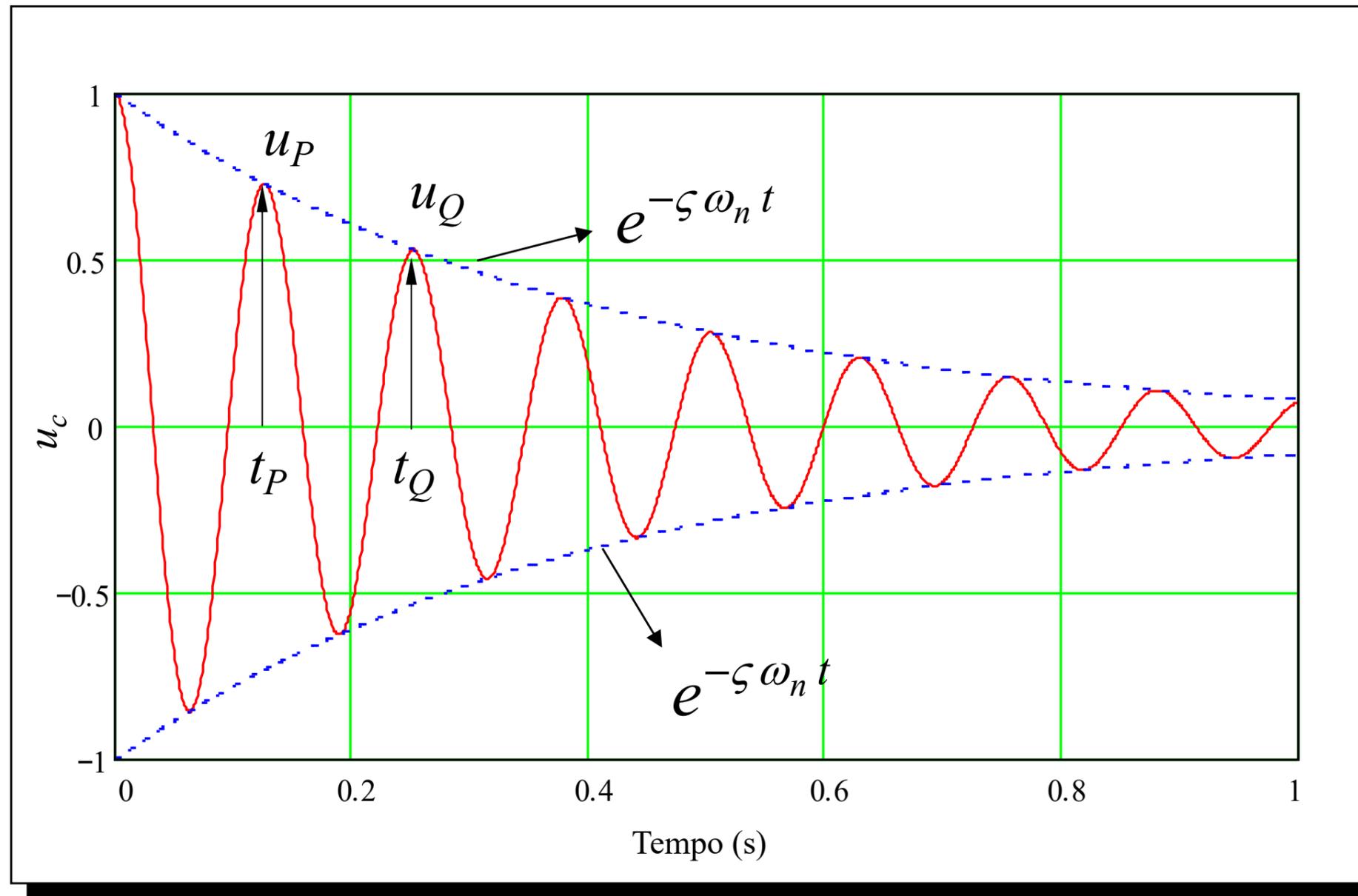
Com:

$$U^2 = u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d} \right)^2 \quad \text{Amplitude} \quad \text{Eq. 32}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d u_0} \quad \text{Ângulo de fase} \quad \text{Eq. 33}$$

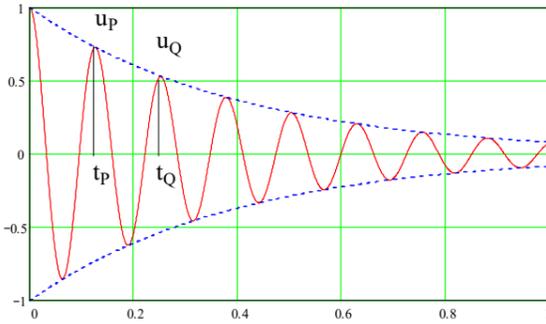
Determinação Experimental do Amortecimento

Consiste em utilizar a *resposta livre amortecida* do sistema de 01 GDL para se obter estimativas do fator de amortecimento modal ζ . Denomina-se de *Método do decaimento ou decremento logarítmico*.



Cont. ...

Toma-se as amplitudes do movimento no início e no final de um ciclo, u_P e u_Q , respectivamente. Então, temos com base na Eq. 31

$$u(t) = Ue^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \alpha) \left\{ \begin{array}{l} u_P(t_P) = Ue^{-\zeta\omega_n t_P} \cos(\omega_d t_P - \alpha) \quad \text{Eq. 39} \\ u_Q(t_Q) = Ue^{-\zeta\omega_n t_Q} \cos(\omega_d t_Q - \alpha) \quad \text{Eq. 40} \end{array} \right.$$


Agora:
$$\frac{u_P}{u_Q} = \frac{Ue^{-\zeta\omega_n t_P} \cos(\omega_d t_P - \alpha)}{Ue^{-\zeta\omega_n t_Q} \cos(\omega_d t_Q - \alpha)} = e^{\zeta\omega_n(t_Q - t_P)} = e^{\zeta\omega_n t_D} \quad \text{Eq. 41}$$

O *decremento logarítmico* δ é então definido por

$$T_d = t_Q - t_P$$

$$\delta = \ln\left(\frac{u_P}{u_Q}\right) = \zeta\omega_n T_d \quad \Rightarrow \quad T_d = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \text{Eq. 42}$$

Cont. ...

Então, das Eqs. 28 e 42 obtemos

$$\delta = \zeta \omega_n T_d = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Eq. 43

De onde obtemos o valor de ζ . Para valores de $\zeta < 0,2$

$$\delta \cong 2\pi\zeta$$

Eq. 44

Que é equivalente a

$$\zeta \cong \left(\frac{1}{2\pi} \right) \ln \left(\frac{u_P}{u_Q} \right)$$

Eq. 45

PARTE II

SISTEMAS COM 01 GDL

RESPOSTA FORÇADA

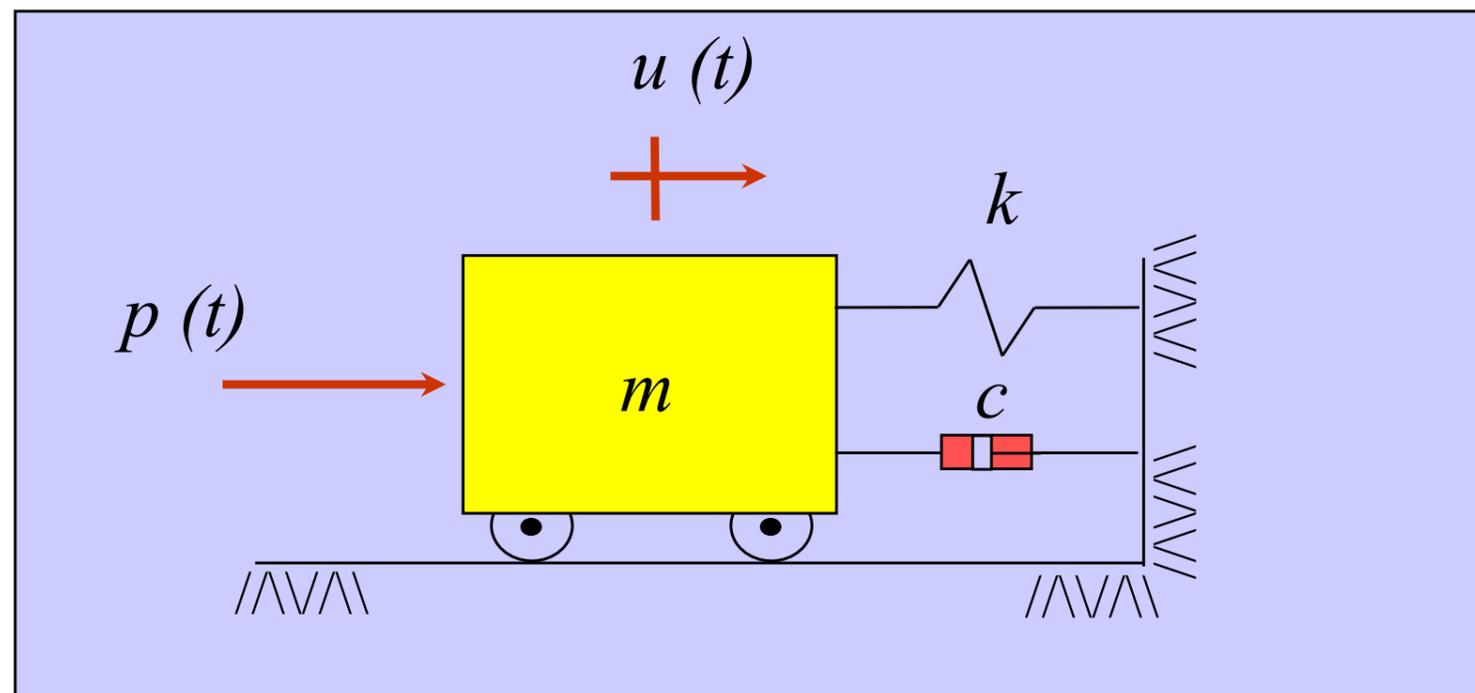
- Resposta harmônica – conceito de **FRF**
- Resposta à excitação qualquer – Laplace, Fourier
Duhamel

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -$$

- senoidal
- impulso
- aleatória
- pseudo-aleatória
- chirp
- degrau
- rampa
- acústica

2.7 - Resposta Forçada Harmônica

Será considerado inicialmente o modelo com amortecimento viscoso:



Com o seguinte modelo de excitação:

$$p(t) = p_0 (\text{sen}(\omega t) + \text{cos}(\omega t))$$

$$p(t) = p_0 \text{sen}(\omega t)$$

$$p(t) = p_0 \text{cos}(\omega t)$$

$$p(t) = p_0 e^{j\omega t}$$

Eq. 46

- p_0 – amplitude da força
- ω – frequência do distúrbio harmônico

Cont. ...

A equação de movimento é escrita como:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 e^{j\omega t}$$

Eq. 47

Ou em função dos parâmetros modais:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \left(\frac{\omega_n^2}{k}\right) p_0 e^{j\omega t}$$

Eq. 48

Estudaremos o caso onde $\zeta < 1$!

Baseado na hipótese de linearidade do sistema, assumimos uma solução da forma

$$u(t) = U_0 e^{j\omega t}$$

Eq. 49

A qual quando substituída na Eq. 34 fornece a solução para a amplitude U_0

Eq. 50

$$U_0 = \frac{p_0}{k - m\omega^2 + jc\omega}$$

$$U_0 = \frac{p_0/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

Eq. 51

Cont. ...

De onde extraímos a FRF do sistema

$$H(\omega) = \frac{U}{U_0}(\omega) = \frac{1}{1 - r^2 + j2\zeta r}$$

Eq. 53

Onde $r = \omega/\omega_n$ é denominada *razão adimensional de frequências*

A última expressão também pode ser expressa em termos dos parâmetros físicos do sistema

$$H(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + jc\omega} = \frac{N(\omega)}{D(\omega)}$$

Eq. 54

Cont. ...

Portanto, quando escrevemos a excitação do sistema na forma de uma exponencial complexa, a solução para a FRF do sistema é essencialmente a mesma, com exceção de que agora $H(\omega)$ é uma função complexa da frequência de excitação.

$$H(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + jc\omega}$$



$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}}$$

Eq. 55

$$\alpha(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right)$$

Eq. 56

Vejamos a ilustração gráfica destas duas últimas expressões em função de ω !

Gráficos de $H(\omega)$

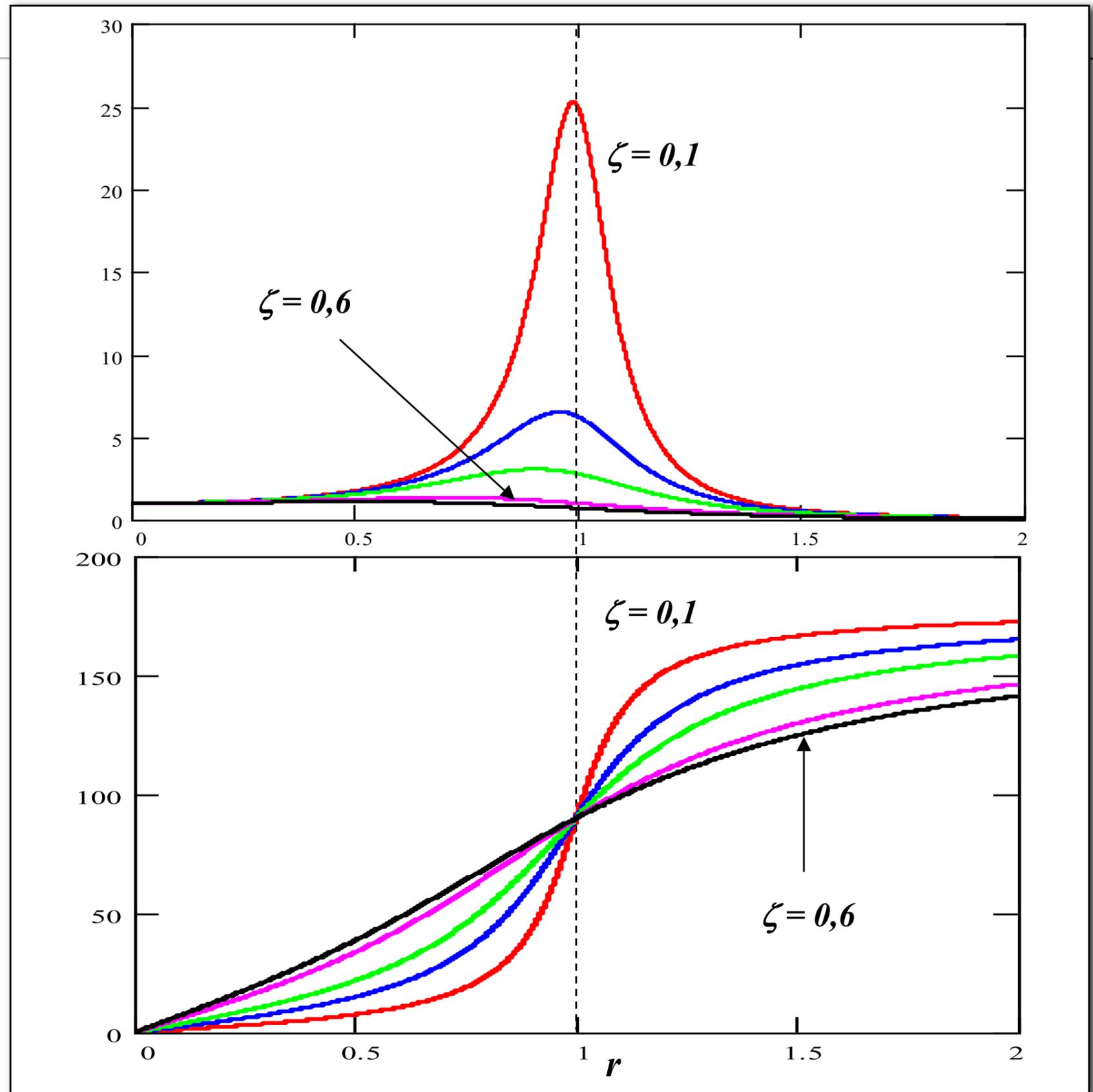
Magnitude

$$H(\omega) = \frac{1/k}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}$$

Ângulo de Fase

$$\tan \alpha = \frac{2\zeta r}{1-r^2}$$

Mais comentários adiante !



Cont. ...

A solução de regime permanente do sistema assume

$$u_p(t) = \frac{1}{k - m\omega^2 + jc\omega} p_0 e^{j\omega t}$$

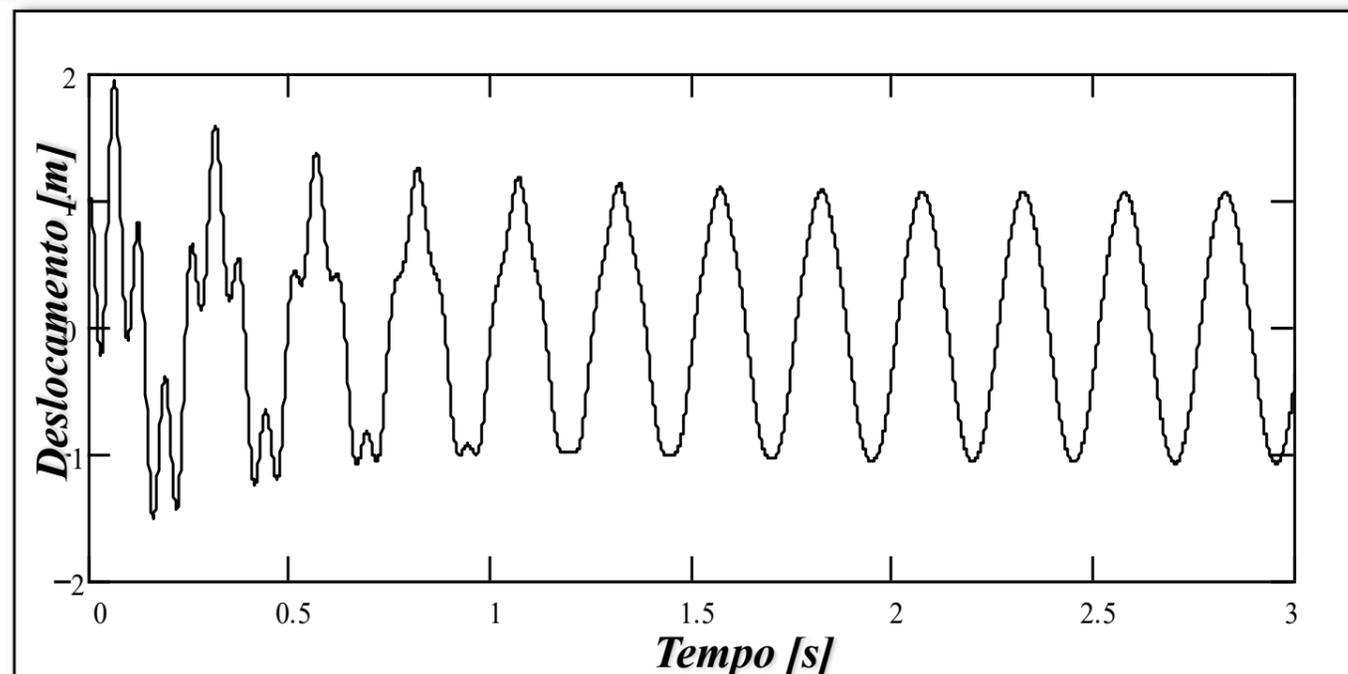
$$u_p(t, \omega) = H(\omega) p_0 e^{j\omega t}$$

Eq. 57

E a solução completa fica então

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[u_0 \cos \omega_d t + \left(\frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d} \right) \text{sen } \omega_d t \right] + p_0 H(\omega) e^{j\omega t}$$
$$e^{-\zeta\omega_n t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \text{sen } \omega_d t)$$

Eq. 58



Amortecimento Histerético ou Estrutural

O modelo de amortecimento *histerético (estrutural)* é aquele onde a força de amortecimento é proporcional ao *deslocamento* mas em fase com a *velocidade*:

$$f_D = \zeta k |u| \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|}$$

Eq. 59

Logo a Equação de movimento para o sistema de 01 GDL fica

$$m\ddot{u} + \zeta k |u| \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} + ku = p(t)$$

Eq. 60

Outra maneira de escrever a equação de movimento é usando o conceito de rigidez complexa

$$f_D(t) = j\eta k u(t)$$

Eq. 61

onde η é comumente denominado de fator de perda (loss factor)

Cont. ...

Assim temos a nova equação de movimento para excitação harmônica

$$m\ddot{u} + k(1 + j\eta)u = p_0 e^{j\omega t}$$

Eq. 62

Assumindo uma solução da forma

$$u(t) = U_0 e^{j\omega t}$$

Eq. 63

Temos como solução para a amplitude de vibração

$$U_0 = \frac{p_0}{k - m\omega^2 + jk\eta} = \frac{1/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + j\eta} F_0$$

Eq. 64

E a FRF do sistema com amortecimento histerético é

$$H(\omega) = \frac{U}{U_0}(\omega) = \frac{1}{1 - r^2 + j2\zeta r}$$

viscoso

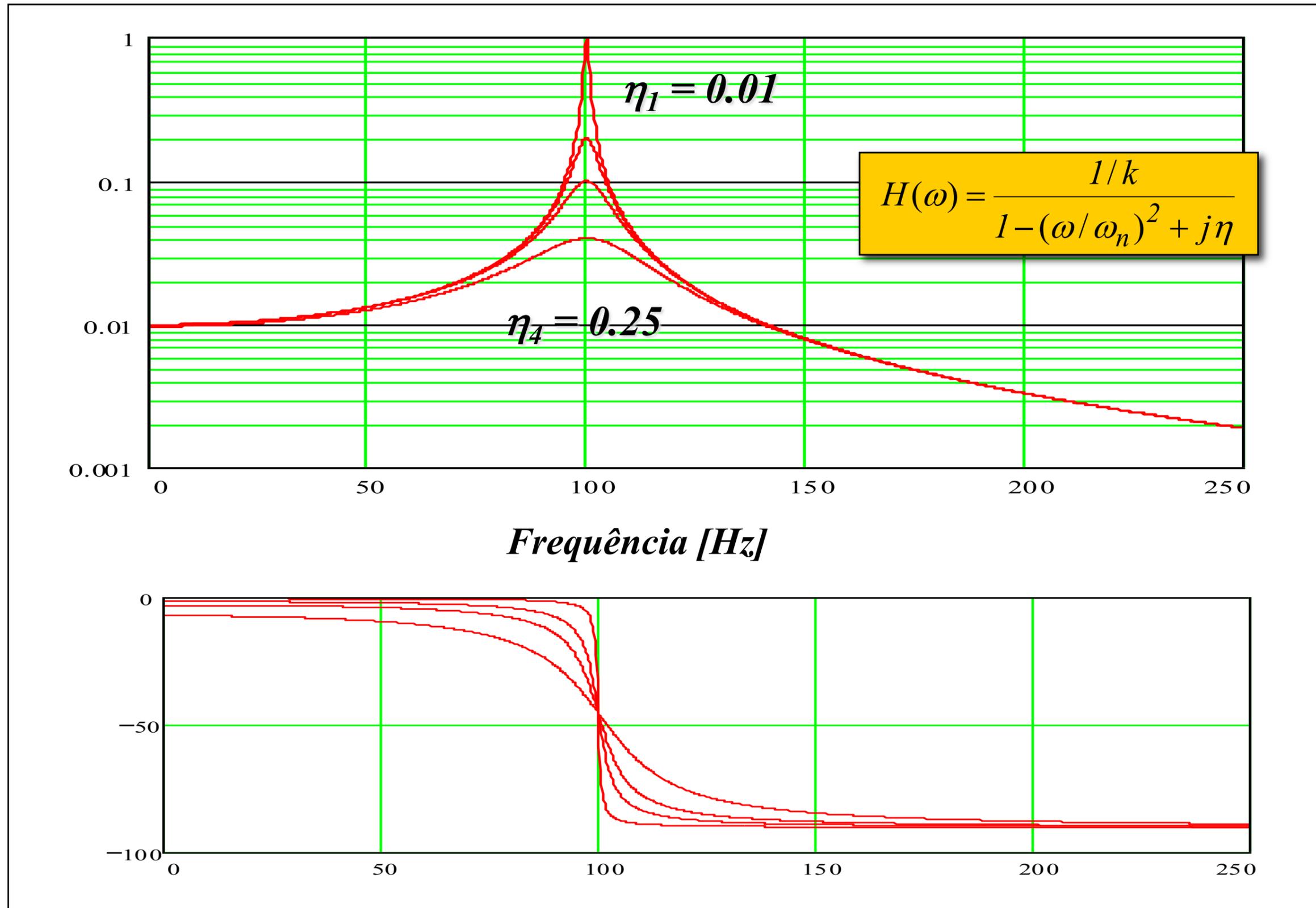
$$H(\omega) = \frac{1/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + j\eta}$$

Importante: a parte imaginária de $H(\omega)$ não depende de ω !

Eq. 65

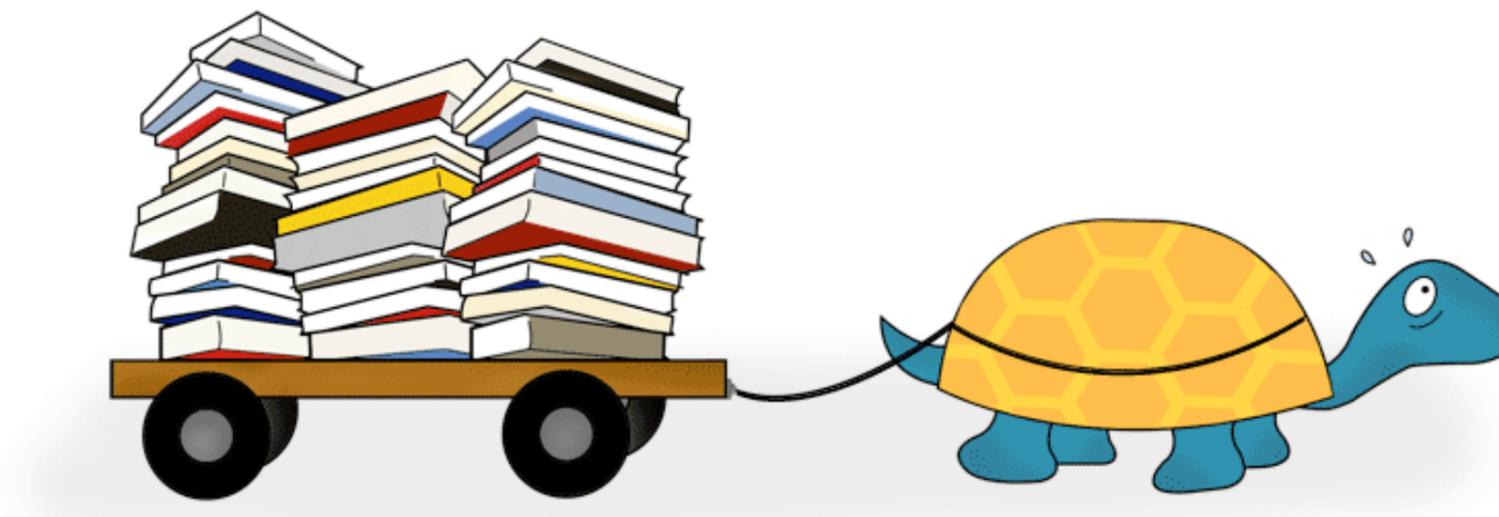
Cont. ...

Gráfico:



FRUM

Bom Estudo !



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

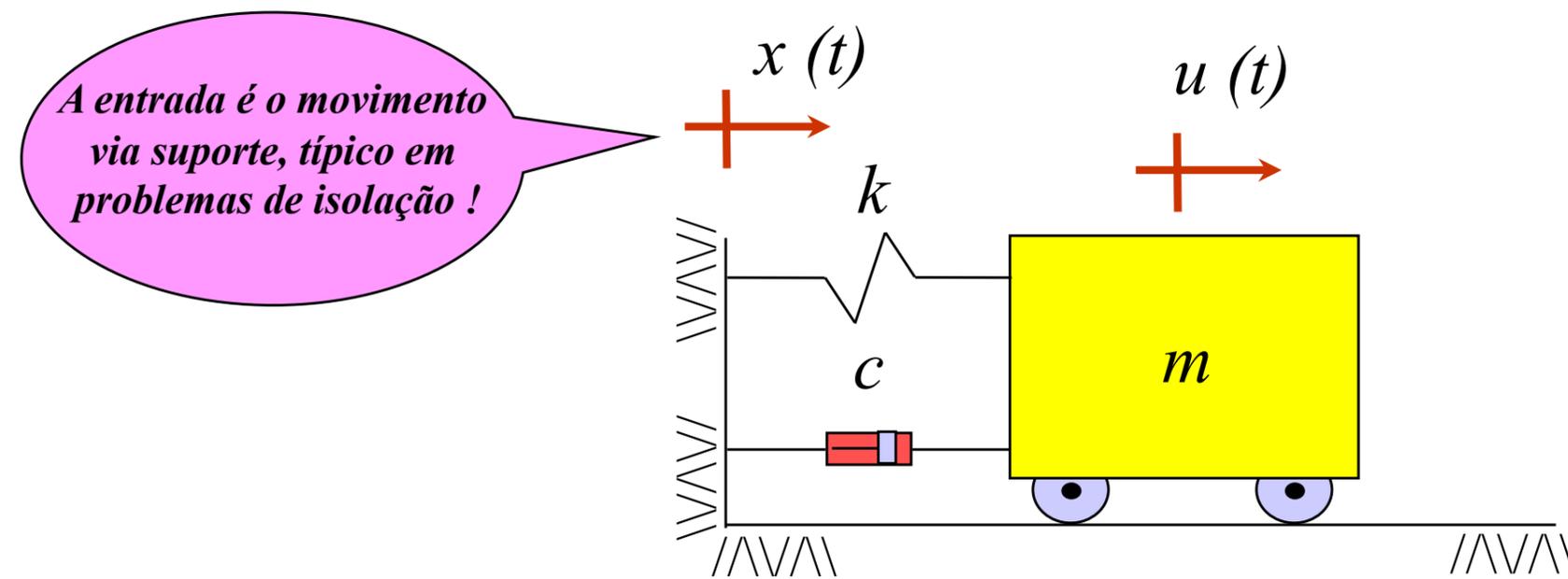


SEM 5940 – Dinâmica Estrutural

Revisão de Conceitos Fundamentais
Sistemas com 01 GDL
Resposta Forçada
Transmissibilidade

Excitação Sísmica – Isolação de Vibração

Neste caso o modelo é o seguinte



E a equação de movimento é a seguinte:

$$k(x - u) + c(\dot{x} - \dot{u}) = m\ddot{u}$$

Eq. 1

Definindo agora o *deslocamento relativo* entre a base e a massa:

$$z = u - x \quad \text{ou} \quad z = x - u$$

Eq. 2

Cont. ...

Temos então que a equação de movimento no deslocamento relativo é:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = p_{eff}(t) \quad \text{Eq. 3}$$

O lado direito da Eq. 3 é o *carregamento efetivo* que é dado por:

$$p_{eff}(t) = -m\ddot{x}$$

Eq. 4

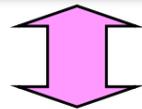
Observem que esta “*força efetiva*” é na verdade uma *pseudo força de inércia*, pois é dada pelo produto da aceleração da base pela massa *m* ! E portanto, a massa responde à esta força como sendo a fonte de distúrbio do sistema. De forma alternativa, podemos expressar a equação de movimento, Eq. 3 em função do deslocamento absoluto da massa *m*. Neste caso temos:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = kx + c\dot{x} \quad \text{Eq. 5}$$

Cont. ...

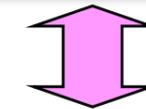
Comparando-se os dois modelos acima descritos, Eq. 3 e Eq. 5, temos:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = p_{eff}(t) \quad \text{Eq. 6}$$



- Descrita em termos do deslocamento relativo z .
- Experimentalmente requer que x e u sejam medidos e então z calculado !
- A excitação é dada pela pseudo força de inércia

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = kx + c\dot{x} \quad \text{Eq. 7}$$



- Descrita em termos do deslocamento absoluto u .
- Experimentalmente requer que apenas u seja medido
- A excitação é dada pela soma de parte das forças de mola e amortecedor !

Veremos em seguida a solução de ambos os modelos para entradas harmônicas. Inicialmente, consideramos o modelo descrito pela Eq. 6, definiremos

$$x(t) = X_0 e^{j\omega t} \quad \text{Eq. 8}$$

$$p_{eff}(t) = -mX_0 e^{j\omega t} \quad \text{Eq. 9}$$

Agora, substituindo-se as Eqs. 8 e 9 nas Eqs. 6 e 7 temos

Cont. ...

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\omega^2 X_0 e^{j\omega t}$$

Eq. 10

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = (k + jc\omega)X_0 e^{j\omega t}$$

Eq. 11

Assumindo agora soluções harmônicas em z e u

$$z(t) = Z_0 e^{j\omega t}$$

Eq. 12

$$u(t) = U_0 e^{j\omega t}$$

Eq. 13

Substituição das Eqs. 12 e 13 nas Eqs. 10 e 11 fornecem as amplitudes

$$Z_0 = \frac{-m\omega^2}{k - m\omega^2 + jc\omega} X_0$$

Eq.14

$$U_0 = \frac{(k + jc\omega)}{k - m\omega^2 + jc\omega} X_0$$

Eq. 15

Reparem que a equação característica nos dois modelos é a mesma !

Cont. ...

Com base nas Eqs. 14 e 15, podemos definir a **Função de Resposta em Freqüência de Transmissibilidade de Movimento**, ou simplesmente **Transmissibilidade**

$$TRr(\omega) = \frac{Z_0}{X_0}(\omega) = \frac{-m\omega^2}{k - m\omega^2 + jc\omega} \quad \text{Eq. 16}$$

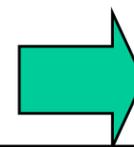
$$TRa(\omega) = \frac{U_0}{X_0}(\omega) = \frac{k + jc\omega}{k - m\omega^2 + jc\omega} \quad \text{Eq. 17}$$

As FRF definidas pelas Eqs. 16 e 17 são importantíssimas no estudo da isolação de vibração pois elas definem a quantidade de movimento transmitida pela base para a massa m por unidade de movimento de entrada no suporte. São grandezas **adimensionais**. A Eq. 16 define a transmissibilidade relativa pois a variável de saída é o movimento relativo ($z = x - u$) entre a base e a massa m . A Eq. 17 define a transmissibilidade absoluta, pois é definida em termos do deslocamento absoluto da massa m . Em função da razão de freqüências $r = \omega/\omega_n$ temos :

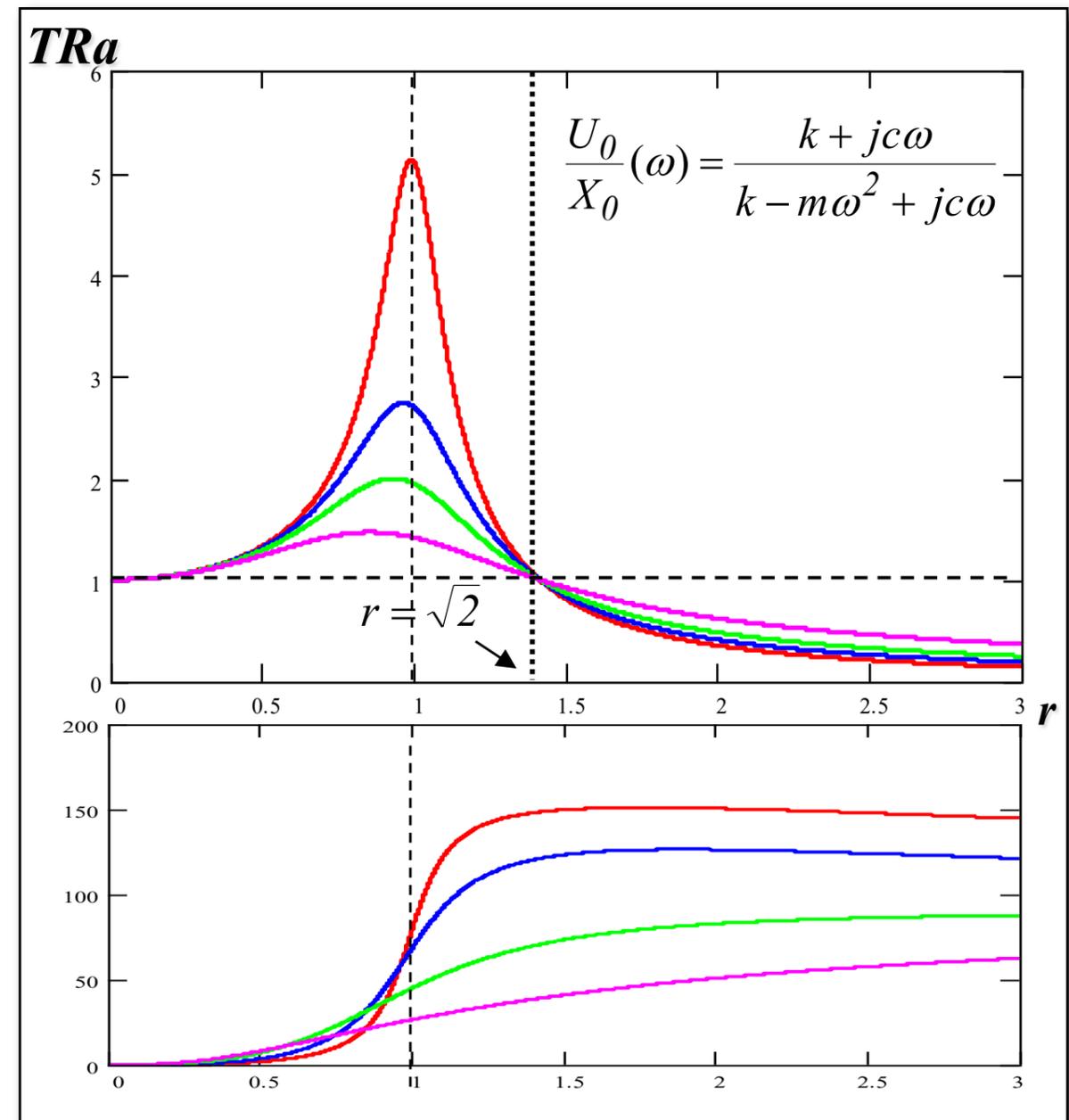
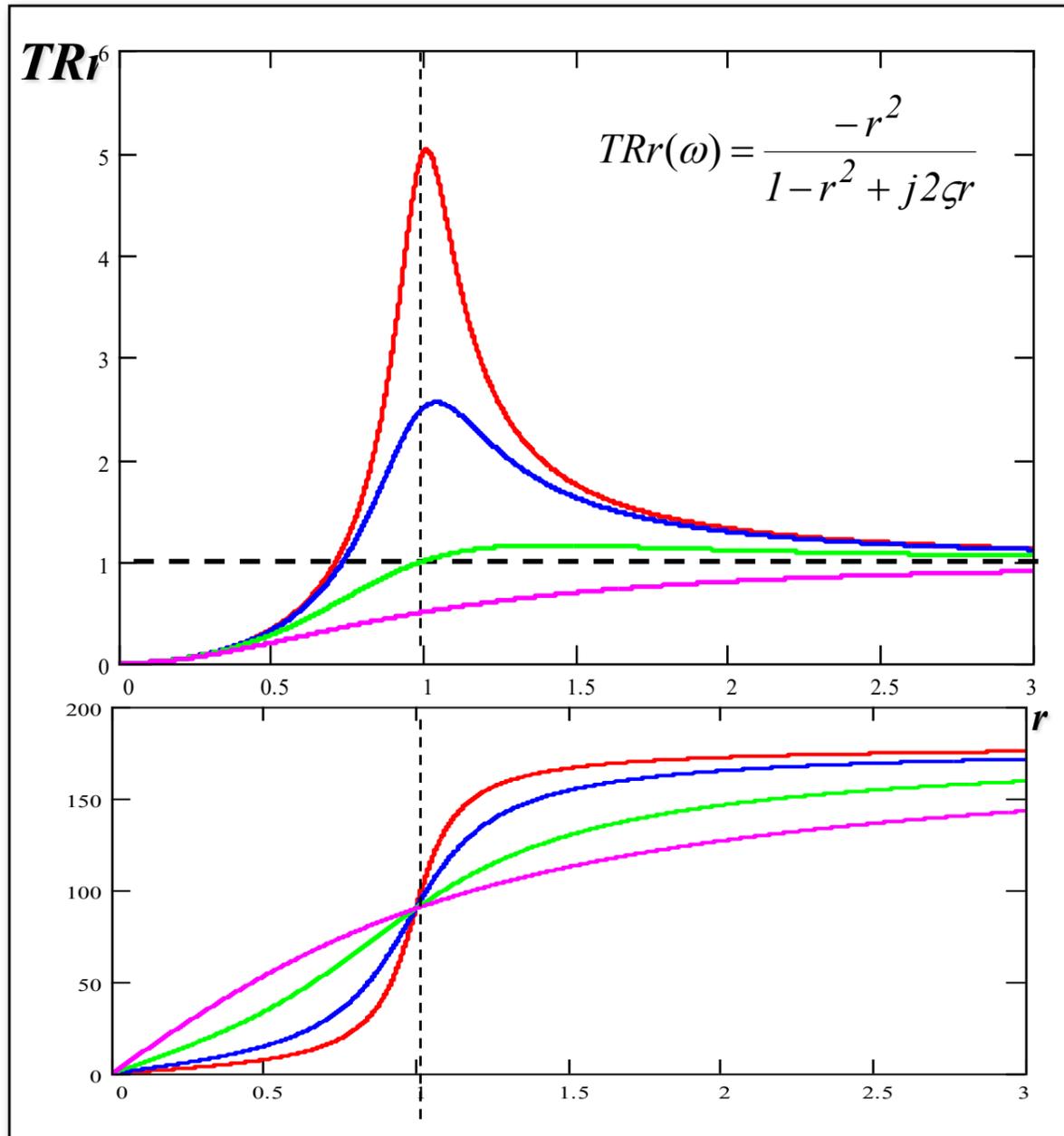
$$TRr(\omega) = \frac{-r^2}{1 - r^2 + j2\zeta r} \quad \text{Eq. 18}$$

$$TRa(\omega) = \frac{1 + j2\zeta r}{1 - r^2 + j2\zeta r} \quad \text{Eq. 19}$$

Vejam os gráficos das duas **TR(ω)**

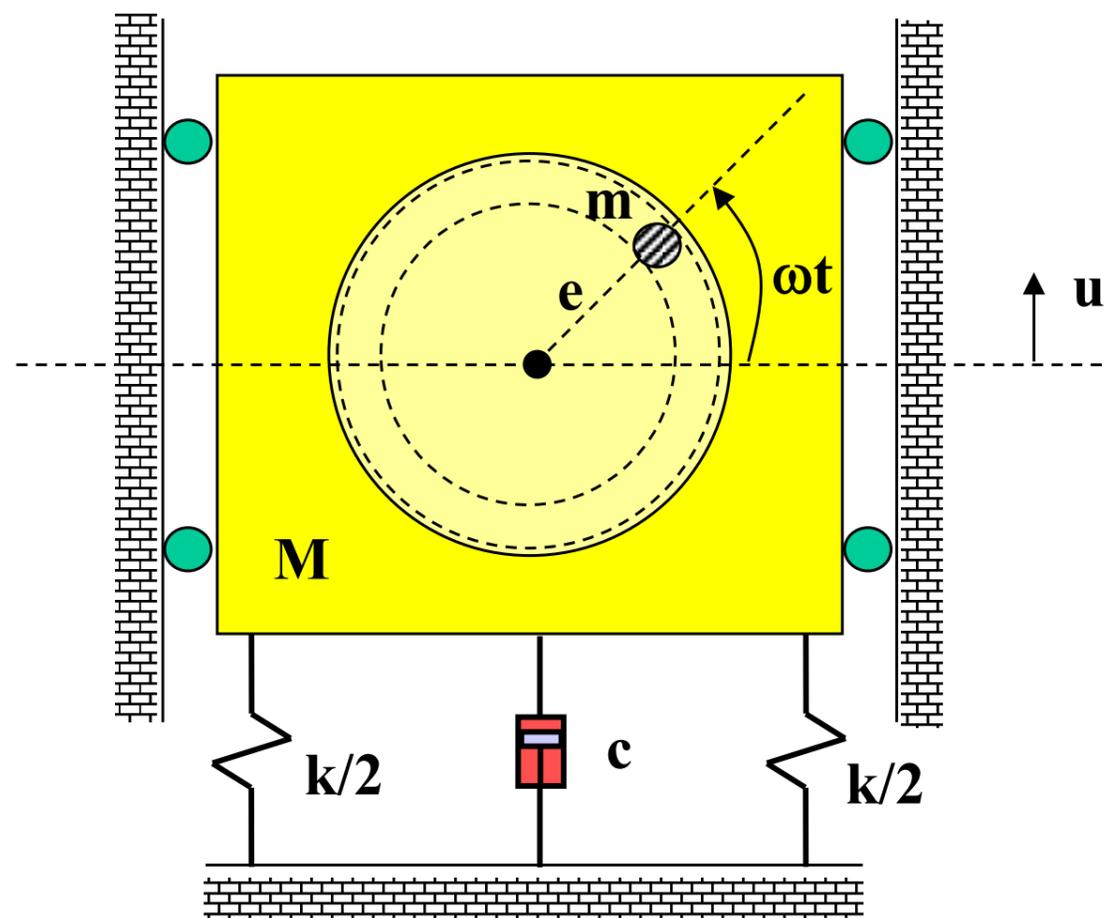


Transmissibilidade Relativa vs Absoluta



Desbalanceamento Rotativo

O desbalanceamento rotativo é uma fonte comum de excitação em máquinas. Considere o modelo abaixo para o estudo:



O desbalanceamento é causado por uma massa excêntrica m com excentricidade e que realiza um movimento circular com velocidade angular ω .

Cont. ...

Da sua posição de equilíbrio estático, a posição da massa m é dada por

$$u_m = u + e \operatorname{sen} \omega t \quad \text{Eq. 20}$$

E a equação de movimento de translação fica então

$$(M - m)\ddot{u} + m \frac{d^2}{dt^2} (u + e \operatorname{sen} \omega t) = -ku - c\dot{u} \quad \text{Eq. 21}$$

A qual pode ser rearranjada para

$$M\ddot{u} + c\dot{u} + ku = (me\omega^2) \operatorname{sen} \omega t \quad \text{Eq. 22}$$

E a Eq. 22 mostra claramente que o desbalanceamento é a fonte de excitação do sistema. Assumindo uma solução harmônica como antes, podemos achar a amplitude do movimento e seu ângulo de fase

$$u(t) = U_0 \operatorname{sen} \omega t \quad \text{Eq. 23}$$

Cont. ...

De onde obtemos

$$U_0 = \frac{me\omega^2}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

Eq. 24

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{c\omega}{k - M\omega^2}$$

Eq. 25

Ou na forma adimensional

$$\frac{M U_0}{m e} (r) = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

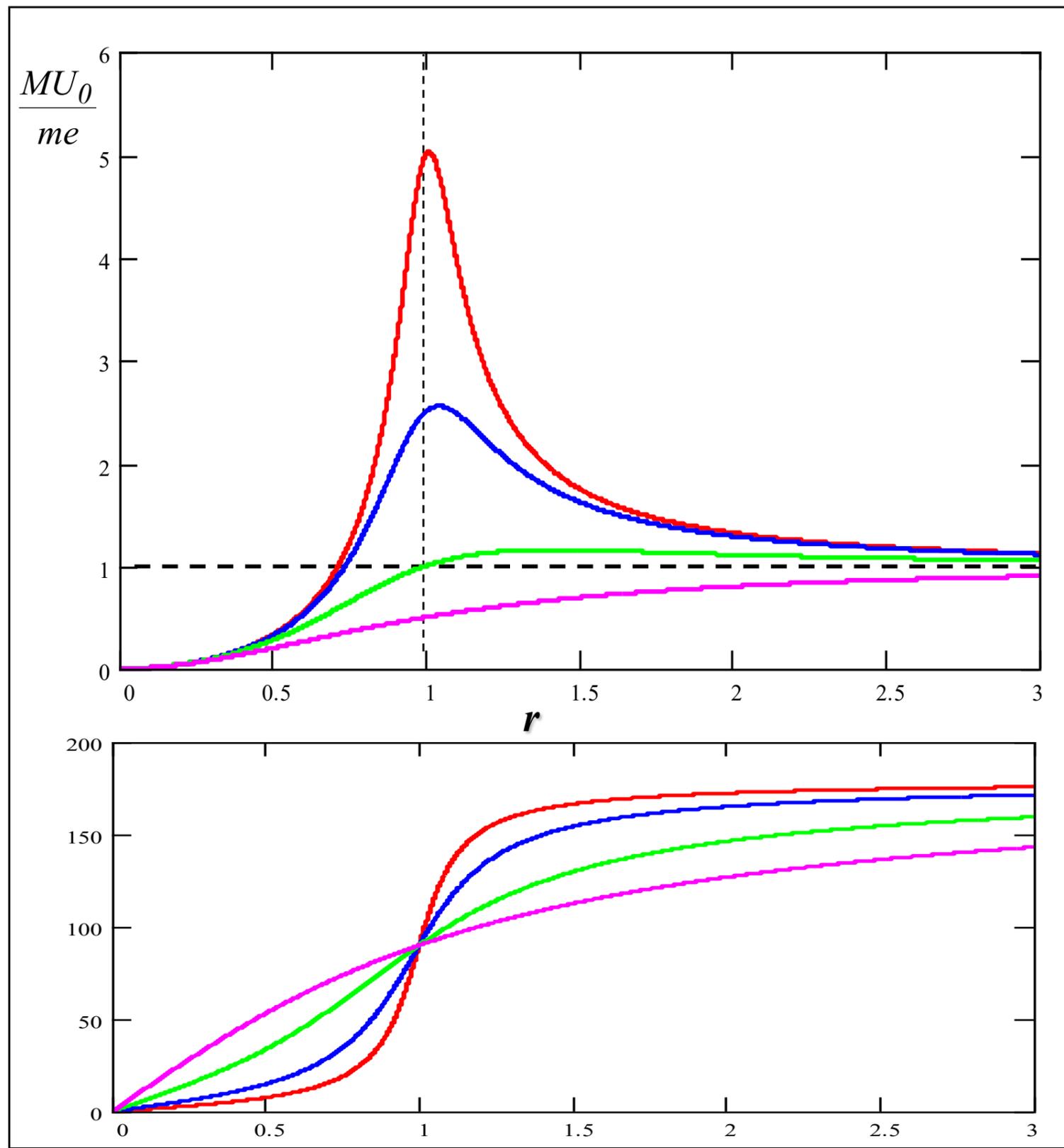
Eq. 26

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{2\zeta r}{1 - r^2}$$

Eq. 27

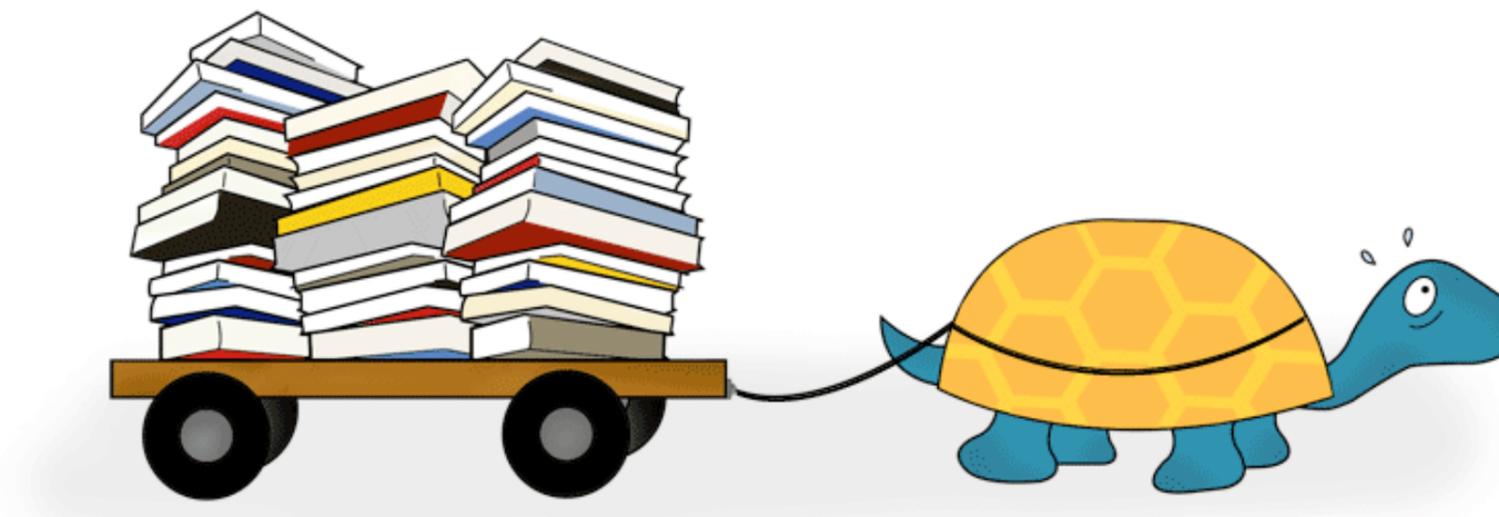
Cont. ...

Gráfico do desbalanceamento rotativo



FRUM

Bom Estudo !



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA



SEM 5940 – Dinâmica Estrutural

Revisão de Conceitos Fundamentais
Sistemas com 01 GDL
Tópicos Adicionais

O Método da Transformada de Laplace

A transformada de **Laplace** de uma função real e contínua por partes é dada por

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad t > 0$$

Eq. 1

Onde $s = \sigma + j\omega$ é denominada variável de Laplace, possuindo partes real e imaginária. O operador \mathcal{L} é denominado operador de Laplace. Algumas características desta transformada na solução de EDOs são:

- Transforma a EDO em uma equação algébrica !
- Solução completa incluindo as CIs é obtida em um único passo
- Não existe dúvida de quais CIs deveriam ser usadas, já que a transformada as requer automaticamente
- A transformada de Laplace lida com entradas não contínuas de forma mais simplificada

*Domínio do
Tempo $\Rightarrow t$*

Transformação



*Domínio de
Laplace $\Rightarrow s$*

Propriedades Importantes

- Propriedade da Linearidade

$$\mathcal{L} [a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

Eq. 2

- Diferenciação

$$\mathcal{L} \left[\frac{df}{dt} \right] = sF(s) - f(0)$$

Eq. 3

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^2 f}{dt^2} \right] = s^2 F(s) - sf(0) - \frac{df}{dt}(0)$$

Eq. 4

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^n f}{dt^n} \right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \frac{df}{dt}(0) - \dots - \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}(0)$$

Eq. 5

Cont. ...

- Integração

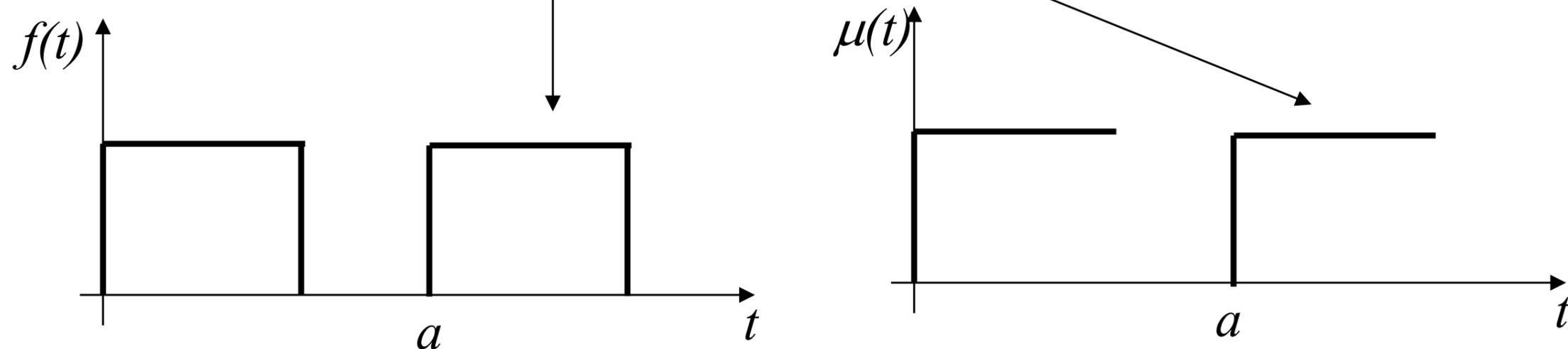
$$\mathcal{L}\left[\int f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$$

Eq. 6

- Teorema do atraso no tempo

$$\mathcal{L}\left[f(t-a)\mu(t-a)\right] = e^{-as} F(s)$$

Eq. 7



Cont. ...

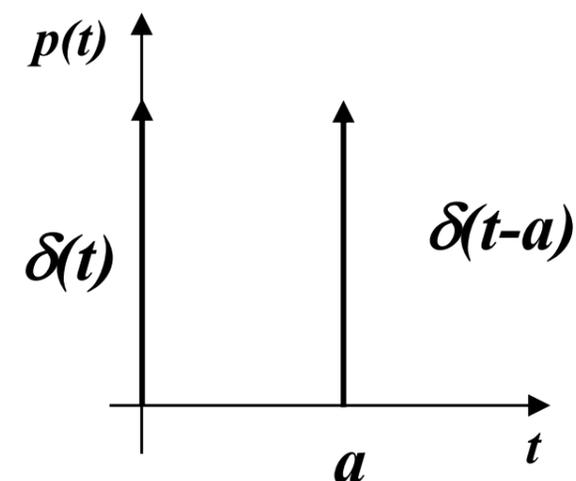
Algumas transformadas úteis são dadas abaixo

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
1	$1/s$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$	$\frac{1}{s^n}$
$\text{sen } at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$\text{cos } at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
t	$\frac{1}{s^2}$

2.15 - Resposta ao Impulso Unitário

Neste caso a excitação é dada por:

$$p(t) = \delta(t)$$



Eq. 8

A equação de movimento é então

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \left(\frac{\omega_n^2}{k}\right)\delta(t)$$

Eq. 9

Considerando um impulso unitário em $t = 0$. Assumindo condições iniciais nulas, a transformada de Laplace fica

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)U(s) = \frac{\omega_n^2}{k}$$

Eq. 10

Cont. ...

E a solução é

$$U(s) = \frac{\omega_n^2}{k} \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{Eq. 11}$$

Ou ainda

$$U(s) = \frac{\omega_n^2}{k} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad \text{Eq. 12}$$

Calculando a transformada inversa temos a solução no tempo ao impulso unitário com ***condições iniciais nulas***

$$u(t) = h(t) = \frac{\omega_n^2}{k} \left(Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \right) \quad \text{Eq. 13}$$

Cont. ...

Com

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d$$

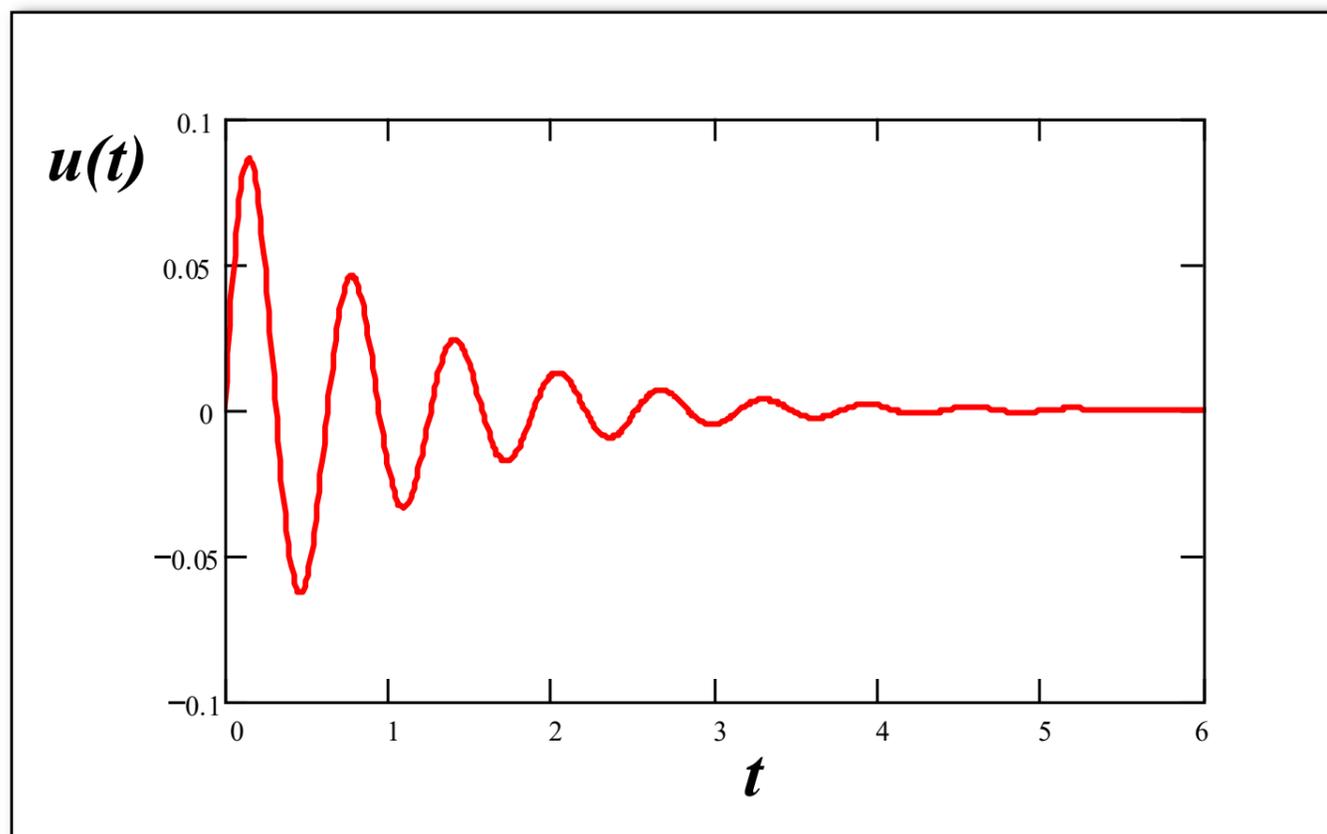
Eq. 14

$$A = \frac{1}{i2\omega_d}$$

Eq. 15

$$B = \frac{1}{-i2\omega_d}$$

Eq. 16



$$h(t) = \left(\frac{1}{m\omega_d} \right) e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen } \omega_d t$$

Eq. 17

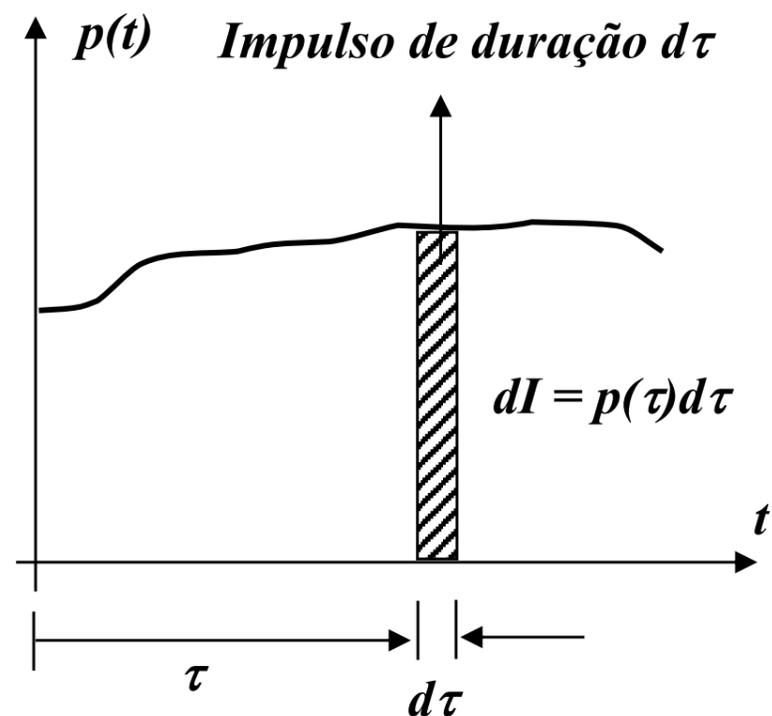
Para $\zeta = 0$

$$h(t) = \left(\frac{1}{m\omega_n} \right) \text{sen } \omega_n t$$

Eq. 18

A Integral de Duhamel

O método de obtenção da resposta baseado na Integral de Duhamel pode ser desenvolvido a partir da resposta ao impulso unitário discutida no caso anterior. Esta técnica é baseada no **princípio da superposição**, válido apenas para sistemas lineares. Veja a figura abaixo



A resposta ao impulso de duração $d\tau$ é:

$$du(t) = \left(\frac{dI}{m\omega_n} \right) \text{sen } \omega_n(t - \tau) \quad \text{Eq. 19}$$

E a resposta total será a soma de todas as respostas incrementais, ou seja:

$$u(t) = \left(\frac{I}{\omega_n} \right) \int_0^t p(\tau) \text{sen } \omega_n(t - \tau) d\tau \quad \text{Eq. 20}$$

Cont. ...

Ou simplesmente

$$u(t) = \int_0^t p(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Eq. 21

E para o sistema de 01 GDL amortecido temos

$$u(t) = \left(\frac{1}{m\omega_d} \right) \int_0^t p(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \text{sen } \omega_d(t-\tau) d\tau$$

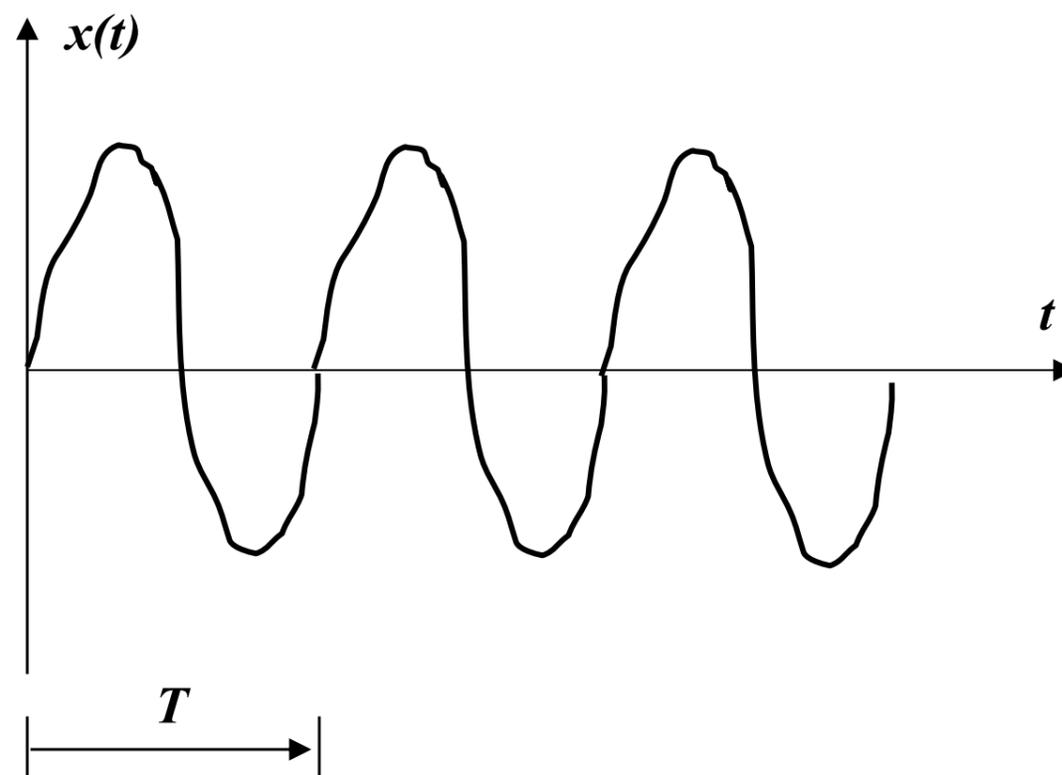
Eq. 22

Estas duas últimas expressões são denominadas *Integrais de Duhamel* sendo que a Eq. 21 é uma integral de convolução. As Eqs. 21 e 22 se prestam à obtenção da resposta do sistema de 01 GDL à entradas gerais e condições iniciais nulas.

Resposta à Excitação Periódica Geral – Séries de Fourier

Veremos uma ferramenta muito útil na obtenção da resposta forçada do sistema de 01 GDL a excitações periódicas: as *Séries de Fourier* !

Seja o sinal abaixo, periódico e de período igual a T



Frequência Fundamental:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Eq. 23

Então

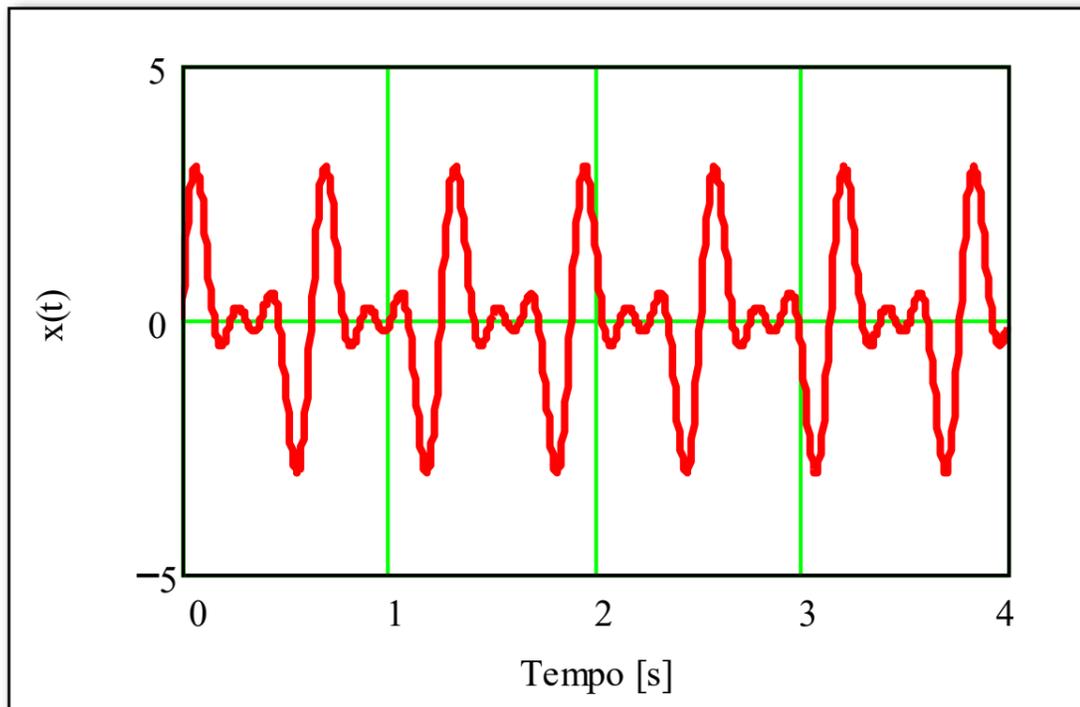
$$x(t + T) = x(t)$$

Periódico !

Eq. 24

Idéia central: compor o sinal periódico
Através de sinais conhecidos !

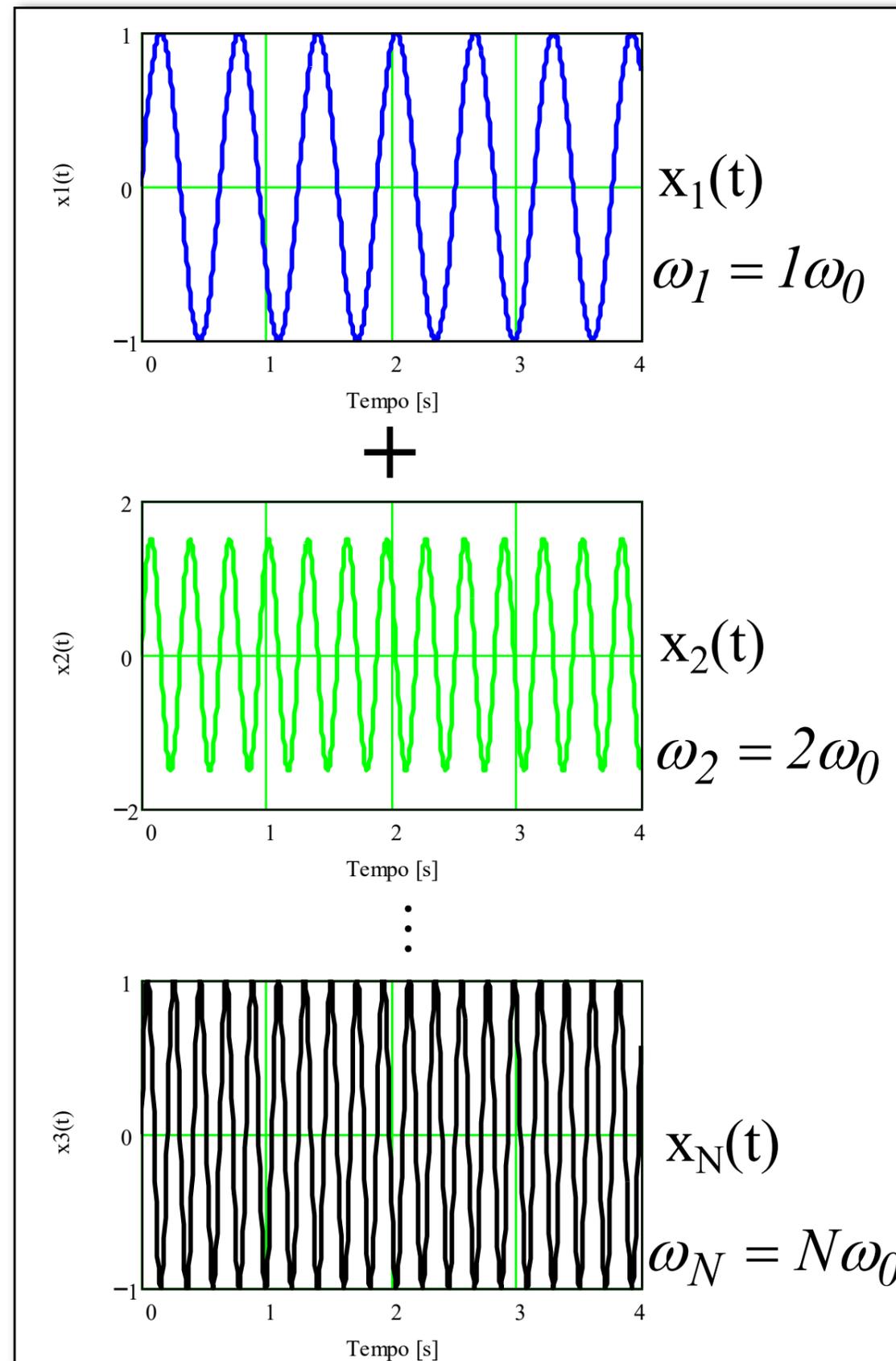
Sinal Periódico



Estes sinais conhecidos são na verdade senos e cossenos cuja frequência seja múltipla da frequência fundamental do sinal periódico !

$$x(t) \cong A_1 \text{sen}(\omega_1 t) + B_1 \text{cos}(\omega_1 t) + A_2 \text{sen}(\omega_2 t) + B_2 \text{cos}(\omega_2 t) + \dots$$

=



Harmônicas

Cont. ...

Um sinal que seja periódico e contínuo por partes, satisfazendo a Eq. 24 pode ser expandido em séries de Fourier de acordo com a seguinte expressão

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} a_p \cos(p\omega_0 t) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p \text{sen}(p\omega_0 t)$$

Eq. 25

Onde ω_0 é a frequência fundamental do sinal, conforme definido pela Eq. 23 e Os coeficientes a_0 , a_p e b_p são denominados coeficientes da série de Fourier, e são definidos de acordo com as seguintes expressões

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T_0} x(t) dt$$

Eq. 26

$$a_p = \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T_0} x(t) \cos(p\omega_0 t) dt$$

Eq. 27

$$b_p = \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T_0} x(t) \text{sen}(p\omega_0 t) dt$$

Eq. 28

Resposta do Sistema

Determinaremos agora a resposta do sistema de 01 GDL à uma entrada periódica qualquer usando as Séries de Fourier. Lembrando que

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad \text{Eq. 29}$$

Onde $p(t)$ é um sinal de força periódico geral. Realizando a expansão por Fourier e substituindo-se o resultado na Eq. 29 temos

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = \frac{p_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} a_p \cos p\omega_0 t + \sum_{p=1}^{\infty} b_p \sen p\omega_0 t \quad \text{Eq. 30}$$

A Eq. 30 é equivalente a

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = \frac{p_0}{2} \quad \text{Eq. 31}$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = a_p \cos p\omega_0 t \quad \text{Eq. 32}$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = b_p \sen p\omega_0 t \quad \text{Eq. 33}$$

Cont. ...

Já são sabidas as soluções de regime das Eqs. 31, 32 e 33

$$u_1(t) = \frac{a_0}{2k}$$

Eq. 34

$$u_2(t) = \frac{\frac{a_p}{k}}{\sqrt{(1-p^2r^2)^2 + (2\zeta pr)^2}} \cos(p\omega t - \phi_p)$$

Eq.35

$$u_3(t) = \frac{\frac{b_p}{k}}{\sqrt{(1-p^2r^2)^2 + (2\zeta pr)^2}} \text{sen}(p\omega t - \phi_p)$$

Eq. 36

Com

$$\phi_p = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta pr}{1-p^2r^2} \right)$$

Eq. 37

Cont. ...

E então a solução completa fica sendo

$$u(t) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\frac{a_p}{k}}{\sqrt{(1-p^2r^2)^2 + (2\zeta pr)^2}} \cos(p\omega t - \phi_p) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\frac{b_p}{k}}{\sqrt{(1-p^2r^2)^2 + (2\zeta pr)^2}} \text{sen}(p\omega t - \phi_p)$$

Eq. 38

Note que a Eq. 38 representa apenas a solução de regime permanente da resposta do sistema de 01 GDL. Se as condições iniciais são nulas, então a solução transiente é nula e a Eq. 38 é a resposta total do sistema.

Séries de Fourier Complexas

A base das Séries de Fourier complexas estão nas seguintes relações

$$\cos p\omega_0 t = \frac{1}{2} \left[e^{jp\omega_0 t} + e^{-jp\omega_0 t} \right] \quad \text{Eq. 39}$$

$$\text{sen } p\omega_0 t = \frac{1}{2} \left[e^{jp\omega_0 t} - e^{-jp\omega_0 t} \right] \quad \text{Eq. 40}$$

Elas são definidas pela seguinte expressão

$$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p e^{j p \omega_0 t} \quad \text{Eq. 41}$$

A Eq. 41 estabelece que ***um sinal periódico e contínuo por partes pode ser expandido como a soma de exponenciais complexas cada uma delas numa frequência múltipla inteira da frequência fundamental do sinal !***

Cont. ...

Os coeficientes X_p representam coeficientes de correlação entre o sinal $x(t)$ e as exponenciais complexas, e são dados pela integral de Fourier

$$X_p = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j p \omega_0 t} dt$$

Eq. 42

O par de equações dado pelas Eqs. 41 e 42 é freqüentemente chamado de *par de transformada de Fourier para sinais periódicos*

Na prática, quando dispõe-se de uma amostra do sinal periódico, os X_p podem ser calculados a partir da seguinte expressão

$$X_p \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} x(t_i) e^{-j \frac{2\pi p}{N} t_i} \quad p = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$$

Eq. 43

Cont. ...

Para um sinal não periódico as relações de Fourier são as seguintes

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Eq. 44

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Eq. 45

Resposta ao Impulso vs Resposta em Freqüência

Lembramos que a resposta ao impulso de um sistema de 01 GDL com Amortecimento viscoso ($\zeta < 1$) é dada por

$$h(t) = \left(\frac{1}{m\omega_d} \right) e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen } \omega_d t \quad \text{Eq. 46}$$

Usando a Eq. 78 podemos calcular a transformada de Fourier da Eq. 46

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen } \omega_d t e^{-j\omega t} dt = 1 \quad \text{Eq. 47}$$

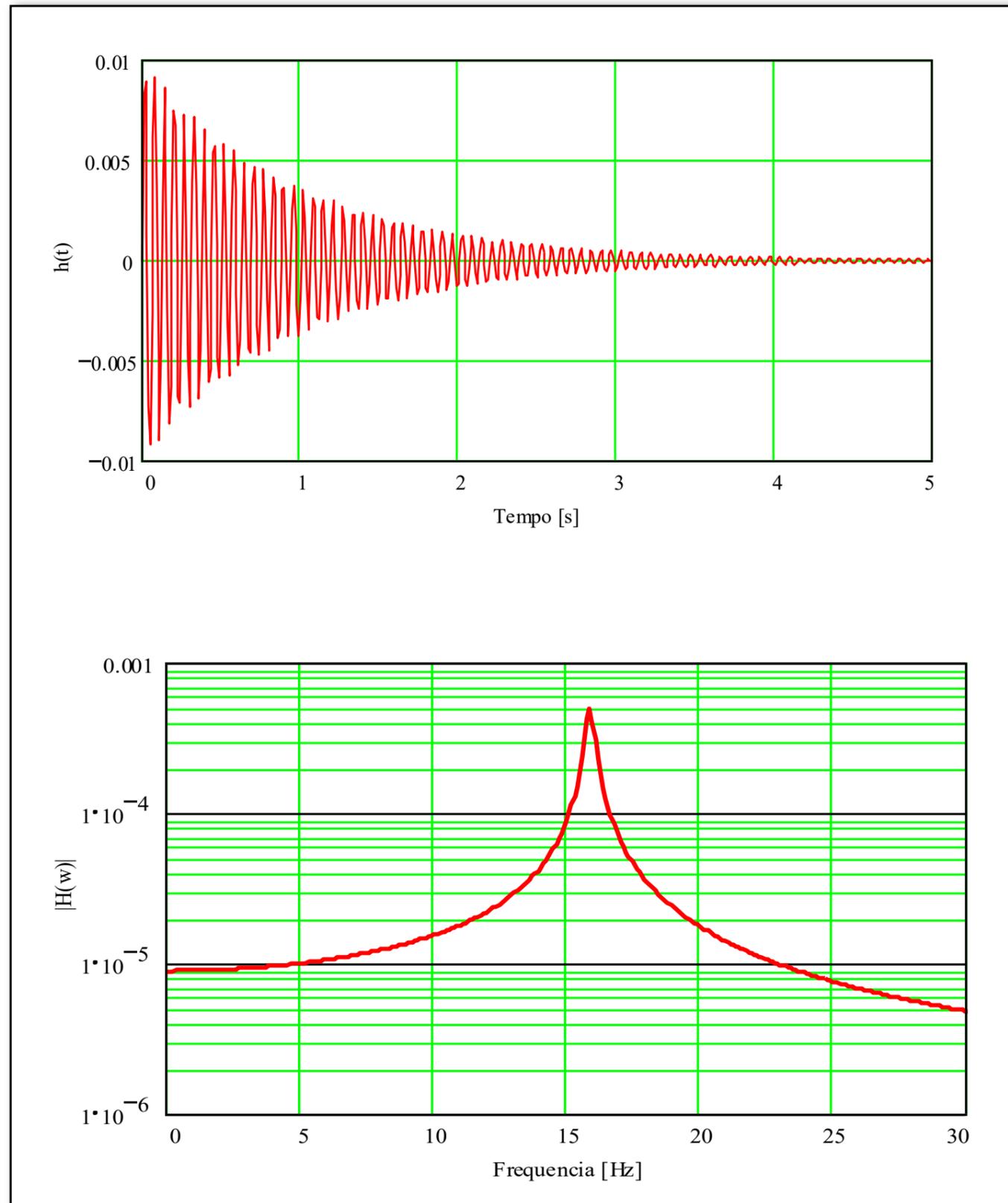
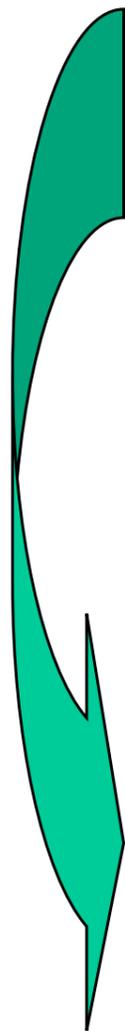
Desta forma, através das definições acima é possível concluirmos que

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{Eq. 48}$$

Ou seja, a resposta ao impulso é a transformada inversa de Fourier da resposta em Freqüência e vice-versa !

Cont. ...

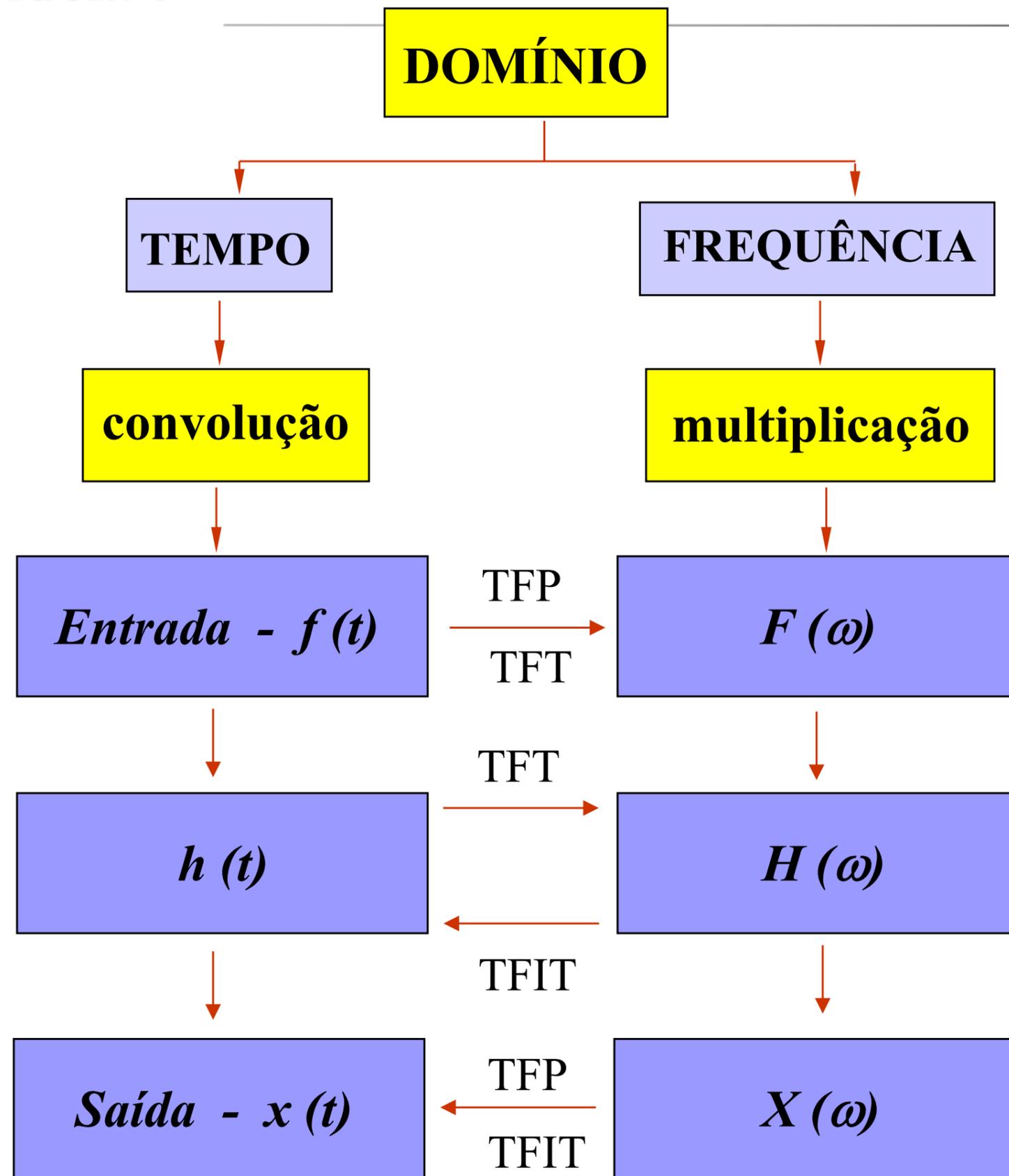
TRANSFORMADA DIRETA



TRANSFORMADA INVERSA

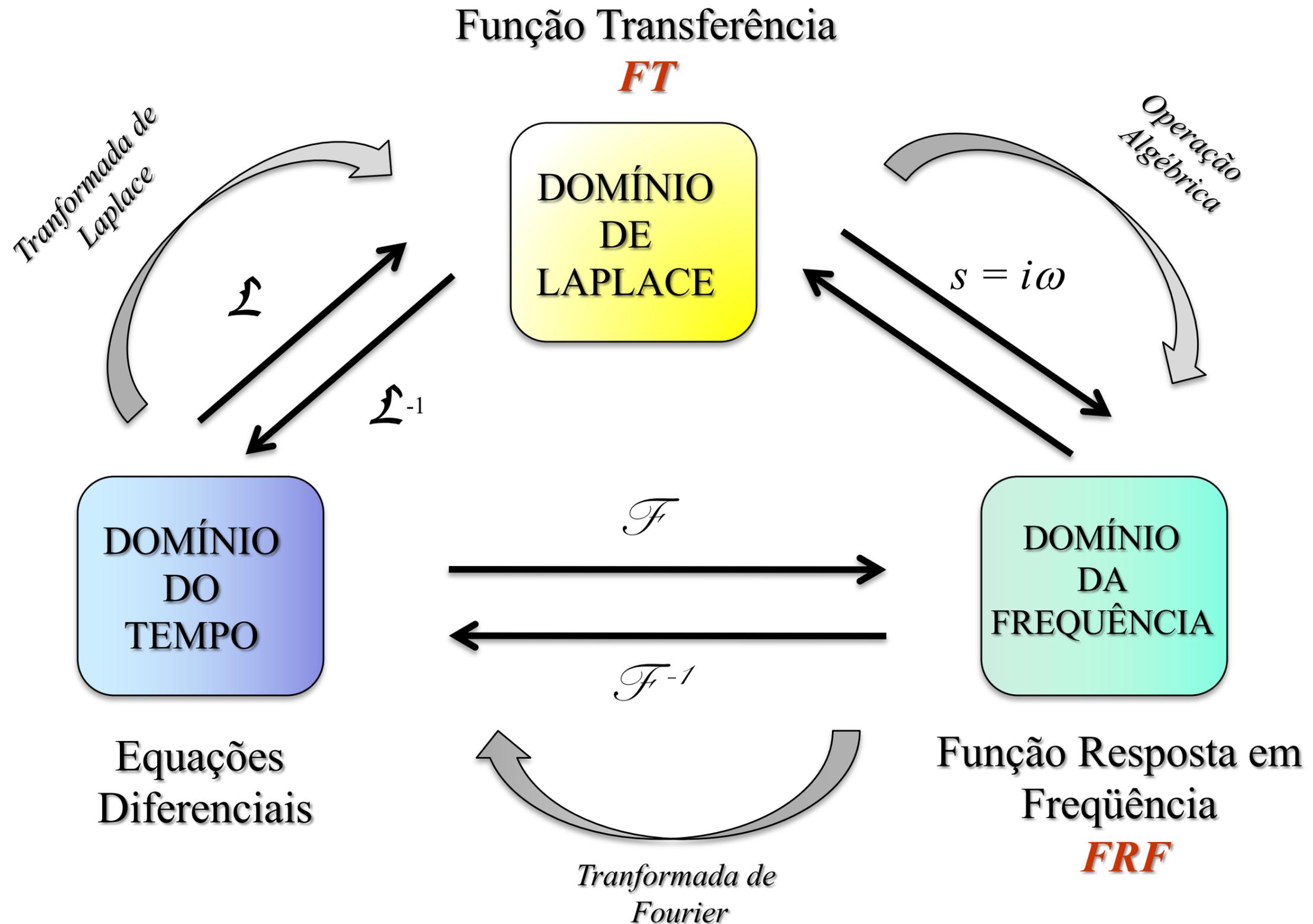


Fechando a idéia !



Cont. ...

Relação entre Domínios



FRUM

Bom Estudo !

