USP UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor Adolpho José Melfi
Vice-reitor Hélio Nogueira da Cruz

edusp EDITORA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

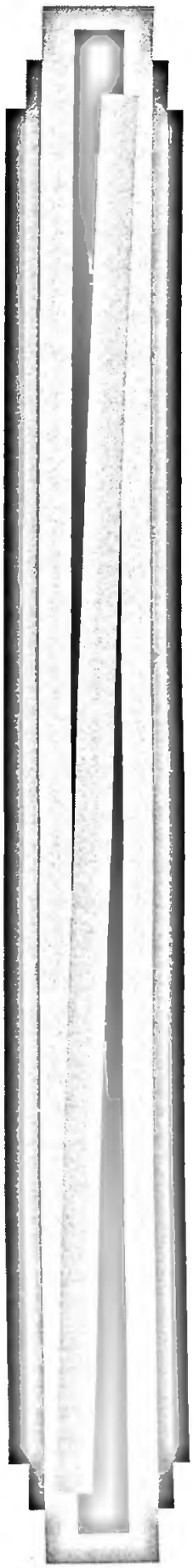
Diretor-Presidente Plinio Martins Filho

COMISSÃO EDITORIAL
Presidente José Mindlin
Vice-presidente Laura de Mello e Souza
Brasílio João Sallum Júnior
Carlos Alberto Barbosa Dantas
Carlos Augusto Monteiro
Franco Maria Lajolo
Guilherme Leite da Silva Dias
Plinio Martins Filho

Diretora Editorial Silvana Biral
Diretora Comercial Ivete Silva
Diretor Administrativo Silvio Porfirio Corado
Editor-assistente Marilena Vizentin
Carla Fernanda Fontana
Marcos Bernardini

Princípios de Eletrodinâmica Clássica

Josif Frenkel



INSTITUTO DE FÍSICA
Serviço de Biblioteca e Informação
Tombo: 44912

SBI-IFUSP

305M81044912

edusp

F879p
2.ed

Copyright © 1996 by Josif Frenkel
1ª edição 1996
2ª edição revista 2005

Dados internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Frenkel, Josif
Princípios de eletrodinâmica clássica / Josif Frenkel. – São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1996. – (Acadêmica ; 3)

Bibliografia.
ISBN 85-314-0327-8

1. Eletrodinâmica 2. Eletromagnetismo 3. Ondas eletromagnéticas I. Título II. Série.

95-5048 CDD-537.6

Índice para catálogo sistemático:
1. Eletrodinâmica : Física 537.6

Direitos reservados à

Edusp – Editora da Universidade de São Paulo
Av. Prof. Luciano Gualberto, Travessa J, 374
6º andar – Ed. da Antiga Reitoria – Cidade Universitária
05508-900 – São Paulo – SP – Brasil
Divisão Comercial: tel.: (0xx11) 3091-4008 / 3091-4150
SAC (0xx11) 3091-2911 – Fax (0xx11) 3091-4151
www.usp.br/edusp – e-mail: edusp@edu.usp.br

Printed in Brazil 2005

Foi feito depósito legal

A Marie-Luise

SUMÁRIO

Prefácio 15

1 Fundamentos de Eletromagnetismo 17
1.1 A lei de Coulomb e a superposição linear 18
1.2 Energia do campo eletrostático 23
1.3 Meios dielétricos e a polarizabilidade molecular 26
1.4 As leis de Ampère e Biot-Savart 30
1.5 Forças magnéticas 35
1.6 Materiais magnéticos e o momento magnético 37
1.7 Condições de contorno 40
Problemas 43

2 Multipolos Elétricos e Magnéticos 47
2.1 O dipolo elétrico 47
2.2 Expansão do potencial escalar em multipolos 49
2.3 Energia de uma distribuição de cargas num campo externo; o quadrupolo nuclear 53
2.4 Multipolos magnéticos 56
2.5 Torque sobre dipolos magnéticos e a precessão de Larmor 59
Problemas 61

3 Problemas de Contorno em Meios Materiais 67
3.1 Propriedades gerais das funções harmônicas 67

3.2 Equação de Laplace em coordenadas cartesianas 68
3.3 Equação de Laplace em coordenadas esféricas; polinômios de Legendre 72
3.4 Equação de Laplace em coordenadas cilíndricas; funções de Bessel 78
3.5 Equação de Poisson; o diodo elétrico 83
3.6 Meios supercondutores 86
Problemas 90

4 Equações do Campo Eletromagnético 95
4.1 A lei de Faraday 95
4.2 O efeito Zeeman 97
4.3 As leis de Maxwell 99
4.4 Potenciais do campo eletromagnético; transformações de calibre . 103
4.5 Conservação da energia no campo eletromagnético 107
4.6 Conservação do momento no campo eletromagnético 112
4.7 Massa eletromagnética 117
Problemas 119

5 Radiação por Sistemas de Cargas e Correntes 125
5.1 Potenciais retardados 125
5.2 Campos de uma fonte oscilante localizada 128
5.3 Radiação de dipolos elétricos 131
5.4 Radiação de dipolo magnético 136
5.5 Radiação de quadrupolo elétrico 139
5.6 Radiação por antenas lineares 145
Problemas 148

6 Ondas Eletromagnéticas 153
6.1 Ondas planas em meios não-condutores 153
6.2 Polarização linear e circular 157
6.3 Pressão de radiação 160
6.4 Momento angular em ondas planas 162
6.5 Ondas planas em meios condutores 165
6.6 Propagação ionosférica e o efeito Faraday 167
6.7 Propagação de ondas em fibras óticas 173
Problemas 178

7 Fenômenos Eletromagnéticos em Plasmas 183
7.1 O raio de Debye e oscilações de um plasma 184

7.2 As equações da magneto-hidrodinâmica 187
7.3 Equilíbrio dinâmico de um plasma 191
7.4 Ondas de Alfvén 194
Problemas 197

8 Potenciais de Liénard-Wiechert e os Campos de Cargas em Movimento Uniforme 203
8.1 Os potenciais de Liénard-Wiechert 203
8.2 Campos de uma carga em movimento uniforme 205
8.3 O conceito de fótons virtuais 208
8.4 O efeito Cherenkov 212
Problemas 216

9 Os Princípios da Relatividade Restrita 221
9.1 Transformações de Galileu 221
9.2 Os postulados da relatividade 223
9.3 A transformação de Lorentz 225
9.4 A massa da partícula relativística 230
9.5 O quadrivetor energia-momento 232
9.6 A conservação da energia-momento em reações de partículas 236
Problemas 239

10 Eletrodinâmica Relativística 243
10.1 Quadrivetores na eletrodinâmica 243
10.2 O tensor do campo eletromagnético 248
10.3 Propriedades de transformação do tensor do campo 251
10.4 Transformação relativística dos campos de uma carga em movimento uniforme 254
10.5 A densidade de força eletromagnética 256
10.6 Tensor de energia-momento do campo eletromagnético 258
Problemas 261

11 Movimento Relativístico de Partículas em Campos Eletromagnéticos ... 265
11.1 Derivação da força de Lorentz na teoria da relatividade 265
11.2 Movimento num campo magnético uniforme 267
11.3 Movimento em campos elétricos e magnéticos cruzados 270
11.4 Movimento de partículas em campos magnéticos não-uniformes; o confinamento de um plasma 272
11.5 Movimento relativístico de uma partícula com spin num campo eletromagnético; o momento magnético anômalo do elétron 276
Problemas 281

12 Colisões de Partículas Carregadas com a Matéria 285
12.1 Perda de energia devida à ionização 285
12.2 Espalhamento coulombiano de partículas por núcleos 289
12.3 Espalhamento múltiplo 294
12.4 Condutividade elétrica do plasma 296
Problemas 299

13 Radiação de Cargas Aceleradas 303
13.1 Os campos de radiação de uma carga puntiforme 303
13.2 Radiação por cargas com velocidade e aceleração colineares 307
13.3 Radiação por uma partícula numa órbita circular; a radiação de síncrotron 310
13.4 A fórmula de Larmor e sua generalização relativística 316
13.5 Radiação de frenagem nas colisões coulombianas 320
Problemas 322

14 Dispersão, Espalhamento e Reação da Radiação 327
14.1 Força de reação radiativa 327
14.2 Amortecimento radiativo de um oscilador harmônico 331
14.3 Oscilações forçadas 334
14.4 Espalhamento Thompson por elétrons livres 336
14.5 Espalhamento Rayleigh e o azul do céu 338
14.6 Dispersão de ondas eletromagnéticas 341
14.7 Absorção da radiação 344
14.8 Amplitude de espalhamento frontal; o teorema ótico 346
Problemas 348

15 Formulação Lagrangiana para o Campo Eletromagnético 353
15.1 Lagrangiana para uma partícula carregada num campo externo 353
15.2 Lagrangiana para um sistema contínuo 356
15.3 Lagrangiana para o campo eletromagnético 359
15.4 Invariâncias e leis de conservação 361
15.5 Hamiltoniana para o campo eletromagnético 365
Problemas 369

16 Monopolos Magnéticos e a Quantização da Carga Elétrica 373
16.1 Introdução 373
16.2 Monopolos magnéticos 374
16.3 Quantização de Dirac para a carga elétrica 378
16.4 Interação da carga magnética com a matéria 382

16.5 Monopolos magnéticos na física de partículas elementares 384
Problemas 386

Apêndice A – Fórmulas Vetoriais 391
A1 Relações vetoriais 391
A2 Relações integrais 392
A3 Relações diferenciais 393

Apêndice B – Função Delta 395

Apêndice C – Polinômios de Legendre 398

Apêndice D – Funções de Bessel 402

Bibliografia 409

Índice Remissivo 411

PREFÁCIO

Este livro é baseado num curso de pós-graduação em eletrodinâmica clássica que ministrei durante vários anos no Instituto de Física da Universidade de São Paulo. Seu objetivo básico é apresentar a teoria eletromagnética e suas aplicações no contexto da física moderna, expondo novos tópicos que geralmente não são tratados nos cursos de graduação.

Estes tôpicos incluem uma discussão da origem eletromagnética da massa, uma consideração sobre o momento magnético anômalo do elétron, um modelo simplificado da propagação de ondas em fibras óticas, uma descrição das propriedades eletromagnéticas do plasma, uma ilustração do teorema de Noether e das leis de conservação nos campos eletromagnéticos, tratamentos físicos sobre o efeito Cherenkov e a radiação de sincrotron. O texto também introduz uma discussão semiclássica sobre os monopolos magnéticos e a quantização da carga elétrica, que realça as principais idéias envolvidas.

O livro visa enfatizar os fenômenos associados à geração, propagação e interação dos campos eletromagnéticos com as várias formas de matéria. São elaborados aspectos significativos da eletrodinâmica relativística, que evidenciam a grande simetria e unidade existentes entre os campos elétricos e magnéticos. Os importantes processos de radiação que ocorrem durante o movimento das partículas carregadas são discutidos sistematicamente, destacando-se os efeitos relativísticos. Desenvolve-se em seguida a formulação lagrangiana covariante para os campos eletromagnéticos, que mostra uma conexão fundamental entre as simetrias do espaço-tempo e a conservação da energia-momento dos campos.

Os tópicos introduzidos são tratados de forma compreensiva, procurando-se expor claramente as deduções dos principais resultados. Para acompanhar todos os argumentos, supõe-se que o leitor tenha uma certa familiaridade com o material básico da eletricidade e do magnetismo. O texto é complementado por 201 problemas, propostos no final de cada capítulo, que contêm aplicações instrutivas das idéias e métodos apresentados.

Desejo agradecer aos estudantes que proporcionaram a motivação para escrever este livro, e a Hatsumi Mukai por sua valiosa assistência. Agradeço também a Fernando Brandt e Roberto Baginski pela leitura do manuscrito, e a Luise Marion pelo auxílio na preparação das figuras.

Josif Frenkel

1

FUNDAMENTOS DE ELETROMAGNETISMO

De acordo com a física contemporânea, as interações entre as partículas elementares encontradas na natureza são de quatro tipos básicos: fortes, fracas, eletromagnéticas e gravitacionais. As interações fortes e fracas têm um alcance da ordem de 10^{-13} cm, sendo imprescindível neste caso a consideração de fenômenos quânticos. Por outro lado, as interações eletromagnéticas e gravitacionais são de longo alcance, o que possibilita um estudo clássico numa ampla variedade de processos.

Estaremos interessados aqui somente na interação eletromagnética. A experiência mostra que esta força de interação depende de uma característica fundamental das partículas, denominada carga elétrica. A força de interação entre partículas de um dado tipo, como elétrons ou prótons, é sempre uma força de repulsão. A interação entre partículas de espécies diferentes tem um caráter tanto de repulsão como de atração. A convenção adotada é que os elétrons são negativamente carregados, sendo os prótons positivamente carregados. O sinal da carga de outras partículas elementares, como múons, píons ou káons, é determinado com respeito aos elétrons e prótons da seguinte maneira: partículas que têm uma carga do mesmo sinal serão repelidas, ao passo que partículas com cargas opostas serão atraídas. Na natureza, são encontradas também partículas neutras, tais como fótons e neutrinos.

Uma das características mais marcantes da carga elétrica é a sua conservação. A mais precisa evidência experimental para esta propriedade está baseada na observação da estabilidade do elétron, que implica efetivamente na conservação da carga elétrica. A razão é que o decaimento do elétron em partículas mais leves, como fótons e neutrinos, através da reação:

$$(elétron) \rightarrow (fóton) + (neutrino)$$

é proibido somente pela conservação da carga. Esta reação não viola qualquer outra lei de conservação e ocorreria se a conservação da carga fosse violada. A possibilidade do decaimento do elétron foi investigada olhando-se para a emissão espontânea de raios-X pelo átomo. Se um elétron numa camada interna do átomo desaparecesse repentinamente, um outro elétron de uma camada mais externa iria passar para o lugar deixado pelo desaparecimento do primeiro elétron. Neste processo, seria emitido um raio-X. Experiências cuidadosas realizadas entre 1975-1983 com iodo e germânio mostraram a ausência destes raios, levando à conclusão de que a vida média do elétron é certamente maior que $2 \cdot 10^{22}$ anos!

O objetivo deste capítulo é apresentar uma revisão da eletrostática e da magnetostática, de modo que este material será exposto de uma forma bastante concisa.

1.1 A LEI DE COULOMB E A SUPERPOSIÇÃO LINEAR

Um fato experimental de grande relevância mostra que a força entre duas cargas pontuais em repouso atua ao longo da reta que as une, sendo diretamente proporcional à magnitude de cada carga. Quanto à dependência da força com a distância, é usual enunciar os resultados experimentais na forma:

$$F \sim \frac{1}{r^{2+\varepsilon}} \quad , \tag{1.1}$$

onde r é a distância entre as cargas.

Em 1785, com o auxílio de uma balança de torção, Coulomb determinou que $|\varepsilon| < 0{,}02$. Cerca de 80 anos depois, usando esferas condutoras concêntricas, Maxwell reduziu a incerteza de $|\varepsilon|$ para uma parte em 20.000. Experiências realizadas na década de 1970 conseguiram alcançar um limite de $|\varepsilon|$ menor que 10^{-16}. Este resultado foi obtido através de medidas do campo magnético da terra feitas com auxílio de satélites. Paralelamente, por meio da investigação do potencial $(1/r)e^{-m_\gamma c r/\hbar}$, onde m_γ é a massa do fóton, estas experiências implicam o limite: $m_\gamma < 4 \cdot 10^{-48}$g. Como termo de comparação, lembremos que a massa do elétron é $9{,}1 \cdot 10^{-28}$g. Portanto, podemos realmente afirmar que a força entre duas cargas puntiformes em repouso é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as mesmas:

$$\mathbf{F}_{12} = C\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r \quad , \tag{1.2}$$

onde $\mathbf{F}_{12}$ representa a força exercida pela carga q_2 sobre a carga q_1, sendo $\hat{\mathbf{e}}_r$ o vetor unitário cuja direção é de q_2 para q_1. A constante C depende do sistema de unidades. Em virtude da interdependência relativística entre os campos elétricos e magnéticos, vamos adotar o sistema de unidades gaussiano, onde **E** e **B** têm as mesmas dimensões fundamentais. Neste sistema de unidades, temos que $C = 1$.
O campo elétrico é definido através da força que atua sobre uma carga teste q', que deve ser suficientemente pequena de modo a não alterar a distribuição das outras cargas que criam o campo:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q'} \quad . \tag{1.3}$$

Assim, o campo elétrico produzido por uma carga q será:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r \quad . \tag{1.4}$$

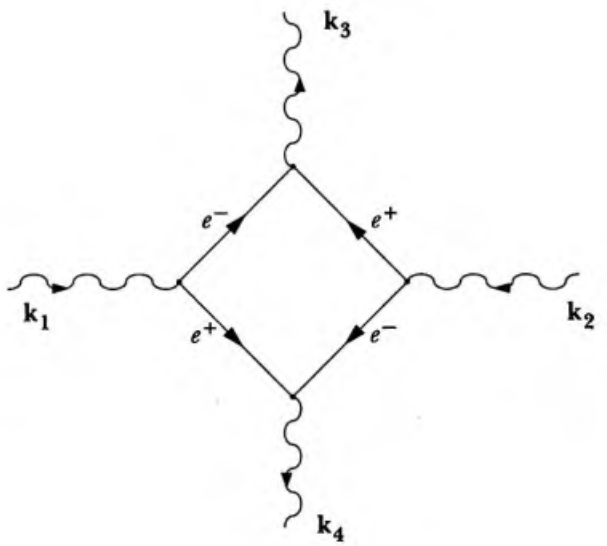


Figura 1.1

Uma propriedade muito importante das equações do campo eletromagnético é a sua linearidade, o que permite a aplicação do princípio de superposição. No nível macroscópico, uma ampla diversidade de experiências sustentam a superposição linear no nível de precisão de 0,1%. É a linearidade que permite, por exemplo, a propagação independente de centenas de ondas eletromagnéticas nas linhas de transmissão. Existe uma não-linearidade quântica devida ao princípio de incerteza. Este

possibilita a criação momentânea de pares elétron-pósitron por dois fótons e o subseqüente desaparecimento dos pares, com a emissão de dois fótons diferentes. O processo de espalhamento quântico da luz pela luz está indicado na figura 1.1.

Os dois fótons incidentes com vetores de onda $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$ criam dois pares virtuais. O elétron do primeiro par aniquila o pósitron do segundo, produzindo um fóton com vetor de onda $\mathbf{k}_3$. Por outro lado, o pósitron do primeiro par e o elétron do segundo se aniquilam, emitindo o fóton com vetor de onda $\mathbf{k}_4$. Vemos assim que as duas ondas incidentes não se propagam independentemente, mas interagem e se transformam em duas ondas emergentes com vetores de onda diferentes. Neste caso, o acoplamento de um fóton com um par elétron-pósitron é da ordem da carga do elétron, que é igual ao negativo da carga do pósitron. Assim, o desvio da linearidade será proporcional à $[e/(\hbar c)^{1/2}]^4 \approx 5{,}33 \cdot 10^{-5}$.

Voltemos agora para a equação (1.4), a partir da qual podemos verificar que o rotacional de **E** se anula:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad . \tag{1.5}$$

Visto que o rotacional do gradiente é identicamente zero, podemos escrever o campo elétrico na forma:

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi \quad , \tag{1.6}$$

onde a função Φ é denominada potencial escalar do campo eletrostático. Sendo que o campo elétrico associado com uma carga puntiforme varia como $1/r^2$, podemos aplicar a lei formulada por Gauss em 1813. Esta lei afirma que, se uma carga q for contida numa região do espaço limitada por uma superfície S, então a integral de superfície da normal de **E** será:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 4\pi q \quad . \tag{1.7}$$

Para verificar esta lei, considere o fluxo elétrico através do elemento de área $d\mathbf{a}$ na figura 1.2. Em termos do elemento de ângulo sólido $d\Omega$ subentendido por $d\mathbf{a}$, podemos escrever que:

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q}{r^2}\, \hat{\mathbf{e}}_r \cdot d\mathbf{a} = q\, d\Omega \quad .$$

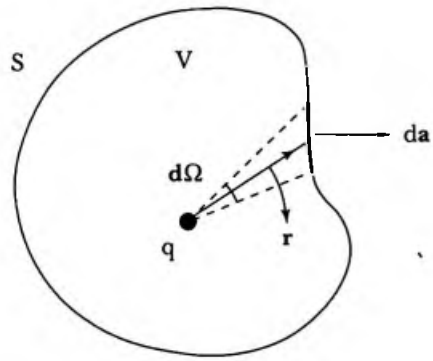


Figura 1.2

Integrando este resultado sobre todos os ângulos, obteremos então a relação (1.7). De acordo com o princípio de superposição, a carga q nesta equação pode ser interpretada como sendo a carga total dentro da superfície S. Sendo V o volume delimitado por esta superfície, e aplicando o teorema da divergência (A.11) para:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E}\, dv \quad , \tag{1.8}$$

podemos escrever a lei de Gauss na forma:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E}\, dv = 4\pi q = 4\pi \int \rho\, dv$$

onde ρ representa a densidade total de carga volumétrica. Sendo esta relação válida para volumes arbitrários, obteremos assim a forma diferencial da lei de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad , \tag{1.9}$$

Usando a relação (1.6), podemos expressar a lei de Gauss em termos do potencial escalar Φ,

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho \quad , \tag{1.10}$$

que representa a equação de Poisson. Na região livre de cargas, esta equação se reduz à equação de Laplace:

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad . \tag{1.11}$$

As soluções gerais destas importantes equações serão discutidas no capítulo 3.

Comparando as formas (1.4) e (1.6), vemos que para uma carga puntiforme teremos:

$$\nabla\Phi = -\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r \quad .$$

Integrando esta equação, o potencial da carga q será:

$$\Phi = \frac{q}{r} \quad . \tag{1.12}$$

É importante observar que o potencial é definido a menos de uma constante aditiva, visto que o campo elétrico obtido do gradiente de Φ não é afetado por esta constante. Somente diferenças de potencial têm significado físico, de modo que esta constante foi omitida em (1.12).

O potencial devido a uma distribuição volumétrica de cargas pode ser obtido usando o princípio de superposição, somando-se as contribuições de todas as cargas. Sabemos que estas são múltiplas da carga do elétron, cujo módulo é dado por: $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$u.e.c. Entretanto, a descontinuidade da carga não é, em geral, importante do ponto de vista macroscópico. Por exemplo, um capacitor de 1 microfarad, cujos eletrodos têm uma diferença de potencial de 100V, contém cerca de 10^{14} elétrons em cada eletrodo. Assim, podemos considerar na prática a distribuição de carga como sendo contínua. Neste caso, vamos designar por $\mathbf{r}'$ a posição do elemento de carga, e por $\mathbf{r}$ a posição do ponto de observação P, conforme mostra a figura 1.3. Então, a quantidade r que aparece em (1.12) deverá ser substituída por $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, de maneira que o potencial de uma distribuição contínua de cargas será dado pela expressão:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dv' \quad . \tag{1.13}$$

O potencial escalar tem uma interpretação física quando consideramos o trabalho realizado sobre uma carga teste q', trazida do "infinito" para o ponto $\mathbf{r}$, na presença

de um campo elétrico **E**. Sendo que a força que age sobre a carga é $q'\mathbf{E}$, o trabalho realizado será:

$$W = -q' \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q' \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \nabla \Phi \cdot d\mathbf{l} \quad .$$

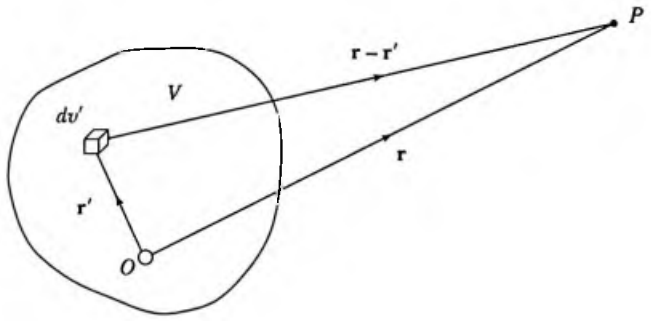


Figura 1.3

O sinal negativo aparece porque estamos calculando o trabalho feito sobre a carga contra a ação do campo elétrico. Tomando a origem do potencial no infinito, o trabalho pode ser escrito como:

$$W = q'\Phi(\mathbf{r}) \tag{1.14}$$

Deste modo, o produto do potencial pela carga pode ser interpretado como a energia potencial da carga no campo elétrico.

1.2 ENERGIA DO CAMPO ELETROSTÁTICO

Vamos calcular a energia de interação de um sistema de cargas. Para isso, seja q_1 uma carga mantida fixa num certo ponto do espaço. Uma carga q_2, que está inicialmente no infinito, é transportada para um ponto situado a uma distância r_{12} da primeira carga. De acordo com a relação (1.14), e usando para Φ a expressão dada em (1.12), o trabalho realizado para deslocar a segunda carga é igual a:

$$W_{12} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad .$$

Continuando este procedimento para um sistema de N cargas, encontramos que o trabalho realizado para trazer do infinito a N-ésima carga será:

$$W = \frac{1}{2} q_1 \left[\frac{q_2}{r_{12}} + \cdots + \frac{q_N}{r_{1N}} \right] + \frac{1}{2} q_2 \left[\frac{q_1}{r_{21}} + \cdots + \frac{q_N}{r_{2N}} \right] + \cdots \tag{1.15}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \frac{q_i q_k}{r_{ik}} \qquad (i \neq k).$$

O coeficiente 1/2 é introduzido porque, na dupla somatória, os mesmos termos que correspondem a um dado par de partículas são encontrados duas vezes. Introduzindo Φ_i, que é o potencial produzido por todas as cargas exceto a i-ésima, podemos escrever (1.15) na forma:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi_i \quad .$$

O trabalho realizado na formação desta distribuição de carga é igual à energia potencial armazenada no sistema de partículas. Assim, passando para uma distribuição contínua de cargas, teremos que:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi_i \rightarrow \frac{1}{2} \int \rho \Phi \, dv \quad . \tag{1.16}$$

Fazendo uso da equação (1.9) para expressar ρ em termos de $\mathbf{E}$, podemos escrever (1.16) na forma:

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \Phi \nabla \cdot \mathbf{E} \, dv = \frac{1}{8\pi} \left[\int \nabla \cdot (\Phi \mathbf{E}) \, dv - \int \mathbf{E} \cdot \nabla \Phi \, dv \right] =$$

$$= \int \frac{E^2}{8\pi} \, dv + \frac{1}{8\pi} \oint_S \Phi \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad .$$

A integral sobre a superfície S que tende a infinito se anula, visto que: $\Phi \sim 1/r$, $E \sim 1/r^2$, $S \sim r^2$ quando $r \rightarrow \infty$. Portanto:

$$U = \int \frac{E^2}{8\pi}\, dv \quad . \tag{1.17}$$

Esta expressão não contém qualquer referência sobre as cargas elétricas. É claro que (1.17) representa neste caso particular a energia do campo eletrostático. Isto conduz naturalmente à identificação do integrando com a densidade de energia u:

$$u = \frac{1}{8\pi} |\mathbf{E}|^2 \tag{1.18}$$

que indica que o campo é uma quantidade física, sendo que regiões com campos intensos contêm considerável energia.

Para ilustrar o conceito da energia armazenada nos campos, vamos considerar o exemplo de uma esfera uniformemente carregada. Se a esfera tem raio R e a carga Q é uniformemente distribuída através do seu volume, podemos facilmente calcular o campo elétrico fora e dentro da esfera com o auxílio da lei de Gauss, obtendo:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{r^2}\, \hat{\mathbf{r}} \qquad \text{para} \quad r \geq R \tag{1.19}$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q\, r}{R^3}\, \hat{\mathbf{r}} \qquad \text{para} \quad r \leq R \tag{1.20}$$

A energia no campo elétrico é:

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_{r \leq R} E^2\, dv + \frac{1}{8\pi} \int_{r \geq R} E^2\, dv = \frac{Q^2}{10R} + \frac{Q^2}{2R} = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{R} \quad . \tag{1.21}$$

Esta fórmula tem uma importante aplicação prática, podendo ser usada para calcular a energia eletrostática do núcleo atômico. Por exemplo, o núcleo de urânio tem uma carga $92e$ e um raio $7{,}4 \cdot 10^{-13}$ cm. Se considerarmos esta carga como sendo uniformemente distribuída, então:

$$U = \frac{3}{5}\frac{(92 \times 4{,}8 \cdot 10^{-10})^2}{7{,}4 \cdot 10^{-13}}\ \text{erg} = 1{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{erg} = 990\ \text{MeV} \quad .$$

A energia liberada na fissão do urânio resulta desta grande quantidade de energia armazenada no núcleo. A energia eletrostática do núcleo do urânio não fornece apenas a energia cinética dos produtos de fissão, mas compensa também o aumento da energia nuclear que ocorre durante o processo de fissão (as interações fortes no núcleo são atrativas e se opõem à fissão.) Portanto, a energia liberada nos reatores nucleares e bombas atômicas é realmente energia eletrostática.

1.3 MEIOS DIELÉTRICOS E A POLARIZABILIDADE MOLECULAR

As considerações sobre as conseqüências da lei de Coulomb apresentadas nas últimas seções são válidas somente no caso de cargas isoladas situadas no vácuo. A presença da matéria requer a modificação destas equações. Certos materiais exibem a propriedade de que seus elétrons não têm a liberdade de se moverem sob a influência de um campo elétrico aplicado. Contudo, estes materiais, chamados dielétricos, podem ser polarizados pelo campo elétrico externo. A polarização pode resultar do alinhamento de moléculas que têm uma assimetria natural na sua distribuição de carga, como, por exemplo, a molécula polar da água. Outra possibilidade resulta de uma assimetria induzida em moléculas inicialmente simétricas. Certamente, nem todas as moléculas polares estarão precisamente alinhadas pelo campo, tendo em vista que o movimento térmico tenderá a cancelar a polarização, mas uma média temporal sobre o movimento aleatório de cada molécula resultará numa polarização parcial na direção do campo aplicado. Por outro lado, a polarização induzida não é influenciada pelos efeitos da temperatura.

A polarização resultante num dado volume do meio sofrerá flutuações devidas ao movimento aleatório das moléculas polarizadas de cada tipo, para dentro ou para fora do elemento de volume. Portanto, em qualquer elemento de volume a polarização local será uma função do tempo, e num dado instante a polarização irá variar de uma região para a outra.

Em geral, estaremos interessados no valor médio da polarização no meio, considerando médias sobre regiões com dimensões lineares da ordem de 10^{-4} a 10^{-3} cm. Nestas regiões, que contêm um número enorme de moléculas, as flutuações podem ser geralmente desprezadas. Neste caso, estamos nos restringindo ao exame de fenômenos macroscópicos, sem considerar os detalhes microscópicos. As equações resultantes no processo do cálculo do valor médio são chamadas de equações macroscópicas do campo.

Então, o estado elétrico médio de um dielétrico será especificado pelo momento de dipolo **P** por unidade de volume, chamado de polarização do meio. Esta polarização produzirá uma densidade efetiva de carga volumétrica dada por:

$$\rho' = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad . \tag{1.22}$$

Para provar esta relação, imaginemos o dielétrico dividido em células pequenas de dimensão d, conforme mostra a figura 1.4.

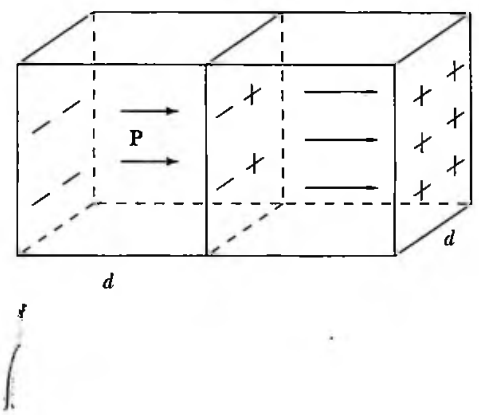


Figura 1.4

Em cada uma destas células, os dipolos moleculares produzirão nas faces uma carga efetiva $\pm q'$ tal que: $q'd = P d^3$, o que implica na relação $q' = P d^2$. É claro que, se a polarização for uniforme, estas cargas irão se cancelar nas faces adjacentes, de maneira que, para obtermos uma carga de polarização não-nula, **P** deverá variar no espaço. Supondo por simplicidade uma variação na forma: $\mathbf{P} = \hat{\mathbf{e}}_x P_x(x)$, podemos então usar a expansão de Taylor para as contribuições oriundas das células centradas em $x = 0$ e $x = d$, obtendo

$$q'(0) = P_x(0)d^2 \quad , \quad q'(d) = \left[P_x(0) + \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} \right)_0 d \right] d^2 \quad .$$

Conseqüentemente, a densidade efetiva da carga de polarização volumétrica será:

$$\rho' = \frac{\Delta q}{d^3} = \frac{q'(0) - q'(d)}{d^3} = -\frac{\partial P_x}{\partial x} \quad .$$

Generalizando este resultado, chegamos então à relação (1.22). Sendo que a carga total de polarização é nula, aparecerá nas fronteiras do dielétrico uma densidade de carga superficial ρ'_S. Para calcular esta densidade, usaremos a condição de ser a carga total de polarização nula:

$$\int_V \rho' \, dv' + \oint_S \rho'_S \, da = 0 \quad ,$$

onde S representa a superfície do dielétrico, juntamente com a relação (1.22). Usando o teorema da divergência, obtemos:

$$-\oint_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da + \oint_S \rho'_S \, da = 0$$

Visto que a superfície S é arbitrária, resulta que a densidade superficial da carga de polarização será:

$$\rho'_S = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad . \tag{1.23}$$

Estas relações têm uma importante aplicação na determinação do campo elétrico efetivo que atua sobre uma dada molécula. Devido à polarização das moléculas adjacentes, que criam um campo elétrico interno $\mathbf{E}_i$ suplementar ao campo médio macroscópico $\mathbf{E}$, o campo molecular local será dado por $\mathbf{E} + \mathbf{E}_i$. Para determinarmos o campo interno $\mathbf{E}_i$, consideremos uma esfera em torno da molécula, suficientemente grande do ponto de vista microscópico, mas pequena do ponto de vista macroscópico, conforme indica a figura 1.5. Neste caso, a polarização pode ser considerada uniforme através do volume da esfera, de modo que $\rho' = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$. A densidade de carga superficial devida às moléculas exteriores à esfera será $\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor unitário normal à superfície da cavidade. O campo interno $\mathbf{E}_i$, no centro da esfera, é paralelo a $\mathbf{P}$, com uma magnitude dada por:

$$E_i = \int_{\text{esfera}} r^2 d\Omega \frac{(P\cos\theta)(\cos\theta)}{r^2} = \frac{4\pi}{3} P \quad .$$

Devemos agora adicionar à expressão anterior as contribuições devidas às moléculas situadas dentro da esfera. Entretanto, se a distribuição das moléculas for ao acaso, como num gás, é fácil ver que estas contribuições se cancelam. A mesma conclusão

pode ser tirada quando a distribuição for altamente simétrica, como num cristal (ver Jackson, cap.4). Portanto, nestes casos o campo efetivo local será dado por:

$$\mathbf{E}_{ef} = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P} \quad . \tag{1.24}$$

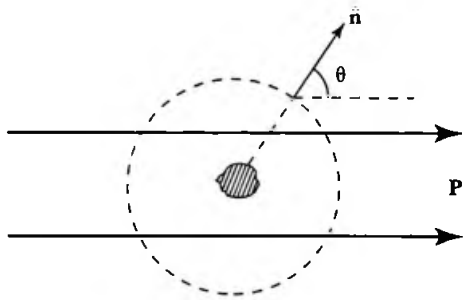


Figura 1.5

Num meio dielétrico é conveniente distinguir entre cargas livres e cargas de polarização. Denotando estas densidades por ρ e ρ' respectivamente, e lembrando que no lado direito da equação (1.9) devemos considerar a densidade total de cargas, podemos escrever a lei diferencial de Gauss como:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 4\pi\rho$$

onde usamos a equação (1.22) para relacionar ρ' com a polarização **P**. O vetor

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \tag{1.25}$$

foi denominado por Maxwell de vetor de deslocamento, numa época (1861) em que se acreditava que seus efeitos eram inteiramente devidos a deslocamentos mecânicos. Portanto, a lei de Gauss para meios dielétricos fica:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad , \tag{1.26}$$

onde ρ representa somente a densidade de carga livre.

Experimentalmente, observa-se para uma grande classe de materiais que a polarização induzida **P** é proporcional ao campo **E**, pelo menos para intensidades do campo que não são muito elevadas. Então, podemos escrever que $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$, onde χ_e é a susceptibilidade do meio. Neste caso, o vetor deslocamento terá a forma:

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\chi_e)\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E} \quad , \tag{1.27}$$

onde ε é chamada de constante dielétrica do meio.

Escrevemos a constante dielétrica como um simples fator de proporcionalidade. Entretanto, em certos materiais como cristais, encontra-se que em geral **D** e **E** não são colineares, de modo que ε é de fato um tensor. Aqui, consideraremos apenas o caso mais simples em que ε é um escalar. Se, além disso, o meio for linear e homogêneo, então ε será também independente da posição no material. Claramente, no vácuo clássico que não pode ser polarizado, temos que $\varepsilon = 1$.

1.4 AS LEIS DE AMPÈRE E BIOT-SAVART

Além da lei de Coulomb, um outro importante resultado experimental é o fato de que correntes elétricas produzem campos magnéticos. Quando uma corrente I passa através de um fio condutor, observa-se que a integral de linha do campo magnético B ao longo de uma curva fechada Γ que circunda o fio é proporcional à corrente. Esta propriedade, enunciada pela primeira vez por Ampère em 1825, pode ser escrita na forma:

$$\oint_\Gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I \quad . \tag{1.28}$$

A constante de proporcionalidade $4\pi/c$ é conseqüência da nossa decisão de adotar o sistema de unidades gaussiano. A quantidade c é a velocidade da luz no vácuo e o motivo do seu aparecimento na lei de Ampère ficará claro depois de estudarmos as propriedades de onda do campo eletromagnético.

A lei de Ampère pode ser expressa, também, numa forma diferencial, escrevendo a corrente I em termos de uma densidade de corrente **J**

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \tag{1.29}$$

onde S representa uma área aberta delimitada pela curva Γ, conforme mostra a figura 1.6.
Usando o teorema de Stokes (A.15), poderemos escrever que:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad .$$

Tendo em vista a arbitrariedade da área S, obteremos a relação:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad , \tag{1.30}$$

que é a forma diferencial da lei de Ampère. Notemos que $\mathbf{J}$ representa a densidade total de corrente e que este resultado é válido somente para correntes estacionárias onde: $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. No capítulo 4, este resultado será generalizado para o caso em que as correntes variam com o tempo.

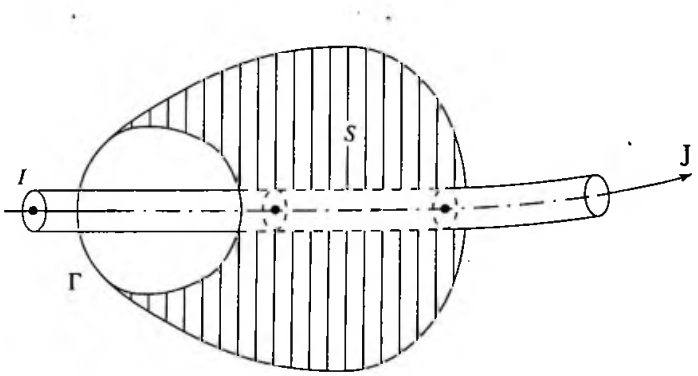


Figura 1.6

Baseados em experiências realizadas em 1820, Biot e Savart relacionaram o campo magnético com o elemento de circuito percorrido por uma corrente estacionária I, conforme indica a figura 1.7.
Em termos da geometria mostrada na figura, pode-se escrever que:

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{c} \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad . \tag{1.31}$$

Usando a relação

$$\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)=-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}=-\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \quad , \tag{1.32}$$

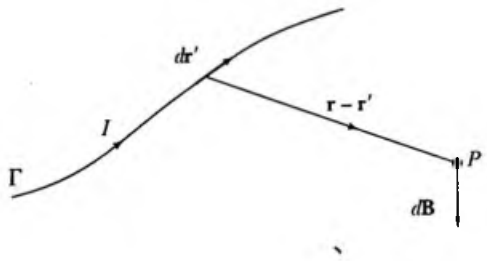


Figura 1.7

onde ∇ denota o gradiente com respeito às coordenadas $\mathbf{r}$ do ponto de observação, e integrando ao longo do circuito a relação (1.31) obtemos que:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})=-\frac{I}{c}\int d\mathbf{r}'\times\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \quad .$$

Com o auxílio da identidade vetorial (A.7)

$$\nabla\times\left(\frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)=\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla\times d\mathbf{r}'+\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\times d\mathbf{r}'$$

e, tendo em vista que o operador ∇ não atua nas coordenadas $\mathbf{r}'$, chegamos à relação:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})=\nabla\times\left(\frac{I}{c}\int\frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \quad .$$

Esta expressão pode ser generalizada para o caso de correntes volumétricas, através da substituição: $I\,d\mathbf{r}'\rightarrow\mathbf{J}\,dv'$. Então:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dv' \tag{1.33}$$

representa a forma integral da lei de Biot e Savart. Esta lei implica a lei de Ampère, da mesma maneira que a lei de Coulomb implica a lei de Gauss. Para mostrar esta importante conexão, calcularemos o rotacional de **B**, usando a identidade vetorial (A.5).

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V}$$

que é válida para um campo vetorial arbitrário. Então, sendo que o operador ∇ não atua sobre $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$, o rotacional de (1.33) fica:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\nabla \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) dv' -$$

$$- \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}')\, \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) dv' \tag{1.34}$$

Para simplificarmos esta equação, usaremos a relação (B.10):

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{1.35}$$

onde δ representa a função delta de Dirac. Quando $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$, esta função se anula e (1.35) pode ser verificada por diferenciação direta. Assim, usando também (1.32), as integrais da expressão (1.34) podem ser transformadas para:

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{1}{c}\nabla \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) dv' +$$

$$+ \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}')\, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, dv' \tag{1.36}$$

Integrando por partes a primeira integral e usando as propriedades da função delta na segunda, ficamos com:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad . \tag{1.37}$$

Mas, no caso de correntes estacionárias, $\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$, de maneira que (1.37) é completamente equivalente à forma diferencial da lei de Ampère dada pela equação (1.30).

Voltando agora à relação (1.33), podemos definir o potencial vetor **A** por:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad , \tag{1.38}$$

de modo que é possível escrever o campo magnético como:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad . \tag{1.39}$$

Tendo em vista que a divergência do rotacional se anula, vemos que:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1.40}$$

Esta relação mostra que não existem densidades macroscópicas de cargas magnéticas livres que possam gerar o campo magnético **B**. Conforme veremos no capítulo 16, este resultado não exclui a possibilidade da existência de estados ligados de monopolos-antimonopolos magnéticos, em regiões do espaço com dimensões microscópicas.

Nos próximos capítulos, o potencial vetor **A** será de muita utilidade em diversas aplicações que envolvam cargas e correntes. Aqui vamos apenas observar que, para uma carga puntiforme q que se move com uma velocidade **v** no ponto $\mathbf{r}_0$, a densidade de corrente equivalente é:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)\mathbf{v} = q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)\mathbf{v} \quad . \tag{1.41}$$

Substituindo esta relação na equação (1.38), e escolhendo por simplicidade a origem na posição instantânea da carga, obtemos:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{v}}{c}\frac{q}{r} \quad . \tag{1.42}$$

Portanto, o potencial vetor de uma partícula carregada em movimento é proporcional ao potencial da carga (1.12). Como veremos no capítulo 8, a velocidade finita de propagação dos efeitos eletromagnéticos requer a modificação apropriada das relações (1.12) e (1.42) para partículas relativísticas.

1.5 FORÇAS MAGNÉTICAS

As experiências de Ampère reportavam-se inicialmente à força que um fio percorrido por uma corrente sofria na presença de um outro circuito que produz um campo magnético. Neste caso, um elemento de corrente do fio $I_1 d\mathbf{l}_1$ na presença de um campo **B** sofre uma força:

$$d\mathbf{F} = \frac{I_1}{c}\left(d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B}\right) \quad . \tag{1.43}$$

Se o campo **B** é devido ao circuito com a corrente I_2, vemos então, usando a equação (1.31), que a força experimentada pela espira com corrente I_1 será:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2}\oint\oint \frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3} \quad , \tag{1.44}$$

onde $\mathbf{r}_{12}$ é o vetor distância do elemento de linha $d\mathbf{l}_2$ ao elemento de linha $d\mathbf{l}_1$, conforme está na figura 1.8.

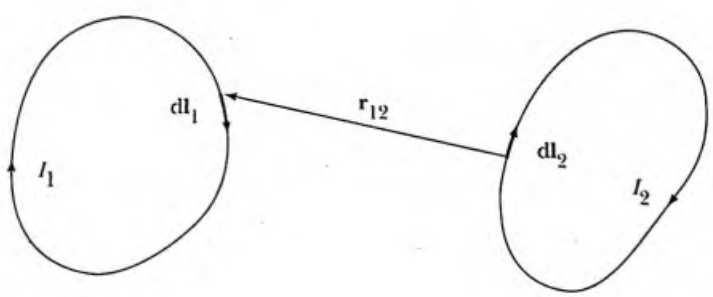


Figura 1.8

Então, a força $\mathbf{F}_{21}$ sobre a espira com corrente I_2 deverá ser obtida de (1.44) trocando os índices 1 e 2, isto é,

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint\oint \frac{d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{21})}{r_{12}^3} \,, \tag{1.45}$$

A partir da terceira lei de Newton da ação e reação, esperamos que $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$. Contudo, se somarmos (1.44) e (1.45), encontramos, usando a fórmula (A.2):

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$$

em cada integrando, que:

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint\oint \left(\frac{d\mathbf{l}_2 (d\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3} + \frac{d\mathbf{l}_1 (d\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r}_{21})}{r_{12}^3} \right) \,, \tag{1.46}$$

Os integrandos no lado direito desta equação não são obviamente zero, mas podemos mostrar que as integrais sobre os circuitos fechados se anulam. Na primeira integral por exemplo, sendo que $\mathbf{r}_{12}/r_{12}^3 = -\nabla(1/r_{12})$, a integração sobre $d\mathbf{l}_1$ dá um resultado proporcional a:

$$\oint \nabla\left(\frac{1}{r_{12}}\right) \cdot d\mathbf{l}_1 = 0$$

visto que a integral de um gradiente ao longo de um circuito fechado se anula. Vemos desta maneira que a terceira lei de Newton é satisfeita.

Em muitos tópicos que iremos discutir, será necessário considerar os efeitos de cargas isoladas em movimento. Para obtermos a expressão da força que atua sobre uma carga q, usamos a relação (1.43), onde o elemento de corrente $I_1 d\mathbf{l}_1$ pode ser considerado equivalente a $q\mathbf{v}$, o produto da carga da partícula e sua velocidade. Portanto, a força magnética sobre uma carga em movimento é:

$$\mathbf{F}_{mg} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{1.47}$$

Se a carga for também sujeita a uma força elétrica, então a força total será

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \quad . \tag{1.48}$$

Este resultado, obtido por Lorentz em 1892 a partir dos dados experimentais, vale também para campos dependentes do tempo. No capítulo 11 iremos obter esta expressão a partir da lei da força coulombiana, usando as transformações gerais da teoria da relatividade.

1.6 MATERIAIS MAGNÉTICOS E O MOMENTO MAGNÉTICO

O trabalho de Ampère mostrou que os efeitos magnéticos observados na natureza são conseqüências das correntes associadas ao movimento de cargas. Assim, numa visão elementar, podemos considerar o movimento orbital dos elétrons em átomos e moléculas como as fontes que produzem o magnetismo. Cada átomo ou molécula seria então equivalente a um pequeno dipolo magnético. Esta descrição, embora não seja adequada em detalhes, é qualitativamente correta e suficiente para o nosso propósito de determinar os campos magnéticos macroscópicos na matéria. Vamos, portanto, representar cada dipolo magnético devido a um pequeno circuito de corrente como na figura 1.9. Sendo I a corrente no circuito e $d\mathbf{a}$ o elemento

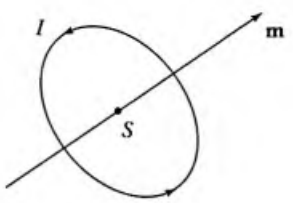


Figura 1.9

de área direcionado normalmente ao plano do circuito, o dipolo magnético é:

$$\mathbf{m} = \frac{I}{c}\int_S d\mathbf{a} = \frac{I}{c}\mathbf{S} \tag{1.49}$$

onde $\mathbf{S}$ é a área direcionada do circuito planar. Esta definição é consistente com a definição usual de dipolo elétrico, no sentido de que torques exercidos sobre dipolos em campos externos uniformes são dados por expressões análogas (veja o problema 1.11):

$$\boldsymbol{\tau}_e = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad , \quad \boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad . \tag{1.50}$$

Na matéria não-magnetizada existe uma distribuição aleatória dos dipolos magnéticos elementares, mas, se o material é colocado num campo magnético, ocorre um alinhamento parcial. O grau do alinhamento depende da natureza do meio. Existem três classes gerais de materiais: materiais paramagnéticos, onde o alinhamento está na direção do campo, mas é fraco; materiais ferromagnéticos onde o alinhamento é na direção do campo, sendo fortemente orientado, e materiais diamagnéticos onde o alinhamento é fracamente orientado no sentido oposto ao campo magnético externo. Toda matéria é intrinsecamente diamagnética, mas o diamagnetismo é sobrepujado por efeitos paramagnéticos e ferromagnéticos que ocorrem em certos materiais.

Este alinhamento produz um momento de dipolo magnético médio **M** por unidade de volume, em analogia com a polarização elétrica **P**. Podemos mostrar que os dipolos magnéticos moleculares, produzindo a magnetização **M**, equivalem a uma densidade de corrente:

$$\mathbf{J}' = c\,\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{M} \quad . \tag{1.51}$$

Para verificar isto, consideremos a componente z da magnetização resultante de dois circuitos adjacentes, conforme mostra a figura 1.10. Para obtermos uma

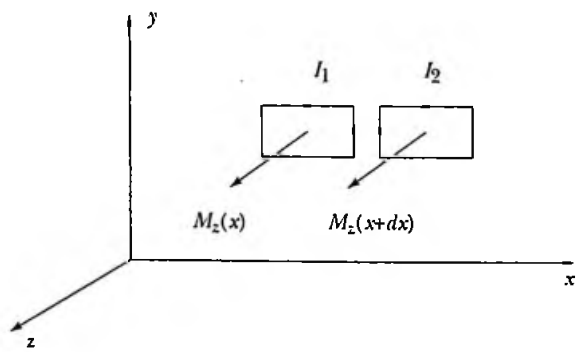


Figura 1.10

densidade de corrente equivalente não-nula, é necessário ter uma magnetização não-homogênea, de forma que o cancelamento das correntes em regiões adjacentes não seja total. Usando (1.49), o dipolo associado a um circuito será:

$$\mathbf{m} = \frac{I}{c} dx\, dy\, \hat{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{M} dx\, dy\, dz \quad .$$

Assim, teremos para o circuito 1 e 2 que:

$$I_1 = cM_z dz \quad , \quad I_2 = cM_z(x + dx)dz = c\left[M_z + \frac{\partial M_z}{\partial x} dx \right] dz \quad .$$

A diferença entre I_1 e I_2 equivale a uma corrente efetiva na direção y ao longo da região adjacente:

$$I_y = J'_y dxdz = -c \frac{\partial M_z}{\partial x} dxdz \quad .$$

Este resultado para J'_y corresponde precisamente à componente y da densidade de corrente $\mathbf{J}'$ dada pela equação (1.51).

Num material magnético é conveniente distinguir entre correntes livres e correntes de magnetização. Se denotarmos estas densidades de correntes por $\mathbf{J}$ e $\mathbf{J}'$ respectivamente, e lembrando que no lado direito da equação (1.30) devemos considerar a corrente total, podemos escrever a lei de Ampère como:

$$\nabla \times \left(\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M} \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad , \tag{1.52}$$

onde usamos a equação (1.51) para eliminar a densidade de corrente de magnetização. Em termos do vetor de intensidade magnética $\mathbf{H}$ definido por:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M} \quad , \tag{1.53}$$

podemos escrever a lei de Ampère para meios magnéticos na forma

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad . \tag{1.54}$$

Note que a densidade de corrente **J** na equação (1.54) denota somente as correntes livres, ao passo que na equação (1.30) representa todas as correntes, incluindo aquelas devidas à magnetização.

Em materiais paramagnéticos e diamagnéticos, encontra-se experimentalmente que **M** é proporcional ao campo **H** : $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$, onde χ_m é a susceptibilidade magnética. Assim:

$$\mathbf{B} = (1 + 4\pi\chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H} \quad , \tag{1.55}$$

onde μ é a permeabilidade do material. No vácuo, temos que $\mu = 1$. Materiais magnéticos lineares podem ser classificados de acordo com a sua permeabilidade: $\mu < 1$ para materiais diamagnéticos, $\mu \gtrsim 1$ em meios paramagnéticos e $\mu \gg 1$ para materiais ferromagnéticos. A simples proporcionalidade entre **B** e **H** não é válida para materiais ferromagnéticos, exceto para campos fracos. Na presença de campos intensos, devemos usar a relação $B = B(H)$ determinada experimentalmente.

1.7 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Vimos que os campos elétricos e magnéticos são influenciados pelos efeitos de polarização e magnetização. Podemos então esperar que estes campos vetoriais sofrerão mudanças na superfície entre dois materiais diferentes. Para determinar estas variações, consideremos o vetor **D** na superfície de dois meios, conforme está na figura 1.11. Vamos escolher um pequeno volume de área transversal A, cuja altura h normal à interface é muito menor que qualquer outra dimensão. Aplicando a lei de Gauss (1.26) na forma integral

$$\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = 4\pi q \quad , \tag{1.56}$$

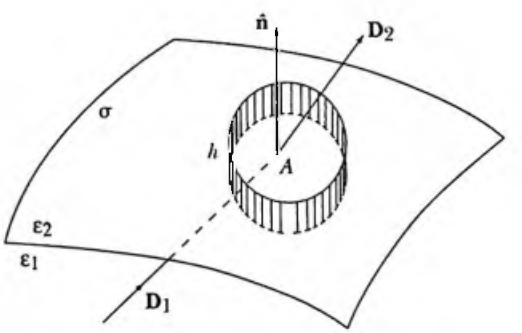


Figura 1.11

a este elemento, obteremos no limite de $h \to 0$ a relação:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 4\pi\sigma \quad , \tag{1.57}$$

onde σ é a densidade de carga livre na interface. Portanto, a variação da componente normal de **D** é proporcional a σ. O comportamento da componente tangencial de **E** pode ser obtido analisando o circuito mostrado na figura 1.12.

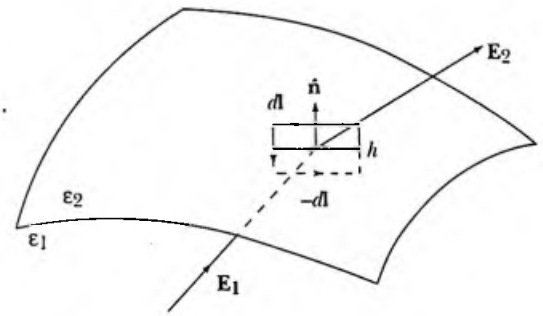


Figura 1.12

Aplicando o teorema de Stokes, temos:

$$\int_\Gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad .$$

Assim no limite em que $h \to 0$, obteremos a relação:

$$E_{2t} = E_{1t} \quad , \tag{1.58}$$

que mostra a continuidade das componentes tangenciais do campo elétrico na interface. Notemos que a relação acima pode ser escrita na forma equivalente:

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad . \tag{1.59}$$

Podemos obter as condições de contorno para o campo magnético de uma maneira análoga ao método usado para o vetor deslocamento. Como $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, teremos neste caso a relação:

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}} = 0 \quad , \tag{1.60}$$

que expressa a continuidade da componente normal de **B** na interface.

Por outro lado, em vista da equação (1.54), a componente tangencial de **H** não será, em geral, contínua. Em lugar de (1.59), obteremos que:

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)\times\hat{\mathbf{n}} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{K} \quad , \tag{1.61}$$

onde **K** é a densidade de corrente livre na interface.

Como um exemplo, consideremos o campo elétrico na superfície entre dois meios dielétricos com constantes dielétricas $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, conforme mostra a figura 1.13.

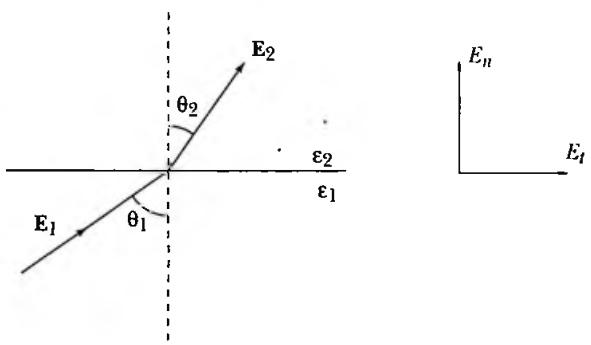


Figura 1.13

Supondo que não haja cargas livres na superfície, vamos determinar a relação entre os ângulos θ_1 e θ_2 que o campo elétrico, nos dois meios, faz com a normal à interface. Da figura, vemos que:

$$\tan\theta_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}} \quad , \quad \tan\theta_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}} \tag{1.62}$$

Por outro lado, usando a equação constitutiva (1.27), a relação (1.57) pode ser escrita, neste caso, como:

$$\varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n} \quad . \tag{1.63}$$

Dividindo (1.58) por (1.63) e usando (1.62), obtemos:

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\tan\theta_1 = \frac{1}{\varepsilon_2}\tan\theta_2 \quad . \tag{1.64}$$

Esta relação mostra que o campo elétrico aproxima-se da direção normal quando a constante dielétrica diminui. Da mesma forma, podemos mostrar que a direção do campo magnético se aproxima da normal, quando diminui a permeabilidade magnética. A propriedade acima é similar à lei de Snell, que descreve o comportamento das ondas eletromagnéticas.

PROBLEMAS

1. Suponha que o potencial de uma carga puntiforme q situada na origem tenha a forma:

$$\Phi = q\frac{e^{-Kr}}{r}$$

Determine o campo elétrico $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. É a lei de Gauss válida para este campo elétrico? Calcule então $\nabla \cdot \mathbf{E}$ e mostre que para $r \neq 0$, o potencial satisfaz a relação:

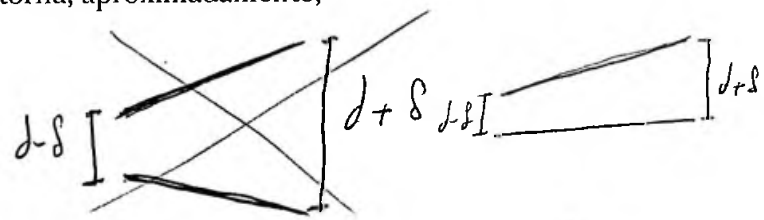
$$\nabla^2\Phi - K^2\Phi = 0$$

Este potencial é denominado potencial de Yukawa.

2. Use a lei de Gauss para calcular o campo elétrico **E** e o potencial Φ devidos a um cilindro condutor infinito de raio a, cuja carga por unidade de comprimento é λ. Como poderíamos definir neste caso o "zero" do potencial?

3. A capacitância C de um condutor é definida como a quantidade de carga que deve ser colocada no condutor para produzir uma mudança de uma unidade no potencial, isto é: $C = q/\Phi$.
Considere um capacitor formado por duas placas paralelas de área S, que estão separadas por uma distância d. Mostre que a capacitância no vácuo é: $C = S/4\pi d$. Se o alinhamento das placas for perturbado de modo que sobre uma borda a separação seja $d + \delta$ e sobre a borda oposta seja $d - \delta$, onde $\delta \ll d$, mostre que a capacitância se torna, aproximadamente,

$$C = \frac{S}{4\pi d}\left(1 + \frac{\delta^2}{3d^2}\right) .$$



4. Uma distribuição de carga com simetria esférica tem uma densidade de carga $\rho(r) = kr^{-n}$, onde k e n são constantes positivas e $0 \leq r \leq R$. Calcule a energia eletrostática desta distribuição de carga. Para que valores de n a energia é finita?

5. Calcule o campo magnético $B(z)$ sobre o eixo de uma espira circular percorrida por uma corrente I. Mostre então que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B(z)\,dz = \frac{4\pi I}{c} .$$

Explique por que este resultado está de acordo com a lei circuital de Ampère, $\oint_\Gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$, embora a integral de linha não seja sobre um caminho fechado.

6. A bobina de Helmholtz é um dispositivo usado para produzir um campo magnético altamente uniforme no laboratório. Este consiste de duas espiras circulares de raio a, encaixadas coaxialmente com separação h. Mostre que a melhor homogeneidade do campo ocorre quando h é igual a a. Mostre também que a magnitude do campo é

$$B_z = \frac{32\pi NI}{5^{3/2} ca} ,$$

onde N é o número de voltas em cada espira.

7. Calcule o campo magnético **B** ao longo do eixo de um solenóide de raio a e comprimento $L \gg a$, se este possui n voltas de fio por unidade de comprimento, no qual flui uma corrente I.

8. Uma corrente I_1 passa num circuito quadrado de lado a. No mesmo plano do circuito, a uma distância b de um dos lados, passa um fio paralelo a este lado que conduz uma corrente I_2. Calcule a força total sobre o circuito quadrado.

9. Um fio longo e reto de raio a carrega uma corrente I distribuída uniformemente através da sua seção transversal.

   a) Usando o teorema de Stokes, prove a seguinte relação entre o campo magnético **B** e o potencial vetor **A**:

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \oint_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

   onde S é uma área delimitada pela curva fechada Γ.

   (b) Usando a lei de Ampère e a relação acima, determine **B** e **A** em todos os pontos do espaço.

10. Considere uma espira quadrada de comprimento $8a$ situada no plano $x - y$ com o centro na origem. Se uma corrente I flui na espira, calcule o potencial vetor **A** em um ponto arbitrário no espaço definido pelo vetor **r**, onde $|\mathbf{r}| \gg a$.

11. Mostre que o torque sobre um dipolo elétrico colocado num campo elétrico uniforme é dado por $\boldsymbol{\tau}_e = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$, e que o torque sobre um dipolo magnético colocado num campo magnético uniforme é dado por $\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$. Mostre que não há força líquida sobre os dipolos.

12. Um eletreto é um material que possui uma polarização permanente. Considere um eletreto esférico de raio a, com o vetor de polarização **P** apontado radialmente para fora, cuja magnitude é proporcional à distância do centro da esfera: $P = P_0\, r$. Obtenha ρ', **D** e **E** em função de r.

13. O espaço entre dois cilindros coaxiais com densidade de carga $\pm\lambda$ por unidade de comprimento está preenchido com um dielétrico. Mostre que a intensidade do campo elétrico pode ser tornada independente da posição entre os cilindros, por uma escolha apropriada para a variação radial da constante dielétrica.

14. Em muitos materiais, verifica-se experimentalmente que a densidade de corrente $\mathbf{J}$ é diretamente proporcional ao campo elétrico aplicado: $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, onde σ é chamada de condutividade do material. Mostre que esta relação é equivalente à lei de Ohm: $V = RI$, onde V é a voltagem aplicada e R é a resistência do condutor.

15. Uma placa de um material paramagnético com permeabilidade μ é colocada num campo magnético uniforme $\mathbf{B}_0$ cuja direção faz um ângulo θ_0 com a normal à placa. Determine o ângulo que o campo magnético interno faz com a normal, mostrando que $\mathbf{B}_i$ se afasta da direção normal.

2

MULTIPOLOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS

Neste capítulo estudaremos a expansão dos potenciais escalar e vetor em momentos de multipolos, tendo em vista a sua importância para os fenômenos de radiação. Veremos que, no regime de cargas estáticas ou de correntes estacionárias, existe uma grande analogia entre os efeitos dos multipolos elétricos e magnéticos.

2.1 O DIPOLO ELÉTRICO

Antes de discutir a expansão geral, vamos considerar um sistema simples que contém um par de duas cargas opostas, conforme está indicado na figura 2.1. Este conjunto de cargas constitui um dipolo elétrico, cujo potencial no ponto P é dado por:

$$\Phi(r,\theta) = q\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad . \tag{2.1}$$

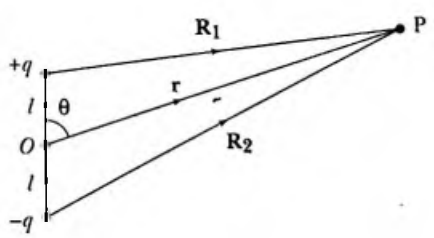


Figura 2.1

É claro que, em virtude da simetria axial, o potencial será independente do ângulo azimutal. Para distâncias tais que $r \gg l$, podemos expandir $1/R_1$ e $1/R_2$ numa série de potências em (l/r). Então, usando a lei do cosseno, obtemos uma expressão da seguinte forma:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{l}{r}\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \ldots\right]$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{l}{r}\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \ldots\right] \tag{2.2}$$

Portanto, num ponto P situado a uma grande distância comparada com a dimensão do dipolo, o potencial será:

$$\Phi(r,\theta) \simeq 2lq\frac{\cos\theta}{r^2} \quad . \tag{2.3}$$

Como era de esperar, vemos que o potencial de um dipolo decresce com a distância mais rapidamente do que aquele correspondente a uma carga. Definindo o dipolo elétrico por:

$$\mathbf{p} = (2l)q\hat{\mathbf{e}} \tag{2.4}$$

onde $\hat{\mathbf{e}}$ denota o vetor unitário cuja direção é da carga negativa para a carga positiva, podemos escrever a equação (2.3) como:

$$\Phi = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3} \quad . \tag{2.5}$$

Como um exemplo, vamos calcular o campo elétrico resultante de um dipolo $\mathbf{p}$ situado na origem. Usando a relação: $\nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{p}$, encontramos que:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^3} = \frac{1}{r^5}\left[3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}\right] \quad . \tag{2.6}$$

Uma aplicação de particular interesse é a determinação dos potenciais devidos a distribuições de dipolos em superfícies. Vamos considerar uma distribuição superficial de dipolos denotando por **d** o momento de dipolo por unidade de área, conforme mostra a figura 2.2. Usando a relação (2.5) e o princípio de superposição, obteremos para o potencial resultante a expressão:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_S \frac{\mathbf{d}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,da \quad . \tag{2.7}$$

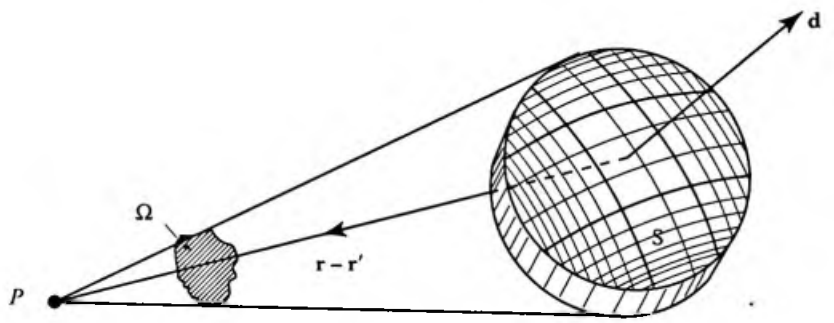


Figura 2.2

Vamos supor por simplicidade que **d** é uniforme, tendo a sua direção ao longo da normal à superfície. Em função do ângulo sólido Ω subentendido pela camada de dipolos, o potencial no ponto de observação P será então:

$$\Phi(\mathbf{r}) = d\int \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\cdot d\mathbf{a} = -d\,\Omega \quad . \tag{2.8}$$

O ângulo sólido subentendido pela superfície sofre uma descontinuidade igual a 4π quando o ponto P atravessa a superfície. Isto significa que o potencial de uma superfície de dipolos tem uma descontinuidade cuja magnitude é $4\pi\, d$.

2.2 EXPANSÃO DO POTENCIAL ESCALAR EM MULTIPOLOS

Mostraremos agora que o potencial de uma distribuição arbitrária de cargas localizada no espaço pode ser expandido a grandes distâncias como uma soma de potenciais de multipolos elétricos. Para provar isto, vamos escolher a origem das coordenadas dentro da distribuição de cargas, conforme está indicado na figura 2.3.

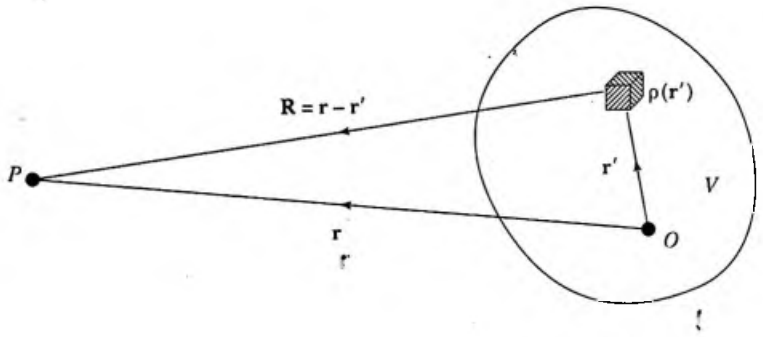


Figura 2.3

Seja **r** o vetor posição do ponto de observação em relação à origem. Supondo $a/r \ll 1$, onde a é uma dimensão característica do sistema, podemos então expandir $1/R$ em potências das componentes x'_i ($x'_1 = x'$, $x'_2 = y'$, $x'_3 = z'$) do vetor $\mathbf{r}'$ como:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \sum_i x'_i \left[\frac{\partial}{\partial x'_i}\left(\frac{1}{R}\right)\right]_{R=r} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x'_i x'_j \left[\frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j}\left(\frac{1}{R}\right)\right]_{R=r} + \ldots \quad (2.9)$$

As derivadas parciais de uma função de $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ estão relacionadas por:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x'_i}\left(\frac{1}{R}\right)\right]_{R=r} = -\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{R}\right)\right]_{R=r} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.10)$$

Assim, podemos escrever a expansão (2.9) na forma:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \sum_i x'_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right) + \ldots \quad (2.11)$$

Substituindo esta equação na expressão geral do potencial (1.13), obteremos a seguinte expansão em multipolos:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dv' = \frac{1}{r}\int_V \rho\, dv' - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right)\int_V x'_i \rho\, dv' + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right)\int_V x'_i x'_j\, \rho\, dv' + \ldots \quad (2.12)$$

Nesta expressão, as integrais representam os momentos da distribuição da carga: $\int \rho\, dv'$ é a carga total, $\int x'_i \rho\, dv'$ é a componente i do momento de dipolo. O tensor simétrico de quadrupolo:

$$D_{ij} = \int x'_i x'_j \rho\, dv' \tag{2.13}$$

tem em geral seis componentes. Estas se reduzem a três quando o sistema apresenta eixos de simetria, visto que os elementos fora da diagonal se anulam neste caso. De fato, vamos mostrar que em tais situações o potencial do quadrupolo depende somente de dois parâmetros. Com esta finalidade, vamos escrever a contribuição do terceiro termo de (2.12) na forma:

$$\Phi^{(4)} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right) D_{ij} = \frac{1}{6}\sum_{i,j}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right)\left(3D_{ij} - \delta_{ij}\sum_k D_{kk}\right)\right] \tag{2.14}$$

onde $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$. O termo extra que foi somado, envolvendo a soma dos elementos diagonais (traço) de D_{ij}, não afeta o potencial visto que:

$$\sum_{i,j} \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \qquad , \qquad (r > 0) \quad .$$

Assim, em (2.12) podemos substituir D_{ij} pelo tensor de quadrupolo Q_{ij}:

$$Q_{ij} = 3D_{ij} - \delta_{ij}\sum_k D_{kk} = \int \rho(\mathbf{r}')\left(3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2\right) dv' \quad . \tag{2.15}$$

obtendo:

$$\Phi^{(4)} = \frac{1}{6}\sum_{i,j} Q_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{6}\sum_{i,j} Q_{ij}\left(\frac{3x_i x_j - r^2\delta_{ij}}{r^5}\right) \quad . \tag{2.16}$$

Sendo que o traço de Q_{ij} se anula, vemos que o tensor de quadrupolo tem somente duas componentes independentes no sistema de eixos principais. Se a distribuição

tiver um eixo de simetria axial, digamos o eixo z, então $Q_{11} = Q_{22}$ e o potencial dependerá neste caso apenas de uma componente independente:

$$Q_{11} = Q_{22} = -\frac{1}{2}Q_{33} \quad . \tag{2.17}$$

Como um exemplo vamos considerar a figura 2.4, que mostra três cargas no eixo z: uma carga $+q$ no ponto $z' = b$, uma carga $-2q$ na origem e uma carga $+q$ em

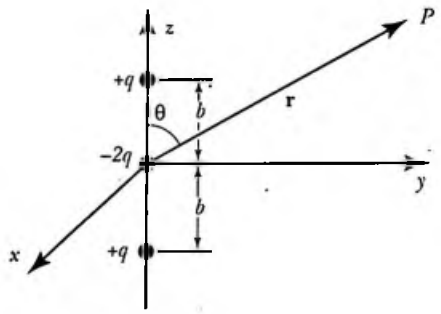


Figura 2.4

$z' = -b$. Esta distribuição tem carga total nula e um dipolo elétrico nulo. O elemento Q_{33} do tensor de quadrupolo (2.15) é:

$$Q_{33} = \int \rho(\mathbf{r}')\left(3z'^2 - r'^2\right)dv' = 2\int \rho(\mathbf{r}')z'^2\,dv' = 4qb^2 \quad .$$

Portanto, usando a relação (2.17), o tensor Q_{ij} será dado por:

$$\left(Q_{ij}\right) = \begin{pmatrix} -2qb^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2qb^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4qb^2 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.18}$$

Substituindo este resultado na relação (2.16), obteremos para o potencial de quadrupolo a expressão:

$$\Phi^{(4)} = \frac{1}{r^5}\frac{1}{2}2qb^2\left(2z^2 - x^2 - y^2\right) = \frac{2qb^2}{r^3}\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} \tag{2.19}$$

que decresce como $1/r^3$ com a distância.

2.3 ENERGIA DE UMA DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS NUM CAMPO EXTERNO; O QUADRUPOLO NUCLEAR

A energia potencial de uma coleção de cargas puntiformes q_j ($j = 1,2,...,n$), localizadas nas posições $\mathbf{r}_j$ num potencial externo, pode ser obtida a partir da relação (1.14), usando o princípio de superposição:

$$W = \sum_{i=1}^{n} q_i \Phi(\mathbf{r}_i) \quad . \tag{2.20}$$

Generalizando esta expressão para uma distribuição localizada de cargas, descrita por $\rho(\mathbf{r})$ e colocada num potencial externo $\Phi(\mathbf{r})$, obteremos que a energia eletrostática do sistema é:

$$W = \int \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})dv \quad . \tag{2.21}$$

Expandindo o potencial numa série de Taylor em torno da origem, obtemos que:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(0) + \mathbf{r}\cdot\nabla\Phi(0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j}(0) + \ldots \tag{2.22}$$

Sendo $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, podemos reescrever os últimos dois termos, e (2.22) fica:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(0) - \mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(0) - \frac{1}{2}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \ldots \tag{2.23}$$

Sendo que o campo externo não pode ter fontes nas localizações $\mathbf{r}$, visto que estas posições já estão ocupadas pelas cargas sujeitas ao campo, temos que

$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Podemos então subtrair $(1/6)\, r^2\, \nabla \cdot \mathbf{E}(0)$ do último termo, o que permite reescrever o potencial como:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(0) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} \left(3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}\right) \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \ldots \tag{2.24}$$

Substituindo este resultado em (2.21) e usando as definições de carga total, momento de dipolo e tensor de quadrupolo (2.15), a energia do sistema assume a forma:

$$W = q\Phi(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \ldots \tag{2.25}$$

Esta expressão mostra a maneira característica da interação dos multipolos com o campo externo: a carga com o potencial, o dipolo com o campo elétrico, o quadrupolo com o gradiente do campo etc.

A energia de interação de dois dipolos $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ pode ser obtida diretamente de (2.25), usando a expressão (2.6) para o campo elétrico de um dipolo. Conseqüentemente, a energia de interação será:

$$W_{12} = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{p}_1)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{p}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \tag{2.26}$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário na direção $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. A interação dipolo-dipolo é atrativa ou repulsiva, dependendo da orientação dos dipolos. Quando os momentos estão aproximadamente paralelos, a atração (repulsão) ocorre quando os momentos estão orientados mais ou menos paralelamente (perpendicularmente) à reta que une os dipolos. Para momentos antiparalelos, o inverso ocorre.

Na física nuclear, a interação de quadrupolo é de especial interesse. Os núcleos atômicos podem ter momentos de quadrupolo elétrico e seus módulos e sinais refletem a natureza das forças entre nêutrons e prótons assim como as formas dos próprios núcleos. A cada estado nuclear está associada uma densidade de carga $\rho(\mathbf{r})$ que é cilindricamente simétrica em torno do eixo z. Portanto, o tensor de quadrupolo de um estado nuclear é determinado pelo momento de quadrupolo Q_0 definido por:

$$Q_0 \equiv Q_{33} = \int \left(3z^2 - r^2\right) \rho(\mathbf{r})\, dv \quad . \tag{2.27}$$

A distribuição da carga nuclear pode ser aproximada por uma densidade de carga constante através do volume esferoidal do núcleo, com semi-eixo maior a e semi-eixo menor b. Para calcular o momento de quadrupolo de um tal núcleo com carga total Ze, notamos que a equação da superfície esferoidal pode ser expressa como:

$$\frac{s^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \tag{2.28}$$

onde $s = (x^2 + y^2)^{1/2}$ e a direção z está ao longo do semi-eixo maior. Obtemos então:

$$\begin{aligned} Q_0 &= \int_V \left(3z^2 - r^2\right) \rho \, d^3x = \int_{z=-a}^{a} \int_{s=0}^{b\sqrt{1-z^2/a^2}} \rho\left(2z^2 - s^2\right) 2\pi s \, ds \, dz \\ &= 2\pi\rho \int_{-a}^{+a} \left[z^2 b^2 \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) - \frac{1}{4} b^4 \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)^2 \right] dz \quad . \end{aligned} \tag{2.29}$$

Efetuando a integração sobre z, e usando o fato de que o volume do esferóide é $(4/3)\pi ab^2$, encontramos para o momento de quadrupolo:

$$Q_0 = \frac{8}{15} \pi\rho ab^2 \left(a^2 - b^2\right) = \frac{2}{5} Ze\left(a^2 - b^2\right) \quad . \tag{2.30}$$

Em geral, os núcleos estão sujeitos a campos elétricos que têm gradientes em suas vizinhanças. Por isso, de acordo com (2.25), a energia dos núcleos terá uma contribuição da interação de quadrupolo. A detecção destas pequenas energias, mediante técnicas de radiofreqüência, leva à determinação do momento de quadrupolo dos núcleos. Comparando então o valor experimental com o resultado (2.30), e conhecendo o raio médio $R = (a + b)/2$, é possível determinar a diferença $(a - b)$ entre os semi-eixos do núcleo.

2.4 MULTIPOLOS MAGNÉTICOS

Vamos estudar em seguida a expansão em multipolos do potencial vetor associado com correntes estacionárias. Com esta finalidade vamos considerar a expressão (1.38) do potencial vetor:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv' = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R}\,dv' \quad . \tag{2.31}$$

Procedendo de maneira análoga ao caso eletrostático, podemos expandir $(1/R)$ usando (2.11). Assim, teremos que:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{cr}\int \mathbf{J}(\mathbf{r}')\,dv' + \frac{1}{c}\sum_i \frac{x_i}{r^3}\int \mathbf{J}(\mathbf{r}')x'_i\,dv' + \ldots \tag{2.32}$$

Vamos mostrar que o primeiro termo no segundo membro se anula para correntes estacionárias. Neste caso, a relação $\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$ implica que estas correntes percorrem circuitos fechados. Então:

$$\int \mathbf{J}(\mathbf{r}')\,dv' = \sum_{circuitos} \oint_{\Gamma_j} I_j\,d\mathbf{l}'_j \quad .$$

Tendo em vista que I_j é constante para um dado circuito, podemos escrever que:

$$\int \mathbf{J}(\mathbf{r}')\,dv' = \sum_{circuitos} I_j \oint_{\Gamma_j} d\mathbf{l}'_j = 0 \tag{2.33}$$

devido ao fato de que o integrando é uma diferencial exata. A componente k do segundo termo no lado direito de (2.32) é:

$$A_k^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\sum_i \frac{x_i}{r^3}\int x'_i J_k(\mathbf{r}')\,dv' \quad . \tag{2.34}$$

O integrando pode ser reescrito usando a identidade:

$$x'_i J_k = \frac{1}{2}\left(x'_i J_k + x'_k J_i\right) + \frac{1}{2}\left(x'_i J_k - x'_k J_i\right) \tag{2.35}$$

A integral sobre o primeiro termo do lado direito da equação (2.35) se anula para correntes estacionárias. Para ver isso, considere a identidade:

$$x'_i x'_k \nabla' \cdot \mathbf{J} = \nabla' \cdot \left(x'_i x'_k \mathbf{J}\right) - \mathbf{J} \cdot \nabla'\left(x'_i x'_k\right) \quad . \tag{2.36}$$

Aplicando o teorema da divergência e sendo as correntes localizadas, temos que:

$$0 = \int \mathbf{J} \cdot \nabla'\left(x'_i x'_k\right) dv' = \int \left(x'_i J_k + x'_k J_i\right) dv' \quad . \tag{2.37}$$

O segundo termo de (2.35), vezes o fator x_i que aparece em (2.34), pode ser escrito na forma:

$$\sum_i \frac{1}{2} x_i \left(x'_i J_k - x'_k J_i\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\mathbf{r}' \times \mathbf{J}\right) \times \mathbf{r}\right]_k$$

de maneira que a equação (2.34) fica:

$$A^{(2)} = -\frac{1}{r^3}\frac{1}{2c}\mathbf{r} \times \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}\left(\mathbf{r}'\right) dv' \quad . \tag{2.38}$$

Conforme o problema (2.13), a expressão para o momento magnético que generaliza a relação (1.49) é dada por:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}\left(\mathbf{r}'\right) dv' \quad . \tag{2.39}$$

Conseqüentemente, o termo dominante na expansão em multipolos magnéticos do potencial vetor pode ser expresso em termos de **m** como:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad . \tag{2.40}$$

O campo magnético devido ao dipolo **m** pode ser calculado considerando o rotacional de (2.40). Usando a identidade vetorial (A.10), podemos escrever:

$$\nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) = (\nabla \cdot \mathbf{r})\mathbf{m} + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{m} - (\nabla \cdot \mathbf{m})\mathbf{r} - (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{r} = 2\mathbf{m}$$

tendo em vista que o operador ∇ não atua sobre **m** e que $(\mathbf{m} \cdot \nabla)\,\mathbf{r} = \mathbf{m}$. Obtemos assim:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{3\mathbf{r} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r})}{r^5} + \frac{2\mathbf{m}}{r^3} = \frac{1}{r^5}\left[3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}\right] \quad . \tag{2.41}$$

Portanto, o campo devido a um dipolo magnético tem uma forma análoga ao campo (2.6) devido a um dipolo elétrico.

Como um exemplo vamos determinar o momento de dipolo magnético devido a uma esfera de raio a, uniformemente carregada com carga q, que gira com velocidade angular ω em torno do eixo z. Usando a expressão (2.39), podemos escrever o integrando na forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' \times \mathbf{J} &= \mathbf{r}' \times \rho\,\mathbf{v} = \rho\,\mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \rho\left[r'^2\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}'\right] \\ &= \rho\,\omega\left[r'^2\hat{\mathbf{k}} - (r'\cos\theta')\mathbf{r}'\right] \\ &= \rho\,\omega\left[r'^2\hat{\mathbf{k}} - r'^2\cos^2\theta'\hat{\mathbf{k}} - r'^2\,\mathrm{sen}\,\theta'\cos\theta'\hat{\mathbf{s}}\right] \quad . \end{aligned} \tag{2.42}$$

onde $\hat{\mathbf{k}}$ e $\hat{\mathbf{s}}$ são vetores unitários, na direção paralela e perpendicular ao eixo z, respectivamente. O último termo em (2.42) se anula quando efetuamos a integração sobre o ângulo azimutal, de modo que:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{1}{2c}\rho\,\omega\hat{\mathbf{k}}\int d\Omega'\int_0^a r'^2\left(r'^2 - r'^2\cos^2\theta'\right)dr' = \\ &= \frac{1}{2c}\rho\omega\hat{\mathbf{k}}\left(\frac{4\pi a^5}{5} - \frac{2}{3}\frac{2\pi a^5}{5}\right) = \frac{qa^2\omega}{5c}\hat{\mathbf{k}} \quad . \end{aligned} \tag{2.43}$$

2.5 TORQUE SOBRE DIPOLOS MAGNÉTICOS E A PRECESSÃO DE LARMOR

Vamos mostrar, a partir da definição mais geral do momento magnético (2.39), que o torque exercido por um campo magnético uniforme continua sendo descrito pela relação (1.50). Para verificar isso, consideremos uma distribuição localizada de correntes, com a origem escolhida convenientemente, de acordo com a figura 2.3. Com a substituição $I_1\, d\mathbf{l}_1 \rightarrow \mathbf{J}\, dv'$ na força magnética (1.43) o torque magnético em torno de O será:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{c}\int \mathbf{r}' \times \left(\mathbf{J} \times \mathbf{B}\right) dv' \quad . \tag{2.44}$$

Expandindo o duplo produto vetorial, obtemos

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{c}\int \mathbf{J}\left(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{B}\right) dv' - \frac{\mathbf{B}}{c}\int \left(\mathbf{J} \cdot \mathbf{r}'\right) dv' \quad . \tag{2.45}$$

O segundo termo no lado direito desta equação se anula para correntes estacionárias. Isto pode ser visto usando a identidade (2.37), onde colocamos $i = k$ e somamos sobre os índices repetidos. A componente i do primeiro termo em (2.45) é:

$$\tau_i = \frac{1}{c}\sum_k B_k \int J_i x'_k \, dv' = \frac{1}{2c}\sum_k B_k \int \left(J_i x'_k - J_k x'_i\right) dv' \tag{2.46}$$

onde usamos novamente as relações (2.35) e (2.37). Finalmente, escrevendo:

$$\sum_k B_k \left(x'_k J_i - x'_i J_k\right) = \left[\left(\mathbf{r}' \times \mathbf{J}\right) \times \mathbf{B}\right]_i$$

obtemos, a partir de (2.39) e (2.44), que o torque exercido sobre o dipolo magnético será:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad . \tag{2.47}$$

Se as correntes que contribuem para **m** forem consideradas como resultado do movimento de densidades de carga ρ com velocidade **v**, podemos escrever que:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\int \rho(\mathbf{r}' \times \mathbf{v})\, dv' \quad . \tag{2.48}$$

Esta relação é análoga à expressão para o momento angular **L** de um sistema caracterizado por uma distribuição de massa ρ_m:

$$\mathbf{L} = \int \rho_m(\mathbf{r}' \times \mathbf{v})\, dv' \tag{2.49}$$

A razão $|\mathbf{m}|/|\mathbf{L}|$ é conhecida como a razão giromagnética Γ do sistema. Por exemplo, se este for composto de partículas clássicas de massa M e carga q, então $\Gamma = q/2Mc$. Por outro lado, se a distribuição tiver uma estrutura mais complexa, podemos escrever:

$$\mathbf{m} = \Gamma\mathbf{L} \equiv g\frac{q}{2Mc}\mathbf{L} \tag{2.50}$$

onde o fator de Landé g descreve a estrutura magnética. De um ponto de vista clássico, um fator $g \neq 1$ indica que a carga e a massa não estão igualmente distribuídas no interior do corpo girante. Por exemplo, para obter $g > 1$, devemos distribuir a carga mais perto da superfície do sistema (ver problema 2.15). É interessante notar que o momento magnético intrínseco do elétron tem um fator $g = 2{,}0023$. O afastamento deste fator em relação ao valor clássico origina-se de efeitos relativísticos e quânticos descritos pela equação de Dirac.

Substituindo a relação (2.50) em (2.47), podemos escrever que:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \Gamma\mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad . \tag{2.51}$$

Esta equação mostra que o torque magnético provoca uma mudança do momento angular que é sempre perpendicular a **L**. Portanto, a magnitude do momento angular se conserva e **L** precessa em torno de **B**. Este efeito sobre uma distribuição de carga negativa é indicado na figura 2.5.

A velocidade angular de precessão:

$$\boldsymbol{\omega}_L = \Gamma\mathbf{B} \quad , \tag{2.52}$$

prevista por Larmor em 1897, é denominada freqüência de Larmor. Este resultado para a freqüência de precessão é confirmado por um cálculo mais completo baseado na mecânica quântica.

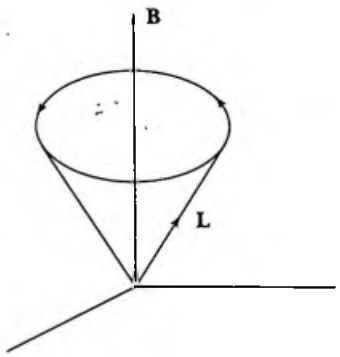


Figura 2.5

PROBLEMAS

1. Mostre que o campo elétrico de um dipolo **p**, é $2\,\mathbf{p}/z^3$ ao longo do eixo polar, enquanto que no plano equatorial é: $-\mathbf{p}/r^3$. Decompondo o momento de dipolo em duas componentes, use os resultados acima para mostrar que, em geral, o campo é:

$$\mathbf{E}(r,\theta) = \frac{p}{r^3}\left(2\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_r + \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta\right) \quad .$$

2. Mostre que o momento de dipolo de um sistema de cargas é independente da escolha da origem de coordenadas, se o sistema possui carga total nula.

3. Considere a distribuição uniforme de dipolos, tendo o momento de dipolo por unidade de área **d**, sobre um disco delgado de raio a mostrado na figura 2.6. Mostre que o potencial no ponto P é dado por:

$$\Phi(P) = -2\pi d\left(1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) \quad .$$

Qual será a expressão do potencial num ponto $\bar{P}$ situado simetricamente no lado oposto do disco?

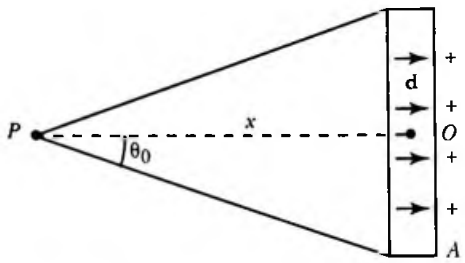


Figura 2.6

4. Considere a distribuição de cargas mostradas na figura 2.7.

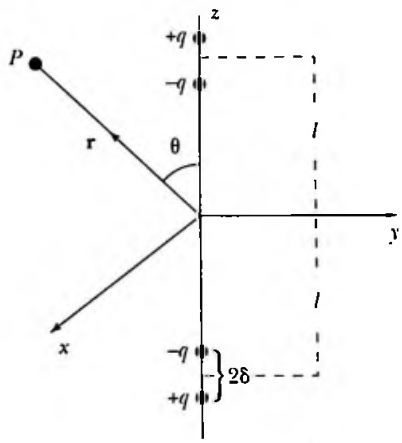


Figura 2.7

Determine o potencial de quadrupolo da distribuição. Esboce a forma de potencial no plano $z - y$, em função do ângulo θ.

5. Calcule o tensor momento de quadrupolo para a distribuição de cargas indicada na figura 2.8. Diagonalize o tensor através de uma rotação de coordenadas e encontre os momentos de quadrupolo.

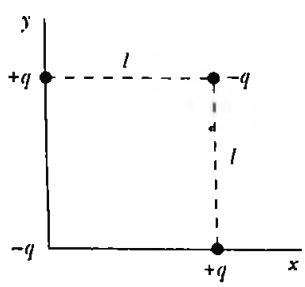


Figura 2.8

6. Obtenha o potencial de quadrupolo para a distribuição de carga mostrada na figura 2.9. Encontre a expressão para o vetor do campo elétrico e esboce algumas linhas de campo no plano $x - y$.

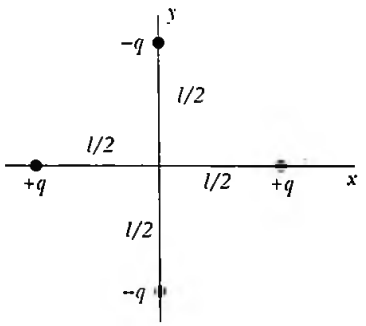


Figura 2.9

7. Uma carga q é distribuída uniformemente ao longo do eixo z, de $z = -h$ até $z = h$. Calcule os três primeiros momentos de multipolos desta distribuição.

8. Calcule o momento de dipolo e de quadrupolo de um anel de raio a, carregado uniformemente com uma carga total $+q$. Coloque então uma carga $-q$ no centro do anel e refaça os cálculos dos momentos.

9. A densidade linear de carga de um anel de raio a é dada por:

$$\rho = \rho_0(\cos\phi - \operatorname{sen} 2\phi)$$

Encontre os momentos de monopolo, dipolo e quadrupolo elétrico do sistema. Calcule o potencial em um ponto arbitrário no espaço, considerando termos até a ordem $1/r^3$.

10. Mostre que o potencial do quadrupolo dado pela expressão (2.16) pode ser escrito na forma:

$$\Phi^{(4)} = \frac{1}{2}\frac{\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \overleftrightarrow{Q} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r}{r^3}$$

onde $\overleftrightarrow{Q}$ é o tensor de quadrupolo cujos elementos são dados pela equação (2.15):

$$\left(Q_{ij}\right)=\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}$$

[compare com a equação $\Phi^{(2)} = \mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{e}}_r/r^2$ para o potencial de dipolo]. Mostre ainda que, no caso de simetria axial, o potencial pode ser escrito na forma:

$$\Phi^{(4)} = \frac{1}{2}\frac{Q_{33}}{r^3}\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right)$$

onde θ é o ângulo polar medido a partir do eixo de simetria.

11. Considere uma coleção de cargas elétricas q_i que estão em movimento arbitrário em uma certa região do espaço. Escreva o primeiro termo da expansão em multipolos do potencial vetor:

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{cr}\int \mathbf{J}(\mathbf{r}')\,dv'$$

como:

$$\mathbf{A}^{(1)} = \frac{1}{cr}\sum_i q_i\mathbf{v}_i$$

onde $\mathbf{v}_i$ é a velocidade da carga i. Calcule o valor médio de $\mathbf{A}^{(1)}$ no intervalo de tempo τ.

$$\left\langle \mathbf{A}^{(1)} \right\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \mathbf{A}^{(1)}\,dt$$

Mostre que esta quantidade tende a zero quando τ se torna muito grande, em conformidade com a relação (2.33).

12. Um elipsóide definido pela equação:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$$

tem uma carga q distribuída uniformemente através do seu volume. Determine o tensor de quadrupolo associado com o elipsóide.

13. Prove a relação:

$$\oint_\Gamma \mathbf{r}'\times d\mathbf{l}' = 2\int_S d\mathbf{a}$$

aplicando o teorema de Stokes para $\mathbf{r}'\times\mathbf{k}$, onde $\mathbf{k}$ é um vetor constante e arbitrário. Verifique o resultado explicitamente no caso de uma área plana limitada por um círculo; considere que a origem de $\mathbf{r}'$ está localizada (a) no centro do círculo e (b) em algum ponto fora do círculo.
Usando a relação acima e fazendo a substituição: $I\,d\mathbf{l}'\rightarrow \mathbf{J}(\mathbf{r}')\,dv'$, mostre que a expressão (2.39) generaliza a relação dada pela equação (1.49).

14. Considere um meio magnético caracterizado por uma magnetização $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$. A partir da relação (2.40) mostre, usando o princípio de superposição, que o potencial vetor devido a esta distribuição é dado por:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\int \mathbf{M}(\mathbf{r}')\times\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dv' = \int \mathbf{M}(\mathbf{r}')\times\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dv' \quad .$$

Tendo em vista o teorema integral (A.13):

$$\int_V \nabla\times\mathbf{F}\,dv = \oint_S \hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{F}\,da$$

onde **F** é um vetor arbitrário, mostre usando o resultado anterior que o potencial vetor pode ser escrito na forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{c\,\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv' + \frac{1}{c}\oint_S \frac{c\,\mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,da \quad .$$

Esta expressão mostra que $c\,\nabla' \times \mathbf{M}$ pode ser interpretado como a densidade volumétrica de corrente de magnetização, ao passo que $c\,\mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}}$ representa a densidade de magnetização superficial.

15. Considere uma esfera girante cuja massa é distribuída uniformemente através do seu volume. Uma carga elétrica é distribuída uniformemente sobre a superfície da esfera. Determine o fator de Landé g deste sistema.

16. Modifique apropriadamente as equações (2.49) e (2.50) para obter o momento magnético e o momento angular de um sistema discreto de partículas. Usando o centro de massa como a origem, mostre que a razão giromagnética para um sistema de duas cargas q_1 e q_2, tendo respectivamente massas iguais a m_1 e m_2, é dada por:

$$\Gamma = \frac{1}{2c}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\frac{q_1}{m_1^2} + \frac{q_2}{m_2^2}\right) \quad .$$

3

PROBLEMAS DE CONTORNO EM MEIOS MATERIAIS

Vimos no capítulo 1 que o problema geral do campo eletrostático é descrito pela equação de Poisson (1.10). Na região onde não existem cargas, esta se reduz à equação de Laplace (1.11). O operador laplaciano ocorre em vários tipos de problemas físicos, um dos mais importantes sendo a propagação de ondas. Certas funções matemáticas que ocorrem na solução das equações de onda eletromagnética são encontradas também na solução da equação de Laplace. Por este motivo, é conveniente nos familiarizarmos com estas funções harmônicas (funções de Legendre, de Bessel etc.) que aparecem em conexão com certos problemas de contorno eletrostáticos e magnetostáticos.

3.1. PROPRIEDADES GERAIS DAS FUNÇÕES HARMÔNICAS

Vamos discutir inicialmente algumas propriedades importantes das funções que satisfazem a equação de Laplace:

1. Tendo em vista a linearidade da equação, podemos aplicar o princípio de superposição. Portanto se Φ_1 e Φ_2 são soluções, a combinação linear $a\Phi_1 + b\Phi_2$ também será uma solução.
2. Se Φ é solução da equação de Laplace numa região do espaço V limitada pela área S, então esta solução será única se qualquer uma das seguintes condições for satisfeita:
   (a) o valor de Φ é especificado na superfície S; ou

(b) a derivada normal de Φ é especificada na superfície S.

Para provar a propriedade de unicidade, vamos considerar duas soluções Φ_1 e Φ_2 da equação de Laplace que satisfaçam as mesmas condições de contorno, e seja $\bar{\Phi} = \Phi_1 - \Phi_2$. Vamos mostrar que, a menos de uma constante irrelevante, $\bar{\Phi}$ se anula no volume V. Com esta finalidade, usaremos a identidade de Green (A.14):

$$\oint_S \Phi \nabla \psi \cdot d\mathbf{a} = \int_V \left[\Phi \nabla^2 \psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \psi \right] dv \quad . \tag{3.1}$$

Identificando Φ e ψ com $\bar{\Phi}$, que é solução da equação de Laplace, teremos:

$$\oint_S \bar{\Phi} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} da = \int_V \left| \nabla \bar{\Phi} \right|^2 dv \quad . \tag{3.2}$$

Por hipótese, a derivada normal $\partial\bar{\Phi}/\partial n$ ou $\bar{\Phi}$ se anulam na superfície. Sendo que $|\nabla\bar{\Phi}|^2$ é uma quantidade não-negativa, a equação (3.2) implica então que $\nabla\bar{\Phi}$ deve-se anular em toda a região. Isto só é possível se $\bar{\Phi}$ se anular, a menos de uma constante, no volume V. Esta constante é irrelevante para a determinação do campo elétrico.

3.2. EQUAÇÃO DE LAPLACE EM COORDENADAS CARTESIANAS

As equações diferenciais parciais são resolvidas convenientemente, em muitos casos, pelo método denominado de separação de variáveis. A equação de Laplace em coordenadas cartesianas é:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad . \tag{3.3}$$

Vamos procurar soluções desta equação na forma:

$$\Phi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z) \quad . \tag{3.4}$$

Inserindo este produto na equação de Laplace e dividindo o resultado por $\Phi(x,y,z)$ obtemos:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \quad . \tag{3.5}$$

Sendo que as variáveis x, y e z são independentes, as três partes da equação (3.5) devem ser, separadamente, constantes. Assim:

$$\frac{d^2X}{d^2x} = \alpha^2 X \quad , \quad \frac{d^2Y}{d^2y} = \beta^2 Y \quad , \quad \frac{d^2Z}{d^2z} = \gamma^2 Z \quad , \tag{3.6}$$

com a condição de que:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \quad . \tag{3.7}$$

Obviamente, α, β e γ não podem ser simultaneamente reais. Temos então:

$$\begin{aligned} X &= A_1 e^{\alpha x} + B_1 e^{-\alpha x} \quad , \\ Y &= A_2 e^{\beta y} + B_2 e^{-\beta y} \quad , \\ Z &= A_3 e^{\gamma z} + B_3 e^{-\gamma z} \quad . \end{aligned} \tag{3.8}$$

Neste estágio, com exceção do vínculo (3.7), α, β e γ são arbitrários. Por isso, graças à superposição linear, o produto $X(x)\ Y(y)\ Z(z)$ representa uma classe muito grande de soluções da equação de Laplace. Para determinar as constantes α, β e γ é preciso impor condições de contorno específicas sobre o potencial. Como exemplo, consideremos a caixa condutora retangular mostrada na figura 3.1. Os planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = a$ e $y = b$ são mantidos ao potencial 0. A superfície $z = c$ está a um potencial Φ_0. Queremos achar o potencial na região interior da caixa.

Começamos inserindo a condição de contorno para $x = 0$ na equação (3.8). Sendo que o potencial se anula para todos os y e z, devemos ter:

$$X(0) = A_1 + B_1 = 0 \quad . \tag{3.9.a}$$

Analogamente, usando as condições de contorno em $y = z = 0$, podemos escrever:

$$A_2 + B_2 = 0 \quad , \tag{3.9.b}$$

$$A_3 + B_3 = 0 \quad . \tag{3.9.c}$$

Indo agora para o plano $x = a$, achamos:

$$A_1 e^{\alpha a} + B_1 e^{-\alpha a} = 0 \quad . \tag{3.9.d}$$

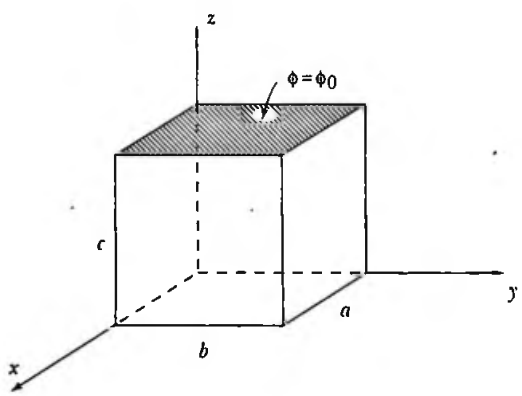


Figura 3.1

Para que as equações (3.9.a) e (3.9.d) sejam simultaneamente válidas, devemos ter que

$$e^{\alpha a} = e^{-\alpha a} \qquad \text{ou} \qquad e^{2\alpha a} = 1 \quad . \tag{3.10}$$

Para que (3.10) esteja satisfeita, é necessário que:

$$\alpha = \frac{ni\pi}{a} \quad , \tag{3.11}$$

onde n é um inteiro. Combinando estes resultados e lembrando a relação $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \operatorname{sen} \theta$, concluímos que:

$$X(x) \sim \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad . \tag{3.12}$$

Analogamente:

$$Y(y) \sim \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad , \tag{3.13}$$

onde m é também um inteiro. Para cada escolha dos inteiros m e n temos então uma possível solução:

$$\Phi_{nm} = A_{n,m} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \operatorname{senh}\left(\gamma_{nm} z\right) \tag{3.14}$$

onde

$$\gamma_{nm} = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}} \quad . \tag{3.15}$$

Estamos agora em condições de inserir a condição de contorno final para $z = c$. Temos então:

$$\Phi(x, y, c) = \Phi_0 = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} \operatorname{senh}\left(\gamma_{nm} c\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \quad . \tag{3.16}$$

Podemos encontrar os coeficientes $A_{n,m}$ por um procedimento padrão na análise de Fourier. Multiplicamos cada lado da equação (3.16) por $\operatorname{sen}(k\pi x/a) \operatorname{sen}(l\pi y/b)$, onde k e l são inteiros, e integramos o resultado sobre x e y. Lembrando que:

$$\int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{a}x\right)dx = \frac{a}{2}\delta_{nk}$$

$$\int_0^b \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{l\pi}{b}y\right)dy = \frac{b}{2}\delta_{ml} \tag{3.17}$$

temos:

$$A_{n,m} = \frac{4\Phi_0}{a\ b\ \operatorname{senh}(\gamma_{nm}c)}\int_0^a dx \int_0^b dy \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

$$= \frac{16\Phi_0}{\pi^2 mn}\frac{1}{\operatorname{senh}(\gamma_{nm}c)} \qquad \text{para } m,n \text{ ímpares} \quad , \tag{3.18}$$

e $A_{nm} = 0$ se m ou n forem pares. Portanto o potencial será

$$\Phi(x,y,z) = \frac{16\Phi_0}{\pi^2}\sum_{m,n}^{\text{ímpares}}\left(\frac{1}{mn}\right)\frac{\operatorname{senh}(\gamma_{nm}z)}{\operatorname{senh}(\gamma_{nm}c)} \times$$

$$\times \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad . \tag{3.19}$$

No caso em que a caixa retangular tem potenciais diferentes de zero em outras faces, a solução para o potencial dentro da caixa se obtém pela superposição linear de soluções equivalentes a (3.19), uma para cada lado.

3.3. EQUAÇÃO DE LAPLACE EM COORDENADAS ESFÉRICAS; POLINÔMIOS DE LEGENDRE

Neste caso, a equação de Laplace pode ser escrita na forma (A.28):

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = 0 \tag{3.20}$$

Vamos nos limitar ao estudo de situações físicas com simetria rotacional em torno do eixo z. Antes de prosseguirmos com a equação de Laplace, é conveniente fazer uma mudança de variável. Colocando $\mu = \cos\theta$, temos que

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial\mu}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\mu} = -\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\mu} \quad . \tag{3.21}$$

Substituindo isto na equação de Laplace, e lembrando que não há dependência em ϕ, ficamos com:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right] = 0 \quad . \tag{3.22}$$

Procuramos uma solução na forma do produto:

$$\Phi = F(r)P(\mu) \tag{3.23}$$

Substituindo (3.23) na equação (3.22) e dividindo o resultado por Φ obtemos da mesma maneira como antes que:

$$\frac{1}{F}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right) = -\frac{1}{P}\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{dP}{d\mu}\right] = n(n+1) \quad . \tag{3.24}$$

A constante de separação foi escrita na forma $n(n+1)$ porque isto será conveniente em seguida. Neste estágio, n é completamente arbitrário. Vamos começar examinando a equação que envolve μ, cuja solução será chamada de $P_n(\mu)$.

Procederemos para determinar $P_n(\mu)$ através da equação diferencial:

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{dP_n}{d\mu}\right] + n(n+1)P_n = 0 \quad . \tag{3.25}$$

As soluções desta equação podem ser encontradas expressando P_n como uma série infinita em potências de μ. Nos problemas físicos, a condição de a série ser convergente impõe um limite superior nas potências permitidas para μ, de modo que

a série se reduzirá a um polinômio de grau n, onde n é um inteiro positivo. Estes polinômios foram descobertos por Legendre em 1784 durante os seus estudos sobre a atração gravitacional de esferóides. No Apêndice C, mostramos que estes polinômios contêm somente potências pares de n, se n for par. Por outro lado, se n for ímpar, $P_n(\mu)$ conterá somente potências ímpares de μ. Os primeiros polinômios, normalizados de maneira que $P_n(1) = 1$, são dados por:

$$P_0(\mu) = 1 \quad ; \quad P_1(\mu) = \mu$$

$$P_2(\mu) = \frac{1}{2}\left(3\mu^2 - 1\right) \quad ; \quad P_3(\mu) = \frac{1}{2}\left(5\mu^3 - 3\mu\right) \tag{3.26}$$

No Apêndice C, é verificada a importante propriedade de ortogonalidade destas funções:

$$\int_{-1}^{1} P_n(\mu) P_{n'}(\mu)\, d\mu = \frac{2}{2n+1}\delta_{nn'} \quad . \tag{3.27}$$

Notemos agora que as funções $P_n(\mu)$ formam um conjunto completo no intervalo $-1 \leq \mu \leq 1$. Isto permite expressar a dependência em θ do potencial $\Phi(r, \mu = \cos\theta)$ (veja a equação 3.23) como uma série em $P_n(\cos\theta)$

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(r) P_n(\cos\theta) \quad . \tag{3.28}$$

Por exemplo, se o potencial for dado sobre uma superfície esférica de raio a, podemos escrever que:

$$\Phi(a, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(a) P_n(\cos\theta) \quad . \tag{3.29}$$

Multiplicando os dois lados desta equação por $P_m(\cos\theta)$, e usando a condição de ortogonalidade (3.27), vemos que as funções $F_n(a)$ serão dadas por:

$$F_n(a) = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} \Phi(a,\theta)\, P_n(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta \quad . \tag{3.30}$$

Para completar a nossa especificação da solução da equação de Laplace em coordenadas esféricas, devemos resolver a equação radial (veja a equação 3.24):

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dF_n}{dr}\right) - n(n+1)F_n = 0 \quad . \tag{3.31}$$

Pode ser facilmente verificado que, para um dado valor de n, a solução da equação (3.31) é:

$$F_n(r) = A_n\, r^n + B_n\, r^{-(n+1)} \quad . \tag{3.32}$$

Portanto, podemos escrever o potencial (3.28) na forma:

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\, r^n + B_n\, r^{-(n+1)}\right] P_n(\cos\theta) \quad . \tag{3.33}$$

Como uma ilustração de um potencial com simetria azimutal, consideremos uma esfera dielétrica neutra de raio a, colocada num campo elétrico inicialmente uniforme $\mathbf{E}_0$, conforme mostra a figura 3.2.

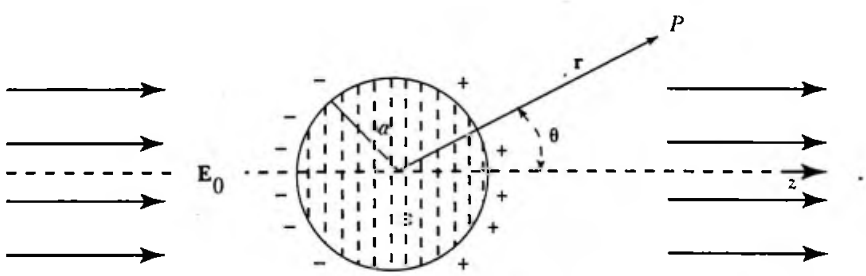


Figura 3.2

O potencial deve satisfazer separadamente a equação de Laplace, tanto na região externa como na região interna do dielétrico. Na região externa, todos os

coeficientes das potências positivas r^n em (3.33) devem se anular, com exceção do termo linear. Usando a condição de contorno no infinito, vemos que $\Phi_{ex} \to -E_0 z = -E_0 r \cos\theta$ corresponde ao potencial externo inicial. Assim, podemos escrever que:

$$\Phi_{ex}(r,\theta) = -E_0\, r\, P_1(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) \quad . \tag{3.34}$$

Por outro lado, tendo em vista que no interior da esfera não existem cargas livres que possam gerar singularidades quando $r \to 0$, o potencial deverá ter a forma:

$$\Phi_{in}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, r^n\, P_n(\cos\theta) \quad . \tag{3.35}$$

Os coeficientes A_n e B_n serão determinados pelas condições de contorno em $r = a$:

$$\mathbf{E}_{\parallel} \text{ contínuo: } -\frac{1}{a}\frac{\partial \Phi_{in}}{\partial \theta}\bigg|_{r=a} = -\frac{1}{a}\frac{\partial \Phi_{ex}}{\partial \theta}\bigg|_{r=a} \tag{3.36.a}$$

$$\mathbf{D}_{\perp} \text{ contínuo: } -\varepsilon \frac{\partial \Phi_{in}}{\partial r}\bigg|_{r=a} = -\frac{\partial \Phi_{ex}}{\partial r}\bigg|_{r=a} \tag{3.36.b}$$

A primeira condição de contorno, que deve ser satisfeita para todos os ângulos θ, implica que as expressões (3.34) e (3.35) devem ser iguais na superfície do dielétrico. Tendo em vista a independência linear dos polinômios $P_n(\cos\theta)$, os respectivos coeficientes devem ser idênticos, de modo que:

$$A_1\, a = -E_0\, a + \frac{B_1}{a^2} \quad , \quad A_n\, a^n = \frac{B_n}{a^{n+1}} \quad (n \neq 1) \quad . \tag{3.37}$$

A imposição da segunda condição de contorno (3.36.b) requer o cálculo das componentes radiais D^r do vetor deslocamento. Na região externa ao dielétrico temos que:

$$D_{ex}^{r} = E_0 P_1(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) B_n}{r^{n+2}} P_n(\cos\theta) \quad , \tag{3.38a}$$

ao passo que na região interna da esfera encontramos:

$$D_{in}^{r} = -\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} n A_n r^{n-1} P_n(\cos\theta) \quad . \tag{3.38b}$$

Estas expressões serão iguais para $r = a$ somente se:

$$\varepsilon A_1 = -E_0 - \frac{2B_1}{a^3} \quad , \qquad \varepsilon n A_n = -\frac{(n+1)B_n}{a^{2n+1}} \qquad (n \neq 1) \tag{3.39}$$

As relações encontradas entre A_n e B_n em (3.37) e (3.39) para $n \neq 1$ são consistentes para valores arbitrários de $\varepsilon > 1$ somente se: $A_n = B_n = 0$ $(n \neq 1)$. Isto poderia ter sido antecipado pelo fato de que o potencial externo inicial $\Phi_0 = -E_0 r P_1(\cos\theta)$ não pode induzir efeitos linearmente independentes proporcionais a $P_{n\neq 1}(\cos\theta)$. Então, as duas relações (3.37) e (3.39) entre A_1 e B_1 requerem:

$$A_1 = -\frac{3E_0}{\varepsilon+2} \quad ; \qquad B_1 = \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right) a^3 E_0 \quad . \tag{3.40}$$

Conseqüentemente, os potenciais resultantes são descritos por:

$$\Phi_{ex} = -E_0 r\cos\theta + \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right) E_0 \frac{a^3}{r^2}\cos\theta \quad ,$$

$$\Phi_{in} = -\left(\frac{3}{\varepsilon+2}\right) E_0 r\cos\theta \quad . \tag{3.41}$$

Como era de esperar, as duas expressões se reduzem, para $\varepsilon = 1$, ao potencial externo inicial Φ_0. O potencial no interior da esfera descreve um campo elétrico constante, cuja intensidade é menor que E_0:

$$\mathbf{E}_{\text{in}} = \frac{3}{\varepsilon+2}\mathbf{E}_0 \quad . \tag{3.42}$$

Na região externa, o potencial resultante é uma superposição do potencial externo e de um potencial associado com um dipolo elétrico uniforme, localizado na origem:

$$\mathbf{p} = \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right) a^3 \mathbf{E}_0 \quad . \tag{3.43}$$

O momento de dipolo pode ser interpretado como a integral de volume da polarização **P**:

$$\mathbf{P} = \left(\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\right)\mathbf{E}_{\text{in}} = \frac{3}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right)\mathbf{E}_0 \quad . \tag{3.44}$$

Ela é constante dentro da esfera e, de acordo com (1.23), gera uma densidade superficial de cargas de polarização $\rho'_S = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$, conforme está indicado na figura 3.2. Esta densidade cria um campo elétrico interno oposto ao campo aplicado, o que reduz o campo no interior da esfera ao valor (3.42).

3.4 EQUAÇÃO DE LAPLACE EM COORDENADAS CILÍNDRICAS; FUNÇÕES DE BESSEL

Em coordenadas cilíndricas ρ, ϕ e z, a equação de Laplace tem a forma (A.24):

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{3.45}$$

Vamos escrever o potencial como:

$$\Phi(\rho,\phi,z) = R(\rho)\Psi(\phi)Z(z) \quad . \tag{3.46}$$

Substituindo esta expressão na equação (3.45) e multiplicando o resultado por ρ^2/Φ, temos:

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{\rho^2}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-\frac{1}{\Psi}\frac{d^2\Psi}{d\phi^2} \quad . \tag{3.47}$$

Separamos o termo dependente do ângulo ϕ dos termos dependentes das coordenadas ρ e z. Portanto, podemos igualar os dois lados a uma constante, n^2, obtendo:

$$\frac{d^2\Psi}{d\phi^2}+n^2\Psi=0 \quad . \tag{3.48}$$

A solução desta equação tem a forma:

$$\Psi(\phi)\sim e^{\pm in\phi} \quad . \tag{3.49}$$

onde n deve ser um número inteiro, para assegurar a univocidade da função Ψ, isto é: $\Psi(\phi) = \Psi(\phi + 2n\pi)$.

O lado esquerdo da equação (3.47) pode ser agora escrito como:

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}=-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} \quad . \tag{3.50}$$

As variáveis podem ser novamente separadas, igualando os dois lados a $-k^2$, onde k é um número positivo:

$$\frac{d^2Z}{dz^2}-k^2Z=0 \tag{3.51}$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\left(k^2\rho^2-n^2\right)R=0 \tag{3.52}$$

As soluções para $Z(z)$ são:

$$Z(z) \sim e^{\pm kz} \quad . \tag{3.53}$$

A equação (3.52) pode ser colocada numa forma mais familiar fazendo a substituição:

$$u = k\rho \qquad ; \qquad \frac{d}{d\rho} = k\frac{d}{du} \quad . \tag{3.54}$$

Obtemos então:

$$u^2 \frac{d^2R}{du^2} + u\frac{dR}{du} + \left(u^2 - n^2\right)R = 0 \quad , \tag{3.55}$$

que é conhecida como a equação de Bessel. Esta equação foi estudada sistematicamente pelo astrônomo e matemático Bessel em 1824. A solução geral da equação de Bessel pode ser expressa como:

$$R_n(u) = A_n\, J_n(u) + B_n\, N_n(u) \quad . \tag{3.56}$$

As propriedades das funções J_n e N_n são apresentadas no Apêndice D. Aqui, mencionamos apenas que as funções $N_n(u)$ são singulares na origem, tendendo a $-\infty$ quando $u \to 0$. Por outro lado, as funções $J_n(u)$ são regulares, podendo ser expandidas numa série de potências de u em torno da origem. Por exemplo, as funções $J_0(u)$ e $J_1(u)$ podem ser representadas nesta região como:

$$J_0(u) = 1 - \frac{(u/2)^2}{(1!)^2} + \frac{(u/2)^4}{(2!)^2} - \frac{(u/2)^6}{(3!)^2} + \cdots \tag{3.57.a}$$

$$J_1(u) = \frac{u}{2} - \frac{(u/2)^3}{1!2!} + \frac{(u/2)^5}{2!3!} - \frac{(u/2)^7}{3!4!} + \cdots \tag{3.57.b}$$

Estas funções são mostradas na figura 3.3.

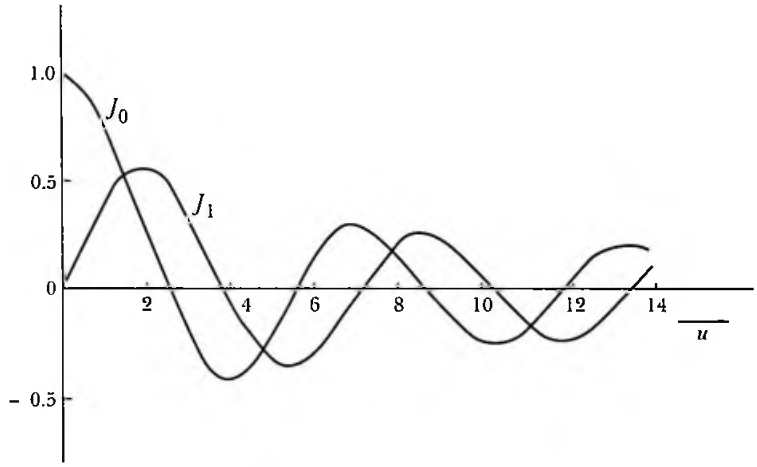


Figura 3.3

Podemos notar que as funções de Bessel têm um caráter oscilatório, com uma amplitude decrescente. Portanto, haverá um número infinito de pontos onde estas se anulam.

Tendo em vista as singularidades de $N_n(k\rho)$, devemos escolher somente as funções $J_n(k\rho)$ no tratamento de problemas que envolvem a origem. No caso mais geral, a solução completa em coordenadas cilíndricas torna-se:

$$\Phi(\rho,\phi,z) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\, J_n(k\rho) + B_n\, N_n(k\rho)\right] e^{\pm in\phi}\, e^{\pm kz} \qquad (3.58)$$

Entretanto, devemos levar em consideração que vários valores de k podem levar a soluções igualmente aceitáveis. Denotando estes valores por k_m, temos:

$$\Phi(\rho,\phi,z) = \sum_{m,n}\left[A_{mn}\, J_n(k_m\rho) + B_{mn}\, N_n(k_m\rho)\right] e^{\pm in\phi}\, e^{\pm k_m z} \qquad (3.59)$$

Vamos ilustrar o uso das funções de Bessel na determinação do potencial no interior de um cilindro semi-infinito de raio a, cuja área lateral é mantida ao potencial zero. A base está a um potencial Φ_0, conforme mostra a figura 3.4. Por simetria, a solução deve ser independente do ângulo ϕ, de modo que devemos colocar $n = 0$ na equação (3.59). Também, tendo em vista que o potencial deve ser finito na origem, temos que $B_n = 0$.

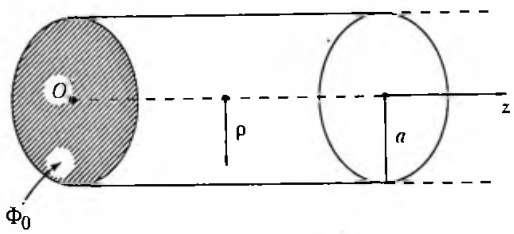


Figura 3.4

Para grandes valores de $z > 0$, o potencial deve tender a zero, de maneira que somente o termo $e^{-k_m z}$ é permitido. Portanto, temos que:

$$\Phi(\rho, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{m0}\, J_0(k_m \rho)\, e^{-k_m z} \quad ; \quad \rho < a \ , \ z > 0 \quad . \tag{3.60}$$

Usando a condição de contorno na área lateral: $\Phi(a, \phi, z) = 0$, resulta que:

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{m0}\, J_0(k_m a)\, e^{-k_m z} = 0 \tag{3.61}$$

Assim, os k_m são tais que as quantidades $k_m a$ representam os zeros da função $J_0(k_m \rho)$.

A outra condição de contorno é:

$$\Phi(\rho, \phi, 0) = \Phi_0 = \sum_{m=1}^{\infty} A_{m0}\, J_0(k_m \rho) \quad . \tag{3.62}$$

Para determinarmos os coeficientes A_{m0}, usaremos a propriedade de ortogonalidade das funções de Bessel. No caso da função J_0, esta condição afirma que no intervalo $0 \leq \rho \leq a$,

$$\int_0^a J_0(k_m \rho)\, J_0(k_{m'} \rho) \rho\, d\rho = \frac{a^2}{2} J_1^2(k_m a)\, \delta_{mm'} \quad . \tag{3.63}$$

Se multiplicarmos os dois lados da equação (3.62) por $\rho J_0(k_{m'} \rho)$ e integrarmos sobre ρ no domínio $0 \leq \rho \leq a$, então

$$\Phi_0 \int_0^a J_0(k_{m'}\rho)\,\rho\,d\rho = \sum_{m=1}^{\infty} A_{m0} \int_0^a J_0(k_m\rho)\,J_0(k_{m'}\rho)\,\rho\,d\rho \quad .$$

Podemos calcular o lado direito usando a relação de ortogonalidade (3.63), obtendo assim:

$$A_{m0} = \frac{2\Phi_0}{a^2 J_1^2(k_m a)} \int_0^a J_0(k_m\rho)\,\rho\,d\rho \quad . \tag{3.64}$$

Para efetuar a integração, faremos uso da relação (D.19.b):

$$\int u J_0(u)\,du = u\,J_1(u) \quad . \tag{3.65}$$

Usando este resultado em (3.64), encontramos que

$$A_{m0} = \frac{2\Phi_0}{a^2 J_1^2(k_m a)} \frac{a}{k_m} J_1(k_m a) = \frac{2\Phi_0}{k_m a\, J_1(k_m a)} \quad . \tag{3.66}$$

Portanto, a solução completa para o potencial é:

$$\Phi(\rho,\phi,z) = 2\Phi_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-k_m z}}{k_m a} \frac{J_0(k_m\rho)}{J_1(k_m a)} \quad . \tag{3.67}$$

Vemos que o potencial decresce muito rapidamente a medida que nos afastamos da base. Por exemplo, quando $z = 2a$, Φ torna-e da ordem de 1% do valor de Φ_0.

3.5. EQUAÇÃO DE POISSON; O DIODO ELÉTRICO

Conforme vimos no capítulo 1, na presença de cargas a equação de Laplace deve ser generalizada para a equação de Poisson (equação 1.10):

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho$$

A solução geral desta equação, que satisfaz determinadas condições de contorno, representa em geral um problema muito difícil. Por isso, vamos considerar apenas um caso simples, mas importante, relacionado com o movimento de cargas no diodo de placas paralelas. Este é constituído por um catodo e um anodo mantido a um potencial Φ_0, separados por uma distância d, conforme está na figura 3.5.

Os elétrons são liberados no catodo com velocidades pequenas, que podem ser consideradas desprezíveis. Usando a conservação da energia, a velocidade do elétron no ponto x será então determinada por:

$$\frac{1}{2} m v^2 = e\,\Phi(x) \tag{3.68}$$

onde $\Phi(x)$ representa o potencial na posição x. Os elétrons emitidos produzem

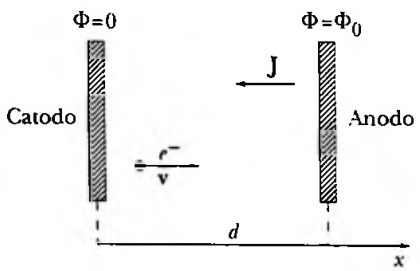


Figura 3.5

na região entre as placas uma densidade de carga $\rho(x)$. Usando a lei de conservação da carga, teremos no regime estacionário uma densidade de corrente dada em módulo por:

$$J = \left|\rho(x)\, v(x)\right| \tag{3.69}$$

que independe da posição. Substituindo as equações (3.68) e (3.69) na equação de Poisson, obteremos:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 4\pi \frac{J}{v} = 4\pi J \sqrt{\frac{m}{2e\Phi}} \quad . \tag{3.70}$$

Multiplicando os dois lados por $d\Phi/dx$, esta equação pode ser facilmente integrada. Desta forma, obtemos que:

$$\frac{d\Phi}{dx}\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 = 4\pi J\sqrt{\frac{m}{2e}}\,\Phi^{-1/2}\frac{d\Phi}{dx}$$

ou

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 = 16\pi J\sqrt{\frac{m\Phi}{2e}} \quad . \tag{3.71}$$

No regime estacionário, a distribuição espacial de cargas é tal que neutraliza no ponto $x = 0$ o campo elétrico externo. Assim, o campo elétrico total $\mathbf{E} = -(d\Phi/dx)\,\hat{\mathbf{e}}_x$ deve se anular na região do catodo. Portanto, em $x = 0$, temos que $d\Phi/dx = 0$ e também $\Phi = 0$. Por este motivo, a constante de integração em (3.71) foi colocada igual a zero.

A equação (3.71) pode ser integrada aplicando as mesmas condições de contorno, obtendo:

$$\Phi^{3/4} = 3\sqrt{\pi J}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/4} x \tag{3.72}$$

Podemos agora determinar J usando a condição de contorno em $x = d$, $\Phi(x = d) = \Phi_0$:

$$J = \frac{1}{9\pi d^2}\left(\frac{2e}{m}\right)^{1/2}\Phi_0^{3/2} \quad . \tag{3.73}$$

A proporcionalidade da corrente com $\Phi_0^{3/2}$ foi deduzida pela primeira vez por Langmuir em 1913.

A partir da relação (3.72) vemos que o módulo do campo elétrico terá uma variação com a distância dada por:

$$E(x) = 4(\pi J)^{2/3}\left(\frac{3m}{2e}\right)^{1/3} x^{1/3} \quad . \tag{3.74}$$

Os resultados descritos pelas equações (3.73) e (3.74) são ilustrados na figura 3.6. Evidentemente, o diodo tem um comportamento não-linear, em contraste com a linearidade da lei de Ohm: $J = \sigma E$.

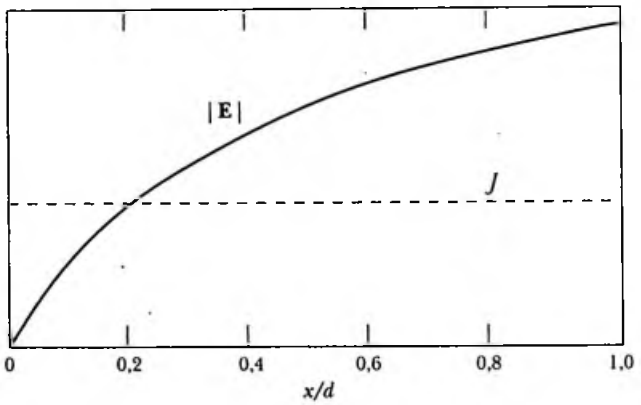


Figura 3.6

3.6. MEIOS SUPERCONDUTORES

O fenômeno da supercondutividade foi descoberto por Kammerlingh Onnes em 1911. Em medidas da resistência elétrica do mercúrio a baixas temperaturas, Onnes observou que ela cai abruptamente para zero à temperatura de 4,2 K. Investigações subseqüentes mostraram que esta súbita transição para uma perfeita condutividade elétrica a uma temperatura crítica T_c é característica em um grande número de metais e ligas metálicas. Observou-se que a supercondutividade deixa de existir na presença de um campo magnético maior que um certo valor crítico B_c característico do material.

Em 1933, Meissner descobriu que um supercondutor exibe, além de uma perfeita condutividade elétrica, também um diamagnetismo perfeito. Neste caso, $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$ se anula dentro do supercondutor. Assim, podemos considerar o supercondutor como um material diamagnético perfeito, com susceptibilidade $\chi_m = -1/4\pi$:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{H} \quad . \tag{3.75}$$

Estas propriedades são ilustradas na figura 3.7.

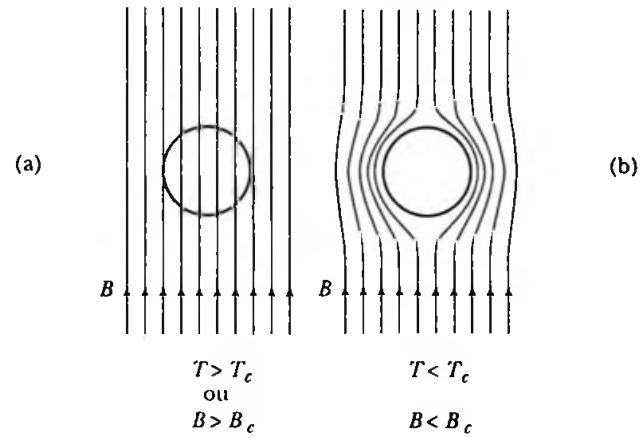


Figura 3.7

Vamos considerar agora dois exemplos de problemas de contorno nestes materiais: uma esfera supercondutora num campo assintoticamente uniforme e um cilindro supercondutor, infinitamente longo, pelo qual passa uma corrente livre.

Consideremos primeiramente uma esfera supercondutora de raio a, colocada num campo magnético uniforme $B_0\hat{\mathbf{k}}$. Na região externa à esfera, temos as equações usuais da magnetostática:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad ; \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} \quad . \tag{3.76}$$

com a condição de contorno de que $\mathbf{B} \to B_0\,\hat{\mathbf{k}}$ quando $r \to \infty$. Tratando o supercondutor como um material diamagnético perfeito, podemos escrever no interior da esfera as equações:

$$\mathbf{B} = 0 \quad ; \quad \mathbf{M} = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{H} \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad . \tag{3.77}$$

Além disso, podemos usar a equação:

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0 \tag{3.78}$$

tendo em vista a não-existência de pólos magnéticos no interior da esfera supercondutora [compare com a equação (1.22)].

Destas equações vemos que $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, já que não existem correntes livres presentes. Assim, o campo $\mathbf{H}$ é dedutível de um potencial escalar magnético Φ_m: $\mathbf{H} = -\nabla\Phi_m$. Além disso, estas equações implicam também que $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$. Portanto, o potencial magnético Φ_m satisfaz a equação de Laplace em todos os pontos. Este potencial deverá ser determinado de maneira que as seguintes condições de contorno sejam satisfeitas:

$$B_r \text{ é contínuo;} \qquad H_\theta \text{ é contínuo} \qquad (\text{para } r = a) \quad . \tag{3.79}$$

Utilizando coordenadas esféricas e considerando a equação (3.76), vemos que na região externa o potencial magnético tem a forma:

$$\Phi_m^{\text{ex}} = -B_0 r \cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta) \tag{3.80}$$

de onde resulta que:

$$B_r^{\text{ex}} = B_0 \cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_n r^{-(n+2)} P_n(\cos\theta) \quad . \tag{3.81}$$

Como $\mathbf{B}$ se anula na região interna e B_r é contínuo através de $r = a$, todo b_n exceto b_1 deve ser zero. Obtemos então que:

$$b_1 = -\frac{B_0 a^3}{2} \quad . \tag{3.82}$$

Isto resolve completamente o problema para $r > a$.

No interior da esfera, o potencial Φ_m^{in} deve ser regular em $r = 0$ e, para satisfazer as condições de contorno, poderá conter somente $P_1(\cos\theta)$. Assim, sendo A_1 uma constante a ser determinada, podemos escrever que:

$$\Phi_m^{\text{in}} = A_1 r \cos\theta \quad . \tag{3.83}$$

Desta equação resulta que

$$H_r = -A_1 \cos\theta \quad ; \quad H_\theta = A_1 \operatorname{sen}\theta \quad . \tag{3.84}$$

Como no exterior $H_\theta = -3B_0 \operatorname{sen}\theta/2$, segue-se que $A_1 = -3B_0/2$.

Os resultados anteriores podem então ser expressos nas formas:

$$\mathbf{B}^{ex} = \mathbf{H}^{ex} = B_0\hat{\mathbf{k}} - B_0\frac{a^3}{r^3}\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_r - \frac{1}{2}B_0\frac{a^3}{r^3}\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \tag{3.85}$$

$$\mathbf{B}^{in} = 0 \quad ; \quad \mathbf{H}^{in} = \frac{3}{2}B_0\hat{\mathbf{k}} \quad ; \quad \mathbf{M} = -\frac{3}{8\pi}B_0\hat{\mathbf{k}} \quad . \tag{3.86}$$

Devido à descontinuidade de **M**, existe uma densidade de corrente de magnetização superficial (veja o problema 2.14) dada por:

$$\mathbf{J}_S = c\mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}} = -\frac{3c}{8\pi}B_0\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\phi \tag{3.87}$$

Consideremos finalmente o problema de um cilindro supercondutor de raio a que conduz uma corrente I_0. De acordo com a lei de Ampère, vemos que na região externa:

$$\mathbf{B}^{ex} = \mathbf{H}^{ex} = \frac{2I_0}{cr}\hat{\mathbf{e}}_\phi \quad . \tag{3.88}$$

Admitindo uma densidade uniforme de corrente livre: $\mathbf{J} = (I_0/\pi a^2)\hat{\mathbf{k}}$, e usando a continuidade da componente tangencial de **H**, teremos na região interna:

$$\mathbf{H}^{in} = \frac{2I_0}{ca^2}r\,\hat{\mathbf{e}}_\phi \quad ; \quad \mathbf{M} = -\frac{I_0}{2\pi c}\frac{r}{a^2}\hat{\mathbf{e}}_\phi \quad . \tag{3.89}$$

A densidade volumétrica de corrente de magnetização é

$$\mathbf{J}' = c\,\nabla\times\mathbf{M} = -\frac{I_0}{\pi a^2}\hat{\mathbf{k}} \tag{3.90.a}$$

sendo a densidade de corrente de magnetização superficial dada por:

$$\mathbf{J}'_S = c\mathbf{M} \times \hat{\mathbf{e}}_\rho = \frac{I_0}{2\pi a}\hat{\mathbf{k}} \quad . \tag{3.90.b}$$

Podemos notar que no interior do supercondutor a soma de $\mathbf{J}$ com $\mathbf{J}'$ é nula. Isto é conseqüência da condição $\mathbf{B}^{in} = 0$ que implica $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ e portanto a corrente volumétrica total deve se anular. Desta forma, a densidade de corrente superficial (3.90.b) é justamente a suficiente para conduzir a corrente total I_0.

PROBLEMAS

1. Mostre que o valor médio do potencial Φ sobre uma superfície esférica é igual ao potencial no centro, contanto que não haja carga no seu interior. [Sugestão: Use o teorema de Green para mostrar que o valor médio independe do raio.]

2. Use a equação de Laplace para mostrar que um corpo carregado submetido somente a um campo elétrico não pode ser mantido em uma posição de equilíbrio estável.

3. Considere o potencial bidimensional mostrado na figura 3.8.

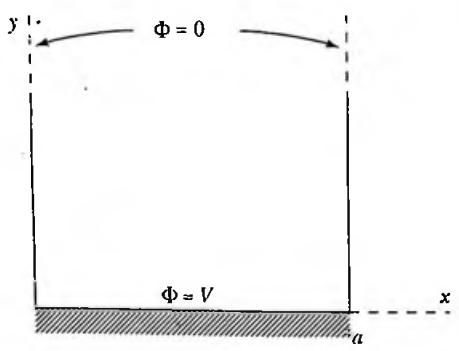


Figura 3.8

As condições de contorno são $\Phi = 0$ em $x = 0$ e $x = a$; $\Phi = V$ em $y = 0$. Determine o potencial em todos os pontos do espaço na região $0 < x < a$ e $y > 0$.

4. O potencial no plano $x-y$ mostrado na figura 3.9 é independente de z, sendo dado por uma função periódica de módulo Φ_0 e período $2a$.

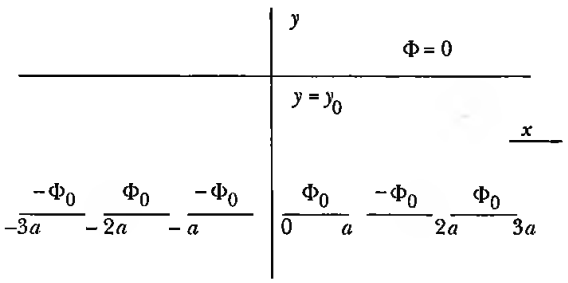


Figura 3.9

O plano definido por $y = y_0$ está ligado à terra. Encontre o potencial em todos os pontos do espaço na região: $0 < y < y_0$.

5. Considere a figura (3.1) com as superfícies $z = 0$ e $z = c$ mantidas a um potencial Φ_0, enquanto as outras superfícies têm $\Phi = 0$. Encontre o potencial num ponto genérico dentro da caixa.

6. Uma esfera condutora de raio a cuja carga total é Q está situada num campo elétrico externo, inicialmente uniforme, $\mathbf{E}_0$. Encontre o potencial na região exterior à esfera.

7. Uma carga puntiforme q está localizada a uma distância l do centro de uma esfera condutora aterrada de raio $a < l$. Encontre o potencial nos pontos exteriores à esfera e determine a distribuição de carga na superfície da esfera. [Sugestão: Use uma expansão em polinômios de Legendre com a origem no centro da esfera, escolhendo o eixo polar na direção da carga puntiforme.]

8. Para distribuições de cargas simétricas em torno de um eixo de rotação, mostre que o potencial de dipolo (2.5) pode ser escrito na forma (3.33) como:

$$\Phi^{(2)} = p\frac{1}{r^2}P_1(\cos\theta)$$

Analogamente, mostre que o potencial de quadrupolo (2.16) pode ser colocado na forma:

$$\Phi^{(4)} = \frac{Q_{33}}{2}\frac{1}{r^3}P_2(\cos\theta)$$

9. Uma casca de constante dielétrica ε tem raio interno a e externo igual a b. A casca é colocada em um campo elétrico uniforme $\mathbf{E}_0$. Determine o potencial no interior da casca dielétrica.

10. Uma esfera de raio a possui uma distribuição superficial de carga que é proporcional a $\cos 2\theta$. Encontre o potencial em todos os pontos do espaço externos à esfera. Represente a distribuição de carga em termos de momentos de multipolos apropriados.

11. Uma superfície esférica condutora de raio a é constituída por dois hemisférios, isolados por um anel isolante colocado no plano $\theta = \pi/2$. O hemisfério superior $(0 \leq \theta < \pi/2)$ é mantido a um potencial Φ_0, enquanto o inferior $(\pi/2 < \theta \leq \pi)$ é mantido no potencial $-\Phi_0$. Calcule o potencial em todos os pontos do espaço. Use as expressões de $P_n(\cos\theta)$ e calcule os três primeiros termos da expansão.

12. Considere um anel fixo de raio R carregado uniformemente com carga total Q. Tome a origem no centro do anel, com o eixo z ao longo do eixo do anel, conforme mostra a figura 3.10.

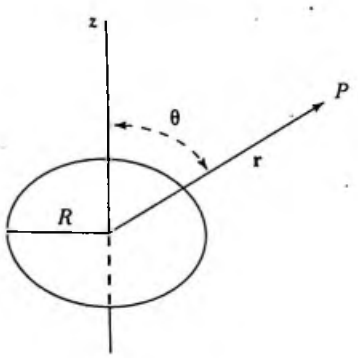


Figura 3.10

Mostre que o potencial num ponto no espaço especificado por (r,θ) é dado por:

$$\Phi(r,\theta)=\frac{Q}{r}\left[1-\frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2}P_2(\cos\theta)+\frac{3}{8}\frac{R^4}{r^4}P_4(\cos\theta)-\cdots\right] \quad ; \quad r>R$$

$$\Phi(r,\theta)=\frac{Q}{r}\left[1-\frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}P_2(\cos\theta)+\frac{3}{8}\frac{r^4}{R^4}P_4(\cos\theta)-\cdots\right] \quad ; \quad r<R \quad .$$

[Sugestão: Escreva primeiramente o potencial no eixo, expandindo em seguida numa série de potências em R/z, para $z > R$. Escreva os primeiros termos B_n da série geral (3.33) e especifique então a série para $\theta = 0$, $r \to z$. Equacione os coeficientes para determinar as constantes B_n que são válidas na série geral para valores arbitrários de θ. Uma identificação análoga determina as constantes A_n para $r < R$.]

13. A lei de Biot-Savart determina o campo magnético no eixo de uma espira circular de raio R, percorrida por uma corrente I (veja problema 1.5). Expanda o campo magnético numa série em (R/z) e integre termo a termo a equação: $B_z = -\partial\Phi/\partial z$, para determinar o potencial magnético $\Phi_m(z)$ no eixo para $z > R$. Use o método do problema anterior para mostrar que o potencial é:

$$\Phi_m=\frac{\pi R^2 I}{cr^2}\left[P_1(\cos\theta)-\frac{3}{4}\frac{R^2}{r^2}P_3(\cos\theta)+\cdots\right] \quad ; \quad r>R$$

14. Encontre o potencial dentro de um cilindro oco de raio a e comprimento L. As duas extremidades são fechadas por placas condutoras. Uma das placas e a superfície lateral do cilindro estão mantidas ao potencial $\Phi = 0$. A outra placa é isolada do cilindro, sendo mantida ao potencial $\Phi = \Phi_0$.

15. Considere um cilindro infinito de raio a com permeabilidade magnética μ colocado num campo magnético uniforme $\mathbf{B}_0$ cuja direção é perpendicular ao eixo do cilindro, conforme mostra a figura 3.11.
Mostre que neste caso, quando não existe variação na direção z, a solução geral da equação de Laplace em coordenadas cilindricas é dada por:

$$\Phi(\rho,\phi) = A_0 + B_0 \ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\rho^n + B_n\frac{1}{\rho^n}\right)\times$$

$$\times\left(C_n \cos n\phi + D_n \operatorname{sen} n\phi\right) \quad .$$

Determine o potencial magnético em todos os pontos externos e internos ao cilindro.

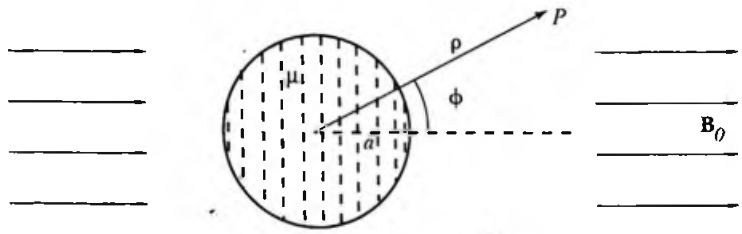


Figura 3.11

4

EQUAÇÕES DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Vamos considerar em seguida uma situação mais geral, em que os campos elétricos e magnéticos podem variar arbitrariamente no tempo. Neste caso, haverá uma interdependência dos campos, de maneira que seremos conduzidos a um conceito generalizado do campo eletromagnético.

Em 1865, Maxwell conseguiu desenvolver pela primeira vez uma teoria unificada dos fenômenos eletromagnéticos. Esta descrição é consistente com uma classe extremamente ampla de processos observados experimentalmente. Assim, as equações de Maxwell constituem uma representação própria do campo eletromagnético clássico. O conceito do campo clássico pode ser compreendido como o limite de números quânticos muito grandes, em termos de fótons reais ou virtuais. Por exemplo, a um metro de uma lâmpada de 100 Watts passam cerca de 10^{15} fótons visíveis por centímetro quadrado e por segundo. Em geral, é o efeito cumulativo de muito fótons que aparece como um fenômeno observado experimentalmente. Por isso, justifica-se uma descrição clássica da eletrodinâmica em termos das equações de Maxwell.

4.1 A LEI DE FARADAY

As primeiras experiências que estabeleceram uma relação entre campos elétricos e magnéticos dependentes do tempo foram realizadas em 1831 por Faraday. Ele observou correntes induzidas em circuitos colocados em campos magnéticos variáveis. A variação do fluxo magnético pode resultar em conseqüência do movimento do circuito, como também de uma variação temporal do campo

magnético. O fluxo variável induz no circuito um campo elétrico que produz uma corrente elétrica. A integral ao longo do circuito define a força eletromotriz ε:

$$\varepsilon = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} \quad . \tag{4.1}$$

onde $\mathbf{E}'$ é o campo elétrico no referencial de repouso do circuito. As observações de Faraday podem ser expressas quantitativamente em termos da variação do fluxo magnético F que atravessa o circuito:

$$F = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad , \tag{4.2}$$

onde S é uma superfície delimitada pelo circuito C, conforme mostra a figura 4.1.

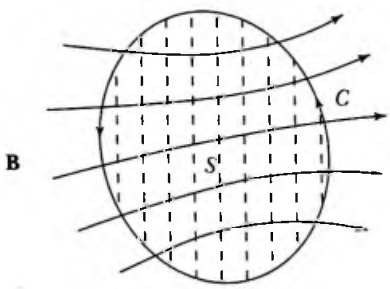


Figura 4.1.

A lei de Faraday afirma que a força eletromotriz induzida no circuito é proporcional à taxa de variação do fluxo magnético acoplado ao circuito:

$$\varepsilon = -\frac{1}{c}\frac{dF}{dt} \quad , \tag{4.3}$$

onde a constante de proporcionalidade $1/c$ decorre do uso do sistema gaussiano de unidades. O sinal desta força eletromotriz é especificada pela lei descoberta por Lenz em 1834, que estabelece ter a corrente induzida um sentido que se opõe à modificação do fluxo através do circuito.

Mantendo o circuito fixo no laboratório, $\mathbf{E}'$ coincide então com o campo elétrico $\mathbf{E}$ medido neste referencial. Assim, podemos escrever a equação (4.3) na forma:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad . \tag{4.4}$$

O teorema de Stokes pode ser usado para transformar a integral de linha, obtendo

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad .$$

Sendo a superfície S arbitrária, encontramos a relação:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{4.5}$$

que representa a forma diferencial da lei de Faraday. Note que nesta dedução não usamos qualquer propriedade específica do circuito, de maneira que (4.5) é válida em geral para campos eletromagnéticos dependentes do tempo. A lei de Faraday representa uma relação fundamental na eletrodinâmica, generalizando a equação $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ para os campos eletrostáticos.

4.2 O EFEITO ZEEMAN

Vamos discutir em seguida uma aplicação importante da lei de Faraday, relacionada com o efeito Zeeman. Em 1896 Zeeman observou uma radiação eletromagnética quando átomos de sódio, mercúrio etc. eram colocados num campo magnético externo. Consideremos apenas o efeito Zeeman na presença de campos magnéticos intensos, para o qual a descrição clássica é adequada.

Para simplificar a discussão, vamos supor que o elétron no átomo se movimenta com velocidade angular ω_0 numa órbita circular de raio r cujo plano é normal à direção do campo magnético externo **B**. Na ausência deste campo, o elétron sofre a força coulombiana do núcleo, de modo que a equação de movimento tem a forma:

$$\frac{mv^2}{r} = m\omega_0^2 r = \frac{Ze^2}{r^2} \tag{4.6}$$

Quando o campo magnético é ligado, o fluxo magnético através da órbita experimentará neste processo uma variação temporal. Esta mudança irá gerar um campo elétrico induzido que é tangencial à órbita. O campo adicional modificará então a velocidade do elétron na órbita. No mesmo tempo, sendo que o elétron se move no campo magnético **B**, ele será afetado pela força de Lorentz cuja direção é ao longo do raio:

$$\mathbf{F}_B = -\frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} \quad . \tag{4.7}$$

A magnitude e a direção de $\mathbf{F}_B$ é tal que o raio da órbita permanecerá constante. Portanto, o processo de ligação do campo magnético resultará somente no aumento ou diminuição da velocidade angular do elétron, dependendo da direção do seu movimento relativamente à direção do campo magnético.

Se o novo valor da velocidade angular do elétron é ω, então de acordo com (4.7) a força radial de Lorentz devida ao campo magnético é igual a:

$$F_B = \pm\frac{e}{c}B\,\omega\,r \quad . \tag{4.8}$$

Os sinais são determinados pela lei de Lenz, sendo que o movimento adicional do elétron devido à variação do campo magnético externo é tal que cria um campo magnético oposto à variação do primeiro. Neste caso, no lugar de (4.6), temos a seguinte equação de movimento:

$$m\omega^2 r = m\omega_0^2 r \pm \frac{e}{c}B\,\omega\,r \quad . \tag{4.9}$$

A partir desta equação, podemos encontrar facilmente a freqüência ω. Sendo que no átomo $\omega_0 \simeq 10^{16}\ \mathrm{s}^{-1}$ e tendo $eB/mc \simeq 10^{12}\ \mathrm{s}^{-1}$, podemos escrever aproximadamente:

$$\omega_\pm = \omega_0 \pm \frac{eB}{2mc} \tag{4.10}$$

mesmo para campos magnéticos intensos da ordem de 10^5 Gauss.

A quantidade $eB/2mc$ é precisamente a freqüência de Larmor, associada com o momento angular orbital do elétron, conforme vimos na equação (2.52). No caso mais geral, quando o campo magnético não é normal ao plano da órbita, o torque magnético produz uma precessão da órbita do elétron em torno da direção de **B**, com velocidade angular ω_L. Este efeito é indicado na figura 4.2.

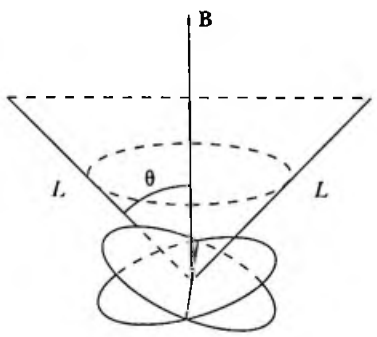


Figura 4.2.

É claro que, se a órbita estiver num plano paralelo a **B**, os elétrons não sofrerão qualquer influência do campo magnético. Devido à natureza aleatória das orientações das órbitas eletrônicas, esperaríamos então que as velocidades angulares dos elétrons tivessem valores típicos caracterizados pelas freqüências ω_-, ω_0 e ω_+. Na mecânica quântica, estes valores correspondem à freqüência da radiação eletromagnética emitida pelo átomo. Estas características das linhas espectrais da luz emitida estão em excelente acordo com a experiência. (Para uma discussão mais completa, ver Heald e Marion, Cap.10.)

4.3 AS LEIS DE MAXWELL

Mostramos no capítulo 1 que, em situações estacionárias, a lei de Ampère pode ser expressa na forma dada pela equação (1.54):

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \quad .$$

Tomando a divergência nos dois lados desta equação, sendo que a divergência do rotacional se anula identicamente, temos:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad .$$

Entretanto, esta relação não é consistente com a conservação da carga elétrica em situações mais gerais, dependentes do tempo. Nestes casos, se uma corrente I fluir através de uma superfície fechada, a carga contida no volume delimitado pela superfície deverá variar de acordo com a relação:

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV \quad . \tag{4.11}$$

Pelo teorema da divergência, podemos transformar o fluxo de corrente em uma integral de $\nabla \cdot \mathbf{J}$ sobre o volume V. Tendo em vista que V é arbitrário, obtemos:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad . \tag{4.12}$$

Esta equação, que reflete o fato experimental da conservação da carga elétrica, é chamada equação da continuidade.

Conseqüentemente, devemos concluir que a lei de Ampère na forma (1.54) é insuficiente para o caso de campos dependentes do tempo. Foi Maxwell quem procurou modificar a lei de Ampère de modo a ser consistente também em condições dependentes do tempo. A sua solução foi fazer a substituição:

$$\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

de modo que a equação modificada de Ampère fica:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad . \tag{4.13}$$

O termo $(1/4\pi)\partial \mathbf{D}/\partial t$ foi denominado por Maxwell corrente de deslocamento. Se tomarmos agora a divergência nos dois lados da equação (4.13) encontramos:

$$0 = \frac{4\pi}{c}\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{D} \quad .$$

Usando a lei de Gauss (1.26) para substituir $\nabla \cdot \mathbf{D}$ por $4\pi\rho$, obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

que é a equação da continuidade. Isto significa que a modificação de Maxwell da lei de Ampère é compatível com a conservação da carga elétrica.

É fácil entender porque, nos meados do século XIX, não existiam recursos experimentais para verificar a equação de Ampère-Maxwell (4.13). As velocidades dos elétrons são, em geral, muito elevadas. Assim, a corrente $\rho\mathbf{v}$ é grande em comparação com a corrente de deslocamento $(1/4\pi)\partial\mathbf{D}/\partial t$, se o campo elétrico não se modificar rapidamente com o tempo. Estimativas mostram que os dois termos da corrente total têm a mesma ordem de grandeza para variações periódicas do campo elétrico com uma freqüência da ordem de 10^6 s^{-1}. Esta é a região de freqüências de rádio que era desconhecida nos meados do século XIX. Foi somente em 1888 que Hertz verificou experimentalmente a existência de ondas eletromagnéticas. Tendo em vista que o termo adicionado por Maxwell é de importância crucial para os campos que ocorrem nos processos de radiação eletromagnética, as experiências de Hertz provaram assim a realidade da corrente de deslocamento.

Vamos ilustrar o conceito da corrente de deslocamento, considerando o circuito mostrado na figura 4.3, onde flui uma corrente *I*.

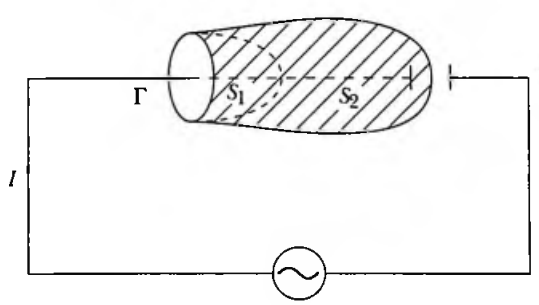


Figura 4.3.

Integrando a lei de Ampère-Maxwell (4.13) sobre a superfície S_1 limitada pela curva Γ e usando o teorema de Stokes, sendo que neste caso $\partial\mathbf{D}/\partial t = 0$, teremos:

$$\int_\Gamma \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \frac{4\pi}{c} I \quad . \tag{4.14}$$

Por outro lado, a corrente I não flui através da superfície S_2. Contudo, existe agora uma corrente de deslocamento, devido ao fato de que as placas do capacitor estão sendo carregadas pela fonte externa. Conseqüentemente, integrando (4.13) sobre a superfície S_2, obtemos o resultado:

$$\int_\Gamma \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{c} \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = \frac{4\pi}{c} \frac{d}{dt} \int \sigma \, da = \frac{4\pi}{c} \frac{dQ}{dt} \tag{4.15}$$

que é o mesmo que aquele dado pela equação (4.14), visto que $I = dQ/dt$.

Tendo estabelecido a validade da lei de Faraday (4.5) e da lei de Ampère-Maxwell (4.13), devemos ainda estudar as outras duas equações do campo para **B** e **D**, em condições dependentes do tempo. Considerando a divergência da equação (4.5), temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \mathbf{B}\right) = 0$$

o que implica que $\nabla \cdot \mathbf{B}$ é uma constante independente do tempo. Sabemos que em condições estáticas esta constante é nula. Fisicamente, podemos argumentar que esta constante deve ser sempre zero, tendo em vista que os campos dependentes do tempo não podem criar monopolos magnéticos. Então, é possível inferir que a relação:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{4.16}$$

deve ser válida em geral.

Finalmente, tomando a divergência da equação de Ampère-Maxwell (4.13) e usando a equação da continuidade (4.12), encontramos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \mathbf{D} - 4\pi\rho\right) = 0 \quad .$$

Supondo que em algum instante inicial: $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$, vemos então que a lei de Gauss deverá ser válida sempre.

Portanto, podemos concluir que as quatro equações seguintes constituem uma descrição coerente dos campos eletromagnéticos dependentes do tempo:

$$a)\quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \qquad ; \qquad b)\quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$c)\quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \qquad ; \qquad d)\quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \tag{4.17}$$

Este conjunto, conhecido como as equações de Maxwell, forma a base de todos os fenômenos eletromagnéticos clássicos. O domínio de aplicabilidade das equações de Maxwell é extremamente vasto. Elas determinam o caráter dos processos eletromagnéticos que ocorrem em escalas cósmicas, constituem a base da tecnologia eletrônica contemporânea e permitem a investigação de processos associados com cargas individuais. Contudo, em escalas microscópicas é imprescindível a consideração de fenômenos quânticos descritos pela Eletrodinâmica Quântica.

4.4 POTENCIAIS DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO; TRANSFORMAÇÕES DE CALIBRE

Vimos nos capítulos anteriores que é útil introduzir os potenciais escalar e vetor para o estudo de processos estacionários. Mostraremos que o mesmo procedimento será conveniente no estudo mais geral de fenômenos eletromagnéticos dependentes do tempo. Sendo a equação de Maxwell (4.17.b) válida em geral, podemos expressar o campo magnético como o rotacional de um potencial vetor **A**:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad . \tag{4.18}$$

Substituindo esta relação em (4.17.c), obtemos:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Esta equação mostra que o vetor $\mathbf{E} + (1/c)\,(\partial \mathbf{A}/\partial t)$ pode ser escrito em termos do gradiente de um potencial escalar Φ como:

$$\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}=-\nabla \Phi \quad .$$

Esta relação generaliza a equação (1.6) que foi deduzida anteriormente no caso eletrostático. Assim, podemos expressar o campo elétrico em termos dos potenciais escalar e vetor através da fórmula:

$$\mathbf{E}=-\nabla\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad . \tag{4.19}$$

Observamos que esta expressão, que relaciona o campo elétrico com quantidades magnéticas, é equivalente à lei de indução de Faraday.

Para a determinação de **A** e Φ, devemos usar em adição as equações de Maxwell (4.17.a) e (4.17.d). Considerando por simplicidade o caso de campos eletromagnéticos no vácuo, vemos que a última equação dá:

$$\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$

ou, usando a fórmula vetorial (A.5):

$$\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}\right)-\nabla^2\mathbf{A}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \quad .$$

Podemos reescrever a última equação na forma:

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}+\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) \quad . \tag{4.20}$$

Por outro lado, a equação (4.17.a) dá:

$$\nabla^2\Phi=-4\pi\rho-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A} \quad . \tag{4.21}$$

Na eletrodinâmica clássica, os potenciais **A** e Φ são quantidades auxiliares introduzidas com a finalidade de simplificar as equações do campo. Vamos impor sobre eles condições que permitirão tornar as equações (4.20) e (4.21) independentes, sem modificar contudo as relações (4.18) e (4.19). A relação (4.18) determina o rotacional do potencial vetor **A**. Mas o próprio vetor **A** não é ainda completamente determinado, visto que a sua divergência não é especificada. Se a divergência de **A** for dada pela relação:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad . \tag{4.22}$$

chamada de condição de Lorentz, então a equação (4.20) fica:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \quad . \tag{4.23}$$

A equação (4.21) irá adquirir uma forma completamente análoga:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \quad . \tag{4.24}$$

Estas equações para os potenciais eletromagnéticos são equivalentes às equações de Maxwell. De um ponto de vista matemático, estas equações de onda são mais simples que as equações diferenciais parciais de Maxwell. Veremos que as equações de onda podem ser integradas, obtendo-se uma solução na forma integral, analogamente à integração da equação de Poisson (1.10) cuja solução é dada pela integral (1.13). É por este motivo que, na investigação das propriedades dos campos eletromagnéticos, o uso dos potenciais é muito conveniente.

Notamos que a determinação dos potenciais **A** e Φ a partir das relações (4.18) e (4.19) não é única, permitindo uma certa liberdade de escolha. Esta deve preservar contudo o valor dos campos elétricos e magnéticos, tendo em vista que classicamente somente os campos eletromagnéticos têm um significado físico direto. Da definição (4.18), resulta que se fizermos a transformação:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' + \nabla\psi(\mathbf{r}, t) \tag{4.25}$$

onde ψ é uma função arbitrária das coordenadas e do tempo, então o valor do campo magnético não será modificado:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(\mathbf{A}' + \nabla\psi\right) = \nabla \times \mathbf{A}' \quad .$$

Vamos considerar agora a determinação do potencial escalar Φ a partir da relação (4.19). A transformação (4.25) leva ao valor:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$= -\nabla\left(\Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} \quad .$$

Substituindo:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{4.26}$$

chegamos a uma expressão para o campo elétrico que tem a mesma forma que (4.19). Portanto, o potencial vetor é determinado a menos de um gradiente de uma função de coordenadas e do tempo, ao passo que o potencial escalar é determinado a menos de uma derivada temporal desta função. Em geral, podemos afirmar que os sistemas de potenciais ($\mathbf{A}'$, Φ') e ($\mathbf{A}$, Φ) são fisicamente equivalentes se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$, Φ e Φ' puderem ser conectados entre si pelas relações (4.25) e (4.26). Este fato pode ser expresso dizendo que as equações do campo eletromagnético são invariantes sob as transformações (4.25) e (4.26). Diferentes maneiras de escolha dos potenciais $\mathbf{A}$ e Φ, que não modificam os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, são chamadas calibres dos potenciais.

A invariância dos campos eletromagnéticos com respeito aos diferentes calibres é denominada invariância de calibre. A propriedade da invariância de calibre nos permite selecionar os potenciais de modo que as relações da eletrodinâmica tomem a forma mais simples possível.

A condição de Lorentz (4.22) serve como um exemplo desta seleção. Podemos mostrar agora que esta condição corresponde a um calibre definido dos potenciais, chamado calibre de Lorentz. Suponhamos que a condição de Lorentz não seja satisfeita por um conjunto $\mathbf{A}_0$ e Φ_0, de modo que:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = \chi(\mathbf{r}, t) \neq 0 \quad .$$

Efetuando a transformação de calibre (4.25) e (4.26):

$$\mathbf{A}_0 \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\psi \qquad , \qquad \Phi_0 \rightarrow \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t} \quad ,$$

obtemos a equação:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \chi(\mathbf{r}, t) - \nabla^2\psi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad .$$

Impondo que a função ψ satisfaça a equação de d'Alembert:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \chi(\mathbf{r}, t) \quad .$$

vemos então que a condição de Lorentz será obedecida pelos potenciais **A** e Φ. Conforme mostraremos posteriormente, esta condição representa um vínculo invariante por transformações gerais na teoria da relatividade.

4.5 CONSERVAÇÃO DA ENERGIA NO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

A primeira conseqüência importante que segue das equações de Maxwell é a existência da energia do campo eletromagnético. Para determinar esta energia, vamos considerar um sistema fechado que consiste de um campo interagindo com partículas carregadas. Vamos calcular o trabalho *W* realizado pelas forças do campo sobre as partículas no volume *V*. Considerando a variação por unidade de tempo do trabalho feito pela força de Lorentz (1.48), podemos escrever que:

$$\frac{dW}{dt} = \int \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dv$$

onde **f** denota a densidade da força de Lorentz, isto é, a força eletromagnética por unidade de volume:

$$\mathbf{f} = \rho\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \quad . \tag{4.27}$$

Sendo o trabalho da força magnética nulo, tendo em vista que esta força é perpendicular à velocidade da partícula, obtemos:

$$\frac{dW}{dt} = \int \rho \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}\, dv = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}\, dv \quad . \tag{4.28}$$

Vamos transformar a relação (4.28) fazendo uso das equações de Maxwell. Expressando a densidade de corrente em termos dos campos através da equação (4.17.d), temos:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{c}{4\pi}\int \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})\, dv - \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dv \quad . \tag{4.29}$$

Como deve existir uma simetria entre os campos elétricos e magnéticos, vamos simetrizar a equação (4.29), adicionando ao lado direito a expressão:

$$-\frac{c}{4\pi}\int \mathbf{H} \cdot \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) dv$$

que é nula, em virtude da equação de Maxwell (4.17.c). Isto leva a:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{c}{4\pi}\int \left[\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})\right] dv - \tag{4.30}$$

$$-\int \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{8\pi}\right) dv \quad .$$

A primeira integral no lado direito da equação (4.30) pode ser transformada numa integral de superfície. De acordo com a relação (A.9), temos:

$$-\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})+\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})=\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$$

Assim:

$$\int\left[\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})-\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})\right]dv=-\int\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,dv=-\oint\mathbf{E}\times\mathbf{H}\cdot d\mathbf{a}$$

e podemos escrever em lugar de (4.30) que:

$$\frac{dW}{dt}=\int\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\,dv=-\frac{c}{4\pi}\oint\mathbf{E}\times\mathbf{H}\cdot d\mathbf{a}-\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}}{8\pi}\,dv \quad . \tag{4.31}$$

Considere o caso em que o volume de integração tende a infinito. Se os campos **E** e **B** tendem a zero mais rapidamente do que $1/r$ quando $r\rightarrow\infty$, então a integral de superfície se reduz a zero, e (4.31) fica:

$$\frac{dW}{dt}=-\frac{d}{dt}\int u\,dv \tag{4.32}$$

onde:

$$u=\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}}{8\pi} \quad . \tag{4.33}$$

Sendo que o lado esquerdo de (4.32) representa a taxa de trabalho realizado, o lado direito representa o decréscimo por unidade de tempo da energia do campo.

Neste caso podemos associar ao campo eletromagnético uma densidade de energia u dada pela fórmula (4.33). O fato de que o campo eletromagnético possui energia mostra obviamente que o campo tem uma existência tão real quanto as partículas.

Vamos considerar agora uma região do campo que tem um volume V delimitado por uma superfície S. Então a equação (4.31), que expressa a lei de conservação de energia, mostra que o decréscimo da energia do campo por unidade de tempo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}}{8\pi}\,dv$$

num certo volume V é igual à taxa de trabalho realizado pelas forças do campo dW/dt sobre as cargas contidas neste volume mais o fluxo:

$$\frac{c}{4\pi}\oint \mathbf{E}\times\mathbf{H}\cdot d\mathbf{a}$$

que flui através da área fechada S. É óbvio que este deve ser interpretado como o fluxo de energia que flui para fora do volume V. O fluxo de energia do campo eletromagnético é caracterizado pelo vetor **S**, denominado vetor de Poynting, que é igual a:

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} \quad . \tag{4.34}$$

Este vetor, descoberto por Poynting em 1884, representa em geral o fluxo de energia através de uma unidade de área numa direção perpendicular a **E** e **H**. Vamos fazer contudo a seguinte observação. O vetor **S** é determinado a menos de um rotacional de um certo vetor **b**. Supondo que $\mathbf{S}' = \mathbf{S} + \nabla \times \mathbf{b}$, temos:

$$\oint \mathbf{S}'\cdot d\mathbf{a}=\oint \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a}+\oint(\nabla\times\mathbf{b})\cdot d\mathbf{a}=\oint \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a} \quad ,$$

devido ao fato de que a integral de $\nabla \times \mathbf{b}$ sobre uma superfície fechada é sempre igual a zero. Um exemplo da indefinição na interpretação do vetor **S** é o caso de campos elétricos e magnéticos cruzados e estáticos. Nesta situação, o vetor de Poynting não é nulo, apesar de não haver realmente qualquer fluxo de energia (veja o problema 4.12).

Na derivação da expressão (4.32), supomos que a integral $\oint \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a}$ se reduz a zero quando integramos sobre uma superfície fechada com o raio infinitamente grande. Veremos que, nos processos de radiação, encontramos campos que variam com a distância como $E \sim B \sim 1/r$ quando $r \to \infty$. Neste caso, a integral $\oint \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a}$ sobre uma tal superfície terá um valor finito. Fisicamente, isto significa que o sistema que perde uma parte da sua energia emite radiação.

Escrevendo a lei de conservação da energia na forma diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \tag{4.35}$$

notamos a sua analogia com a equação da continuidade (4.12), que expressa a conservação da carga elétrica. O significado físico desta equação é o de que a taxa temporal de variação da densidade de energia eletromagnética mais a densidade do fluxo de energia que flui por unidade de tempo é igual ao negativo do trabalho realizado pelos campos sobre as cargas dentro de uma densidade de volume.

Vamos ilustrar o teorema de Poynting considerando o sistema mostrado na figura 4.4, que contém um resistor cilíndrico de comprimento l, raio a e condutividade σ.

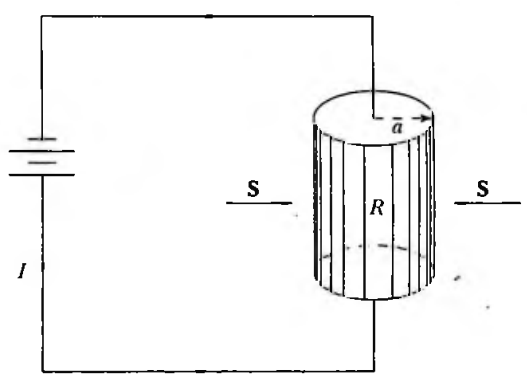


Figura. 4.4.

Usando a lei de Ampère, vemos que o campo magnético na superfície do cilindro é:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} = \frac{2I}{ca}\hat{\mathbf{e}}_{\phi} \quad .$$

Por outro lado, usando a lei de Ohm, obtemos que o campo elétrico é:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \frac{I}{\pi a^2 \sigma}\hat{\mathbf{e}}_z \quad .$$

Conseqüentemente, o vetor de Poynting (4.34) será dado por:

$$\mathbf{S} = -\frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \sigma}\hat{\mathbf{e}}_\rho \tag{4.36}$$

tendo a direção para dentro do cilindro. Assim, o fluxo do vetor de Poynting para dentro da área lateral do cilindro é:

$$\oint \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a} = \frac{l}{\pi a^2 \sigma} I^2 = RI^2 \quad . \tag{4.37}$$

Vemos que neste caso o campo eletromagnético fornece, através do fluxo associado ao vetor de Poynting, a energia que é dissipada termicamente.

4.6 CONSERVAÇÃO DO MOMENTO NO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

O campo eletromagnético possui, além de uma densidade de energia, também uma densidade de momento linear. Vamos considerar a mudança no momento de partículas confinadas num volume V. Usando a relação (4.27), podemos escrever:

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{part}}}{dt} = \int \rho\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)dv = \int \rho\,\mathbf{E}\,dv + \frac{1}{c}\int \mathbf{J}\times\mathbf{B}\,dv \tag{4.38}$$

onde $\mathbf{P}_{\text{part}}$ é o momento total das partículas. Considerando por simplicidade as equações de Maxwell no vácuo, vamos expressar ρ e $\mathbf{J}$ em termos dos campos, usando (4.17.a) e (4.17.d). Encontramos assim:

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{part}}}{dt} = \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E}(\nabla\cdot\mathbf{E})\,dv - \frac{1}{4\pi c}\int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\times\mathbf{B}\,dv + \tag{4.39}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int (\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}\,dv \quad .$$

Vamos simetrizar a equação acima, adicionando ao seu lado direito a expressão:

$$\frac{1}{4\pi}\left(\nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)\times\mathbf{E}+\frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\left(\nabla\cdot\mathbf{B}\right) \tag{4.40}$$

que é igual a zero. Temos então:

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{part}}}{dt}=-\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)dv+\frac{1}{4\pi}\int\{\mathbf{E}\left(\nabla\cdot\mathbf{E}\right)+\mathbf{B}\left(\nabla\cdot\mathbf{B}\right)- \tag{4.41}$$

$$-\mathbf{E}\times\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)-\mathbf{B}\times\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)\}dv \quad .$$

A segunda integral pode ser transformada numa integral de superfície. Esta transformação será feita mais adiante. É claro que a integral de superfície contendo dois campos vetoriais tenderá a zero quando $r\rightarrow\infty$, desde que os campos vetoriais decresçam mais rapidamente com a distância do que $1/r$. Então, considerando o limite de um volume infinito e desprezando a segunda integral em (4.41), chegamos à expressão:

$$\mathbf{P}_{\text{part}}+\frac{1}{4\pi c}\int\mathbf{E}\times\mathbf{B}\,dv=\text{constante} \quad . \tag{4.42}$$

Esta fórmula mostra que o momento total de um sistema fechado que consiste de campos e partículas é conservado. A quantidade:

$$\mathbf{g}=\frac{1}{4\pi c}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \tag{4.43}$$

representa a densidade do momento linear do campo eletromagnético. A transferência de momento para as partículas é acompanhada por um decréscimo do momento do campo.

Mostraremos agora que a segunda integral na forma (4.41) pode ser reduzida a uma integral de superfície. Sendo esta integral simétrica com respeito aos vetores **E** e **B**, vamos considerar apenas a integral:

$$\mathbf{I}=\int\left\{\mathbf{E}\left(\nabla\cdot\mathbf{E}\right)-\mathbf{E}\times\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)\right\}dv \quad . \tag{4.44}$$

Consideremos a divergência de $E_i\mathbf{E}$:

$$\nabla\cdot(E_i\mathbf{E}) = (\mathbf{E}\cdot\nabla)E_i + E_i(\nabla\cdot\mathbf{E}) \quad .$$

Aplicando o teorema da divergência (A.11) à integral volumétrica do lado esquerdo desta equação, podemos verificar para cada componente a relação vetorial:

$$\int(\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{E}\,dv = \oint(\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}})\mathbf{E}\,da - \int\mathbf{E}(\nabla\cdot\mathbf{E})\,dv \quad . \tag{4.45}$$

Por outro lado, usando a identidade vetorial (A.8), podemos escrever que:

$$\int(\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{E}\,dv = \int\nabla\left(\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}}{2}\right)dv - \int\mathbf{E}\times(\nabla\times\mathbf{E})\,dv \quad . \tag{4.46}$$

subtraindo (4.46) de (4.45), encontramos:

$$\int\left\{\mathbf{E}(\nabla\cdot\mathbf{E}) - \mathbf{E}\times(\nabla\times\mathbf{E})\right\}dv = -\int\nabla\left(\frac{1}{2}E^2\right)dv + \oint(\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}})\mathbf{E}\,da \quad . \tag{4.47}$$

Levando em consideração a relação vetorial (A.12) obtemos:

$$\mathbf{I} = \oint\left\{(\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}})\mathbf{E} - \hat{\mathbf{n}}\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\right\}da \quad . \tag{4.48}$$

Uma expressão análoga pode ser escrita para a parte magnética da integral, de modo que:

$$\frac{1}{4\pi}\int\left\{\mathbf{E}(\nabla\cdot\mathbf{E}) - \mathbf{E}\times(\nabla\times\mathbf{E}) + \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{B})\right\}dv$$

$$= \frac{1}{4\pi}\oint\left\{(\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}})\mathbf{E} + (\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}})\mathbf{B} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\right\}da \tag{4.49}$$

o que prova a nossa afirmação.

Podemos escrever a i-ésima componente do integrando no lado direito da equação (4.49) como $\sum_j T_{ij} n_j$, onde o tensor das tensões de Maxwell T_{ij} é dado por:

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left[E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\right)\delta_{ij} \right] \quad . \tag{4.50}$$

Conseqüentemente, a equação (4.41) pode ser escrita para cada componente como:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{P}_{\text{part}} + \mathbf{P}_{\text{cam}}\right)_i = \sum_j \oint_S T_{ij} n_j \, da \tag{4.51}$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é a normal externa à superfície fehada S. Como (4.51) representa o enunciado da lei de conservação do momento, a somatória $\sum_j T_{ij} n_j$ é a i-ésima componente do fluxo de momento, por unidade de área, através da superfície S, para dentro do volume V. Em outras palavras, é a força por unidade de área (pressão) transmitida através da superfície S que atua sobre o sistema combinado de partículas e campos no interior de V.

Como uma simples aplicação do tensor das tensões de Maxwell, vamos calcular a pressão exercida pelo campo elétrico sobre as placas do capacitor mostrado na figura 4.5.

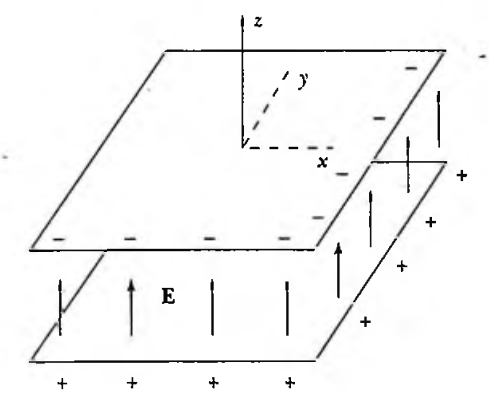


Figura 4.5.

Consideremos as placas horizontais paralelas ao plano $x-y$, sendo o campo elétrico vertical $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{z}}$. Então, as componentes do tensor (4.50) podem ser representadas pela matriz:

$$\left(T_{ij}\right)=\frac{1}{8\pi}\begin{pmatrix}-E_0^2 & 0 & 0\\ 0 & -E_0^2 & 0\\ 0 & 0 & E_0^2\end{pmatrix} \tag{4.52}$$

A pressão que atua, digamos, na placa inferior é igual ao fluxo de momento por unidade de área da placa, sendo dada pela componente T_{33} do tensor das tensões:

$$P=T_{33}=\frac{1}{8\pi}E_0^2 \quad . \tag{4.53}$$

Podemos escrever a lei de conservação do momento linear na forma diferencial aplicando o teorema da divergência ao lado direito da equação (4.51):

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{P}_{\text{part}}+\mathbf{P}_{\text{cam}}\right)_i=\sum_j\int_V\frac{\partial}{\partial x_j}\left(T_{ij}\right)dv \quad .$$

Usando as relações (4.27) e (4.43), e sendo o volume V arbitrário, esta equação pode ser colocada na forma de uma equação de continuidade:

$$f_i+\frac{d}{dt}\left(g_i\right)=\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(T_{ij}\right) \quad . \tag{4.54}$$

Num meio material a densidade de momento é dada por:

$$\mathbf{g}=\frac{\varepsilon}{4\pi c}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)=\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\mathbf{S} \tag{4.55}$$

sendo que o tensor das tensões de Maxwell tem a forma:

$$T_{ij}=\frac{1}{4\pi}\left[E_iD_j+B_iH_j-\frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right)\delta_{ij}\right] \quad . \tag{4.56}$$

Estes resultados, que generalizam as relações (4.43) e (4.50), são conhecidos como as expressões de Minkowski (1908).

A conservação do momento angular de um sistema de partículas e campos pode ser estudada usando um método análogo (veja o problema 4.14). O momento angular do campo eletromagnético é muito relevante em vários processos que serão discutidos posteriormente.

4.7 MASSA ELETROMAGNÉTICA

Uma das questões mais básicas da física refere-se à origem da massa. A teoria da eletrodinâmica oferece a possibilidade de explicar que, pelo menos parcialmente, a massa tem origens eletromagnéticas. Vamos mostrar que qualquer partícula carregada terá, em virtude de efeitos eletrodinâmicos, um momento proporcional à sua velocidade.

Com esta finalidade vamos considerar, por exemplo, um elétron que se move com velocidade uniforme no espaço, supondo que esta é pequena comparada com a velocidade da luz. Tomemos um modelo simples de elétron, supondo que a sua carga está uniformemente distribuída sobre a superfície de uma esfera de raio a, conforme mostra a figura 4.6.

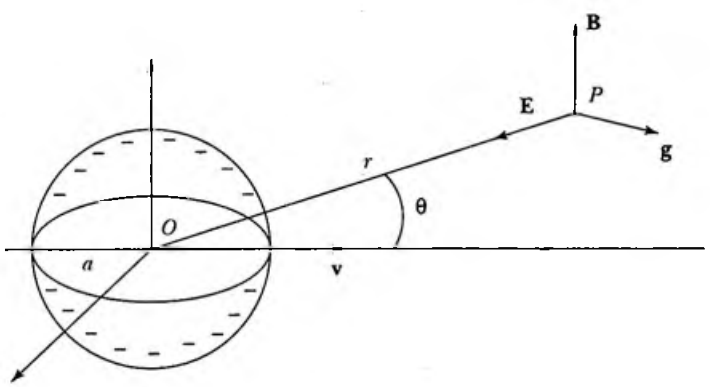


Figura 4.6

Num ponto P a uma distância r do centro da carga, o campo elétrico é radial. Conforme o problema (4.5), o campo magnético é $(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{E}$. Portanto, de acordo com a relação (4.43), a densidade de momento será:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c^2}\left[\mathbf{E}\times\left(\mathbf{v}\times\mathbf{E}\right)\right] \tag{4.57}$$

cuja magnitude é dada por:

$$g = \frac{v}{4\pi c^2} E^2 \operatorname{sen}\theta \quad . \tag{4.58}$$

Os campos são simétricos em torno da direção de movimento, de forma que, ao integrarmos **g** sobre todo o espaço, o momento resultante será paralelo a **v**. A componente de **g** nesta direção é g sen θ. O momento total será então:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v}}{4\pi c^2} \int E^2 \operatorname{sen}^2\theta 2\pi r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta dr = \frac{2}{3}\frac{\mathbf{v}}{c^2}\int_a^\infty E^2 r^2 dr \quad . \tag{4.59}$$

Sendo a magnitude do campo elétrico dada por e/r^2, obteremos:

$$\mathbf{p} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2}\mathbf{v} \quad . \tag{4.60}$$

Vemos que o momento eletromagnético é proporcional à velocidade da partícula. No caso do momento mecânico, a constante de proporcionalidade é chamada de massa mecânica. Analogamente, o coeficiente da velocidade na relação (4.60) será denominado massa eletromagnética do elétron:

$$m_{el} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2} \quad . \tag{4.61}$$

Esta massa não é exatamente igual à massa total de repouso da partícula. A razão é que não consideramos forças adicionais, como, por exemplo, aquela que mantém estável a distribuição da carga na partícula, que tem um papel importante neste problema.

Notemos que, na equação (4.61), o fator 2/3 resultou em virtude da hipótese particular da distribuição da carga do elétron. Por exemplo, se a carga fosse distribuída uniformemente através do volume da esfera, o fator 2/3 seria substituído por 4/5. Com exceção destes fatores e supondo que uma parcela relevante da massa do elétron tenha origem eletromagnética, a quantidade:

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} \sim 2{,}8 \times 10^{-13}\,\text{cm} \tag{4.62}$$

corresponderá ao raio clássico do elétron. Entretanto, em virtude de processos quânticos, não podemos atribuir muito significado físico a este resultado. Conforme veremos posteriormente, a grandeza r_0 ocorre também na descrição de vários outros fenômenos eletromagnéticos.

Neste ponto, vamos enfatizar que existe evidência experimental para a massa eletromagnética. Por exemplo, os mésons π, carregados positiva ou negativamente, têm uma massa 139,6 MeV/c^2, mas a massa do méson π neutro é de 135 MeV/c^2 (1 MeV = 10^6 eV = 1,6 · 10^{-6} erg). Esta diferença de massa tem origens eletromagnéticas, correspondendo a uma partícula de raio de 3 · 10^{-14} cm. Um outro exemplo é constituído pela diferença de massa entre o próton e o nêutron, que é de 1,3 MeV/c^2, sendo da ordem de 2,6 massas eletrônicas. Mas o nêutron é mais pesado que o próton! Contudo, devemos lembrar que estas partículas têm uma estrutura complicada e o cálculo de massa eletromagnética deve ser mais elaborado neste caso. Por exemplo, apesar de o nêutron não ter uma carga total diferente de zero, ele tem uma distribuição de carga no seu interior, conforme mostra a figura 12.4. Esta distribuição de carga, obtida a partir de experiências de espalhamento de elétrons, indica que o nêutron é semelhante, em um certo sentido, a um próton envolvido por uma nuvem de mésons π negativos.

PROBLEMAS

1. Considere um campo magnético dado por: $\mathbf{B}(t) = B_0 t \hat{e}_z$. Supondo $\Phi = 0$ e usando a simetria em torno do eixo z, calcule o potencial vetor $\mathbf{A}$ e determine o campo elétrico induzido. Através de uma integração direta, prove que a lei de Faraday está satisfeita.

2. Um disco condutor de raio a, espessura d e condutividade σ é colocado num campo magnético paralelo ao seu eixo de simetria. Sendo $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 \operatorname{sen} \omega t$, encontre a densidade de corrente induzida em todos os pontos do disco.

3. Uma casca esférica condutora de raio a gira com velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{e}}_z$ num campo magnético uniforme dado por $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{e}}_z$. Calcule a força eletromotriz gerada entre o pólo e um ponto situado no círculo equatorial.

4. No problema anterior, a força eletromotriz induzida produz sobre a casca girante um potencial eletrostático $\Phi(\theta)$. Tomando o zero do potencial no infinito, mostre que a densidade de carga superficial induzida é:

$$\rho_S(\theta) = -\frac{5\omega a B_0}{12\pi c} P_2(\cos\theta)$$

Verifique que a carga total girante se anula.

5. Considere uma carga q movendo-se com velocidade uniforme $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{e}}_z$ ao longo do eixo z. Construa um círculo fixo de raio a centrado na origem e situado *no plano* $x-y$. Calcule a corrente de deslocamento $(1/c)(d/dt)\int \mathbf{D}\cdot\hat{n}da$ através deste círculo, em função da posição e da velocidade da carga. Em seguida, calcule o campo magnético no círculo, usando a forma integral da lei de Ampère-Maxwell. Supondo que $v \ll c$, mostre que este resultado é consistente com a lei de Biot-Savart colocada na forma:

$$\mathbf{B} = \frac{q}{c}\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{r}}{r^3}$$

6. Considere a variação da velocidade do elétron numa órbita circular no átomo, devido à presença de um campo magnético externo **B**. Mostre que a variação correspondente da energia cinética do elétron é dada por:

$$\Delta T = \frac{e}{2mc}\mathbf{L}\cdot\mathbf{B} = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$$

onde $\boldsymbol{\mu}$ é o momento magnético associado com o momento angular orbital **L** do elétron.

7. Mostre que a lei de Ampère-Maxwell (4.17.d) pode ser escrita numa forma microscópica, explicitando as quatro classes de correntes que são fontes do campo magnético:

$$\nabla\times\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + 4\pi\nabla\times\mathbf{M} + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

Interprete estas correntes fisicamente. Qual é a corrente implícita na equação de continuidade (4.12)?

8. Vimos que a lei de Ampère (1.30) implica a lei de Biot-Savart (1.33). Procedendo por analogia, mostre que a lei de Faraday (4.5) implica a relação:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi c}\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \times \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, dv' \quad .$$

Considere agora um anel fino de aço cujo raio maior é a, sendo a sua área interna igual a A. Um fio enrolado toroidalmente sobre o anel é percorrido por uma corrente que produz o campo magnético $B(t)$ no aço. Mostre que o campo elétrico no eixo do anel é:

$$\mathbf{E} = -\frac{Aa^2}{2c\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}\left(\frac{dB}{dt}\right)\hat{\mathbf{e}}_z$$

onde z é medido a partir do plano do anel.

9. Um capacitor de placas paralelas consiste de duas placas circulares de raio a. A separação das placas é l, sendo o espaço entre elas preenchido por um material com constante dielétrica ε. O capacitor é carregado num circuito contendo uma fonte eletromotriz V_0 e um resistor R. Sendo o circuito fechado no tempo $t = 0$, determine as seguintes quantidades em função do tempo: a) campo elétrico; b) campo magnético; c) vetor de Poynting e d) densidade de energia.

10. Considere um capacitor de placas circulares e paralelas, análogo ao do problema anterior. Em adição à constante dielétrica ε, o material entre as placas tem uma condutividade σ. O capacitor é carregado ao potencial V_0 por uma bateria, que é desconectada no instante $t = 0$. a) Ache a carga livre no capacitor em função do tempo; b) Determine a densidade de corrente livre, a densidade de corrente de polarização e a densidade de corrente de deslocamento $(1/4\pi)(\partial \mathbf{E}/\partial t)$ dentro do capacitor; c) Calcule o campo magnético dentro do capacitor.

11. Considere um condutor de forma arbitrária localizado no vácuo. Se o condutor é carregado, mostre que a carga se distribuirá de maneira a minimizar a energia eletrostática.

12. É possível definir o vetor de Poynting para campos elétricos e magnéticos estáticos na ausência de correntes, apesar de não termos neste caso um fluxo de energia. Mostre que a integral de superfície de $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ se anula sobre uma superfície fechada.

13. Usando as equações da magnetostática, mostre explicitamente que a divergência do tensor de Maxwell

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left(B_i H_j - \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\delta_{ij} \right)$$

é igual à ~~i~~-ésima componente da densidade de força magnética:

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(T_{ij}\right) = \frac{1}{c}\left(\mathbf{J}\times\mathbf{B}\right)_i \quad .$$

14. Discutir a conservação do momento angular para um sistema macroscópico de fontes e de campos eletromagnéticos no vácuo. Mostrar que as formas diferencial e integral da lei de conservação são:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{L}_{part} + \mathcal{L}_{cam}\right) + \nabla\cdot\vec{M} = 0$$

e

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(\mathcal{L}_{part} + \mathcal{L}_{cam}\right) dv + \int_S \vec{M}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, da = 0 \quad ,$$

onde a densidade de momento angular do campo é:

$$\mathcal{L}_{cam} = \mathbf{r}\times\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c}\mathbf{r}\times\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)$$

e o fluxo do momento angular é descrito pelo tensor:

$$\overleftrightarrow{M} = \overleftrightarrow{T} \times \mathbf{r} \quad ,$$

onde $\overleftrightarrow{T}$ é o tensor das tensões de Maxwell.

Usamos nas fórmulas acima a notação diádica para M_{ij} e T_{ij}. A seta bifrontal tem um significado bastante óbvio. Por exemplo $\overleftrightarrow{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ é um vetor cuja i-ésima componente é $\sum_j M_{ij} n_j$.

15. Considere uma partícula cuja carga q é uniformemente distribuída através do volume de uma esfera de raio a. Se a partícula se move com velocidade uniforme $\mathbf{v}$ no espaço, mostre que o momento eletromagnético será:

$$\mathbf{p} = \frac{4}{5} \frac{q^2}{ac^2} \mathbf{v} \quad .$$

5

RADIAÇÃO POR SISTEMAS DE CARGAS E CORRENTES

Neste capítulo vamos estudar o importante processo de radiação por sistemas de cargas e correntes dependentes do tempo. A relação entre a radiação e as suas fontes pode ser convenientemente expressa em termos das funções de potencial escalar e vetor. Trataremos os sistemas radiativos de dipolo elétrico, dipolo magnético, quadrupolo elétrico e antenas. Os fenômenos de interferência resultantes de algumas configurações simples de correntes são também exemplificados.

5.1 POTENCIAIS RETARDADOS

Vimos no capítulo 1 que, no caso de cargas em repouso ou correntes estacionárias, os potenciais escalar e vetor podem ser calculados a partir das relações:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv' \quad ; \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv' \quad . \tag{5.1}$$

Por outro lado, se as cargas estão em movimento ou se as correntes têm uma dependência temporal, ocorre a seguinte dificuldade. Consideremos, por exemplo, o cálculo do potencial escalar na posição $\mathbf{r}$ e no tempo t. Não podemos calcular $\Phi(\mathbf{r},t)$ integrando $\rho(\mathbf{r},t)$ se as cargas estiverem em movimento arbitrário, tendo em vista que os campos elétricos associados com as cargas se propagam com velocidade finita c. Portanto, para calcular o potencial num dado ponto e no

instante t, devemos conhecer as posições das cargas, não no tempo t, mas nos instantes anteriores $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$. Conforme vemos da figura 5.1, estes instantes correspondem aos tempos em que os campos elétricos foram produzidos pelas

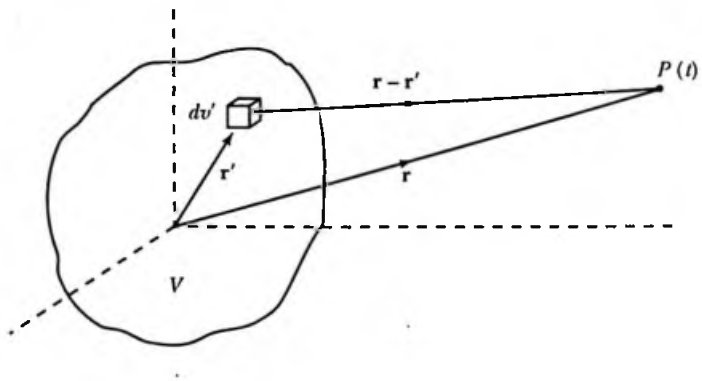


Figura 5.1

cargas nas posições $\mathbf{r}'$. Estes efeitos chegarão portanto no ponto P no instante t. Assim, o cálculo dos campos individuais deve ser efetuado no tempo retardado

$$\bar{t} = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \quad . \tag{5.2}$$

Portanto, no caso geral, devemos modificar as expressões anteriores dos potenciais Φ e $\mathbf{A}$ para:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', \bar{t})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \tag{5.3}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', \bar{t})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad . \tag{5.4}$$

Estes potenciais são denominados potenciais retardados; nos integrandos destas expressões, as densidades de carga e corrente devem ser avaliadas nos tempos retardados $\bar{t} = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$, onde $\mathbf{r}'$ é o raio vetor no tempo $\bar{t}$.

Vamos mostrar agora que, de fato, estes potenciais são soluções das equações não-homogêneas (4.23) e (4.24). Será suficiente mostrar isto para Φ, sendo que

a verificação para **A** é inteiramente análoga. Para isto, precisamos das derivadas $\partial^2\Phi/\partial t^2$ e $\nabla^2\Phi$. Da equação (5.2) vemos que $\partial\tilde{t}/\partial t = 1$, de modo que

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \int \frac{dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\frac{\partial^2}{\partial\tilde{t}^2}\rho(\tilde{t},\mathbf{r}') \quad . \tag{5.5}$$

Em seguida, sendo que:

$$\nabla\Phi = \int\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\rho(\tilde{t},\mathbf{r}')\,\nabla\,\tilde{t} + \rho(\tilde{t},\mathbf{r}')\,\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\right]dv'$$

teremos:

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi \;= \int dv'\Bigg\{&\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\frac{\partial^2}{\partial\tilde{t}^2}\rho(\tilde{t},\mathbf{r}')(\nabla\tilde{t})^2 + \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\rho(\tilde{t},\mathbf{r}')\nabla^2\tilde{t}\\ &+\; 2\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\rho(\tilde{t},\mathbf{r}')\,\nabla\tilde{t}\cdot\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \rho(\tilde{t},\mathbf{r}')\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\Bigg\}\end{aligned} \tag{5.6}$$

Aqui, precisamos calcular $\nabla\tilde{t}$ e $\nabla^2\tilde{t}$. A partir da relação (5.2), é fácil mostrar que

$$\nabla\tilde{t} = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad ; \quad \nabla^2\tilde{t} = -\frac{2}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{5.7}$$

Substituindo estas expressões para $\nabla\tilde{t}$ e $\nabla^2\tilde{t}$ na equação (5.6), encontramos que o segundo e o terceiro termo do lado direito se cancelam. Assim, ficamos com

$$\nabla^2\Phi = \int\left[\frac{1}{c^2}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{\partial^2}{\partial\tilde{t}^2}\rho(\tilde{t},\mathbf{r}') + \rho(\tilde{t},\mathbf{r}')\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\right]dv'$$

Combinando isto com a equação (5.5), teremos:

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \int dv'\rho(\bar{t},\mathbf{r}')\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \tag{5.8}$$

Finalmente, usando a propriedade da função delta:

$$\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad ,$$

vemos que a expressão do lado direito da equação (5.8) é $-4\pi\rho(t,\mathbf{r})$. Isto confirma que o potencial retardado Φ é uma solução da equação de onda não-homogênea (4.24). Este resultado foi obtido pela primeira vez por Riemann em 1858.

5.2 CAMPOS DE UMA FONTE OSCILANTE LOCALIZADA

Vamos considerar distribuições de cargas e correntes que variam harmonicamente com o tempo. Isto é conveniente, pois, se a dependência temporal do sistema não satisfizer este critério, podemos decompor esta em componentes harmônicos através da análise de Fourier. Se ω é a freqüência angular da dependência temporal, escrevemos então:

$$\rho(\mathbf{r},t) = e^{-i\omega t}\rho(\mathbf{r}) \quad ; \quad \mathbf{J}(\mathbf{r},t) = e^{-i\omega t}\mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad . \tag{5.9}$$

Como é usual, a parte real destas expressões denota as grandezas físicas. Substituindo estas relações nas expressões (5.3) e (5.4) para os potenciais retardados e lembrando que:

$$\omega\bar{t} = \omega t - \frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \equiv \omega t - k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$$

podemos escrever, por exemplo,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = e^{-i\omega t}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad , \tag{5.10}$$

onde **A** (**r**) é dado por:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int dv'\, \mathbf{J}(\mathbf{r}')\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \qquad (5.11)$$

Aqui estaremos interessados no caso em que a dimensão da fonte é muito menor que o comprimento da onda irradiada: $\lambda = 2\pi/k = 2\pi c/\omega$. É claro que, se o tamanho da fonte é comparável ao comprimento de onda da radiação, então as várias partes do sistema irão interferir coerentemente. Este caso será discutido mais adiante. Então, na região de grandes distâncias, que é relevante para a observação da radiação, teremos a condição:

$$d \ll \lambda \ll r \qquad (5.12)$$

Assim, tendo $kr \gg 1$, a exponencial em (5.11) oscila rapidamente e determina o comportamento do potencial vetor na região de radiação. Nesta região, é suficiente usar a aproximação:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \simeq r - \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}' \qquad (5.13)$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor unitário na direção **r**. Como consideramos r' infinitesimal comparado com r, o fator $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ se modifica muito pouco com a variação de $\mathbf{r}'$, de modo que pode ser substituído por $1/r$. Então, podemos escrever o potencial vetor de radiação como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{cr}\int \mathbf{J}(\mathbf{r}')\, e^{-ik\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}'}dv' \qquad (5.14)$$

Sendo as dimensões da fonte pequenas em comparação com o comprimento de onda, podemos expandir a exponencial:

$$e^{-ik\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}'} = 1 - ik\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}' - \frac{1}{2}k^2(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}')^2 + \cdots$$

Substituindo na expressão anterior, obtemos a expansão numa série de potências para o potencial vetor:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{cr}\left[\int \mathbf{J}(\mathbf{r}')dv' - ik\int \mathbf{J}(\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}')dv' + \cdots\right] \tag{5.15}$$

onde $k = \omega/c$.

Tendo em vista que kr' é pequeno em comparação com a unidade, é claro que os termos sucessivos no desenvolvimento de **A** diminuem rapidamente. Por isso, a radiação emitida pela fonte será proveniente principalmente do primeiro termo não-nulo na expansão (5.15).

Para determinar os campos elétricos e magnéticos de radiação, escrevemos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = e^{-i\omega t}\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad ; \quad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = e^{-i\omega t}\mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{5.16}$$

A indução magnética é dada por $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. É conveniente calcular o campo elétrico a partir da lei de Maxwell (4.17.d), que no exterior da fonte se reduz a:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Portanto, usando as relações (5.16), teremos:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{5.17.a}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{i}{k}\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{i}{k}\nabla \times \left[\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})\right] \quad . \tag{5.17.b}$$

Isto elimina a necessidade de conhecermos o potencial escalar Φ e simplifica consideravelmente o nosso trabalho.

Como já mencionamos, os campos de radiação devem decrescer com a distância como $1/r$, para que haja um fluxo não-nulo de energia irradiada pela fonte. Assim, quando se quer apenas o termo dominante que é relevante na região de grandes distâncias, podemos escrever aproximadamente os campos de radiação na forma:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \simeq ik\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{5.18.a}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \simeq ik\left[\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}(\mathbf{r})\right] \times \hat{\mathbf{n}} \tag{5.18.b}$$

onde o potencial vetor de radiação é dado pela expansão (5.15). Observamos que a indução magnética é transversal ao raio vetor, sendo o campo elétrico perpendicular a **B** e $\hat{\mathbf{n}}$. Este comportamento é típico para os campos de radiação.

5.3 RADIAÇÃO DE DIPOLOS ELÉTRICOS

Quando se considera somente o primeiro termo em (5.15), o potencial vetor é:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{cr} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}')dv' \quad . \tag{5.19}$$

Para escrever esta integral numa forma mais familiar, vamos avaliar a componente x de $\int \mathbf{J}(\mathbf{r}')\,dv'$:

$$\int J_x(\mathbf{r}')dv' = \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' x' dv' =$$

$$= \int \nabla' \cdot \left(x'\mathbf{J}(\mathbf{r}')\right) dv' - \int x' \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')dv' \quad .$$

A primeira integral do lado direito desta equação pode ser transformada numa integral de superfície que envolve completamente a distribuição de corrente. Nesta superfície $\mathbf{J} = 0$, de modo que generalizando para três dimensões a relação acima obtemos:

$$\int \mathbf{J}(\mathbf{r}')dv' = -\int \mathbf{r}'\left(\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')\right)dv' \quad . \tag{5.20}$$

Em seguida, usando a equação da continuidade, temos:

$$\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = i\omega\rho(\mathbf{r}') \quad . \tag{5.21}$$

Substituindo este resultado em (5.20), encontramos que:

$$\int \mathbf{J}(\mathbf{r}')\, dv' = -i\omega \int \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')dv' \quad .$$

Assim, o potencial vetor será:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -ik\,\mathbf{p}\frac{e^{ikr}}{r} \tag{5.22}$$

onde:

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}'\,\rho(\mathbf{r}')\, dv' \tag{5.23}$$

é o momento de dipolo elétrico, conforme a definição da eletrostática.

Os campos de dipolo elétrico na região de radiação, obtidos através da equação (5.18), têm a forma:

$$\mathbf{B} = k^2(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p})\frac{e^{ikr}}{r} \tag{5.24.a}$$

$$\mathbf{E} = k^2(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p}) \times \hat{\mathbf{n}}\frac{e^{ikr}}{r} \quad . \tag{5.24.b}$$

O vetor de Poynting pode ser agora calculado e promediado sobre um ciclo. Isto requer o cálculo das partes reais de **E** e **B** respectivamente, tomando-se então a média temporal do produto vetorial correspondente. Podemos simplificar o cálculo fazendo as seguintes observações:

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{c}{4\pi}\left\langle \frac{\mathbf{E}+\mathbf{E}^*}{2} \times \frac{\mathbf{B}+\mathbf{B}^*}{2} \right\rangle$$

$$= \frac{c}{16\pi}\left\langle \mathbf{E}\times\mathbf{B} + \mathbf{E}\times\mathbf{B}^* + \mathbf{E}^*\times\mathbf{B} + \mathbf{E}^*\times\mathbf{B}^* \right\rangle \quad .$$

Sendo $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ proporcional a $e^{-2i\omega t}$, a sua média temporal sobre um ciclo será zero. A mesma conclusão é válida para $\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}^*$. Assim, tendo em vista que $\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*$ não tem dependência temporal, teremos:

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}\left(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*\right) \quad . \tag{5.25}$$

A potência média irradiada por unidade de ângulo sólido será então dada por:

$$\frac{d\overline{P}}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}\left[r^2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*\right] \tag{5.26}$$

onde $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são expressos por (5.24). Encontramos assim que:

$$\frac{d\overline{P}}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} k^4 \left|\left(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p}\right) \times \hat{\mathbf{n}}\right|^2 \quad . \tag{5.27}$$

Quando as componentes de $\mathbf{p}$ têm todas a mesma fase, a distribuição angular tem a configuração típica de um dipolo:

$$\frac{d\overline{P}}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} k^4 |\mathbf{p}|^2 \operatorname{sen}^2\theta \quad . \tag{5.28}$$

onde o ângulo sólido θ é medido a partir da direção de $\mathbf{p}$. A potência total irradiada será:

$$\overline{P} = \frac{ck^4}{3} p^2 = \frac{\omega^4}{3c^3} p^2 \quad . \tag{5.29}$$

Um exemplo interessante de um sistema radiante de cargas é constituído pelo átomo. Aqui o tamanho do sistema é da ordem: $d \approx 1\text{Å}$, sendo o comprimento da onda emitida tipicamente da ordem: $\lambda \approx 5 \cdot 10^3$ Å. Portanto a condição $d \ll \lambda$ é muito bem satisfeita neste caso. É útil definir a vida média τ por:

$$\tau = \hbar\omega / \bar{P} \tag{5.30}$$

que representa o tempo necessário para o átomo emitir um fóton de energia $\hbar\omega$. Embora $\bar{P}$ deva ser calculada de acordo com a mecânica quântica, podemos estimar que a magnitude do dipolo é dada pelo produto do raio atômico e da carga eletrônica, de maneira que:

$$\tau_p \approx \frac{3\hbar c^3}{\omega^3 e^2 d^2} \tag{5.31}$$

Para uma freqüência ótica típica, a equação (5.31) implica uma vida média de 10^{-7}s.

Nas discussões anteriores, os sistemas apresentaram simetria axial, de maneira que os campos, e portanto a radiação, foram independentes do ângulo azimutal. Mas, para sistemas como aquele mostrado na figura (5.2), que representa dois dipolos separados lateralmente por uma distância Δ, a distribuição angular é mais complicada, sendo a radiação dependente do ângulo ϕ. Note que, neste caso, a dimensão da fonte poderá ser comparável ao comprimento da onda irradiada!

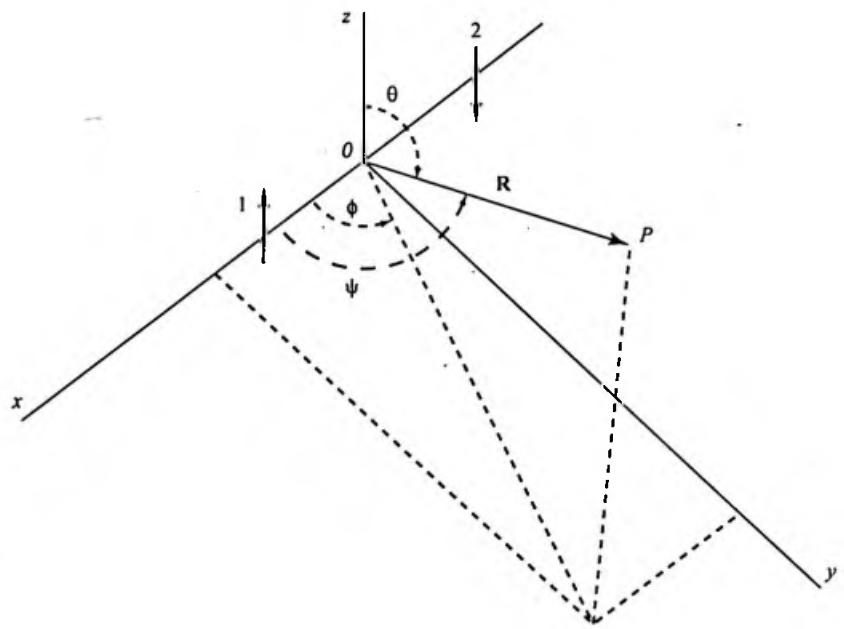


Figura 5.2

Para procedermos, notemos que o campo magnético de um dipolo (5.24.a) pode ser escrito como:

$$B_\phi = -\frac{\omega^2 p}{c^2 r}\operatorname{sen}\theta\, e^{ikr}$$

onde r é a distância do dipolo ao ponto de observação. Para o dipolo 1, esta distância é menor que R por um valor $(\Delta/2)\cos\psi$. Analogamente, para o dipolo 2 temos que r é maior que R por uma distância $(\Delta/2)\cos\psi$. Assim, teremos que o campo magnético do sistema de dipolos (com fases opostas) será:

$$B_\phi^{\text{tot}} = \frac{\omega^2 p}{c^2 R}\operatorname{sen}\theta\, e^{ikR}\left[\exp\left(\frac{ik\Delta}{2}\cos\psi\right) - \exp\left(-\frac{ik\Delta}{2}\cos\psi\right)\right] \quad . \tag{5.32}$$

Para simplificarmos a discussão consideremos o caso em que $\Delta = \lambda/2$. Usando a geometria da figura onde $\cos\psi = \operatorname{sen}\theta\cos\phi$, poderemos então escrever:

$$B_\phi^{\text{tot}} = 2i\frac{\omega^2 p}{c^2 R}\operatorname{sen}\theta\, e^{ikR}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\operatorname{sen}\theta\right) \quad . \tag{5.33}$$

Portanto, a distribuição angular da radiação emitida será:

$$\frac{d\overline{P}}{d\Omega} = \frac{\omega^4 p^2}{2\pi c^3}\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\phi\right) \quad . \tag{5.34}$$

Podemos expressar este resultado em termos da distribuição angular nos planos mutuamente perpendiculares *xz*, *yz*, *xy*:

$$\begin{aligned}
&\text{plano: } x-z\,(\phi=0): && \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\\
&\text{plano: } y-z\,(\phi=\pi/2): && 0\\
&\text{plano: } x-y\,(\theta=\pi/2): && \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right) \quad .
\end{aligned} \tag{5.35}$$

As configurações da radiação nos planos $x-z$ e $x-y$ são mostradas na figura 5.3. Estas formas podem ser qualitativamente entendidas a partir da geometria da figura 5.2:

(a) não pode haver radiação na direção $\theta = 0$ ou π visto que os campos de dipolo se anulam nesta direção;

(b) sendo que os campos ao longo do eixo y se anulam em virtude do fato de que os dipolos oscilam em oposição de fase, não pode haver radiação na direção $\phi = \pi/2$;

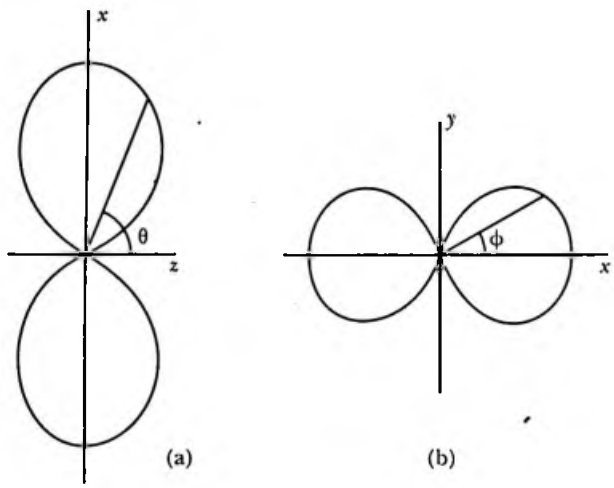


Figura 5.3

(c) sendo que os campos ao longo do eixo x se somam, haverá um máximo de radiação para $\theta = \pi/2$.

A distribuição angular da radiação emitida por um sistema de dipolos que oscilem em fase é discutida no problema 5.5.

5.4 RADIAÇÃO DE DIPOLO MAGNÉTICO

O segundo termo na expansão (5.15) leva ao potencial vetor:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -ik\frac{e^{ikr}}{cr}\int \mathbf{J}(\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}')\,dv' \tag{5.36}$$

Esta expressão pode ser escrita como uma soma de dois termos, um dos quais produz uma indução magnética transversal, e o outro produz um campo elétrico

transversal. Para separar estas contribuições, procederemos por analogia ao método usado em (2.35), decompondo o produto $(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{J}$ em uma parte simétrica e uma parte anti-simétrica em $\mathbf{J}$ e $\mathbf{r}'$:

$$(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{J} = \frac{1}{2}\left[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{J} + (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{J})\mathbf{r}'\right] + \frac{1}{2}\left[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{J} - (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{J})\mathbf{r}'\right] \tag{5.37}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{J} + (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{J})\mathbf{r}'\right] + \frac{1}{2}(\mathbf{r}'\times\mathbf{J})\times\hat{\mathbf{n}} \quad .$$

Vamos examinar primeiramente a parte anti-simétrica:

$$\mathbf{A}_m(\mathbf{r}) = ik\frac{e^{ikr}}{r}\hat{\mathbf{n}}\times\int\frac{\mathbf{r}'\times\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{2c}dv' \quad . \tag{5.38}$$

A integral no lado direito é precisamente o momento magnético (2.39) da distribuição de correntes. Então:

$$\mathbf{A}_m(\mathbf{r}) = ik\frac{e^{ikr}}{r}\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{m} \quad . \tag{5.39}$$

Tomando o rotacional e desprezando qualquer termo que seja proporcional a $1/r^2$, encontramos para o campo magnético de radiação:

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}_m \simeq k^2(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{m})\times\hat{\mathbf{n}}\frac{e^{ikr}}{r} = k^2\left[\mathbf{m} - (\mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}\right]\frac{e^{ikr}}{r} \quad . \tag{5.40}$$

Analogamente, usando (5.17.b), vemos que o campo elétrico será:

$$\mathbf{E} = \frac{i}{k}(\nabla\times\mathbf{B}) \simeq -\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{B} = -k^2(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{m})\frac{e^{ikr}}{r} \quad . \tag{5.41}$$

Note a grande analogia com as expressões (5.24) que obtivemos para os campos de radiação do dipolo elétrico. Vemos que a indução magnética na presença de

um dipolo magnético é igual ao campo elétrico devido a um dipolo elétrico, substituindo-se $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{m}$. Analogamente, o campo elétrico devido a um dipolo magnético é proporcional ao campo magnético de um dipolo elétrico.

Uma conclusão análoga é válida para a potência emitida por um dipolo magnético oscilante, que pode ser obtida a partir da equação (5.28) fazendo $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{m}$. Teremos portanto:

$$\frac{d\bar{P}}{d\Omega} = \frac{ck^4}{8\pi}|\mathbf{m}|^2 \operatorname{sen}^2\theta \tag{5.42}$$

sendo θ o ângulo entre $\mathbf{m}$ e $\mathbf{r}$. A potência média total é:

$$\bar{P} = \frac{ck^4 m^2}{3} = \frac{\omega^4}{3c^3} m^2 \tag{5.43}$$

onde m denota o módulo do dipolo magnético $\mathbf{m}$.

Um exemplo de um dipolo magnético oscilante é o de uma espira percorrida por uma corrente alternada, situada no plano $x-y$ da figura 5.4.

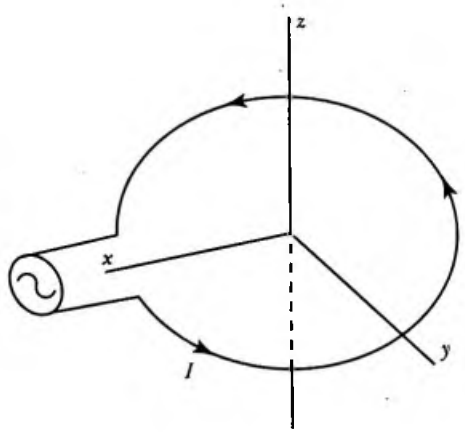


Figura 5.4

Podemos aplicar (5.43) a um sistema atômico obtendo a vida média [veja(5.30)]:

$$\tau_m = 3\hbar c^3/\omega^3 m^2 \tag{5.44}$$

onde m deve ser calculado de acordo com a mecânica quântica. Para uma estimativa, é suficiente lembrar que o momento magnético devido ao movimento orbital é relacionado com o momento angular por [veja equação (2.50)]:

$$\mathbf{m} = -\frac{e}{2Mc}\mathbf{L} \tag{5.45}$$

onde M é a massa da partícula em movimento. Tipicamente, o momento angular é da ordem $\hbar$, de maneira que:

$$\tau_m \approx \frac{3\hbar c^3}{\omega^3}\left(\frac{2Mc}{e\hbar}\right)^2 \tag{5.46}$$

Esta vida média é maior do que a vida média devida a uma transição de dipolo elétrico por um fator:

$$\frac{\tau_m}{\tau_p} \approx \left(Mcd/\hbar\right)^2 \sim 10^5 \tag{5.47}$$

onde d é da ordem do raio orbital do sistema atômico, e M representa a massa do elétron. Conseqüentemente, a transição de dipolo magnético é usualmente muito menos provável do que a transição elétrica. É claro que, se esta última foi proibida por alguma regra de seleção, então a contribuição magnética poderá ser relevante.

Para sistemas nucleares, a razão (5.47) é bem menor. Isto é devido em parte ao fato de que o momento magnético devido ao spin do prôton é maior do que aquele estimado em (5.45), por um fator giromagnético $g \simeq 2{,}79$. Este momento magnético resulta da complexa estrutura interna do próton, indicada pela figura 12.4. Consideremos, por exemplo, um núcleo com raio 7×10^{-13} cm que emite uma radiação gama com energia de 1 MeV. Neste caso, a probabilidade de transição de dipolo magnético, relativa à transição de dipolo elétrico, é cerca de 100 vezes maior que aquela correspondente aos sistemas atômicos.

5.5 RADIAÇÃO DE QUADRUPOLO ELÉTRICO

Voltemos agora ao termo simétrico da equação (5.37) que é denominado, por motivos que ficarão claros a seguir, de potencial de quadrupolo elétrico.

$$\mathbf{A}_Q(\mathbf{r}) = -ik\frac{e^{ikr}}{2cr}\int\left[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{J} + (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{J})\mathbf{r}'\right]dv' \quad . \tag{5.48}$$

Considere a primeira parte da integral, examinando a sua componente x:

$$\int(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}')J_x\,dv' = \int(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{J}\cdot\nabla' x'\,dv'$$

$$= \int\nabla'\cdot\left[x'(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{J}\right]dv' - \int x'\,\nabla'\cdot\left[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{J}\right]dv' \quad .$$

Podemos eliminar a primeira destas duas integrais, transformando-a numa integral de superfície e notando que $\mathbf{J} = 0$ na superfície. Assim:

$$\int(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}')J_x\,dv' = -\int x'\,\nabla'\cdot\left[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{J}\right]dv'$$

$$= -\int x'\,\nabla'(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}')\cdot\mathbf{J}\,dv' - \int x'(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}')\,\nabla'\cdot\mathbf{J}\,dv' \quad .$$

Mas $\nabla'(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}') = \hat{\mathbf{n}}$ e lembrando a equação da continuidade (5.21) podemos escrever que:

$$\int(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}')J_x\,dv' = -\int x'(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{J})\,dv' - i\omega\int x'(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')dv' \quad .$$

Generalizando para três dimensões, concluímos que:

$$\int(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{J}\,dv' = -\int\mathbf{r}'(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{J})\,dv' - i\omega\int\mathbf{r}'(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')dv' \quad .$$

Substituindo este resultado na expressão (5.48) encontramos para $\mathbf{A}_Q$:

$$\mathbf{A}_Q(\mathbf{r}) = -k^2\frac{e^{ikr}}{2r}\int\mathbf{r}'(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')\,dv' \quad . \tag{5.49}$$

Para proceder, tomaremos o rotacional de $\mathbf{A}_Q$ e determinaremos o campo magnético de radiação. Ignorando termos de ordem $1/r^2$, temos:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_Q = -ik^3 \frac{e^{ikr}}{2r} \hat{\mathbf{n}} \times \int \mathbf{r}' (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \, dv' \quad . \tag{5.50.a}$$

O campo elétrico de radiação é dado, como sempre, por:

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{n}} \quad . \tag{5.50.b}$$

Vamos agora adicionar à expressão no lado direito da equação (5.50.a) um termo que é zero mas que é útil para escrever o campo magnético numa forma mais transparente. Temos:

$$\mathbf{B} = -ik^3 \frac{e^{ikr}}{6r} \hat{\mathbf{n}} \times \int \left[3\mathbf{r}' (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}') - \hat{\mathbf{n}} r'^2 \right] \rho(\mathbf{r}') \, dv' \quad . \tag{5.51}$$

Usando a definição (2.15) do tensor de quadrupolo:

$$Q_{ij} = \int \left(3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij} \right) \rho(\mathbf{r}') \, dv' \tag{5.52}$$

a integral em (5.51) pode ser escrita:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \int \left[3\mathbf{r}' (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}') - \hat{\mathbf{n}} r'^2 \right] \rho(\mathbf{r}') \, dv' = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{n}}) \tag{5.53}$$

onde o vetor $\mathbf{Q}(\hat{\mathbf{n}})$ tem as componentes:

$$Q_i(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_j Q_{ij} n_j \tag{5.54}$$

Notemos que o vetor $\mathbf{Q}$ depende não só da magnitude do quadrupolo, como também da direção do ponto de observação. Desta forma, a indução magnética será:

$$\mathbf{B} = -\frac{ik^3}{6}\frac{e^{ikr}}{r}\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{Q}(\hat{\mathbf{n}}) \tag{5.55}$$

que produz uma potência média por unidade de ângulo dada, de acordo com a equação (5.26), por:

$$\frac{d\bar{P}}{d\Omega} = \frac{c}{288\pi}k^6\left|\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{Q}(\hat{\mathbf{n}})\right|^2 \tag{5.56}$$

No caso mais geral, esta distribuição angular é bastante complicada. Entretanto, a expressão final da potência total é mais simples e pode ser calculada da seguinte forma: as integrações angulares sobre produtos das componentes retangulares de $\hat{\mathbf{n}}$ podem ser calculadas em termos dos valores das integrais $\int n_l\, n_j\, d\Omega$ e $\int n_i\, n_j\, n_l\, n_m\, d\Omega$. Obviamente, a primeira é nula a não ser que $l = j$ (para $l \neq j$, o integrando é ímpar por uma inversão da direção). Assim:

$$\int n_l\, n_j\, d\Omega = b\delta_{lj}$$

onde b é uma constante. Para determinar esta constante, tomamos $l = j$ e somamos sobre j. Sendo $\hat{\mathbf{n}}$ um vetor unitário, isto implica que $4\pi = 3b$ de maneira que:

$$\int n_l\, n_j\, d\Omega = \frac{4\pi}{3}\delta_{lj} \quad . \tag{5.57a}$$

Para determinar o valor da segunda integral angular, notemos que devemos ter que:

$$\int n_i\, n_j\, n_l\, n_m d\Omega = b\left(\delta_{ij}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}\right)$$

visto que os índices devem ser iguais em pares para que o resultado não se anule. Também a expressão deve ser simétrica por uma troca de qualquer par de índices. Procedendo analogamente ao caso anterior, encontramos que $4\pi = 15b$ de forma que:

$$\int n_i n_j n_l n_m d\Omega = \frac{4\pi}{15}\left(\delta_{ij}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}\right) \quad . \tag{5.57b}$$

Usando as expressões (5.57.a) e (5.57.b), podemos escrever que:

$$\int \left|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{n}})\right|^2 d\Omega = \sum_{ijl} Q_{il}^* Q_{ij} \int n_l n_j d\Omega - \sum_{ijlm} Q_{ij}^* Q_{lm} \int n_i n_j n_l n_m d\Omega =$$

$$= 4\pi \left\{ \frac{1}{3}\sum_{i,j}\left|Q_{ij}\right|^2 - \frac{1}{15}\left[\sum_i Q_{ii}^* \sum_j Q_{jj} + 2\sum_{i,j}\left|Q_{ij}\right|^2 \right] \right\} \tag{5.58}$$

Tendo em vista que Q_{ij} é um tensor de traço nulo, o segundo termo se anula. Assim, a potência total irradiada por uma fonte de quadrupolo será:

$$\overline{P} = \frac{ck^6}{360}\sum_{i,j}\left|Q_{ij}\right|^2 = \frac{\omega^6}{360\,c^5}\sum_{i,j}\left|Q_{ij}\right|^2 \tag{5.59}$$

A potência irradiada varia com a sexta potência da freqüência, comparada com a quarta potência da freqüência que caracteriza a radiação de dipolo.

Um exemplo simples de uma fonte de quadrupolo é uma distribuição esferoidal de carga oscilante. Neste caso, os elementos não-diagonais de Q_{ij} se anulam, sendo os diagonais dados por (2.17) e (2.27):

$$Q_{33} \equiv Q_0 \qquad ; \qquad Q_{11} = Q_{22} = -\frac{1}{2}Q_0 \tag{5.60}$$

Usando a relação (5.54) teremos neste exemplo com simetria axial:

$$\mathbf{Q}(\hat{\mathbf{n}}) = -\frac{1}{2}Q_0 n_x \hat{\mathbf{e}}_1 - \frac{1}{2}Q_0 n_y \hat{\mathbf{e}}_2 + Q_0 n_z \hat{\mathbf{e}}_3$$

$$\left|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{n}})\right|^2 = \frac{9}{4}Q_0^2\left(n_x^2 + n_y^2\right)n_z^2 = \frac{9}{4}Q_0^2\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta \tag{5.61}$$

onde θ é o ângulo polar medido em relação ao eixo de simetria. Portanto, a distribuição angular da potência irradiada (5.56) será dada pela expressão:

$$\frac{d\bar{P}}{d\Omega} = \frac{ck^6}{128\pi} Q_0^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta \tag{5.62}$$

Note que, em virtude da simetria azimutal, esta expressão é independente do ângulo ϕ.

A configuração correspondente à relação (5.62) é mostrada na figura 5.5, com máximos em $\theta = \pi/4$ e $\theta = 3\pi/4$. A intensidade de radiação é zero ao longo do eixo z, se anulando também no plano $x - y$. A potência total será:

$$\bar{P} = \frac{ck^6}{240} Q_0^2 = \frac{\omega^6}{240c^5} Q_0^2 \quad . \tag{5.63}$$

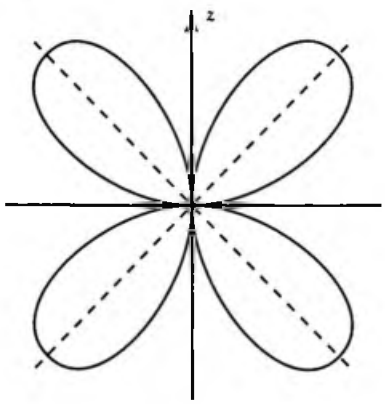


Figura 5.5

Podemos estimar a vida média (5.30) devida a uma transição de quadrupolo tomando em (5.63): $Q_0 \sim ed^2$. Então:

$$\tau_Q = \frac{\hbar\omega}{\bar{P}} \approx 240 \frac{\hbar c^5}{\omega^5} \frac{1}{\left(ed^2\right)^2} \quad . \tag{5.64}$$

Esta é maior do que a vida média devida a uma transição de dipolo elétrico por um fator:

$$\frac{\tau_Q}{\tau_p} \approx \frac{80c^2}{\omega^2 d^2} = \frac{20}{\pi^2}\frac{\lambda^2}{d^2} \quad . \tag{5.65}$$

Para um átomo, a radiação de quadrupolo elétrico é muito pequena. Mas, nos sistemas nucleares, as transições de dipolo magnético e do quadrupolo elétrico são comparáveis em magnitude, sendo muito mais prováveis do que nos sistemas atômicos.

5.6 RADIAÇÃO POR ANTENAS LINEARES

Para certos sistemas irradiantes, a geometria do fluxo de corrente é suficientemente simples, permitindo o cálculo da integral (5.11) para o potencial vetor numa forma fechada. Como exemplo, consideremos uma antena linear de comprimento d, orientada ao longo do eixo z, conforme mostra a figura 5.6. A corrente varia harmonicamente com o tempo, anulando-se nas extremidades da antena. Sendo $k = \omega/c$, a densidade de corrente é:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = I \operatorname{sen}\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right)\delta(x)\delta(y)\hat{\mathbf{e}}_z \tag{5.66}$$

onde as funções delta asseguram que a corrente flui somente ao longo do eixo z.

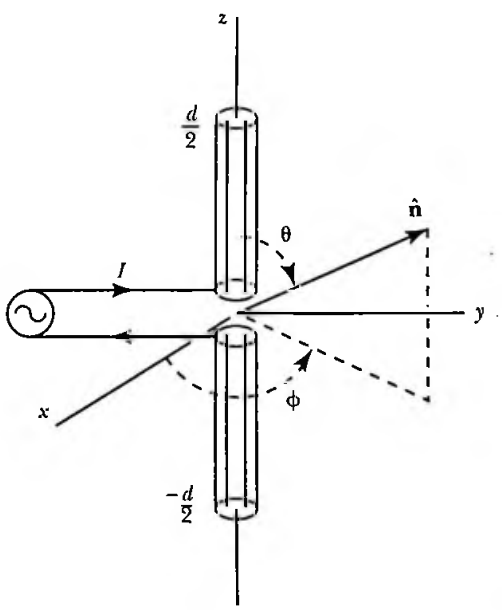


Figura 5.6

Usando a densidade de corrente (5.66), o potencial vetor (5.11) terá a direção $\hat{\mathbf{e}}_z$, tendo na região de radiação a forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{e}}_z \frac{Ie^{ikr}}{cr} \int_{-d/2}^{d/2} \operatorname{sen}\left(\frac{kd}{2} - k|z'|\right) e^{-ikz'\cos\theta} dz' \quad . \tag{5.67}$$

Fazendo um cálculo direto [veja problema 5.13], a integração leva a:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{e}}_z \frac{2Ie^{ikr}}{ckr} \left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right) - \cos(kd/2)}{\operatorname{sen}^2\theta} \right] \quad . \tag{5.68}$$

Sendo que o campo magnético na região de radiação é $\mathbf{B} = ik\,\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}$, a potência média irradiada por unidade de ângulo sólido será:

$$\frac{d\bar{P}}{d\Omega} = \frac{I^2}{2\pi c} \left| \frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right) - \cos(kd/2)}{\operatorname{sen}\theta} \right|^2 \tag{5.69}$$

Esta distribuição angular depende do valor kd. No limite de comprimentos de onda longos ($kd \ll 1$), este resultado deverá se reduzir à forma (5.28) para um dipolo elétrico, visto que neste caso todos os elementos da antena têm praticamente a mesma fase. É instrutivo verificar isto explicitamente. Com esta finalidade note que, sendo $kd \ll 1$, podemos expandir as funções cosseno obtendo desta forma:

$$\frac{d\bar{P}}{d\Omega} = \frac{I^2 d^4 k^4}{128\pi c} \operatorname{sen}^2\theta \quad . \tag{5.70}$$

Por outro lado, usando a equação da continuidade (5.21), podemos escrever a densidade de carga como:

$$\rho = \frac{1}{i\omega}\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{ikc}\frac{\partial J}{\partial z}$$

Assim, o momento de dipolo elétrico (5.23) que é paralelo ao eixo z, terá o módulo:

$$p = \left|\int z'\rho\, dv'\right| = \frac{1}{kc}\left|\int J\, dv'\right|$$

onde integramos por partes e usamos o fato de que a corrente se anula nas extremidades. Usando a expressão (5.66), obteremos no limite $kd \ll 1$ o resultado:

$$p = \frac{Id^2}{4c}$$

Substituindo então a corrente I em termos de p na equação (5.70), obteremos precisamente a expressão (5.28) para o dipolo elétrico.

Para o caso especial $kd = \pi$, correspondendo a uma metade do comprimento de onda da oscilação: $d = \lambda/2$, a distribuição angular (5.69) será:

$$\frac{d\bar{P}}{d\Omega} = \frac{I^2}{2\pi c}\frac{\cos^2\left(\pi/2\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}^2\theta} \qquad (5.71)$$

Através de arranjos especiais de antenas básicas de meia-onda, é possível obter configurações especiais de radiação formadas pela superposição coerente das ondas individuais. Para entender isso, notemos da equação (5.68) que o campo magnético de uma antena de meia-onda é:

$$B_\phi = -ik\operatorname{sen}\theta\, A_3 = \frac{2I}{icr}\frac{\cos\left(\pi/2\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta}e^{ikr} \qquad (5.72)$$

Consideremos agora o arranjo mostrado na figura 5.2, substituindo os dipolos por antenas de meia-onda com fases opostas. Procedendo analogamente à análise que levou à equação (5.32), teremos neste caso para o B total:

$$B_\phi^{tot} = \frac{2I}{icR}\frac{\cos(\pi/2\cos\theta)}{\operatorname{sen}\theta}e^{ikR}\left[\exp\left(\frac{-i\pi}{2}\cos\psi\right) - \exp\left(\frac{i\pi}{2}\cos\psi\right)\right] \quad . \tag{5.73}$$

Substituindo cos ψ por $\operatorname{sen}\theta\cos\phi$ obteremos:

$$B_\phi^{tot} = -\frac{4I}{cR}\frac{\cos(\pi/2\cos\theta)}{\operatorname{sen}\theta}e^{ikR}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\phi\right) \quad . \tag{5.74}$$

Assim, a distribuição angular da radiação é:

$$\frac{d\overline{P}}{d\Omega} = \frac{cR^2}{8\pi}\left|B_\phi^{tot}\right|^2 = \frac{2I^2}{\pi c}\frac{\cos^2(\pi/2\cos\theta)}{\operatorname{sen}^2\theta}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\phi\right) \quad . \tag{5.75}$$

Esta distribuição angular é bastante similar à distribuição mostrada na figura 5.3 para o caso dos dipolos.

Configurações de radiação associadas com sistemas mais complexos de antenas são analisadas nos problemas propostos.

PROBLEMAS

1. Mostre que um sistema de partículas carregadas, tendo todas a mesma razão de carga/massa, não pode emitir radiação de dipolo se o centro de massa do sistema se mover uniformemente.

2. Uma casca esférica uniformemente carregada oscila de maneira puramente radial. Mostre que neste caso não há campo magnético e portanto não pode ocorrer radiação.

3. Considere uma antena linear cujo comprimento d é igual a $(3/4)\lambda$, onde λ é o comprimento de onda irradiada. Esboce a distribuição da densidade de corrente na antena e a distribuição angular irradiada.

4. Mostre que a potência média total irradiada por uma antena do tipo "meia-onda" é dada por:

$$\overline{P} = \frac{I^2}{2c}\int_{-1}^{1}\frac{1+\cos\pi u}{1+u}\,du = \frac{I^2}{2c}\int_{0}^{2\pi}\frac{1-\cos z}{z}\,dz$$

Expresse $\overline{P}$ em termos da integral cosseno $Ci(x)$:

$$Ci(x) = -\int_{x}^{\infty}\frac{\cos z}{z}\,dz = \ln \gamma x - \int_{0}^{x}\frac{1-\cos z}{z}\,dz$$

onde $\gamma = 1{,}78$ é a constante de Euler. Use uma tabela de funções especiais para mostrar que:

$$\overline{P} = 1{,}22\frac{I^2}{c} \quad .$$

5. Calcule e esboce a distribuição angular da radiação emitida pelo sistema mostrado na figura 5.2, no caso correspondente a uma oscilação em fase dos dipolos.

6. Calcule e esboce a distribuição angular da radiação emitida por um par de dipolos elétricos separados lateralmente por uma distância $\lambda/4$ e que oscilam com uma diferença de fase de $\pi/2$.

7. Duas cargas $+q$ e $-q$ que estão separadas por uma distância fixa d giram com velocidade angular ω em torno de um eixo que passa a meia distância entre as cargas e que é perpendicular à reta que une as cargas. Discuta a radiação emitida no plano de movimento como também aquela emitida ao longo do eixo de rotação.

8. Seja R o raio da espira circular mostrada na figura 5.4. A espira é percorrida por uma corrente $I = I_0 e^{-i\omega t}$. Determine o vetor de Poynting associado com a radiação do dipolo magnético, em função das coordenadas polares r, θ.

9. Uma esfera de raio a, tendo massa M e carga Q distribuídas uniformemente através do seu volume, gira com velocidade angular ω_0 em torno do seu eixo.

A esfera é colocada num campo magnético uniforme $\mathbf{B}_0$ e precessa em torno do campo com a freqüência de Larmor. Qual é a potência média total da radiação emitida?

10. Considere um quadrupolo elétrico oscilante correspondente à figura 2.4. Calcule a distribuição angular da radiação supondo que $kl \ll 1$. Integre o resultado para obter a potência total irradiada pelo quadrupolo.

11. Considere um átomo que emite luz com comprimento de onda 5.500 $\mathring{A}$. Estime a vida média para os seguintes tipos de radiação: a) Radiação de dipolo elétrico; b) Radiação de dipolo magnético; c) Radiação de quadrupolo elétrico.

12. Considere um núcleo com raio de $7 \cdot 10^{-13}$ cm que emite raios gama com energia de 1MeV. Estime a vida média para uma transição por: a) Radiação de dipolo elétrico; b) Radiação de dipolo magnético, usando o fato de que o fator g do próton é igual a 2,79; c) Radiação de quadrupolo elétrico.

13. Integre a equação (5.67) para obter a expressão (5.68).

14. Considere a antena linear mostrada na figura 5.6 tendo um comprimento d igual a 3/4 do comprimento de onda da oscilação. Discuta a densidade de corrente na antena e esboce a distribuição angular da potência emitida.

15. Considere uma antena linear cujo comprimento d é pequeno comparado com o comprimento de onda. A antena é orientada ao longo do eixo z, estendendo-se de $z = d/2$ a $z = -d/2$, com uma pequena fenda no centro para entrada e saída da corrente. A corrente tem a mesma direção em cada metade da antena, tendo o valor I_0 na fenda e caindo linearmente a zero nas extremidades:

$$I(z)e^{-i\omega t} = I_0\left(1 - \frac{2|z|}{d}\right)e^{-i\omega t} \quad .$$

(a) Usando a equação da continuidade (5.21), mostre que o momento de

dipolo é orientado ao longo do eixo z, tendo a magnitude:

$$p = \frac{I_0 d}{2\omega}$$

(b) Calcule a distribuição angular da potência irradiada e mostre que a potência total irradiada é:

$$\overline{P} = \frac{I_0^2 (kd)^2}{12c}$$

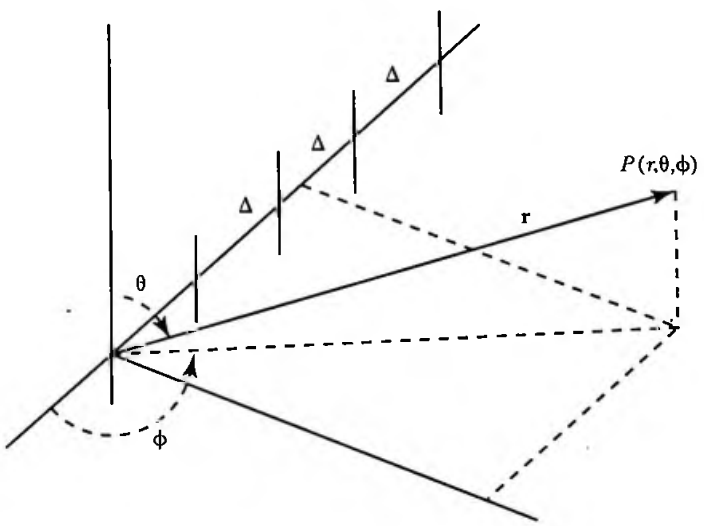


Figura 5.7

16. Calcule a distribuição angular da radiação emitida por um grupo de 5 antenas do tipo meia-onda, separadas por uma distância Δ, conforme mostra a figura 5.7. Todas as antenas oscilam em fase. Esboce a configuração da radiação para $\Delta = \lambda/2$ no plano $\theta = \pi/2$.

17. Considere um grupo de 5 antenas tipo meia-onda, oscilando com fases alternadas, distribuídas de acordo com a figura 5.7. Calcule a distribuição angular da radiação emitida e esboce a configuração da radiação no plano $\theta = \pi/2$, quando a separação é: $\Delta = \lambda/2$.

6

ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

No capítulo anterior, discutimos a geração das ondas de radiação. Vamos investigar, a seguir, as propriedades destas ondas, tais como sua energia, momento linear e momento angular. Tratamos a propagação das ondas eletromagnéticas em meios não-condutores e também em meios condutores, como, por exemplo, no plasma ionosférico. Finalmente, estudamos o importante processo de transmissão de ondas por fibras óticas.

6.1 ONDAS PLANAS EM MEIOS NÃO-CONDUTORES

Uma característica básica das equações de Maxwell para o campo eletromagnético é a existência de soluções de ondas que representam o transporte de energia. As mais simples e fundamentais ondas eletromagnéticas são as ondas planas transversais. Para mostrar como estas soluções podem ser obtidas em meios não-condutores, vamos considerar as equações de Maxwell na ausência de fontes, em meios caracterizados por constantes dielétricas e permeabilidades magnéticas constantes no espaço. A partir das equações (4.17) teremos:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{6.1.a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{6.1.b}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{6.1.c}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \tag{6.1.d}$$

Tomando o rotacional da equação (6.1.c) ficamos com:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \mathbf{E}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{B} = 0 \quad .$$

Usando a identidade vetorial (A.5) e substituindo $\nabla \times \mathbf{B}$ da equação (6.1.d) obteremos:

$$\nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{E}\right) - \nabla^2\mathbf{E} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad .$$

Visto que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, teremos finalmente:

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad . \tag{6.2}$$

Aplicando o mesmo procedimento a partir da equação (6.1.d), obteremos analogamente:

$$\nabla^2\mathbf{B} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad . \tag{6.3}$$

Destas relações, vemos que cada componente cartesiana de **E** ou **B** satisfaz a equação de onda:

$$\nabla^2 C - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} = 0 \tag{6.4}$$

onde:

$$v = c/\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{6.5}$$

representa a velocidade da onda no meio. A equação (6.4) tem as soluções de onda plana:

$$C = e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{6.6}$$

onde a freqüência ω e a magnitude de k são relacionados por:

$$k = \frac{\omega}{v} = \sqrt{\mu\varepsilon}\,\frac{\omega}{c} \quad . \tag{6.7}$$

Se considerarmos ondas que se propagam numa dada direção, digamos z, a solução fundamental será:

$$C(z,t) = Ae^{i(kz-\omega t)} + Be^{-i(kz+\omega t)} \quad . \tag{6.8}$$

Usando a equação (6.7), podemos escrever (6.8) como:

$$C(z,t) = Ae^{ik(z-vt)} + Be^{-ik(z+vt)} \quad . \tag{6.9}$$

É fácil verificar agora que uma solução geral da equação (6.4) tem a forma:

$$\psi(z,t) = f(z-vt) + g(z+vt) \tag{6.10}$$

onde f e g são funções arbitrárias. Esta solução representa ondas que se propagam para a direita e para a esquerda com velocidade v, que é chamada de velocidade de fase.

Devemos ainda considerar a natureza vetorial dos campos eletromagnéticos. Usando a convenção de que os campos físicos são obtidos tomando-se a parte real, as ondas planas terão a forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{e}}_1 E_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{e}}_2 B_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{6.11}$$

onde $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ são dois vetores constantes unitários. E_0, B_0 são amplitudes constantes no tempo e no espaço. As condições $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{B}$, requerem:

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{k} = 0 \quad ; \quad \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{k} = 0 \quad . \tag{6.12}$$

Isto significa que **E** e **B** são perpendiculares à direção de propagação **k**, propriedades que caracterizam uma onda transversal. As equações envolvendo o rotacional impõem restrições adicionais. Substituindo (6.11) na equação (6.1.c) teremos:

$$i\left[(\mathbf{k}\times\hat{\mathbf{e}}_1)E_0 - \frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{e}}_2 B_0\right] e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = 0 \quad . \tag{6.13}$$

Esta equação tem a solução:

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{\mathbf{k}\times\hat{\mathbf{e}}_1}{k} \tag{6.14}$$

e

$$B_0 = \sqrt{\mu\varepsilon}\, E_0 \quad . \tag{6.15}$$

Isto mostra que (**E**, **B**, **k**) formam um conjunto ortogonal de vetores, conforme indicado na figura 6.1.

Então, a onda descrita pelas equações acima representa uma onda transversal que se propaga na direção **k**. Ela transporta um fluxo médio, no tempo, de energia dado pela parte real do vetor de Poynting complexo [veja as equações (4.34) e (5.25)]:

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi\mu}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}^*\right) \quad . \tag{6.16}$$

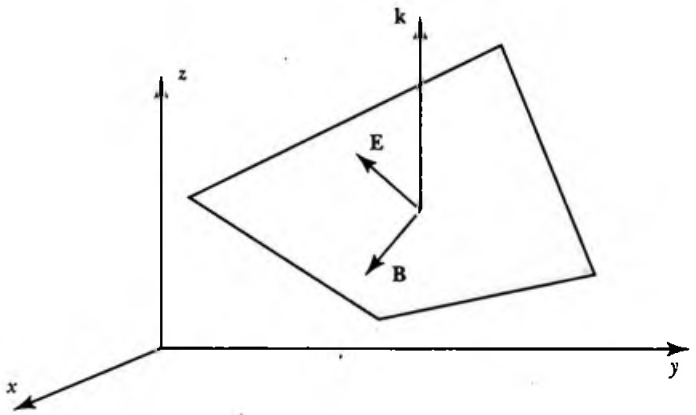


Figura 6.1

Portanto, o fluxo médio de energia para uma onda linearmente polarizada é:

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi}|E_0|^2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\hat{\mathbf{k}} \quad . \tag{6.17}$$

Por outro lado, a densidade média de energia será:

$$\overline{u} = \frac{1}{16\pi}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}^* + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}^*\right) = \frac{1}{16\pi}\left(\varepsilon\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* + \frac{1}{\mu}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^*\right) \quad . \tag{6.18}$$

Usando (6.15), vemos que os campos elétricos e magnéticos contribuem igualmente para $\overline{u}$, de maneira que:

$$\overline{u} = \frac{\varepsilon}{8\pi}|E_0|^2 \quad . \tag{6.19}$$

A razão entre as magnitudes de (6.17) e (6.19) mostra que a velocidade escalar do fluxo de energia é: $v = c/(\mu\varepsilon)^{1/2}$, conforme se esperava de (6.5).

6.2 POLARIZAÇÃO LINEAR E CIRCULAR

A onda plana (6.11) tem o campo elétrico sempre na direção $\hat{\mathbf{e}}_1$. Esta onda é então denominada de onda linearmente polarizada com vetor de polarização

$\hat{\mathbf{e}}_1$. Para descrevermos um estado de polarização geral, precisamos de uma outra onda linearmente polarizada que é independente da primeira. Evidentemente:

$$\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{e}}_1 E_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad ; \quad \mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{e}}_2 E_2 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{6.20}$$

com:

$$\mathbf{B}_j = \sqrt{\mu\varepsilon}\,\mathbf{k}\times\mathbf{E}_j/k \qquad (j=1,2) \tag{6.21}$$

representam duas soluções linearmente independentes.

Uma solução geral para uma onda plana que se propaga na direção **k** é dada por uma combinação linear:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \left(\hat{\mathbf{e}}_1 E_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 E_2\right) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad . \tag{6.22}$$

Se E_1 e E_2 têm a mesma fase, teremos uma onda linearmente polarizada, com o vetor de polarização fazendo um ângulo $\theta = \tan^{-1}(E_2/E_1)$, como mostra a figura 6.2.

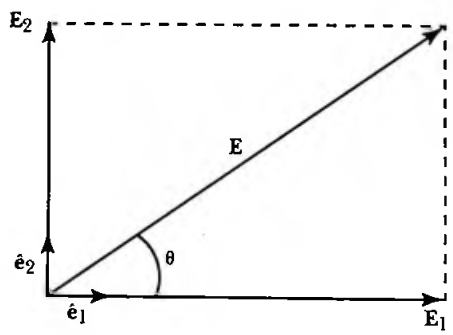


Figura 6.2

Se E_1 e E_2 têm fases diferentes, a onda é elipticamente polarizada. A partir das relações (6.21) e (6.22), é fácil verificar que o fluxo médio de energia (6.16) para uma onda elipticamente polarizada é dado pela expressão:

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(|E_{10}|^2 + |E_{20}|^2\right)\hat{\mathbf{k}} \tag{6.23}$$

que representa uma generalização da relação (6.17).

O caso mais simples é aquele para a polarização circular, quando E_1 e E_2 têm magnitude igual, mas diferem em fase por $\pi/2$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = E_0\left(\hat{\mathbf{e}}_1 \pm i\hat{\mathbf{e}}_2\right)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{6.24}$$

onde E_0 é uma amplitude real. Vamos agora escolher os eixos x e y na direção $\hat{\mathbf{e}}_1$ e $\hat{\mathbf{e}}_2$, respectivamente. Então as componentes reais do campo elétrico serão:

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r},t) &= E_0\cos(kz-\omega t) \quad ; \\ E_y(\mathbf{r},t) &= \pm E_0\,\mathrm{sen}(kz-\omega t) \quad . \end{aligned} \tag{6.25}$$

Num ponto fixo no espaço, estes campos são tais que o campo elétrico tem módulo constante em magnitude, descrevendo um círculo com freqüência ω, conforme está na figura 6.3. Para a combinação $\hat{\mathbf{e}}_1 + i\hat{\mathbf{e}}_2$, a rotação é anti-horária para um observador que olha para a onda incidente, que é então chamada levogira.

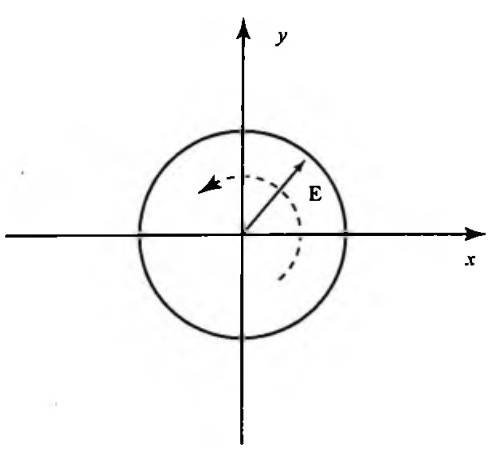


Figura 6.3

A combinação $\hat{\mathbf{e}}_1 - i\hat{\mathbf{e}}_2$ corresponde a uma rotação de **E** no sentido horário (dextrogiro) quando olhamos para a onda incidente.

6.3 PRESSÃO DE RADIAÇÃO

Vimos na seção 4.6 que é possível associar um momento linear ao campo eletromagnético, que pode ser usado para calcular as forças que atuam sobre corpos materiais. Vamos agora investigar as conseqüências deste fato para as ondas planas. Consideremos uma onda linearmente polarizada que incide normalmente sobre um material que a absorve completamente: um corpo negro. Se tomarmos o eixo z na direção de propagação, podemos considerar o campo elétrico na direção x, sendo o campo magnético na direção y, conforme é indicado na figura 6.4.

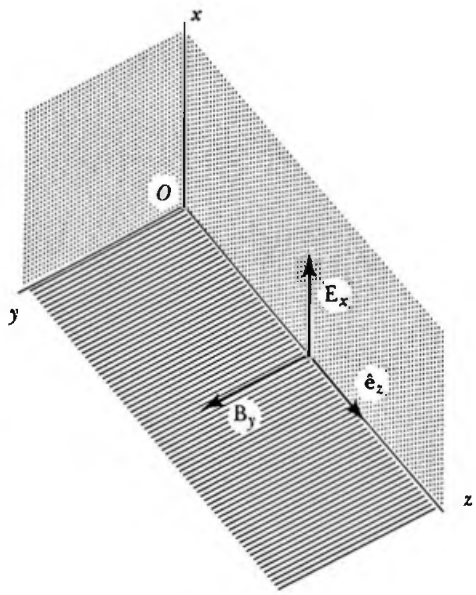


Figura 6.4

De acordo com a equação (4.56), o tensor de "tensão" de Maxwell terá então apenas os elementos diagonais não-nulos:

$$4\pi T_{xx} = E_x D_x - \frac{1}{2}\left(E_x D_x + B_y H_y\right)$$

$$4\pi T_{yy} = B_y H_y - \frac{1}{2}\left(E_x D_x + B_y H_y\right) \qquad (6.26)$$

$$4\pi T_{zz} = -\frac{1}{2}\left(E_x D_x + B_y H_y\right)$$

onde E_x, D_x e B_y, H_y são grandezas reais que oscilam periódicamente no tempo. Nos casos práticos, estamos interessados somente nos valores médios do fluxo de momento. Considerando uma média sobre um período e sendo que numa onda plana as parcelas elétricas e magnéticas contribuem igualmente, obtemos:

$$\overline{\mathrm{T}}_{xx} = \overline{\mathrm{T}}_{yy} = 0$$

$$\overline{\mathrm{T}}_{zz} = -\frac{1}{8\pi}\left\langle\left(\mathrm{E}_x\mathrm{D}_x + \mathrm{B}_y\mathrm{H}_y\right)\right\rangle = -\frac{1}{4\pi}\left\langle \mathrm{E}_x\mathrm{D}_x\right\rangle \quad . \tag{6.27}$$

Da equação (4.51), resulta que a força média $d\mathbf{F}$ exercida pelo campo eletromagnético sobre um elemento de área $da\,\hat{\mathbf{n}}$ na superfície do material é:

$$d\mathbf{F} = \overline{\mathrm{T}}_{zz}\, da\, \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{8\pi}\left\langle\left(\mathrm{E}_x\mathrm{D}_x + \mathrm{B}_y\mathrm{H}_y\right)\right\rangle\, da\, \hat{\mathbf{e}}_z \tag{6.28}$$

onde usamos o fato que o valor médio da derivada temporal do vetor $\mathbf{P}_{\mathrm{cam}}$ se anula, visto que os campos são periódicos no tempo. Portanto, a força média por unidade de área (pressão) exercida pela onda sobre o material será:

$$P = \frac{\varepsilon}{8\pi}|E_0|^2 \quad . \tag{6.29}$$

Esta expressão pode ser interpretada observando que o corpo negro absorve por unidade de área e por unidade de tempo, uma quantidade de momento linear dada por $(\epsilon\mu\bar{\mathbf{S}}/c^2)\{c/(\epsilon\mu)^{1/2}\}$ [veja as equações (4.55) e (6.5)]. Usando a expressão do vetor de Poynting (6.17), verificamos que este momento eletromagnético tem uma magnitude igual à pressão de radiação (6.29).

É interessante notar que o tensor de Maxwell também pode ser usado para calcular a pressão exercida por uma radiação isotrópica na cavidade de um corpo negro. Neste caso, sendo que a radiação tem intensidade igual em todas as direções, resulta por simetria que $E_x D_x = (1/3)\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$ e $B_y H_y = (1/3)\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}$. Comparando estas relações com a equação (6.28), concluimos que a pressão de radiação isotrópica será:

$$P_{iso} = \frac{1}{3}\frac{\left\langle\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right)\right\rangle}{8\pi} = \frac{1}{3}\,\overline{u} \tag{6.30}$$

onde u é a densidade de energia da radiação. Este resultado é importante para a derivação da lei de Stefan-Boltzmann, que descreve a radiação do corpo negro.

A primeira verificação experimental do efeito da pressão da radiação foi realizada em 1899 pelo físico russo P. N. Lebedev. Estes efeitos podem ser observados nos cometas, cujas caudas são sempre direcionadas na direção oposta à do sol, em virtude da pressão da radiação solar. A pressão de radiação tem um papel essencial nos processos que ocorrem no interior das estrelas e em outros fenômenos astrofísicos.

6.4 MOMENTO ANGULAR EM ONDAS PLANAS

Vimos no capítulo anterior que a densidade de momento nos campos eletromagnéticos é $\varepsilon\,(\mathbf{E}\times\mathbf{B})/4\pi c$. Conseqüentemente, podemos considerar que a densidade de momento angular será: $\varepsilon\mathbf{r}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{B})/4\pi c$.

Numa onda plana infinita, **E** e **B** são sempre perpendiculares ao vetor da onda. Assim, neste caso o único momento angular presente será o momento angular orbital, que é associado com o movimento translacional da onda. Contudo, numa onda de extensão finita, os campos **E** e **B** terão perto das bordas componentes paralelas ao vetor de onda, visto serem as linhas do campo curvas fechadas. Assim, a energia fluirá também em direções perpendiculares ao vetor de onda.

Por exemplo, a figura 6.5 mostra um fluxo de energia transversal numa onda circularmente polarizada que se propaga na direção z.

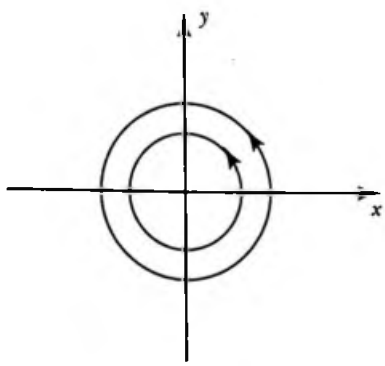


Figura 6.5

Esta circulação de energia implica na existência de um momento angular não-orbital, cuja direção é paralela (ou antiparalela) à direção de propagação. Este momento angular adicional é chamado de spin da onda. Para obter a expressão

para o spin de uma onda de extensão finita, vamos escrever as densidades de momento e de momento angular em termos do potencial vetor, considerando por simplicidade a propagação da onda no vácuo.

Usando a convenção da somatória sobre índices repetidos e a identidade:

$$\mathbf{E}\times\mathbf{B}=\mathbf{E}\times(\nabla\times\mathbf{A})=\left[E^i\,\nabla A^i-(\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{A}\right] \tag{6.31}$$

vemos que a densidade de momento angular será:

$$\frac{1}{4\pi c}\mathbf{r}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{B})=\frac{1}{4\pi c}\mathbf{r}\times\left[E^i\,\nabla A^i-(\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{A}\right] \quad . \tag{6.32}$$

Integrando esta densidade de momento angular sobre o volume da onda, achamos o momento angular total:

$$\mathbf{J}=\frac{1}{4\pi c}\int\mathbf{r}\times\left(E^i\,\nabla A^i\right)dv-\frac{1}{4\pi c}\int\mathbf{r}\times(\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{A}\,dv \quad . \tag{6.33}$$

Na segunda integral, podemos usar a identidade:

$$\mathbf{r}\times(\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{A}=\nabla^i\left(E^i\mathbf{r}\times\mathbf{A}\right)-\mathbf{r}\times\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{E})+\mathbf{A}\times(\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{r} \quad . \tag{6.34}$$

Sendo $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$ e $(\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{r}=\mathbf{E}$, a identidade se reduz a:

$$\mathbf{r}\times(\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{A}=\nabla^i\left(E^i\mathbf{r}\times\mathbf{A}\right)-\mathbf{E}\times\mathbf{A} \quad . \tag{6.35}$$

Aplicando o teorema da divergência, teremos que:

$$\int\nabla^i\left(E^i\mathbf{r}\times\mathbf{A}\right)dv=\int_S E^i(\mathbf{r}\times\mathbf{A})\,dS^i \quad .$$

A integral de superfície se anula tendo em vista que o campo elétrico é nulo em todos os pontos externos ao pacote de onda. Assim, substituindo o segundo termo de (6.35) na equação (6.33) teremos:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{4\pi c}\int \mathbf{r} \times \left(E^i \, \nabla A^i \right) dv + \frac{1}{4\pi c}\int \mathbf{E} \times \mathbf{A} \, dv \quad . \tag{6.36}$$

A primeira integral no lado direito representa o momento angular orbital, e a segunda integral representa o spin. Para justificar esta interpretação, vamos considerar uma onda circularmente polarizada onde, pela equação (6.25):

$$\mathbf{E}_{\pm} = E_0 \, \hat{\mathbf{i}} \cos\left(\omega t - kz\right) \pm E_0 \, \hat{\mathbf{j}} \operatorname{sen}\left(\omega t - kz\right) \tag{6.37}$$

Tomando $\Phi = 0$ na equação (4.19), o potencial vetor será então:

$$\mathbf{A}_{\pm} = -\frac{cE_0}{\omega} \hat{\mathbf{i}} \operatorname{sen}\left(\omega t - kz\right) \pm \frac{cE_0}{\omega} \hat{\mathbf{j}} \cos\left(\omega t - kz\right) \tag{6.38}$$

onde desprezamos os efeitos de bordas, para uma onda quase-plana.

Usando estas expressões para **E** e **A**, os valores médios no tempo das duas integrais na equação (6.36) serão:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{4\pi c}\int \mathbf{r} \times \left(E^i \, \nabla A^i \right) dv = \frac{1}{4\pi c}\int \mathbf{r} \times \left(\hat{\mathbf{k}} \, E_0^2 \right) dv \quad . \tag{6.39}$$

e

$$s = \frac{1}{4\pi c}\int \mathbf{E} \times \mathbf{A} \, dv = \pm \frac{1}{4\pi}\int \hat{\mathbf{k}} \frac{E_0^2}{\omega} dv \tag{6.40}$$

O fator $\hat{\mathbf{k}} E_0^2 / 4\pi c$ no integrando da expressão **L** é simplesmente a densidade média de momento translacional na onda circularmente polarizada. Portanto, **L** é de fato o momento angular orbital, sendo s o momento angular extra, associado ao spin. A direção do spin depende do estado de polarização: para uma onda

levogira (helicidade positiva) o spin é paralelo à direção de propagação e $s_z > 0$. Para uma dextrógira (helicidade negativa) $s_z < 0$. É instrutivo comparar a energia e o spin da onda circular. Usando a relação (6.23) temos que:

$$\frac{s_z}{u} = \pm \frac{1/4\pi \int E_0^2/\omega dv}{1/4\pi \int E_0^2 dv} = \pm \frac{1}{\omega} \quad . \tag{6.41}$$

Do ponto de vista da mecânica quântica, a razão entre a projeção no eixo z do spin do fóton ($\pm\hbar$) e a sua energia ($\hbar\omega$) é precisamente igual à expressão (6.41)!

Desta maneira, podemos interpretar uma onda levogira como sendo constituída de fótons de helicidade positiva (spin "para cima") ao passo que a onda dextrógira é constituída por fótons com helicidade negativa (spin "para baixo").

6.5 ONDAS PLANAS EM MEIOS CONDUTORES

Neste caso, continuaremos a supor que não há cargas livres no meio, mas em virtude da lei de Ohm teremos que: $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$. Desta forma, as equações de Maxwell (6.1.a), (6.1.b) e (6.1.c) permanecerão inalteradas, mas a equação (6.1.d) será modificada para:

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c}\mathbf{E} \quad . \tag{6.42}$$

Para determinar as equações que governam o comportamento dos campos elétricos e magnéticos, vamos proceder analogamente ao método usado na derivação das equações (6.2) e (6.3). Devido ao termo adicional em (6.42), obteremos neste caso as equações:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad , \tag{6.43}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad . \tag{6.44}$$

Estas mostram que os campos elétricos e magnéticos satisfazem equações de onda idênticas, contendo termos de amortecimento proporcionais à condutividade do meio condutor.

Para achar as soluções de ondas planas destas equações, escreveremos os campos que variam harmonicamente no tempo, como:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad , \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad . \tag{6.45}$$

Usando as relações (6.1.a) e (6.1.b), vemos que $\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{B}_0$ são amplitudes transversais ao vetor de onda $\mathbf{k}$. Substituindo as formas (6.45) nas equações (6.43) e (6.44), obteremos:

$$\left[k^2 - \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{c^2} - i\frac{4\pi\omega\mu\sigma}{c^2}\right]\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = 0 \tag{6.46}$$

e uma equação análoga envolvendo $\mathbf{B}_0$.

Sendo este resultado válido para valores arbitrários de $\mathbf{E}_0$, teremos:

$$k^2 = \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{c^2}\left[1 + i\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega}\right] \quad . \tag{6.47}$$

Para progredir em nossa análise, necessitamos de um modelo mais detalhado para a condutividade σ de um meio condutor que é globalmente neutro.

O modelo mais simples, devido a Drude (1900), considera um meio contendo uma densidade N de elétrons "livres", que são sujeitos a amortecimentos em virtude de colisões com a rede de íons positivos. Assim, a equação de movimento para um elétron num meio condutor pode ser escrita na forma:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + l\dot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E} \tag{6.48}$$

onde l é uma constante de amortecimento. Se o campo elétrico variar harmonicamente com o tempo podemos escrever que:

$$m\dot{\mathbf{v}} + l\mathbf{v} = -e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \tag{6.49}$$

onde $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ é a velocidade do elétron. A solução é:

$$\mathbf{v} = -\frac{e\mathbf{E}}{l - im\omega} \tag{6.50}$$

Assim, a densidade de corrente será:

$$\mathbf{J} = -Ne\mathbf{v} = \frac{Ne^2\mathbf{E}}{l - im\omega} \tag{6.51}$$

Podemos então interpretar o coeficiente de $\mathbf{E}$ como a condutividade:

$$\sigma = \frac{Ne^2}{l - im\omega} \tag{6.52}$$

Na maioria dos metais, para freqüências $\omega < 10^{13}$ Hz, σ pode ser considerado essencialmente real. Contudo, para freqüências suficientemente grandes tais que $\omega \gtrsim l/m$, vemos que a condutividade se torna complexa.

6.6 PROPAGAÇÃO IONOSFÉRICA E O EFEITO FARADAY

Em seguida, vamos discutir uma importante aplicação destes resultados para um meio condutor representado por um gás ionizado e rarefeito. Neste meio, chamado de plasma ionosférico, o tempo de colisão dos elétrons é longo, de maneira que os efeitos de amortecimento são praticamente desprezíveis. Nestas condições, a equação (6.52) mostra que a condutividade será uma quantidade puramente imaginária. Sendo que num tal meio temos que: $\varepsilon \simeq 1$, $\mu \simeq 1$, a expressão (6.47) ficará neste caso na forma:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2}\right] = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right] \tag{6.53}$$

onde

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi N e^2}{m}\right)^{1/2} \tag{6.54}$$

A freqüência ω_p representa, conforme mostraremos no próximo capítulo, a freqüência característica do plasma.

Da equação (6.53) vemos que, para freqüências: $\omega > \omega_p$, k é real, sendo o índice de refração n dado por:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{ck}{\omega} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \qquad \left(\omega > \omega_p\right) \tag{6.55}$$

Por outro lado, para $\omega < \omega_p$, k será puramente imaginário. Se escrevermos: $k = (i\omega/c)nK$, a propagação de uma onda plana conterá o fator:

$$e^{i(kz-\omega t)} = e^{-(\omega n/c)Kz} e^{-i\omega t}$$

Portanto, neste caso teremos uma atenuação da onda de maneira que não haverá propagação no meio. Assim, uma onda eletromagnética com freqüência abaixo da freqüência do plasma será refletida no contorno do plasma, tendo uma amplitude de decaimento que se estende dentro do plasma.

A fim de estender esta análise para a propagação de ondas na ionosfera, devemos levar em consideração os efeitos produzidos pelo campo magnético da terra. Podemos representar, aproximadamente, este campo pela indução magnética uniforme e estática $\mathbf{B}_0$. Se considerarmos as pequenas oscilações induzidas pela passagem da onda, podemos escrever que:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}\dot{\mathbf{r}} \times \left(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}\right) \tag{6.56}$$

onde $\mathbf{B}$ representa o campo magnético transversal da onda eletromagnética, conforme mostra a figura 6.6.

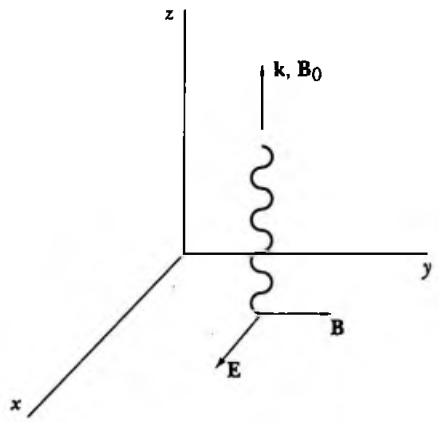


Figura 6.6

Para todos os casos práticos de propagação de ondas de rádio na ionosfera, podemos considerar que $|\mathbf{B}_0| \gg |\mathbf{B}|$. Desta forma, a equação de movimento para pequenas oscilações dos elétrons será aproximadamente:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_0 \quad . \tag{6.57}$$

Vamos considerar o caso correspondente à propagação da onda na direção do campo magnético $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{e}}_3$. Escolhendo um conjunto ortogonal de eixos $(\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z)$, as componentes de (6.57) serão:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -eE_x - \frac{e}{c}B_0\dot{y} \quad ; \\ m\ddot{y} &= -eE_y + \frac{e}{c}B_0\dot{x} \quad ; \\ m\ddot{z} &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{6.58}$$

Multiplicando a segunda equação por $\pm i$ e somando a primeira, teremos:

$$m(\ddot{x} \pm i\ddot{y}) = -e(E_x \pm iE_y) \pm i\frac{e}{c}B_0(\dot{x} \pm i\dot{y}) \quad . \tag{6.59}$$

É conveniente definir as quantidades:

$$W = x \pm iy \quad ; \quad E = E_x \pm iE_y \tag{6.60}$$

de maneira que a equação (6.59) pode ser colocada na forma:

$$\ddot{W} = -\frac{e}{m}E \pm \frac{ieB_0}{mc}\dot{W} \quad . \tag{6.61}$$

Vamos considerar soluções do tipo:

$$W = W_0 e^{i(kz-\omega t)} \quad ; \quad E = E_0 e^{i(kz-\omega t)} \quad . \tag{6.62}$$

Substituindo estas expressões na equação (6.61) obteremos a seguinte relação entre W_0 e E_0:

$$W_0 = \frac{(e/m)E_0}{\omega^2 \pm \omega eB_0/mc} \equiv \frac{(e/m)E_0}{\omega^2 \pm \omega\omega_c} \tag{6.63}$$

onde ω_c é a freqüência de cíclotron do elétron no campo B_0.

Por outro lado, o campo elétrico deve satisfazer a equação de onda dada pela relação (6.43). Sendo esta equação satisfeita por todas as componentes cartesianas do campo elétrico, esta deverá então ser satisfeita também pela combinação: $E = E_x \pm iE_y$. Escrevendo $J \equiv J_x \pm \mathrm{i}\, J_y$, teremos da lei de Ohm a relação:

$$J = -Ne(\dot{x} \pm i\dot{y}) = -Ne\dot{W} = \sigma E \tag{6.64}$$

que permite expressar a combinação $\sigma\dot{E}$ que aparece na expressão (6.43) em termos de $\ddot{W}$ Desta forma, colocando $\varepsilon = \mu = 1$, a equação (6.43) para uma onda que se propaga na direção z ficará:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{4\pi Ne}{c^2}\ddot{W} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad . \tag{6.65}$$

Assim, usando as relações (6.62), obteremos que:

$$-k^2 E_0 - 4\pi \frac{Ne\omega^2}{c^2} W_0 + \frac{\omega^2}{c^2} E_0 = 0 \tag{6.66}$$

Substituindo W_0 da expressão (6.63), obteremos a seguinte equação relacionando a constante de propagação k aos parâmetros físicos do plasma:

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{4\pi Ne^2/m}{\omega^2 \pm \omega\omega_c} \tag{6.67}$$

Como ω/k é a velocidade de fase da onda, então k^2c^2/ω^2 representa o quadrado do índice de refração. Assim, temos duas possibilidades para n^2, dependendo do sinal no denominador:

$$n_{\pm}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 \pm \omega\omega_c} \tag{6.68}$$

onde a freqüência do plasma ω_p é dada pela equação (6.54).

Conseqüentemente, usando (6.60) e (6.62), vemos que as ondas associadas com:

$$E_+ = E_x + iE_y = E_0^+ e^{i(k_+ z - \omega t)} \tag{6.69}$$

e

$$E_- = E_x - iE_y = E_0^- e^{i(k_- z - \omega t)} \tag{6.70}$$

têm índices de refração diferentes, e portanto irão se propagar com velocidades diferentes.

Como uma aplicação interessante, consideremos uma onda linearmente polarizada incidindo na ionosfera. Escolhendo o vetor de polarização na direção $\hat{\mathbf{e}}_x$, podemos escrever que:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{e}}_x E_0 e^{i(kz-\omega t)} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_d + \mathbf{E}_l\right) \tag{6.71}$$

onde $\mathbf{E}_d$ e $\mathbf{E}_l$ descrevem ondas circularmente polarizadas em sentidos opostos (veja problema 6.14),

$$\mathbf{E}_d = \left(\hat{\mathbf{e}}_x - i\hat{\mathbf{e}}_y\right)E_0 e^{i(k_+ z-\omega t)} \quad ; \quad \mathbf{E}_l = \left(\hat{\mathbf{e}}_x + i\hat{\mathbf{e}}_y\right)E_0 e^{i(k_- z-\omega t)} \quad . \tag{6.72}$$

Mas, como vimos, $\mathbf{E}_d$ e $\mathbf{E}_l$ se propagam diferentemente. Assim, o efeito da atmosfera ionizada na presença de um campo magnético é separar uma onda linearmente polarizada que se propaga ao longo do campo, em duas ondas circularmente polarizadas que se propagam com velocidades diferentes. Observa-se que em cada ponto, estas duas componentes se superpõem para produzir um campo linearmente polarizado, cujo plano de polarização gira por um ângulo proporcional à distância percorrida pela onda no meio. Este efeito, descoberto por Faraday em 1845, constituiu a primeira conexão experimental entre a luz e o campo magnético.

O efeito Faraday pode ser compreendido em termos da diferença dos índices de refração das ondas circularmente polarizadas. Para mostrar isso, notemos que os valores típicos de ω na região ótica são da ordem de $10^{15}\,s^{-1}$. Por outro lado, temos que, mesmo para campos magnéticos intensos, $\omega_c \sim 10^{11}\,s^{-1}$. Vemos que nestes casos ω^2 é muito maior que $\omega\omega_c$. Conseqüentemente, podemos usar uma aproximação linear para escrever os índices de refração (6.68) na forma:

$$n_\pm^2 \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \pm \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega^3} \equiv \bar{n}^2 \pm 2\bar{n}\Delta n \tag{6.73}$$

onde $\bar{n} = (n_+ + n_-)/2$ denota o índice médio de refração. Assim, escrevendo $k_\pm = \bar{k} \pm \Delta k$, temos:

$$\Delta k = \frac{\omega}{c}\Delta n \simeq \frac{\omega_p^2\,\omega_c}{2\omega\left(\omega^2 - \omega_p^2\right)}\,\bar{k} \tag{6.74}$$

Consideremos agora uma onda incidente que é linearmente polarizada ao longo do eixo $\hat{\mathbf{e}}_x$ no ponto $z = 0$. Usando (6.71) e (6.72), encontramos as seguintes expressões para as componentes do campo elétrico:

$$E_x = \frac{E_0}{2}\left[e^{i(k_+ z-\omega t)} + e^{i(k_- z-\omega t)}\right] = E_0\, e^{i(\bar{k} z-\omega t)}\cos(\Delta k z)$$

$$E_y = \frac{i E_0}{2}\left[-e^{i(k_+ z-\omega t)} + e^{i(k_- z-\omega t)}\right] = E_0\, e^{i(\bar{k} z-\omega t)}\,\mathrm{sen}(\Delta k z) \quad . \tag{6.75}$$

Então, numa distância de propagação L, o vetor de polarização gira por um ângulo:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = \Delta k L = \frac{\omega_p^2\,\omega_c\,\bar{k}}{2\omega\left(\omega^2 - \omega_p^2\right)} L \quad . \tag{6.76}$$

O modelo simples descrito acima explica qualitativamente o comportamento das ondas de rádio na ionosfera.

6.7 PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM FIBRAS ÓTICAS

Vamos considerar finalmente a propagação de ondas eletromagnéticas em meios delimitados por superfícies de contorno. Uma situação de grande importância prática é a transmissão de ondas por fibras óticas, que são amplamente usadas em medicina e nas telecomunicações.

As ondas são geralmente confinadas nestas fibras atraves de sucessivas reflexões internas. Entretanto este confinamento não é completo, de modo que uma parte evanescente das ondas penetra na região que circunda a fibra. A primeira analise teórica sobre a propagação de ondas eletromagnéticas num cilindro dielétrico, elemento básico da fibra ótica, foi realizada por Debye em 1910. O tratamento matemático é bastante complicado, tendo em vista que é necessário resolver as equações de Maxwell tanto no interior como no exterior da fibra ótica e juntar estas soluções atraves de condições de contorno apropriadas.

Nestà seção estudaremos apenas o caso mais simples de um guia de onda dielétrico na forma de uma placa homogênea com espessura uniforme. Este exemplo é suficiente para ilustrar as caracteristicas típicas da propagação de ondas em fibras óticas. A figura 6.7 mostra uma placa dielétrica de espessura a, cujo plano mediano coincide com o plano $y-z$. Este sistema constitui um guia de onda retangular cuja dimensão na direção y é infinita.

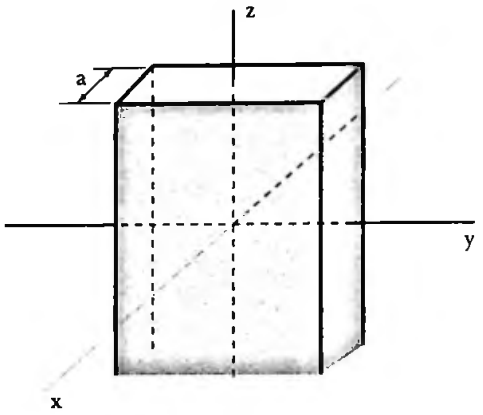


Figura 6.7

Podemos então supor que a onda que se propaga na direção z seja independente da coordenada y:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(x)e^{i(kz-\omega t)} \quad ; \quad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}(x)e^{i(kz-\omega t)} \tag{6.77}$$

Substituindo estas expressões na equação de Faraday (6.1.c), obtemos

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c}\mathbf{B} \Rightarrow \begin{cases} -ikE_y = \dfrac{i\omega}{c}B_x & \text{(6.78a)} \\ ikE_x - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = \dfrac{i\omega}{c}B_y & \text{(6.78b)} \end{cases}$$

Por outro lado, a equação de Ampère-Maxwell (6.1.d) leva a:

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{i\mu\epsilon\omega}{c}\mathbf{E} \Rightarrow \begin{cases} -ikB_y = -\dfrac{i\mu\epsilon\omega}{c}E_x & \text{(6.79a)} \\ ikB_x - \dfrac{\partial B_z}{\partial x} = -\dfrac{i\mu\epsilon\omega}{c}E_y & \text{(6.79b)} \end{cases}$$

A componente E_y pode ser eliminada de (6.78a) e (6.79b), obtendo-se:

$$B_x = \frac{1}{\mu\epsilon\omega^2/c^2 - k^2}\left(ik\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) \quad . \tag{6.80}$$

Analogamente, eliminando E_x de (6.78b) e (6.79a), teremos:

$$B_y = \frac{1}{\mu\epsilon\omega^2/c^2 - k^2}\left(\frac{i\mu\epsilon\omega}{c}\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \quad . \tag{6.81}$$

Alternadamente, B_y pode ser eliminado de (6.78b) e (6.79a), encontrando-se:

$$E_x = \frac{1}{\mu\epsilon\omega^2/c^2 - k^2}\left(ik\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \tag{6.82}$$

ao passo que eliminando B_x de (6.78a) e (6.79b), chegamos a:

$$E_y = \frac{1}{\mu\epsilon\omega^2/c^2 - k^2}\left(-\frac{i\omega}{c}\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) \quad . \tag{6.83}$$

A partir destas relações fica claro que se E_z e B_z são conhecidas, as outras componemtes ficam completamente determinadas. Vamos estudar por exemplo o caso de uma onda tendo $E_z = 0$ em todos os pontos, denominada de onda elétrica transversal. Podemos especificar a componemte B_z substituindo a expressão (6.77) para o campo magnético na equação de onda (6.3), que implica:

$$\frac{\partial^2 B_z(x)}{\partial x^2} + \left(\frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2} - k^2\right)B_z(x) = 0 \quad . \tag{6.84}$$

A solução desta equação envolve cos (γx) ou sen(γx), onde:

$$\gamma^2 = \frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2} - k^2 \quad . \tag{6.85}$$

A solução coseno é simétrica sob a transformação $x \rightarrow -x$, sendo a solução seno antisimétrica. Vamos analisar aqui a solução coseno, deixando a outra solução como o problema 6.15. Teremos então que:

$$B_z(x) = A_0 \cos(\gamma x) \qquad \text{para} |x| \leq \frac{a}{2} \quad . \tag{6.86}$$

A equação correspondente a (6.84) na região externa ao dielétrico pode ser obtida colocando-se $\mu = \epsilon = 1$:

$$\frac{\partial^2 B_z(x)}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) B_z(x) = 0 \quad . \tag{6.87}$$

cuja solução é:

$$B_z(x) = \begin{cases} B_0 e^{-\alpha x} & \text{para} \quad x \geq \frac{a}{2} \\ \\ B_0 e^{\alpha x} & \text{para} \quad x \leq -\frac{a}{2} \end{cases} \tag{6.88}$$

onde:

$$\alpha^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \quad . \tag{6.89}$$

Adotamos aqui a solução que decresce exponencialmente com a distância da superfície da placa, a fim de evitar a irradiação de ondas para a região externa do dielétrico.

As condições de contorno relevantes requerem a continuidade da componente normal B_x e da componente tangencial de B_z/μ conforme vimos nas equações (1.60) e (1.61). Calculando B_x a partir da equação (6.80), obtemos que a primeira condição de contorno implica que:

$$\frac{A_0\gamma}{\mu\epsilon\omega^2/c^2 - k^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\gamma a}{2}\right) = \frac{B_0\alpha}{\omega^2/c^2 - k^2}\,e^{-\alpha\, a/2} \quad . \tag{6.90}$$

Analogamente, a segunda condição de contorno para B_z/μ requer:

$$\frac{1}{\mu}A_0\cos\left(\frac{\gamma a}{2}\right) = B_0\,e^{-\alpha\, a/2} \quad . \tag{6.91}$$

Podemos eliminar as constantes A_0 e B_0 dividindo as equações (6.90) e (6.91). Obtemos assim, com o auxílio de (6.85) e (6.89), a condição:

$$\frac{\mu}{\gamma}\tan\left(\frac{\gamma a}{2}\right) = -\frac{1}{\alpha} \quad . \tag{6.92}$$

Esta equação pode ser colocada numa forma mais útil notando a relação:

$$\alpha^2 + \gamma^2 = \frac{\omega^2(\mu\epsilon - 1)}{c^2} \tag{6.93}$$

que possibilita expressar α em termos de γ. Então, a condição (6.92) pode ser escrita como:

$$\tan\left(\frac{\gamma a}{2}\right) = -\frac{\gamma/\mu}{\sqrt{\omega^2(\mu\epsilon - 1)/c^2 - \gamma^2}} \quad . \tag{6.94}$$

Esta condição permite encontrar os valores de γ correspondentes a uma onda elétrica transversal e simétrica, determinando portanto os valores possíveis de k. Podemos resolver a equação (6.94) graficamente, representando as curvas associadas com os dois menbros no mesmo diagrama cuja abcissa é $\gamma a/2$. As intersecções destas curvas determinam as soluções da equação, conforme indica a figura (6.8).

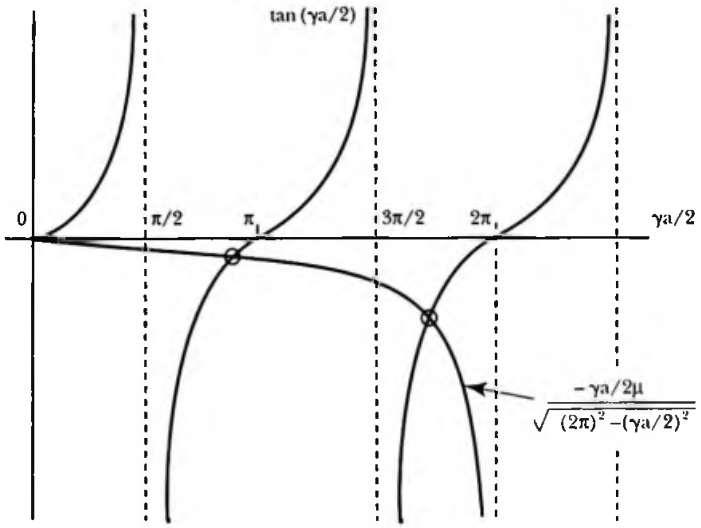


Figura 6.8

Notamos que o número de intersecções depende da magnitude de ω. O valor da frequência escolhido para a curva que representa o lado direito de (6.94) é: $\omega = (4\pi c/a)/(\mu\epsilon - 1)^{1/2}$. Esta frequência é suficientemente elevada para que existam as duas soluções indicadas pelos pequenos círculos na figura. Podemos também observar que se $\gamma a/2$ for menor que $\pi/2$, não existe uma intersecção das duas curvas. Por isso, a menor frequência possível para a propagação de uma onda elétrica transversal no dielétrico, que corresponde ao valor mínimo $\gamma_0 = \pi/a$, é dada por:

$$\omega_c = \frac{\pi c}{a\sqrt{\mu\epsilon - 1}} \tag{6.95}$$

Obtemos neste limite uma solução de (6.94) pois a quantidade α, que aparece no denominador do membro direito desta equação, se anula quando $\omega = \omega_c$ e $\gamma = \gamma_0$. Desta condição vemos que para valores de ω menores que a frequência de corte ω_c, α torna-se uma quantidade imaginária. A equação (6.88) mostra que neste caso os campos no exterior do dielétrico serão oscilantes. Então o dielétrico não atua mais como um guia, comportando-se como uma antena que irradia as ondas eletromagnéticas para o exterior do sistema.

PROBLEMAS

1. Considere um meio dielétrico cuja "constante" dielétrica ε é uma função da posição. Suponha que não haja carga livre e que $\mu = 1$. Deduza as equações

de onda para os campos **E** e **B** neste meio. Mostre que estas são diferentes e podem ser escritas nas formas:

$$\nabla^2\mathbf{E}-\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=-\nabla\left[\frac{1}{\varepsilon}(\nabla\varepsilon\cdot\mathbf{E})\right]$$

$$\nabla^2\mathbf{B}-\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon}\nabla\varepsilon\times(\nabla\times\mathbf{B}) \quad .$$

Note que os termos no lado direito acoplam as componentes cartesianas dos campos. O que acontece no caso especial em que ε varia somente na direção da propagação da onda?

2. Considere ondas eletromagnéticas descritas por funções que dependem da variável $(z-vt)$, como na equação (6.10). Então, a expressão mais geral para os campos terá a forma:

$$\mathbf{E}=\hat{\mathbf{e}}_x P(z-vt)+\hat{\mathbf{e}}_y Q(z-vt)+\hat{\mathbf{e}}_z R(z-vt)$$

$$\mathbf{B}=\sqrt{\varepsilon\mu}\left[\hat{\mathbf{e}}_x S(z-vt)+\hat{\mathbf{e}}_y T(z-vt)+\hat{\mathbf{e}}_z U(z-vt)\right]$$

onde P, Q, R, S, T e U são funções arbitrárias. Num meio homogêneo sem cargas e correntes livres, mostre que as equações de Maxwell (6.1) requerem: $R=U=0$, $Q=-S$ e $P=T$. Isto é, somente duas das seis funções são arbitrárias, correspondendo às duas possíveis polarizações.

3. Três ondas eletromagnéticas são representadas pelas expressões:

$$1:\ \mathbf{E}_1=\hat{\mathbf{e}}_x E_1^0 e^{i(kz-\omega t)} \quad ; \quad \mathbf{B}_1=\hat{\mathbf{e}}_y E_1^0 e^{i(kz-\omega t)}$$

$$2:\ \mathbf{E}_2=\hat{\mathbf{e}}_y E_2^0 e^{i(kz-\omega t-\alpha)} \quad ; \quad \mathbf{B}_2=-\hat{\mathbf{e}}_x E_2^0 e^{i(kz-\omega t-\alpha)}$$

$$\mathbf{3}:\ \mathbf{E}_3=\hat{\mathbf{e}}_x E_3^0 e^{i(kz-\omega t-\alpha)} \quad ; \quad \mathbf{B}_3=\hat{\mathbf{e}}_y E_3^0 e^{i(kz-\omega t-\alpha)}$$

a) Calcule $\bar{\mathbf{S}}$ para a superposição das ondas 1 e 2. Mostre que esta quantidade é igual à soma das quantidades correspondentes para as ondas consideradas separadamente. Explique este resultado.

b) Calcule $\bar{\mathbf{S}}$ para a superposição das ondas 1 e 3. Compare com o resultado anterior e explique a diferença.

4. Um fluxo de energia S (ergs/cm^2 – seg) incide num ângulo θ sobre uma superfície plana, totalmente refletora. Calcule a pressão de radiação (a) normal à superfície, e (b) ao longo da projeção na direção da radiação incidente. Ache a pressão total de radiação sobre uma esfera totalmente refletora, produzida pela radiação plana incidente. Qual é o resultado para uma esfera totalmente absorvente?

5. A energia média solar incidente sobre a terra é aproximadamente $1{,}4 \times 10^6$ ergs/cm^2–seg. Calcule a potência irradiada pelo sol e a intensidade do campo elétrico na superfície do sol [raio do sol $\simeq 7 \times 10^{10}$ cm, distância terra-sol $\simeq 1{,}5 \times 10^{13}$ cm]. Considere a terra como sendo uma esfera refletora e calcule a pressão de radiação sobre a terra.

6. Uma partícula esférica, totalmente refletora, tem raio R e densidade de 5g/cm^3. Se esta partícula é situada no espaço do sistema solar, qual é o limite no R de maneira que a força total de radiação devida ao sol exceda a atração gravitacional do sol?

7. Um pulso de radiação propaga-se na direção z. O pulso tem um comprimento infinito na direção z, mas tem uma largura finita nas direções x e y. Os campos elétricos e magnéticos são:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(x,y)e^{i(k_z z-\omega t)} \quad ; \quad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}(x,y)e^{i(k_z z-\omega t)}$$

Suponha que $E_z = 0$ e $k_z \neq \omega/c$.

(a) Mostre que $B_z(x, y)$ satisfaz a equação:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k_z^2\right)\right]B_z=0 \quad .$$

(b) Suponha que a função $B_z\,(x, y)$ que satisfaz esta equação é dada. Use as equações de Maxwell no vácuo (6.1.c) e (6.1.d) para achar as expressões para E_x, E_y, B_x, B_y em termos de $B_z(x, y)$.

(c) Mostre que $\omega > ck_z$ para este pulso de radiação.

(d) Mostre que se $B_z(x, y) = 0$, então os campos $E_x(x, y)$, $E_y(x, y)$ devem ser constantes e o pulso não terá largura finita nas direções x e y.

8. De acordo com a equação (6.31), a densidade de momento no campo eletromagnético pode ser expressa como a soma de dois termos. Mostre que, quando o segundo destes termos é integrado sobre o volume de um pulso de extensão finita, o resultado é zero:

$$-\frac{1}{4\pi c}\int(\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{A}\,dv=0 \quad .$$

Portanto, este termo não contribui para o momento resultante do pulso.

9. Uma onda elipticamente polarizada tem um campo elétrico dado por: $\mathbf{E} = (a\,\hat{\mathbf{i}} + ib\hat{\mathbf{j}})\,e^{j(kz-\omega t)}$, onde a e b são constantes reais. Determine a razão entre os valores médios do spin e da energia da onda.

10. Uma onda eletromagnética plana se propaga através de um plasma uniforme. Mostre que o valor médio do vetor de Poynting se anula se a freqüência da onda for menor que a freqüência do plasma.

11. O coeficiente de amortecimento l na equação (6.48) é muitas vezes escrito em termos de uma freqüência de colisão efetiva ν, onde: $l = m\nu$. Para a propagação de uma onda com baixa freqüência tal que: $\omega^2 \ll \nu^2$, mostre que um gás ionizado se comporta como um condutor ordinário com condutividade $\sigma = \omega_p^2/4\pi\nu$.

12. Esboce n_+^2 e n_-^2 dados pela equação (6.68) como funções de ω/ω_c para o caso em que $\omega_p = \omega_c$. Qual é o significado do fato de que para certos intervalos de freqüência temos: $n_+^2 > 0$ ao passo que $n_-^2 < 0$ (ou $n_+^2 < 0$ quando $n_-^2 > 0$) ?

13. A ionosfera terrestre pode ser aproximada por planos horizontais estratificados nos quais a densidade de elétrons N aumenta com a altitude z até um valor máximo $N_{máx} \sim 10^6$ cm^{-3}. A lei de Snell aplicada a planos adjacentes mostra que as ondas de rádio seguem um caminho tal que $n(z)\,\text{sen}\,\theta(z)$ é conservado, onde n é o índice de refração e θ é o ângulo do feixe de ondas com a vertical. Desprezando o efeito do campo magnético da terra, mostre que uma onda de rádio é refletida na (ou abaixo da) altitude onde a freqüência do plasma é igual à freqüência da onda. Devido à curvatura da terra, um feixe enviado horizontalmente incide sobre a região da ionosfera (altitude de ~ 300 km) num ângulo de aproximadamente 75°. Mostre que a freqüência máxima útil para comunicação de longas distâncias é quatro vezes maior que a freqüência do plasma para N_{max}.

14. Estude a relação entre o sentido de giração dos elétrons no plasma uniformemente magnetizado e o sentido de rotação dos campos elétricos $\mathbf{E}_d$ e $\mathbf{E}_l$, definidos na equação (6.72). Mostre que o campo levogiro $\mathbf{E}_l$ interage em ressonância com os elétrons na freqüência de ciclotron, justificando a associação da constante de propagação k_- com este campo elétrico.

15. Suponha que a dependência em x da onda elétrica transversal na placa dielétrica descrita na seção 6.7 é: $B_z(x) = A_0\,\text{sen}(\gamma x)$. Determine neste caso uma condição análoga à equação (6.94).

16. Considere uma onda magnética transversal, caracterizada por $B_z = 0$, que se propaga na direção z da placa dielétrica descrita na seção 6.7. Encontre para esta onda uma condição análoga à equação ((6.94). Qual é a menor frequência possível para uma onda magnética transversal?

7

FENÔMENOS ELETROMAGNÉTICOS EM PLASMAS

No capítulo anterior estudamos a propagação de ondas, envolvendo basicamente o intercâmbio de energias elétricas e magnéticas, em meios materiais cuja densidade de partículas é relativamente baixa. Por outro lado, em situações em que esta densidade é mais elevada, a inércia do meio contribui de uma forma significativa para a dinâmica dos campos. Nesta condições, qualquer separação em escala macroscópica de cargas opostas produzirá intensas forças restauradoras que tenderão a restabelecer o equilíbrio elétrico. Mostraremos na próxima seção que este fenômeno produzirá oscilações do plasma com elevada freqüência: $\omega_p = (4\pi Ne^2/m)^{1/2}$, onde N é a densidade do número de elétrons. Assim, nas situações que envolvem variações temporais dos campos que são lentas em comparação a esta freqüência, o meio pode ser considerado essencialmente neutro.

Este é o caso descrito pela magneto-hidrodinâmica, onde o meio pode ser considerado como um fluido neutro, que possui uma alta condutividade elétrica. As propriedades macroscópicas deste meio na presença de campos magnéticos são bastante universais, sendo descritas pelas equações de Maxwell juntamente com as equações clássicas de movimento do fluido. Grande parte do atual interesse pela física da magneto-hidrodinâmica é motivada pela possibilidade da produção de energia através do processo de fusão nuclear. Este requer condições que envolvem elevadas densidades de partículas em temperaturas superiores a 10^8 °C, que possam superar as repulsões coulombianas. Tais condições em que a matéria se encontra no estado de um plasma completamente ionizado existem em escala astrofísica no interior das estrelas.

7.1 O RAIO DE DEBYE E OSCILAÇÕES DE UM PLASMA

Consideremos um exemplo bastante simples, onde uma carga esférica $+Q$ é introduzida num plasma, submetendo desta forma o plasma a um campo elétrico. Neste caso, os elétrons sentem que é energeticamente favorável se aproximar da carga, enquanto os íons positivos tendem a se afastar. Em condições de equilíbrio, a probabilidade de encontrar uma partícula carregada numa região com potencial Φ é proporcional ao fator de Boltzman: $\exp(-q\Phi/kT)$ onde k é a constante de Boltzmann e T é a temperatura absoluta do plasma. Assim, a densidade de elétrons N_e é dada por:

$$N_e = N\exp\left(\frac{e\Phi}{kT}\right) \tag{7.1}$$

onde N é a densidade eletrônica em regiões onde $\Phi = 0$. Se N for também a densidade de íons positivos em regiões de potencial nulo, a densidade de íons positivos N_i será dada por:

$$N_i = N\exp\left(-\frac{e\Phi}{kT}\right) \quad . \tag{7.2}$$

O potencial Φ é obtido por meio da solução da equação de Poisson:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = -4\pi\left(N_i e - N_e e\right) = 8\pi eN\operatorname{senh}\left(\frac{e\Phi}{kT}\right) \quad . \tag{7.3.a}$$

Esta equação diferencial é não-linear e, conseqüentemente, deve ser integrada numericamente. Por outro lado, uma solução aproximada, que é rigorosa a altas temperaturas, é adequada a nossos propósitos. Se $kT \gg e\Phi$, então $\operatorname{senh}(e\Phi/kT) \approx e\Phi/kT$, e (7.3.a) se reduz à equação linear:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = \frac{8\pi Ne^2}{kT}\Phi \quad . \tag{7.3.b}$$

Conforme o problema (7.1), esta equação tem a solução esfericamente simétrica:

$$\Phi = \frac{Q}{r}\exp\left(-\frac{r}{D}\right) \quad . \tag{7.4}$$

Aqui, r é a distância medida a partir da carga $+Q$, sendo o raio de blindagem de Debye dado por:

$$D = \left(\frac{kT}{8\pi Ne^2}\right)^{1/2} \quad . \tag{7.5}$$

Um gás ionizado é denominado plasma se o raio de Debye D for pequeno comparado com outras dimensões físicas de interesse. Isto não será uma restrição enquanto a ionização do gás for apreciável. Para $T = 2000$ K e $N = 10^{12}$ elétrons/cm^3, o raio de Debye é $2{,}2 \times 10^{-4}$ cm.

Numa escala maior que D, os elétrons tendem a cooperar de maneira a neutralizar um excesso de carga positiva num certo ponto. É esta resposta coletiva às flutuações de carga que dá origem às oscilações do plasma em larga escala. As oscilações de natureza eletrostática em um plasma foram expostas pela primeira vez por Langmuir em 1929, que deu o nome de plasma às regiões do meio relativamente livres do campo elétrico.

Vamos estudar as oscilações de alta freqüência, quando podemos considerar os íons pesados como sendo praticamente estáticos. Por simplicidade, consideremos o caso em que o movimento dos elétrons é unidimensional na direção x. Fixemos a atenção numa região do plasma, indicada na figura 7.1, que contém

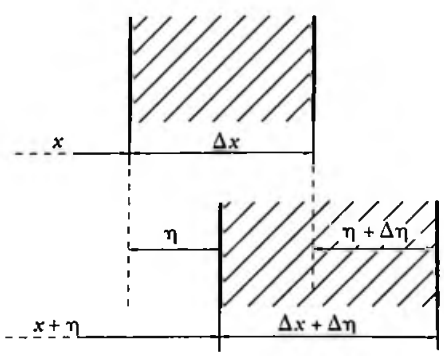


Figura 7.1

uma densidade uniforme de íons positivos N. No início, os elétrons também têm densidade uniforme N, porém vamos supor que cada elétron seja deslocado de

sua posição de equilíbrio no ponto x por uma distância $\eta(x,t)$. O deslocamento dos elétrons perturba o plasma neutro, produzindo uma carga em cada elemento de comprimento Δx. Para calcular a densidade de carga em cada ponto, notemos que inicialmente o número de elétrons no elemento Δx é proporcional a $N\Delta x$. O mesmo número de elétrons está agora contido num elemento de comprimento $\Delta x + \Delta\eta$. Assim, a densidade efetiva de elétrons será:

$$N + \Delta N = \frac{N\Delta x}{\Delta x + \Delta\eta} \simeq N\left(1 - \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$$

onde usamos o fato de que a mudança na densidade é pequena. Como a densidade dos íons permanece N, a densidade de carga em cada ponto será:

$$\rho = -e\Delta N = Ne\frac{\partial\eta}{\partial x} \quad . \tag{7.6}$$

Esta densidade não-nula de carga produz um campo $\mathbf{E}\,(x,t)$ que, em virtude da simetria do problema, está na direção x. Usando a lei de Gauss, teremos então:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi\rho = 4\pi Ne\frac{\partial\eta}{\partial x} \quad .$$

Integrando esta equação, obtemos:

$$E = 4\pi Ne\eta \quad . \tag{7.7}$$

Sendo que o campo elétrico é nulo na posição de equilíbrio $\eta = 0$, a constante de integração em (7.7) foi colocada igual a zero. A força que atua sobre o elétron, $F = -eE$, é restauradora, sendo proporcional ao deslocamento η. Isto leva a uma oscilação harmônica dos elétrons, cuja equação de movimento é dada por:

$$m\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + 4\pi N e^2\,\eta = 0 \quad . \tag{7.8}$$

Este movimento harmônico simples é caracterizado pela freqüência do plasma:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{m}} \qquad (7.9)$$

Como exemplo numérico, temos $\omega_p = 5{,}65 \times 10^{10}\ s^{-1}$ para uma densidade de partículas $N = 10^{12}$ elétrons/cm^3.

Um exemplo interessante de oscilações do plasma ocorre em metais. De acordo com a mecânica quântica, um oscilador harmônico com uma freqüência natural ω_p tem níveis de energia separados por um intervalo $\hbar\omega_p$. Se um feixe de elétrons incide sobre uma folha metálica, deveríamos então esperar que os elétrons emergentes do outro lado transferissem uma energia $\hbar\omega_p$ para as oscilações do plasma. Isto foi de fato observado pela primeira vez em 1936, em experiências de espalhamento de elétrons por folhas de alumínio.

7.2 AS EQUAÇÕES DA MAGNETO-HIDRODINÂMICA

Consideremos agora o comportamento de um fluido condutor, eletricamente neutro, em campos eletromagnéticos. Ele será descrito por uma densidade de massa $\xi(\mathbf{r},t)$, uma velocidade $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, uma pressão $P(\mathbf{r},t)$ e uma condutividade σ. Uma das equações da hidrodinâmica é a equação da continuidade:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla \cdot (\xi\, \mathbf{v}) = 0 \qquad (7.10)$$

que é análoga à expressão (4.12) para a conservação da carga. Para introduzir a segunda equação hidrodinâmica, notemos que a força por unidade de volume do plasma pode ser escrita como:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c}\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla P \quad , \qquad (7.11)$$

onde $\mathbf{J}$ é a densidade de corrente. Em virtude da neutralidade elétrica do plasma, o termo $\rho\mathbf{E}$ não precisa ser incluído na densidade de força $\mathbf{f}$. Por simplicidade, desprezamos as forças viscosas e gravitacionais. A equação do movimento do fluido é então obtida através do balanceamento do momento linear:

$$\xi \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} = \frac{1}{c}\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla P \quad . \tag{7.12}$$

Deve-se realçar que a derivada total da velocidade em relação ao tempo, que aparece no primeiro membro de (7.12), é a derivada total:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tag{7.13}$$

que dá a taxa temporal total da variação de uma grandeza que se move com a velocidade instantânea **v**.

Para completar a especificação das equações dinâmicas, é preciso estabelecer a relação entre a densidade de corrente **J** e os campos **E** e **B**. Esta é simplesmente uma forma generalizada da lei de Ohm, que pode ser escrita como:

$$\mathbf{J} = \sigma\left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right] \quad . \tag{7.14}$$

Aqui, $(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B}$ é o campo elétrico efetivo proveniente do movimento hidrodinâmico do plasma em um campo magnético.

Uma aproximação freqüentemente feita é a da condutividade infinita. A vantagem desta aproximação consiste em permitir uma simplificação substancial das equações hidromagnéticas, que apresentam desta forma uma imagem muito mais clara dos processos físicos que ocorrem no plasma. Em alguns problemas, particularmente nos astrofísicos, a aproximação é bastante boa. No caso da condutividade infinita, e permanecendo **J** finito, a lei de Ohm reduz-se a:

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} = 0 \quad . \tag{7.15}$$

A condutividade infinita (ou, para fins práticos, a alta condutividade) tem uma importante conseqüência relacionada com o "congelamento" do fluxo magnético dentro do plasma. Se a equação (7.15) for combinada com a lei de Faraday na equação (4.5), obteremos:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c\,\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad . \tag{7.16}$$

A componente normal desta equação, integrada sobre uma superfície fixa *S*, dá, usando a lei de Stokes:

$$\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,da = \oint_C (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{B}\cdot(d\mathbf{l}\times\mathbf{v}) \tag{7.17}$$

onde *C* é um contorno fixo no espaço através do qual o plasma se move devido ao movimento hidrodinâmico, conforme mostra a figura 7.2:

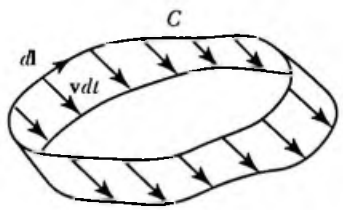


Figura 7.2

Vemos que $\oint_C d\mathbf{l} \times \mathbf{v}$ pode ser considerado como o acréscimo de área por unidade de tempo, da superfície que é limitada por *C* e que $\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}\times\mathbf{v}$ é o fluxo associado a esta área aumentada. A equação (7.17) estabelece simplesmente que a variação do fluxo magnético, por unidade de tempo, através do contorno *C* é exatamente a que calcularíamos geometricamente quando todas as linhas de fluxo se movem junto com o fluido. Concluímos que as linhas de indução magnética estão "congeladas" no interior do fluido perfeitamente condutor, sendo transportadas juntamente com este.

No limite de uma condutividade muito grande, é conveniente relacionar a densidade de corrente **J** na equação da força (7.12) à indução magnética **B**. Com esta finalidade notamos que para correntes lentamente variáveis podemos desprezar a corrente de deslocamento, de forma que o campo magnético no fluido é descrito por:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \quad . \tag{7.18}$$

Usando a lei de Ampère (7.18), o termo de força magnética pode agora ser escrito:

$$\frac{1}{c}(\mathbf{J}\times\mathbf{B}) = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{B}) \quad . \tag{7.19}$$

Com a identidade vetorial:

$$\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{B}) \quad ,$$

onde usamos o fato de que $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$, a equação (7.19) pode ser transformada em:

$$\frac{1}{c}(\mathbf{J}\times\mathbf{B}) = -\nabla\left(\frac{B^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} \quad . \tag{7.20}$$

Esta equação mostra que a força magnética é equivalente a uma pressão hidrostática magnética:

$$P_M = \frac{B^2}{8\pi} \tag{7.21}$$

mais um termo que pode ser imaginado como sendo uma tensão adicional ao longo das linhas de força. Assim, a lei das forças (7.12) assume a forma:

$$\xi\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla(P + P_{\mathrm{M}}) + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} \tag{7.22}$$

Em situações geométricas simples, como a de **B** tendo apenas uma componente, a tensão adicional se anula. Para ver isto, observamos que a equação $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ garante que **B** não se modifica ao longo da direção do campo. Sendo que a variação espacial de **B** pode ocorrer somente em direções transversais ao campo, resulta que neste caso $(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} = 0$. Então, as propriedades estáticas do fluido ficam descritas por:

$$P + P_M = \text{constante} \tag{7.23}$$

Esta fórmula mostra que, ignorando-se efeitos viscosos e gravitacionais, qualquer modificação na pressão mecânica deve ser equilibrada por uma modificação oposta na pressão magnética. Se o fluido estiver contido numa certa região, de modo que P caia rapidamente a zero no exterior desta região, a pressão magnética deve crescer com igual rapidez para ser capaz de confinar o fluido. Este é o princípio do equilíbrio dinâmico que discutiremos na próxima seção.

7.3 EQUILÍBRIO DINÂMICO DE UM PLASMA

Nas pesquisas termonucleares, e também em outras aplicações, o confinamento de um plasma ou de um fluido condutor por campos magnéticos autoinduzidos tem considerável interesse. Para ilustrar os princípios deste mecanismo, vamos considerar um cilindro infinito de fluido condutor, com uma densidade de corrente axial $J_z = J(\rho)$ e uma indução magnética azimutal resultante $B_\phi = B(\rho)$, conforme indica a figura 7.3.

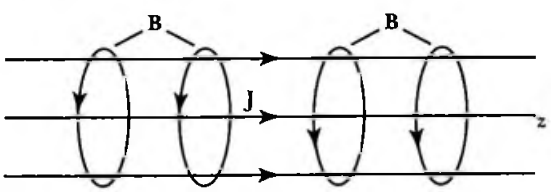


Figura 7.3

Por simplicidade, vamos supor que a densidade de corrente, o campo magnético, a pressão etc. dependem somente da distância ρ em relação ao eixo do cilindro. Indagamos sobre a possibilidade de existir uma condição de estado permanente no qual o material fica confinado principalmente dentro de uma região de raio R pela ação da sua própria indução magnética.

Num estado com $\mathbf{v} = 0$, a equação de movimento (7.22) é trivialmente satisfeita para as componentes z e ϕ, tendo em vista que $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ só tem componente na direção radial. Em coordenadas cilíndricas, é fácil verificar que esta quantidade é igual a $-B_\phi^2\, \hat{\mathbf{e}}_\rho / \rho$. (Ver o problema 7.4.) Então, a condição de equilíbrio radial é:

$$0 = -\frac{dP}{d\rho} - \frac{d}{d\rho}\left(\frac{B^2}{8\pi}\right) - \frac{B^2}{4\pi\rho} \quad . \tag{7.24}$$

A lei de Ampère, na forma integral, relaciona $B(\rho)$ à corrente circundada:

$$B(\rho) = \frac{4\pi}{c\rho}\int_0^\rho r\, J(r)\, dr \quad . \tag{7.25}$$

Vários resultados gerais podem obter-se sem particularizar a forma de $J(r)$. Da lei de Ampère é evidente que, se o fluido estiver inteiramente no interior de $\rho = R$, a indução magnética no exterior do fluido é:

$$B(\rho) = \frac{2I}{c\rho} \tag{7.26}$$

onde

$$I = \int_0^R 2\pi r\, J(r)\, dr$$

é a corrente total que flui no cilindro. A equação (7.24) pode ser escrita na forma:

$$\frac{dP}{d\rho} = -\frac{1}{8\pi\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2 B^2\right) \tag{7.27}$$

com a solução:

$$P(\rho) = P_0 - \frac{1}{8\pi}\int_0^\rho \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 B^2\right) dr \quad . \tag{7.28}$$

Nesta expressão, P_0 é a pressão do fluido em $\rho = 0$. Se a matéria estiver confinada em $\rho \leq R$, a pressão cai a zero em $\rho = R$. Conseqüentemente, a pressão axial P_0 é dada por:

$$P_0 = \frac{1}{8\pi}\int_0^R \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2B^2\right)dr \quad . \tag{7.29}$$

Com esta expressão para P_0, a equação (7.28) pode ser expressa como:

$$P(\rho) = \frac{1}{8\pi}\int_\rho^R \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2B^2\right)dr \quad . \tag{7.30}$$

A pressão média no interior do cilindro pode ser relacionada à corrente total I e ao raio R, sem que se tenha o comportamento radial detalhado. Assim:

$$\overline{P} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi\rho P(\rho)\,d\rho \quad . \tag{7.31}$$

Integrando por partes, levando em consideração que a pressão se anula em $\rho = R$, e usando a equação (7.27), obtemos:

$$\overline{P} = -\frac{1}{R^2}\int_0^R \rho^2\frac{dP}{d\rho}d\rho = \frac{1}{8\pi R^2}\int_0^R \frac{d}{d\rho}\left(\rho^2B^2\right)d\rho \tag{7.32}$$

$$= \frac{1}{8\pi}B^2(R) = \frac{I^2}{2\pi R^2c^2} \quad .$$

Esta equação relaciona a pressão média, a corrente total e o raio do cilindro do plasma, confinado pelo seu próprio campo magnético. Observe que a pressão média da matéria é igual à pressão magnética ($B^2/8\pi$) na superfície do cilindro. Nas experiências termonucleares operam-se plasmas quentes com temperaturas de ordem de 10^8 K e densidades da ordem de 10^{15} partículas/cm^3. Estas condições correspondem a pressões aproximadas de $10^{15} \cdot 10^8$ k $\approx 1{,}4 \cdot 10^7$ dyn/cm^2, ou seja, 14 atmosferas. Para o confinamento, é necessário uma indução magnética de aproximadamente 19 kG na superfície, correspondendo a uma corrente de $9 \cdot 10^4$ R Ampères. Estes números mostram que são necessárias correntes muito intensas para confinar plasmas muito quentes.

Vamos ilustrar o comportamento radial do sistema, considerando um exemplo simples onde a densidade de corrente $J(\rho)$ é constante para $\rho < R$. Então

$B(\rho) = (2I\rho/cR^2)$ para $\rho < R$. A equação (7.30) leva pois a uma dependência parabólica da pressão com o raio:

$$P(\rho) = \frac{I^2}{2\pi c^2 R^4}\int_{\rho}^{R}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^4\right) = \frac{I^2}{\pi c^2 R^2}\left(1-\frac{\rho^2}{R^2}\right) \quad . \tag{7.33}$$

A pressão axial P_0 é então o dobro da pressão média $\overline{P}$.

7.4 ONDAS DE ALFVÉN

Se a condição de "congelamento" das linhas do campo magnético for satisfeita, podemos então esperar um novo tipo de movimento de ondas. Qualitativamente, podemos entender isto por analogia com o comportamento das ondas numa corda sob tensão: cada tubo de força com área transversal unitária, tendo uma densidade de massa ξ por unidade de comprimento, está sob uma pressão magnética de $B^2/8\pi$. Conseqüentemente, pode-se esperar um movimento ondulatório cuja velocidade ao quadrado é da ordem da tensão dividida pela densidade:

$$v_{\mathrm{A}}^2 \sim \frac{B^2}{8\pi\xi} \quad . \tag{7.34}$$

Estas ondas, previstas por Alfvén em 1942, são propagadas ao longo das linhas de força. A teoria detalhada é muito complicada, mas um tratamento simplificado mostra muitas propriedades características. Vamos restringir a nossa atenção a fluidos incompressíveis, considerando primeiramente o caso em que a condutividade é infinita. Nestas hipóteses, as equações diferenciais são [veja as relações (7.16) e (7.22)]:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) \tag{7.35}$$

$$\xi\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \xi\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{v} = -\nabla\left(P+\frac{B^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{B}\cdot\nabla\right)\mathbf{B} \quad . \tag{7.36}$$

Vamos supor a existência de um campo magnético uniforme $\mathbf{B}_0$ e seja $\mathbf{b}$ a perturbação magnética propagada, *i.e.*:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b} \quad . \tag{7.37}$$

O campo $\mathbf{B}_0$ é constante e tomaremos o eixo z ao longo da direção de $\mathbf{B}_0$. A equação diferencial (7.36) é não-linear, de forma que, em geral, ondas que se propagam em direções diferentes serão mutuamente afetadas. Vamos considerar um caso simples em que a onda linearmente polarizada, se propaga ao longo do eixo z sendo $\mathbf{b}$ e $\mathbf{v}$ ortogonais a $\mathbf{B}_0$. Usando a identidade (A.10), a equação (7.35) fica:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \mathbf{v}\left(\nabla \cdot \mathbf{B}\right) - \mathbf{B}\left(\nabla \cdot \mathbf{v}\right) + \left(\mathbf{B} \cdot \nabla\right)\mathbf{v} - \left(\mathbf{v} \cdot \nabla\right)\mathbf{B} \quad .$$

Tendo em vista que neste caso o operador ∇ tem componente somente ao longo de z, e sendo $\mathbf{v}$ transversal com respeito ao eixo z, obtemos então que:

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = B_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \quad . \tag{7.38}$$

Portanto, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{v}$ são polarizados no mesmo plano, conforme indica a figura 7.4.

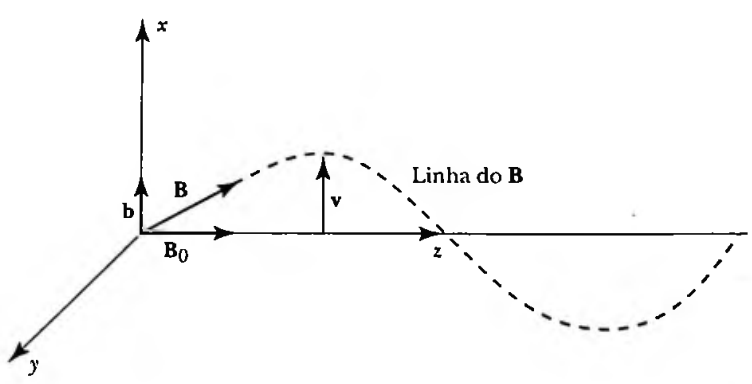


Figura 7.4

Por outro lado, sendo que o operador ∇ atua somente na direção z, a equação (7.36) se reduz a:

$$\xi \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla\left(P + \frac{B^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{4\pi} B_0 \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z} \quad . \tag{7.39}$$

A parte transversal desta equação é simplesmente:

$$\xi \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{B_0}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z} \quad . \tag{7.40}$$

Vamos tomar em seguida a derivada temporal de (7.38) e combinar o resultado com a derivada em relação a z de (7.40). Deste modo podemos eliminar a velocidade do meio, obtendo:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial z^2} - \frac{4\pi\xi}{B_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial t^2} = 0 \quad . \tag{7.41}$$

Esta equação de onda unidimensional mostra que a velocidade da onda de Alfvén é dada por:

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\xi}} \quad . \tag{7.42}$$

Este resultado confirma a relação qualitativa (7.34), tendo em vista que $B^2 \simeq B_0^2$.

Para o mercúrio, em temperatura ambiente, a velocidade de Alfvén v_A é: $[B_0/13{,}1]$ cm/s, em contraste com a velocidade do som, $1{,}45 \cdot 10^5$ cm/s. Em qualquer das intensidades de campo de laboratório, a velocidade de Alfvén é muito menor que a velocidade do som. Nos problemas astrofísicos, por outro lado, esta velocidade pode ser muito grande, em virtude de as densidades serem muito pequenas. Na fotosfera do sol, por exemplo, a densidade é da ordem de 10^{-7}g/cm^3, de modo que $v_A \approx 10^3\, B_0$ cm/s. Os campos magnéticos parecem ser da ordem de 1 ou 2 gauss na superfície, com valores muito maiores nas vizinhanças das manchas solares.

Quando a condutividade do fluido não é infinita, esperam-se perdas dissipativas e o conseqüente amortecimento das ondas. Para estimar o efeito de uma condutividade finita, consideremos a equação

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}}{c\sigma} \right) = \nabla \times \left(\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{4\pi\sigma} \right) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B} \tag{7.43}$$

que segue das relações (7.18) e $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

Por outro lado, combinando o rotacional (7.14) com a lei de Faraday (4.5), teremos:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{c\,\mathbf{J}}{\sigma} \right) \tag{7.44}$$

Considerando estas relações, fica claro que o efeito de uma condutividade finita resulta num termo adicional na equação de onda para **b**. De fato, a equação (7.38) será generalizada neste caso para:

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = B_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} - \frac{c}{\sigma} (\nabla \times \mathbf{J}) = B_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B} \tag{7.45}$$

onde usamos a relação (7.43). Combinando este resultado com a equação (7.40), a equação de onda para **b** fica então:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial t^2} - \frac{B_0^2}{4\pi\xi} \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial z^2} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right) \tag{7.46}$$

Esta equação mostra que ocorre um amortecimento da onda à medida que esta se propaga ao longo da direção z. A verificação deste comportamento fica com o problema 7.8.

PROBLEMAS

1. Mostre, a partir das equações (7.3.b) e (7.5), que $\psi \equiv r\Phi$ satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} = \frac{1}{D^2} \psi \quad .$$

Escreva a solução geral desta equação e mostre que a solução física que satisfaz as condições de contorno para $r = 0$ e $r = \infty$ é dada por:

$$\psi = Q\exp(-r/D) \quad .$$

A equação (7.4) resulta então substituindo nesta relação ψ por $r\Phi$.

2. O potencial na região adjacente a uma sonda plana e carregada introduzida no plasma pode ser descrito para $x > 0$ pela equação unidimensional de Poisson:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = -4\pi e(N_i - N_e)$$

onde

$$N_i = N\exp(-e\Phi/kT) \qquad ; \qquad N_e = N\exp(e\Phi/kT) \quad .$$

(a) Usando a condição de contorno na superfície da sonda: $\Phi\ (x = 0) = \Phi_0$ e integrando a equação de Poisson, mostre que:

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 = 8\pi NkT[\exp(e\Phi/kT) + \exp(-e\Phi/kT)$$

$$- \exp(e\Phi_0/kT) - \exp(-e\Phi_0/kT)] + 16\pi^2\sigma^2$$

onde σ é a densidade de carga na superfície da sonda.

(b) Mostre que no limite de altas temperaturas, o potencial no plasma será dado por:

$$\Phi = \Phi_0\exp(-x/D) \qquad \text{onde} \qquad \Phi_0 = 4\pi\sigma D \quad .$$

3. Mostre que, incluindo-se o termo da pressão, a equação que descreve as oscilações do plasma pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{4\pi N e^2}{m}\eta = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_N \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

onde $\Delta N = n - N$ representa a flutuação da densidade de elétrons devida à perturbação do plasma.
Considerando uma solução para η da forma:

$$\eta = \eta_0 e^{i(Kx - \omega t)}$$

e usando a lei adiabática: $P = P_0\ (n/N)^3$, mostre que obteremos a relação de dispersão:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3v^2K^2$$

onde v^2 é a velocidade quadrática média definida por: $mv^2 = kT$.

4. Considere a quantidade vetorial $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$, onde $\boldsymbol{B} = B_\phi\ \hat{\mathbf{e}}_\phi$. Mostre que a condição $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ implica que $B_\phi = B_\phi\ (\rho, z)$. Usando este resultado, obtenha a relação: $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} = -B_\phi^2\ \hat{\mathbf{e}}_\rho / \rho$.

5. Usando a equação da continuidade

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

juntamente com a relação:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

mostre que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{B}}{\xi}\right)=\left(\frac{\mathbf{B}}{\xi}\cdot\nabla\right)\mathbf{v} \quad .$$

6. É dado um problema hidromagnético de fluxo estacionário no qual **v**, **J** e **B** são mutuamente ortogonais. Suponha que **v** esteja na direção x e que **v**, **J** e **B** sejam funções apenas de x. Suponha também que a seção reta do canal (perpendicular a x) seja independente de x. Desprezando o efeito da pressão, demonstre que:

$$v = v_0 + \frac{1}{2c\,\xi_0 v_0}\left[2B_0\int J\,dx - \frac{4\pi}{c}\left(\int J\,dx\right)^2\right]$$

onde v_0 é a velocidade quando $\xi = \xi_0$, $B = B_0$.

7. Considere uma coluna cilíndrica infinita de raio R, carregando uma densidade de corrente J na direção do eixo z, sendo as linhas do campo magnético círculos no plano perpendicular ao eixo. O equilíbrio é mantido igualando a força magnética ao gradiente da pressão:

$$\nabla P = \frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B}$$

Mostre que a condição de equilíbrio radial leva à relação:

$$P(\rho)=\frac{1}{c}\int_{\rho}^{R} J\,B\,dr \quad .$$

Suponha agora que a corrente I é confinada a uma camada superficial, de modo que J tem a forma de uma função delta. Usando o resultado anterior, mostre que a pressão é constante no interior do cilindro sendo dada por:

$$P = \frac{I^2}{2\pi c^2 R^2}$$

8. Considere a equação que descreve o comportamento do campo magnético **b** propagando-se num plasma de condutividade finita σ na direção z:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial t^2} = v_A^2 \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial z^2} + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}\right)$$

Usando uma solução para esta equação da forma:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 e^{i(\alpha z - \omega t)}$$

mostre que:

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{v_A^2 - \left(ic^2\omega/4\pi\sigma\right)}$$

Para amortecimento pequeno, mostre que a distância δ na qual a amplitude da onda se reduz a $1/e$ do seu valor original é:

$$\delta = \frac{8\pi\sigma v_A^3}{c^2\omega^2}$$

8

POTENCIAIS DE LIÉNARD-WIECHERT E OS CAMPOS DE CARGAS EM MOVIMENTO UNIFORME

Uma carga elétrica que se move uniformemente no vácuo não irradia. Ela está acompanhada de campos elétricos e magnéticos convectivos que, para altas velocidades, se assemelham a uma onda plana. Por outro lado, se o movimento uniforme ocorrer na matéria, teremos uma emissão de radiação chamada de efeito Cherenkov. Todos estes fenômenos podem ser analisados a partir dos potenciais de Liénard-Wiechert para cargas puntiformes.

8.1 OS POTENCIAIS DE LIÉNARD-WIECHERT

Conforme vimos nas equações (5.3) e (5.4), os potenciais escalar e vetor de cargas e correntes localizadas podem ser escritos em termos do tempo retardado (5.2). Esta condição pode ser convenientemente expressa através do uso da função delta de Dirac. Por exemplo, podemos escrever a equação (5.3) na forma:

$$\Phi(\mathbf{r},t)=\int\int\frac{\rho(\mathbf{r}',t')}{R}\,\delta\left(t'+\frac{R}{c}-t\right)dv'\,dt' \tag{8.1}$$

onde $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ e a função delta assegura o comportamento retardado necessário para a causalidade. Para uma carga pontual q que se move com velocidade $\mathbf{v}$ no ponto $\mathbf{r}_q(t')$, a densidade de carga é:

$$\rho(\mathbf{r}',t') = q\delta\left[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_q(t')\right] \quad . \tag{8.2}$$

Substituindo este resultado em (8.1), a integral sobre dv' pode ser facilmente calculada, obtendo-se:

$$\Phi(\mathbf{r},t) = q\int \frac{1}{R(t')}\delta\left[t' + \frac{R(t')}{c} - t\right]dt' \tag{8.3}$$

onde agora $R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')|$. Podemos efetuar também a integração sobre t', usamos a propriedade da função delta cujo argumento é uma função da variável de integração [veja a relação (B.5)]:

$$\int \psi(t')\delta\left[f(t') - t\right]dt' = \left[\frac{\psi(t')}{|df/dt'|}\right]_{f(t')=t} \tag{8.4}$$

onde $\psi(t') = 1/R(t')$.

A função $f(t') = t' + R(t')/c$ tem a derivada:

$$\frac{df}{dt'} \equiv K = 1 + \frac{dR}{cdt'} = 1 - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_q}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|}\cdot\frac{d\mathbf{r}_q}{dt'} = 1 - \hat{\mathbf{n}}\cdot\frac{\mathbf{v}}{c} \tag{8.5}$$

onde $\mathbf{v}$ é a velocidade instantânea da partícula. $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{R}/R$ é o vetor unitário direcionado da posição da carga para o ponto de observação P, conforme mostra a figura 8.1.

Usando a relação (8.5) juntamente com a equação (8.4), o resultado da integral sobre t' em (8.3) será:

$$\Phi(\mathbf{r},t) = q\left[\frac{1}{KR}\right]_{\bar{t}} \tag{8.6}$$

O colchete com o índice $\bar{t}$ significa que a quantidade R deve ser calculada no tempo retardado, $\bar{t} = t - R(\bar{t})/c$. Procedendo de uma maneira inteiramente análoga, podemos escrever o potencial vetor na forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{q}{c}\left[\frac{\mathbf{v}}{KR}\right]_{t'} \quad . \tag{8.7}$$

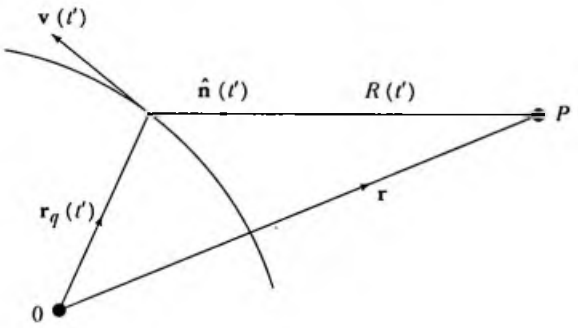


Figura 8.1

Estas expressões, obtidas por Liénard (1898) e Wiechert (1900), se reduzem no limite não-relativístico respectivamente às relações (1.12) e (1.42).

8.2 CAMPOS DE UMA CARGA EM MOVIMENTO UNIFORME

Neste caso, é possível expressar os potenciais e campos em função da posição presente da carga no tempo t, quando os efeitos são observados. Consideremos então uma carga que se move com velocidade uniforme **v** no vácuo, conforme mostra a figura 8.2.

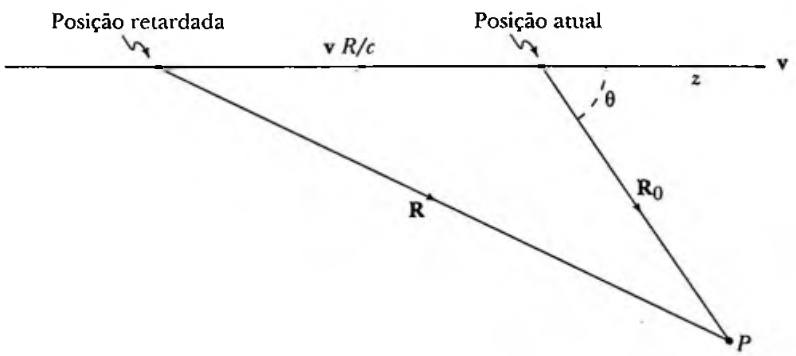


Figura 8.2

Vamos calcular os denominadores em (8.6) e (8.7):

$$S \equiv (KR)_i = \left(R - \mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right)_i \tag{8.8}$$

em função da posição atual da carga. Usando a geometria da figura, podemos verificar que [veja o problema 8.2]:

$$S^2 = R_0^2 - \left(\mathbf{R}_0 \times \frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 \quad . \tag{8.9}$$

Assim, podemos expressar explicitamente S em função da posição presente (x_0, y_0, z_0), ou em termos de R_0 e o ângulo θ entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{R}_0$:

$$S = \left[x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \frac{v^2}{c^2}\left(x_0^2 + y_0^2\right) \right]^{1/2} = \left[z_0^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)\left(x_0^2 + y_0^2\right) \right]^{1/2} \tag{8.10}$$

$$= R_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \operatorname{sen}^2 \theta} \quad .$$

Substituindo este resultado nos denominadores de (8.6) e (8.7), os potenciais de Liénard-Wiechert serão expressos em termos das coordenadas atuais da carga. Neste caso podemos calcular facilmente os campos. Temos:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad . \tag{8.11}$$

A derivada temporal pode ser escrita em termos da derivada espacial notando que o campo é transportado convectivamente pela carga em movimento uniforme. Um observador estacionário no tempo $t + dt$ verá o mesmo campo que existiu no tempo t numa posição deslocada dele por $-\mathbf{v}dt$. Assim, podemos escrever que:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla = -v\frac{\partial}{\partial z} \quad . \tag{8.12}$$

Usando esta relação em (8.11), obtemos para as componentes do campo elétrico os seguintes resultados:

$$E_x = \frac{qx_0}{S^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \quad ; \quad E_y = \frac{qy_0}{S^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \quad ; \quad E_z = \frac{qz_0}{S^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \tag{8.13}$$

Apesar do fato de **A** ter somente componente na direção z, vemos que o numerador do campo elétrico é simétrico nas suas três componentes. Note que, para um dado valor de S, o campo elétrico tem a mesma direção que o vetor de posição $\mathbf{R}_0$.

Portanto, podemos escrever vetorialmente o campo **E** na forma:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{S^3}\left[\mathbf{R}-\frac{\mathbf{v}R}{c}\right]_{\text{ret}}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{q\mathbf{R}_0\left(1-v^2/c^2\right)}{S^3}$$

$$= \frac{q\mathbf{R}_0}{R_0^3}\frac{1-v^2/c^2}{\left[1-\left(v^2/c^2\right)\operatorname{sen}^2\theta\right]^{3/2}} \tag{8.14}$$

O campo magnético $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ será [veja o problema 8.3]:

$$\mathbf{B} = \frac{q}{c}\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{R}_0}{S^3}\left(1-v^2/c^2\right) = \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{E} \tag{8.15}$$

Para pequenas velocidades $v/c \to 0$, temos que $S \to R$, de forma que as equações (8.14) e (8.15) se reduzem aos campos de Coulomb e Biot-Savart, respectivamente. Para altas velocidades $v \to c$, os campos dependem do ângulo entre a direção do movimento da carga e o vetor $\mathbf{R}_0$.

Da equação (8.14), vemos que o campo elétrico na direção do movimento diminui por um fator de $(1 - v^2/c^2)$, ao passo que na direção perpendicular ao movimento o campo aumenta por um fator de $1/(1-v^2/c^2)^{1/2}$. Em velocidades muito elevadas, o campo parecerá cada vez mais com aquele de uma onda plana, conforme mostra a figura 8.3.

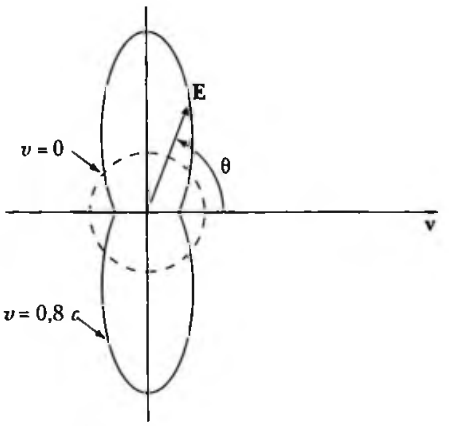


Figura 8.3

Quando uma carga em alta velocidade passa por um observador, este percebe durante um curto período um campo elétrico (e magnético) transversal, semelhante ao campo de uma onda plana. É fácil verificar, calculando-se a integral de superfície do vetor de Poynting correspondente aos campos (8.14) e (8.15), que uma carga em movimento uniforme no vácuo não irradia.

Mostraremos no próximo capítulo que estes campos podem também ser obtidos aplicando-se uma transformação relativística de Lorentz aos campos de uma carga estática. Esta transformação relaciona o sistema de repouso da carga com o sistema de laboratório, onde a carga tem velocidade **v**.

8.3 O CONCEITO DE FÓTONS VIRTUAIS

Vimos que o campo eletromagnético de uma carga em alta velocidade se aproxima do campo de uma onda plana. Vamos agora expressar esta correspondência de uma forma mais quantitativa. A estreita relação entre as interações produzidas por uma carga em movimento e aquelas devidas a ondas eletromagnéticas foi apontada por E. Fermi em 1934.

O campo eletromagnético associado a uma carga em movimento representa um pulso no tempo que corresponde a uma distribuição em várias freqüências da energia contida no campo. Obviamente, a integral sobre este espectro de freqüências vai representar a energia total contida no campo da partícula.

Vamos proceder fazendo uma análise de Fourier das componentes do campo elétrico que são transversais à velocidade **v**. Usando as relações (8.10) e (8.13) podemos escrever que:

$$E_{\perp}(t) = q\frac{\gamma^{-2}b}{\left[(vt)^2 + \gamma^{-2}b^2\right]^{3/2}} \tag{8.16}$$

onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ e b é a distância perpendicular entre a trajetória da carga e o observador (veja figura 8.4).

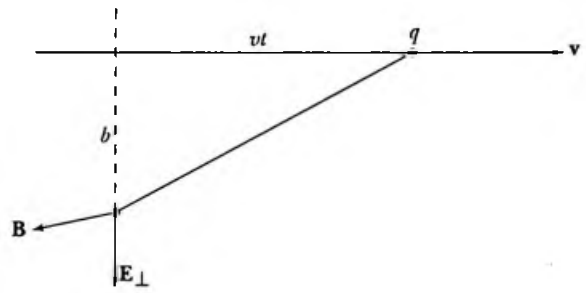


Figura 8.4

As componentes de Fourier deste campo são dadas por:

$$E_{\perp}^{\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{\perp}(t)e^{i\omega t}dt = \frac{qb\gamma^{-2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\left[(vt)^2 + \gamma^{-2}b^2\right]^{3/2}}dt \tag{8.17}$$

$$= \frac{q}{2\pi bv}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\omega b/\gamma v)\xi}}{\left(\xi^2+1\right)^{3/2}}d\xi$$

onde $\xi = \gamma vt/b$. Esta expressão pode ser colocada na forma:

$$E_{\perp}^{\omega} = \frac{q}{\pi bv}\left[\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)K_1\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)\right] \tag{8.18}$$

onde $K_1(x)$ é a função de Bessel modificada de argumento imaginário definida por:

$$K_1(x) = -\frac{\pi}{2}\left[J_1(ix) + iN_1(ix)\right] \tag{8.19}$$

onde J_1 e N_1 representam as funções de Bessel introduzidas na seção 4 do capítulo 3. Conforme o resultado do problema 8.9, a função $K_1(x)$ se comporta como $1/x$

perto de $x = 0$ e decresce assintoticamente para grandes valores de x como e^{-x}. Conseqüentemente, podemos aproximar a equação (8.18) por:

$$E_{\perp}^{\omega} = \frac{q}{\pi b v} \quad , \quad \omega < \gamma v/b$$
$$E_{\perp}^{\omega} = 0 \quad , \quad \omega > \gamma v/b \quad . \tag{8.20}$$

Esta relação é bastante razoável fisicamente, visto que, devido à contração transversal do campo, o tempo efetivo da passagem do pulso é da ordem $b/\gamma v$.

Numa onda eletromagnética, metade da energia da onda é carregada pelo campo elétrico, sendo a outra metade associada ao campo magnético. Portanto a energia total será:

$$U = \frac{1}{4\pi}\int E_{\perp}^2 dv' = \frac{v}{4\pi}\int 2\pi b\, db \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\perp}^2 dt \quad . \tag{8.21}$$

Podemos escrever a integral temporal em termos das componentes de Fourier (8.17), usando o teorema de Parseval. Este teorema afirma que, sendo $\mathbf{A}(\omega)$ a transformada de Fourier de um campo real $\mathbf{A}(t)$:

$$\mathbf{A}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}(\mathbf{t}) e^{i\omega t} dt \tag{8.22.a}$$

teremos a relação [veja o problema 8.10]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{A}|^2 dt = 4\pi \int_0^{\infty} |\mathbf{A}(\omega)|^2 d\omega \tag{8.22.b}$$

A partir deste resultado, podemos escrever a energia U em termos de uma integral sobre o espectro de freqüências:

$$U = \int_0^{\infty} U_{\omega} d\omega = v \int \left(\int_0^{\infty} \left| E_{\perp}^{\omega} \right|^2 d\omega \right) 2\pi b\, db \quad . \tag{8.23}$$

Usando a expressão (8.20) teremos que:

$$U = \frac{2}{\pi}\frac{q^2}{v}\int_0^\infty d\omega \int_{b_{\min}}^{\gamma v/\omega} \frac{db}{b} \tag{8.24}$$

onde $b_{\min}$ representa um corte para pequenos parâmetros de impacto do campo coulombiano. Portanto:

$$U_\omega = \frac{2}{\pi}\frac{q^2}{v}\ln\left(\frac{\gamma v}{\omega b_{\min}}\right) \tag{8.25}$$

descreve a distribuição da energia da onda plana equivalente nas diversas freqüências. É instrutivo interpretar esta equação em termos do número equivalente de fótons N_ω dado pela relação: $U_\omega\, d\omega = \hbar\omega\, N_\omega\, d\omega$. Para um elétron relativístico, obteremos assim que:

$$N_\omega d\omega = \left(2\alpha/\pi\right)\ln\left(\gamma c/\omega b_{\min}\right)\left(d\omega/\omega\right) \tag{8.26}$$

onde $\alpha = e^2/\hbar c \simeq 1/137$, é a constante de estrutura fina. Esta equação é muito útil para relacionarmos as probabilidades de processos induzidos por elétrons com a probabilidade de processos induzidos pela radiação eletromagnética. Considere um elétron de momento $\mathbf{p}$ interagindo de maneira que no final do processo o seu momento seja $\mathbf{p}'$. Dentro da validade do presente tratamento, devemos supor que as mudanças no momento e na energia são pequenas relativamente à energia inicial. De acordo com o princípio da incerteza da mecânica quântica, teremos que: $b_{\min} \sim \hbar/|\Delta\mathbf{p}|$. Portanto, o número de fótons equivalentes N_ω absorvidos no processo será:

$$N_\omega d\omega = \frac{2\alpha}{\pi}\ln\left(\frac{A\gamma c}{\omega\hbar}|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|\right)\frac{d\omega}{\omega} \tag{8.27}$$

onde A é uma constante da ordem da unidade. Temos que $\hbar\omega = E - E'$ onde E e E' são as energias correspondentes aos momentos $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$. Conforme veremos no próximo capítulo, $E = \gamma\, m\, c^2$, onde m é a massa de repouso do elétron. Então, podemos escrever (8.27) na forma:

$$N_\omega d\omega = \frac{2\alpha}{\pi} \ln\left[A\left(\frac{E}{mc^2}\right) \frac{|c\,\mathbf{p} - c\,\mathbf{p}'|}{E - E'} \right] \frac{d\omega}{\omega} \quad . \tag{8.28}$$

Esta fórmula relaciona os processos induzidos por fótons e por elétrons em termos de parâmetros experimentais. Vemos que, devido ao fator numérico: $2\alpha/\pi = 0{,}00464$, o número de fótons equivalentes por elétron é pequeno.

8.4 O EFEITO CHERENKOV

Vamos considerar agora uma carga com velocidade uniforme **v** num meio dielétrico onde $\varepsilon > 1$. Por simplicidade, vamos supor que este meio tem permeabilidade $\mu = 1$. Neste caso, as equações de onda não-homogêneas (4.23) e (4.24) serão generalizadas para:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \tag{8.29.a}$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \quad . \tag{8.29.b}$$

Escolhendo o eixo z ao longo da direção do movimento da partícula, de modo que esta se encontra na origem para $t = 0$, teremos:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \rho \mathbf{v} = q\mathbf{v}\delta(z - vt)\delta(x)\delta(y) \quad . \tag{8.30}$$

Por analogia com os potenciais de Liénard-Wiechert (8.6) e (8.7), podemos determinar facilmente a solução destas equações. Por exemplo, obtemos para o potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ a expressão:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{c} \left[\frac{\mathbf{v}}{\left(1 - \sqrt{\varepsilon}\, \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}/c\right) R} \right]_{\bar{t} = t - R\sqrt{\varepsilon}/c} \quad . \tag{8.31}$$

Note que esta solução difere da expressão correspondente no vácuo pela modificação do tempo retardado $\tilde{t}$, que é calculado agora com a velocidade da luz $c/(\varepsilon)^{1/2}$ apropriada ao meio. Se a velocidade da partícula é menor que $c/(\varepsilon)^{1/2}$, então o cálculo dos campos eletromagnéticos da carga pode ser feito analogamente ao caso anterior, a única diferença sendo a presença do fator ε. Contudo, se a velocidade da partícula exceder a velocidade da luz no meio $[v > c/(\varepsilon)^{1/2}]$, então o resultado final é drasticamente diferente. Neste caso, haverá uma emissão de radiação, que foi observada pela primeira vez por Cherenkov em 1934. A radiação de Cherenkov é um efeito cooperativo, envolvendo um grande número de átomos no meio, cujos elétrons são acelerados pelos campos da carga em movimento. Este efeito, análogo a uma onda de choque, é indicado na figura 8.5. O ângulo do cone de emissão pode ser deduzido a partir da figura, sendo tal que:

$$\cos\theta = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}\, v} = \frac{c}{nv} \tag{8.32}$$

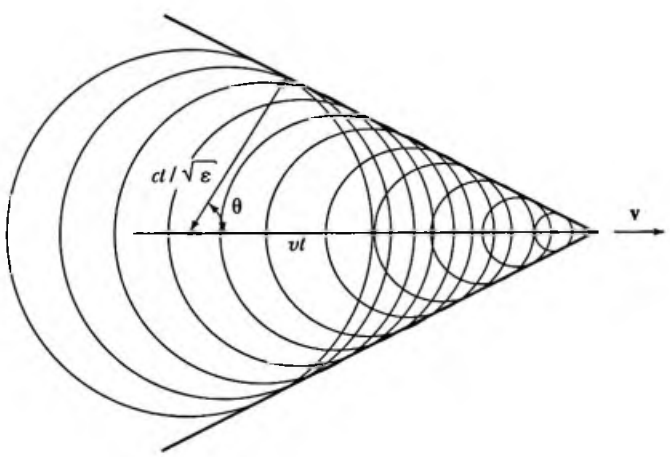


Figura 8.5

onde $n = \varepsilon^{1/2}$ é o índice de refração do meio dielétrico.

Para calcular a energia da radiação emitida, lembremos que o vetor de Poynting é igual a $c\mathbf{E} \times \mathbf{B}/4\pi$, quando $\mu = 1$. De acordo com a relação (6.15), vemos que neste caso $E = B/(\varepsilon)^{1/2}$. Assim, o fluxo de radiação por unidade de área por unidade de tempo será dado por:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\frac{B^2}{\sqrt{\varepsilon}}\hat{\mathbf{n}} \quad . \tag{8.33}$$

Usando o teorema de Parseval (8.22), vemos então que a energia irradiada na direção $\hat{\mathbf{n}}$ por unidade de área é:

$$\frac{c}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{-\infty}^{+\infty}|\mathbf{B}|^2\,dt=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^{\infty}|\mathbf{B}_\omega|^2\,d\omega \tag{8.34.a}$$

onde $\mathbf{B}_\omega$ é a transformada de Fourier do campo magnético:

$$\mathbf{B}_\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{B}(t)e^{i\omega t}dt \quad . \tag{8.34.b}$$

Podemos escrever agora a energia total de radiação que atravessa uma superfície esférica de raio r:

$$U\equiv\int_0^{\infty}U_\omega d\omega=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\int d\Omega\, r^2\int_0^{\infty}|\mathbf{B}_\omega|^2 d\omega \quad . \tag{8.35}$$

A partir da relação $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$, e sendo a dependência espacial proporcional a $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})=\exp\{i\omega\,(\varepsilon)^{1/2}/c\;\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}\}$, podemos expressar $\mathbf{B}_\omega$ na região de radiação como:

$$\mathbf{B}_\omega=\frac{i\omega\sqrt{\varepsilon}}{c}\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{A}_\omega \tag{8.36}$$

onde $\mathbf{A}_\omega$ é a transformada de Fourier do potencial vetor (8.31) na região de radiação. Substituindo esta equação em (8.35), obtemos para a energia total irradiada o resultado:

$$\int_0^{\infty}U_\omega d\omega=\frac{1}{c}\int d\Omega\,\mathrm{sen}^2\theta\int_0^{\infty}\sqrt{\varepsilon}\,r^2|\mathbf{A}_\omega|^2\omega^2\,d\omega \tag{8.37}$$

onde θ é o ângulo entre a velocidade $\mathbf{v}$ e a direção $\hat{\mathbf{n}}$.

Observemos agora da figura (8.5) que duas posições retardadas da partícula contribuem para os potenciais num determinado ponto e num certo instante.

(Veja também o problema 8.11.) Esta circunstância torna o cálculo detalhado da radiação de Cherenkov bastante complicado (ver Jackson, cap. 13). Vamos apresentar aqui um argumento simples para efetuar este cálculo, que leva ao mesmo resultado final.

Com esta finalidade, notamos que a energia irradiada é proporcional ao caminho total L percorrido pela carga no meio. Deste modo, a quantidade relevante do ponto de vista físico é a radiação emitida por unidade de comprimento. Para calcular esta quantidade, lembramos que a radiação tem uma intensidade máxima muito pronunciada na direção dada pela equação (8.32): $\cos\theta = c/(\varepsilon)^{1/2}v$. Se usarmos este valor de θ na função $\text{sen}^2\,\theta$ que varia lentamente em (8.37), e tendo em vista que $\mathbf{A}_\omega$ é proporcional à carga da partícula, podemos escrever a energia irradiada por unidade de freqüência e por unidade de comprimento como:

$$\frac{\Delta U_\omega}{\Delta L} = \frac{q^2}{c}\left(1 - \frac{c^2}{\varepsilon v^2}\right) f(\omega) \tag{8.38}$$

onde $f(\omega)$ é uma função que depende da freqüência. Notando que a quantidade q^2/c tem dimensão de (energia/freqüência), vemos por razões dimensionais que $f(\omega)$ deve ter a forma:

$$f(\omega) = \text{constante}\ \frac{\omega}{c} \quad . \tag{8.39}$$

O cálculo explícito mostra que o valor da constante é igual a 1. Conseqüentemente, a energia emitida por unidade de comprimento e unidade de freqüência é:

$$\frac{\Delta U_\omega}{\Delta L} = \frac{q^2\omega}{c^2}\left(1 - \frac{c^2}{\varepsilon v^2}\right) \quad . \tag{8.40}$$

Em termos do número de fótons ΔN_ω emitidos por unidade de freqüência com energia $\hbar\omega$, podemos escrever:

$$\frac{\Delta N_\omega}{\Delta L} = \frac{q^2}{\hbar c^2}\left(1 - \frac{c^2}{\varepsilon v^2}\right) \quad . \tag{8.41}$$

Consideremos, por exemplo, o caso em que a partícula carregada é um elétron, de modo que: $e^2/\hbar c = \alpha$ é a constante de estrutura fina. Tomando $\Delta\omega = 6.10^{14}$ Hz, que representa o intervalo de freqüência na região ótica, teremos que o número total de fótons visíveis é:

$$\frac{\Delta N_\omega}{\Delta L}\Delta\omega = \frac{1}{137}\frac{6\cdot 10^{14}}{3\cdot 10^{10}}\left(1-\frac{c^2}{\varepsilon v^2}\right) < 1.000 \quad \text{fótons / cm} \quad . \tag{8.42}$$

Pode ser verificado (ver problema 8.12) que a perda de energia por radiação do elétron é desprezível em comparação com a sua energia cinética, numa trajetória de alguns centímetros. Isto justifica o nosso tratamento onde consideramos v constante. O efeito Cherenkov tem importantes aplicações na física de partículas de altas energias. Dado um meio cujo índice de refração é conhecido, a equação (8.32) permite o cálculo da velocidade da partícula, através da medida do ângulo θ da radiação emitida. Nos detectores Cherenkov usados com esta finalidade, o meio consiste de um material transparente ou de um gás sob alta pressão.

PROBLEMAS

1. Usando o fato de que os potenciais de Liénard-Wiechert são soluções das equações de onda (4.23) e (4.24), juntamente com a equação da continuidade, mostre que estes potenciais são consistentes com a condição de Lorentz:

$$\nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \quad .$$

2. Usando a geometria mostrada na figura 8.2, verifique a equivalência das equações (8.8) e (8.9).

3. A partir das equações (8.7) e (8.10), deduza a expressão (8.15) para o campo magnético **B**.

4. Determine o vetor de Poynting associado com uma carga puntiforme em movimento uniforme, e mostre que a potência total irradiada é igual a zero.

5. A lei de Biot-Savart [equação (1.31)] afirma que o campo magnético na posição **R** devido a uma corrente que flui num elemento $d\mathbf{l}$ de um circuito é dado por:

$$d\mathbf{B}(\mathbf{R}) = \frac{I}{c}\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{R}}{R^3}$$

Mostre que o campo magnético calculado desta expressão coincide com o resultado da equação (8.15), no limite em que a velocidade da carga é pequena comparada com a velocidade da luz.

6. Use a lei de Ampère para calcular o campo magnético a uma distância a de um fio condutor infinito, percorrido por uma corrente I. Mostre que o mesmo resultado pode ser obtido da equação (8.15), sem fazer nenhuma aproximação com respeito à magnitude de **v**.

7. Use a idéia do fóton e os princípios da conservação de energia e do momento para justificar a conclusão de que uma carga em movimento uniforme não pode irradiar.

8. A força que atua sobre uma partícula carregada que se move com velocidade **v** é dada por: $\mathbf{F} = q[\mathbf{E} + (\mathbf{v}/c)\times\mathbf{B}]$. Mostre que a força entre duas cargas iguais q (ao longo da linha que une as cargas) que se movem com a mesma velocidade v ao longo de duas retas paralelas é dada por:

$$\mathbf{F} = -\nabla\left[\frac{q^2\left(1-v^2/c^2\right)}{R-\mathbf{R}\cdot\dfrac{\mathbf{v}}{c}}\right] .$$

9. Usando a relação (8.19), e as formas assintóticas das funções de Bessel dadas no Apêndice D, mostre que:

$$\lim_{x\to 0} K_1(x) \to \frac{1}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to\infty} K_1(x) \to \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x} \quad .$$

10. Considere a transformada de Fourier de um campo real $\mathbf{A}(t)$:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{A}(t)e^{i\omega t}dt \quad .$$

Mostre que: $\mathbf{A}_\omega = \mathbf{A}^*_{-\omega}$.
Usando esta relação e a propriedade da função delta:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx}dk \quad ,$$

demonstre o teorema de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathbf{A}(t)\right|^2 dt = 4\pi\int_0^\infty d\omega\left|\mathbf{A}_\omega\right|^2$$

11. Considere a equação para o tempo retardado de uma partícula com velocidade uniforme **v** num meio dielétrico:

$$\bar{t} = t - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c}\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(\bar{t})\right| = t - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c}\left|\mathbf{r} - \mathbf{v}\bar{t}\right| \quad ,$$

Seja $\mathbf{R}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$ o vetor distância entre a posição presente da partícula e o ponto de observação $P(\mathbf{r})$. Mostre que a solução da equação acima pode ser escrita como:

$$t - \bar{t} = \frac{-\mathbf{R}_0\cdot\mathbf{v} \pm \sqrt{(\mathbf{R}_0\cdot\mathbf{v})^2 - \left(v^2 - c^2/\varepsilon\right)R_0^2}}{v^2 - c^2/\varepsilon} \quad .$$

Considere o caso em que $v^2 > c^2/\varepsilon$ e seja α o ângulo entre $\mathbf{R}_0$ e **v**. Mostre que para ângulos obtusos α tais que:

$$\arccos\left[-\sqrt{1-\frac{c^2}{\varepsilon v^2}}\right] < \alpha < \pi$$

existem dois valores reais e positivos para $t - \bar{t}$, como soluções da equação acima.

12. Considere um meio transparente com índice de refração $n = 1{,}5$ na região da luz visível. Calcule o ângulo de emissão da radiação Cherenkov por um elétron com velocidade de 0,9c. Determine então o número de fótons emitidos por unidade de comprimento, com comprimento de onda entre 4.000 e 6.000 Ångstrons. Compare a energia irradiada na região ótica, por unidade de comprimento, com a energia cinética do elétron: $T = E - mc^2$.

9

OS PRINCÍPIOS DA RELATIVIDADE RESTRITA

As origens da teoria da relatividade estão relacionadas com o eletromagnetismo. Podemos dizer que o desenvolvimento das equações de Maxwell que unificam a eletricidade e o magnetismo teve um papel essencial para a relatividade restrita. Os fundamentos da teoria foram colocados por Lorentz nos seus estudos da eletrodinâmica, a partir de 1890. Mas foi Einstein quem contribuiu com as idéias cruciais em 1905, estabelecendo a relatividade restrita como uma teoria consistente e geral. Na física moderna, a teoria da relatividade é de grande importância na investigação de fenômenos atômicos, nucleares e principalmente em processos que envolvem partículas elementares de altas energias. Sendo que a base experimental e o desenvolvimento da teoria são descritos em detalhe em vários lugares, vamos nos limitar aqui a um resumo dos aspectos fundamentais.

9.1 TRANSFORMAÇÕES DE GALILEU

Na mecânica newtoniana, os conceitos do espaço e do tempo são completamente separáveis, sendo pressuposto que o tempo é uma quantidade absoluta independente do sistema de referência. Estas hipóteses levam à invariância das leis da mecânica através de transformações de coordenadas do seguinte tipo. Considere dois sistemas inerciais K e K' que se movem ao longo dos seus eixos z e z', conforme a figura 9.1, com velocidade relativa $\mathbf{v}$ que é uniforme.

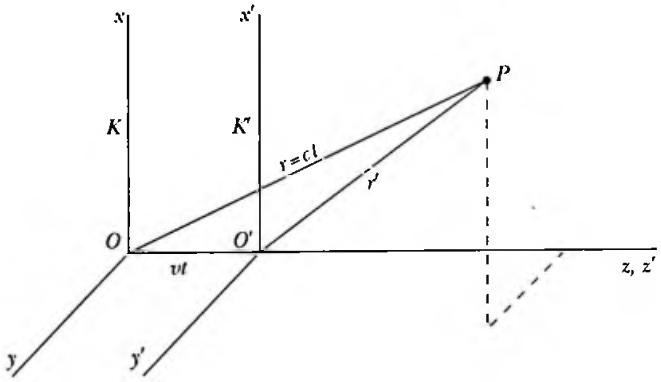


Figura 9.1

As transformações das coordenadas de um ponto entre um sistema e o outro têm a forma:

$$x' = x \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z - vt \tag{9.1.a}$$

sendo, em adição

$$t' = t \quad . \tag{9.1.b}$$

Estas equações definem as transformações de Galileu. Além disso, o elemento de comprimento nos dois sistemas é o mesmo:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = ds'^2 \quad . \tag{9.2}$$

O fato de que as leis de Newton são invariantes com respeito às transformações de Galileu é chamado de princípio da relatividade newtoniana. As equações de movimento de Newton nos dois sistemas são:

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F}' \tag{9.3}$$

de maneira que a forma da lei de movimento é invariante. Apesar de as equações de Newton serem invariantes com respeito às transformações de Galileu, as equações de Maxwell não têm esta propriedade. Por exemplo, considere a equação escalar de onda que é conseqüência das equações de Maxwell:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{9.4}$$

Sob transformações de Galileu, temos:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \tag{9.5.a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial z'} \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + v^2\frac{\partial^2}{\partial z'^2} - 2v\frac{\partial^2}{\partial t'\,\partial z'} \quad . \tag{9.5.b}$$

Desta maneira, a equação (9.4) se transforma como:

$$\nabla'^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2} - \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z'^2} + \frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t'\,\partial z'} = 0 \quad . \tag{9.6}$$

Esta equação não descreve a propagação de ondas eletromagnéticas. Portanto, a eletrodinâmica não pode ser consistente com a hipótese da invariância de Galileu. Na verdade, as equações de Maxwell são invariantes sob uma transformação especial chamada de transformação de Lorentz (1904). Esta transformação pode ser deduzida a partir dos dois postulados de Einstein.

9.2 OS POSTULADOS DA RELATIVIDADE

O primeiro postulado afirma que as leis da natureza e os resultados de quaisquer experiências realizadas num dado sistema de referência são independentes do movimento de translação do sistema como um todo.

Este postulado é coerente com a experiência de Michelson-Morley (1887) e faz com que não tenha sentido a questão de detectar o movimento relativo ao éter. O resultado nulo da experiência de Michelson-Morley mostrou que a velocidade da Terra através do hipotético éter era menor que um terço da sua velocidade orbital, de aproximadamente $3 \cdot 10^4$ m/s. Uma experiência mais moderna (1963), baseada no efeito Mössbauer (1958), leva claramente à falta de evidência do movimento em relação ao éter. O aparelho utilizado consiste de um rotor girando

rapidamente em torno do seu eixo vertical, conforme a figura 9.2, onde $\mathbf{v}_0$ representa a hipotética velocidade do arraste do éter.

O rotor carrega amostras de ^{57}Fe nos seus extremos opostos. Numa das amostras, os núcleos de ferro estão num estado excitado, emitindo raios γ sem recuo. No efeito Mössbauer, o momento de recuo na emissão ou na absorção da radiação é absorvido por toda a rede do sólido, de maneira que a energia de recuo é totalmente desprezível. Assim, o raio da radiação gama não sofrerá qualquer deslocamento de freqüência. Estes raios podem então ser capturados por ressonância

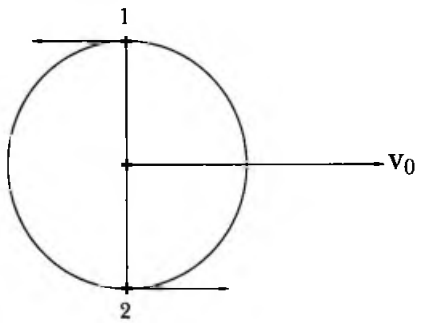


Figura 9.2

de absorção pela outra amostra de ferro. Entretanto, de acordo com a física newtoniana, esperaríamos um deslocamento de Doppler entre as duas amostras, proporcional a $\mathbf{v}_0$. Esta diferença entre as freqüências de emissão e de absorção inibiriam a absorção ressonante dos raios γ. Na experiência, não foi encontrada nenhuma inibição da absorção, dentro de um limite de erro experimental equivalente a uma velocidade de arraste de ±1,5 m/s!

O segundo postulado da relatividade afirma que a velocidade da luz é independente do movimento da fonte emissora.

Este postulado, sem verificação experimental à época da sua proposta por Einstein, leva a uma modificação radical das idéias acerca do espaço e do tempo. Uma verificação recente foi realizada em uma experiência no CERN (Suíça) em 1964. Este teste foi realizado com os raios gama emitidos por píons neutros π° de altas energias. Estes mésons decaem espontaneamente em dois raios γ:

$$\pi^\circ \rightarrow \gamma + \gamma$$

cada um dos quais tem velocidade c no sistema de repouso do píon. Nesta experiência, a velocidade dos π° era maior que $0{,}99975c$. Apesar disso, a medida direta

das velocidades dos raios gama emitidos praticamente na direção frontal deu o resultado de $(0{,}99992 \pm 0{,}00013)\,c$, no sistema de referência do laboratório. Dentro dos erros experimentais, este valor é igual à velocidade da luz! Em comparação, a adição galileana de velocidades iria prever que os raios gama deviam ter uma velocidade de $2c$ com respeito ao laboratório.

9.3 A TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

As equações da transformação de Lorentz podem ser obtidas a partir dos dois postulados fundamentais da relatividade. Se um pulso luminoso é emitido da origem comum dos dois sistemas K e K' na figura 9.1, no instante em que os sistemas coincidem, então de acordo com o segundo postulado as frentes das ondas observadas nos dois sistemas serão descritas por:

$$\sum_{j=1}^{3} x_j^2 - c^2t^2 = 0 \quad ; \quad \sum_{j=1}^{3} x'^2_j - c^2t'^2 = 0 \tag{9.7}$$

onde introduzimos as coordenadas

$$x_1 = x \quad , \quad x_2 = y \quad , \quad x_3 = z \quad , etc.$$

Definindo uma nova coordenada em cada sistema, $x_4 \equiv ict$ e $x'_4 \equiv ict'$, podemos escrever a equação (9.7) na forma:

$$\sum_{\mu=1}^{4} x_\mu^2 = 0 \quad ; \quad \sum_{\mu=1}^{4} x'^2_\mu = 0 \tag{9.8}$$

Para outros pares de eventos, não relacionados por uma frente de onda eletromagnética, as somatórias na equação (9.8) não mais serão nulas. Mas, sendo as transformações lineares, as duas somas devem ser proporcionais. Tendo em vista a simetria do movimento entre os sistemas, a constante de proporcionalidade deve ser igual à unidade. Assim:

$$\sum_{\mu=1}^{4} x_\mu^2 = \sum_{\mu=1}^{4} x'^2_\mu \tag{9.9}$$

Esta relação é análoga a uma rotação tridimensional que preserva a distância, indicando que a relação que estamos procurando corresponde a uma rotação no espaço quadridimensional, chamado de espaço de Minkowski. Portanto, as transformações de Lorentz são transformações ortogonais neste espaço, isto é:

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} x_\nu \tag{9.10}$$

onde $a_{\mu\nu}$ são os elementos da matriz de transformação de Lorentz, satisfazendo a relação de ortogonalidade:

$$\sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} a_{\sigma\nu} = \delta_{\mu\sigma} \tag{9.11}$$

Se o sistema K' se move com velocidade uniforme v em relação ao sistema K, ao longo do eixo x_3, então $x_1 = x'_1$ e $x_2 = x'_2$. Assim, podemos escrever a matriz de transformação de Lorentz na forma:

$$\left(a_{\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \tag{9.12}$$

A condição de ortogonalidade (9.11) leva então, para o elemento não-diagonal $\mu = 4$, $\sigma = 3$, à relação:

$$\sum_{\nu=1}^{4} a_{4\nu} a_{3\nu} = a_{43} a_{33} + a_{44} a_{34} = 0 \quad .$$

Para que tenhamos concordância com a equação (9.1) no limite $v/c \to 0$, devemos ter a_{33}, a_{34} e a_{44} não-nulos. Então o coeficiente a_{43} é dado por:

$$a_{43} = -a_{34} \frac{a_{44}}{a_{33}} \quad . \tag{9.13}$$

Considerando em seguida os elementos diagonais $\mu = \sigma = 3$ e $\mu = \sigma = 4$ da condição de ortogonalidade (9.11), obtemos:

$$a_{33}^2 + a_{34}^2 = 1 \quad ; \quad a_{43}^2 + a_{44}^2 = 1 \quad . \tag{9.14}$$

Portanto, obtivemos até agora três condições, dadas pelas equações (9.13) e (9.14), que devem ser satisfeitas pelos quatro coeficientes a_{33}, a_{34}, a_{43} e a_{44}. Podemos então expressar a_{34}, a_{43} e a_{44} em termos de a_{33}. Este coeficiente será alguma função da velocidade relativa v, que designaremos por $\gamma(v)$. Para resolver este sistema, notemos que devemos ter a_{33} e a_{44} positivos, de modo a assegurar que z e t evoluam no mesmo sentido que z' e t', respectivamente. Isto é necessário para termos concordância no limite não-relativístico com as relações (9.1). Então, é fácil verificar que os coeficientes a_{44}, a_{34} e a_{43} podem ser escritos em termos de $a_{33} = \gamma$ como:

$$\begin{aligned} &a_{44} = a_{33} = \gamma > 0 \quad ; \\ &a_{34}^2 = a_{43}^2 = 1 - \gamma^2 \qquad \text{com} \quad a_{34} = -a_{43} \quad . \end{aligned} \tag{9.15}$$

Devemos finalmente determinar a função $\gamma(v)$. Para isso, vamos reescrever as conexões lineares (9.10) explicitamente em termos de x, y, z e t. Usando as relações (9.15), obtemos:

$$\begin{aligned} &x' = x \quad ; \quad y' = y \\ &z' = \gamma z + ica_{34}t \quad ; \quad t' = \gamma t + \frac{ia_{34}z}{c} \quad . \end{aligned} \tag{9.16.a}$$

Notemos que o observador O atribui a velocidade $v_z = v$ e portanto uma coordenada $z = vt$ à origem O', em $z' = 0$. Substituindo este valor na terceira equação de (9.16.a), encontramos

$$a_{34} = i\gamma\frac{v}{c} \equiv i\gamma\beta \quad . \tag{9.16.b}$$

Então, temos da segunda equação em (9.15) que: $\gamma^2 = 1 + \beta^2\gamma^2$. Esta relação determina a função $\gamma(v)$ como:

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad . \tag{9.17}$$

Substituindo este resultado nas equações (9.16.a) e (9.16.b), vemos que as coordenadas espaço-temporais no sistema K' estarão relacionadas às coordenadas em K através das relações:

$$\begin{aligned} x' &= x \quad ; \quad y' = y \\ z' &= \gamma(z - vt) \quad ; \quad t' = \gamma\left(t - vz / c^2\right) \quad . \end{aligned} \tag{9.18}$$

Como era de esperar, estas equações se reduzem às equações galileanas (9.1), quando $v \to 0$. A transformação inversa de Lorentz é:

$$\begin{aligned} x &= x' \quad ; \quad y = y' \\ z &= \gamma(z' + vt') \quad ; \quad t = \gamma\left(t' + vz' / c^2\right) \quad . \end{aligned} \tag{9.19}$$

Ela pode ser obtida mediante a troca das variáveis sem linha com linha na equação (9.18), juntamente com a modificação do sinal da velocidade.

Como um exemplo da transformação de Lorentz, consideremos uma haste em repouso no sistema K', situada paralelamente ao eixo z'. O seu comprimento próprio neste sistema é $l_0 = z'_2 - z'_1$, onde z'_2 e z'_1 são as coordenadas dos dois extremos da haste no referencial K'. Para determinar o comprimento da haste no sistema K, precisamos achar as coordenadas z_2 e z_1 das suas extremidades, num mesmo instante t. Usando a equação (9.18), temos:

$$z'_2 = \frac{z_2 - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad ; \quad z'_1 = \frac{z_1 - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad .$$

O comprimento da haste no referencial K é $l = z_2 - z_1$. Subtraindo z'_1 de z'_2, encontramos que:

$$l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad . \tag{9.20}$$

Vemos desta relação que o comprimento da haste no sistema onde ela se move com velocidade v é diminuído por um fator $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ em comparação ao comprimento próprio da haste. Este resultado da teoria da relatividade é denominado a contração de Lorentz.

Uma das conseqüências mais marcantes das transformações de Lorentz é o fenômeno conhecido como a dilatação dos tempos. Para descrever este fenômeno, consideremos uma partícula que se move com velocidade v em relação a um sistema inercial. Como a partícula está obviamente em repouso em seu próprio sistema, que chamaremos de K', vemos da última relação em (9.19) que:

$$dt = \gamma dt' \equiv \gamma d\tau \tag{9.21}$$

onde $d\tau$ representa o intervalo de tempo próprio da partícula. Assim, intervalos de tempos iguais, observados no sistema de referência de repouso da partícula, são observados no referencial do laboratório como sendo maiores por um fator γ.

Esta dilatação do tempo leva a uma mudança drástica da vida média de uma partícula que se move a altas velocidades. Por exemplo, uma partícula instável como o méson μ vive apenas $2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s quando está em repouso no laboratório. Mas se este méson se move através do laboratório com a velocidade $0{,}995c$, então a sua vida média será aumentada por um fator:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}995)^2}} \simeq 10 \quad .$$

Uma dilatação da vida média desta ordem de grandeza foi observada pelo impacto de raios cósmicos na parte superior da atmosfera. Estes mésons percorrem 10 ou 20 km do topo da atmosfera até a terra; se o fenômeno de dilatação não ocorresse, eles poderiam percorrer no máximo $2{,}2 \cdot 10^{-6}c \simeq 0{,}6$ km antes do seu decaimento, e não poderiam jamais alcançar a terra. As medidas mais precisas do aumento da vida média foram realizadas com mésons μ e píons produzidos num acelerador. Estas experiências confirmaram a fórmula relativística dentro de uma precisão de 0,1%.

9.4 A MASSA DA PARTÍCULA RELATIVÍSTICA

A massa representa um atributo de uma partícula que está associado à sua inércia à aceleração. Consideremos uma colisão de duas partículas não-relativísticas, estando uma delas inicialmente em repouso. Em conseqüência da colisão, esta adquirirá uma velocidade final u, ao passo que a outra sofrerá uma mudança Δu_1 na velocidade. A razão das massas m/m_1 é definida como sendo igual a $\Delta u_1/u$, de modo a assegurar a conservação do momento: $mu = m_1 \Delta u_1$. Portanto, a massa da partícula é definida como sendo o coeficiente escalar pelo qual a velocidade u deve ser multiplicada para que mu represente o seu momento mu. Nas interações entre as partículas, o momento total do sistema é conservado.

Vamos investigar agora a possibilidade de ser a massa da partícula uma função da sua velocidade: $M(u) \neq M(0) \equiv m$, onde m é a massa de repouso da partícula. Com esta finalidade, consideremos uma colisão elástica entre duas partículas idênticas, que é simétrica em relação aos observadores O e O' da figura 9.1.

Isto pode feito como indicado na figura 9.3, onde o lado esquerdo representa a colisão vista pelo observador O e o lado direito mostra a colisão observada por O'.

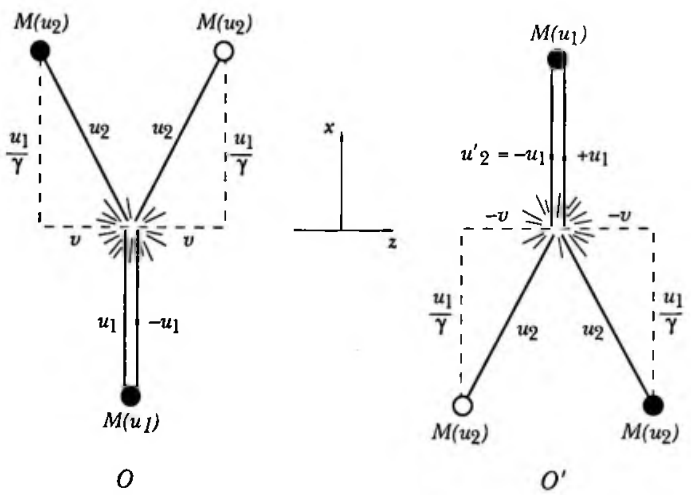


Figura 9.3

Cada observador toma uma das partículas e imprime a ela uma velocidade ao longo do seu eixo x. Assim, o observador O' na figura lança a sua partícula com uma velocidade $u'_{2x} = -u_1$ quando o observador O imprime à sua partícula uma velocidade $u_{1x} = u_1$. A incidência de colisão pode ser escolhida de modo que cada um dos observadores terá a velocidade da sua partícula invertida. Neste caso, como o módulo da velocidade permanece o mesmo, a massa escalar continuará inalterada. Vamos aplicar agora o princípio de conservação do momento. Como a situação é simétrica, vamos considerar, por exemplo, esta conservação como

observada por *O*. Neste sistema, a igualdade dos momentos transferidos ao longo do eixo *x* pode ser escrita como:

$$2M(u_1)u_{1x} = 2M(u_1)u_1 = 2M(u_2)|u_{2x}| \tag{9.22}$$

onde u_{2x} representa a componente *x* da velocidade atribuída pelo observador *O* à partícula lançada pelo observador *O'*.

Para relacionar estas velocidades, usaremos as fórmulas de transformação (9.19). Temos então as relações:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{\gamma\left(dt' + vdz'/c^2\right)} = \frac{u'_x}{\gamma\left(1 + vu'_z/c^2\right)} \tag{9.23.a}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma\left(dt' + vdz'/c^2\right)} = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + vu'_z/c^2\right)} \tag{9.23.b}$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz' + vdt'}{dt' + vdz'/c^2} = \frac{u'_z + v}{1 + vu'_z/c^2} \tag{9.23.c}$$

No nosso caso, sendo $u'_z = 0$, vemos da equação (9.23.a) que $u_{2x} = u'_{2x}/\gamma = -u_1/\gamma$. Substituindo este resultado na relação (9.22), obtemos:

$$M(u_2) = \gamma(v)M(u_1) = \frac{M(u_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad . \tag{9.24}$$

É conveniente transformar (9.24) numa expressão que envolve quantidades que independem da velocidade relativa dos sistemas inerciais. Para isto, faremos uso da relação cinemática:

$$\gamma(u') = \gamma(u)\gamma(v)\left(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}/c^2\right) \tag{9.25.a}$$

que pode ser facilmente verificada por cálculo direto a partir das equações (9.23). (Veja o problema 9.5.) No nosso caso, onde $\mathbf{u}_1$ é perpendicular a $\mathbf{v}$, esta relação se reduz a:

$$\gamma(u_2) = \gamma(u_1)\gamma(v) \tag{9.25.b}$$

Substituindo esta relação para $\gamma(v)$ na equação (9.24), encontramos uma expressão para a invariância de uma quantidade que envolve somente a massa e a velocidade da partícula:

$$\frac{M(u_2)}{\gamma(u_2)} = \frac{M(u_1)}{\gamma(u_1)} = \frac{M(0)}{\gamma(0)} = m \tag{9.26}$$

onde $\gamma(0) = 1$ e $M(0) \equiv m$ representa a massa própria da partícula.

Portanto, sempre que uma partícula com massa de repouso m estiver em movimento com velocidade u, a massa:

$$M(u) = \frac{m}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{9.27}$$

deverá ser atribuída à partícula, como o coeficiente da velocidade na expressão do momento: $\mathbf{p} = M\mathbf{u} = \gamma(u)\, m\mathbf{u}$. A massa cinética $M(u)$ da partícula em movimento é sempre maior que a sua massa de repouso.

9.5 O QUADRIVETOR ENERGIA-MOMENTO

Conforme vimos na seção anterior, o momento de uma partícula com massa de repouso m à velocidade $\mathbf{u}$ é dado por:

$$\mathbf{p} = M\mathbf{u} = \gamma(u) m\,\mathbf{u} = \frac{m\,\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{9.28}$$

Suponhamos que esta quantidade se refere ao sistema K na figura 9.1 e seja $\mathbf{p}'$ o momento correspondente em K':

$$\mathbf{p}' = \gamma(u')m\,\mathbf{u}' \tag{9.29}$$

Então, a relação entre **p** e **p**′ pode ser obtida das equações de transformação das velocidades (9.23), usando também a relação inversa de (9.25.a):

$$\gamma(u) = \gamma(u')\gamma(v)\left[1 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'/c^2\right] \quad . \tag{9.30}$$

Obtemos assim que:

$$\begin{aligned} p_{x,y} &= \gamma(u')mu'_{x,y} = p'_{x,y} \\ p_z &= \gamma(u')\gamma(v)m(u'_z + v) = \gamma(v)\left[p'_z + \gamma(u')mv\right] \quad . \end{aligned} \tag{9.31}$$

Podemos notar aqui que as componentes do momento se transformam exatamente da mesma forma que as coordenadas na transformação de Lorentz (9.19), se definirmos a quarta componente p'_4 como:

$$p'_4 \equiv i\gamma(u')mc = iM(u')c \quad . \tag{9.32}$$

Então, as relações de transformação (9.31) são suplementadas por:

$$p_4 \equiv i\gamma(u)mc = \gamma(v)\left[p'_4 + \frac{ivp'_3}{c}\right] \tag{9.33}$$

que é completamente equivalente à relação (9.30).

Este é um exemplo de um quadrivetor p_μ $(p_x, p_y, p_z, p_4) \equiv p_\mu(\mathbf{p}, iMc)$, representando uma quantidade com quatro componentes que se transforma como o evento x_μ $(\mathbf{r}, ict)$:

$$p'_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu}p_\nu \quad . \tag{9.34}$$

Da mesma maneira que a relação de ortogonalidade (9.11) dos coeficientes assegura que $\sum x_\nu^2 = r^2 - c^2t^2$ tem o mesmo valor invariante em qualquer referencial, também:

$$\sum_{\nu=1}^{4} p_\nu^2 = \mathbf{p}^2 - M^2c^2 = \gamma^2(u)m^2\left(u^2 - c^2\right) = -m^2c^2 \tag{9.35}$$

terá o mesmo valor em qualquer sistema de referência. A quantidade $-icp_4 = Mc^2$ é denominada energia da partícula livre com velocidade u, sendo denotada por:

$$E \equiv Mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \gamma mc^2 \quad . \tag{9.36}$$

Isto é apropriado tendo em vista que uma expansão em potências de u^2/c^2 dá:

$$E \simeq mc^2\left(1 + \frac{u^2}{2c^2} + \frac{3u^4}{8c^4} + \cdots\right) \tag{9.37}$$

de forma que $E - mc^2 \simeq (1/2)mu^2$ é a energia cinética galileana da partícula. Em geral:

$$T = E - mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - 1\right) = (\gamma - 1)mc^2 \tag{9.38}$$

é denominada a energia cinética relativística da partícula. A sua energia total:

$$E = T + mc^2 = Mc^2 = \gamma mc^2 \tag{9.39}$$

inclui, além da energia cinética relativística, também a energia de repouso mc^2. Este é o exemplo mais simples da equivalência entre a massa e a energia, representando um resultado de importância fundamental em todas as aplicações da física moderna. A relação massa-energia foi obtida por Einstein em 1905.

Vamos citar aqui uma demonstração experimental da relação entre a energia cinética relativística T da partícula e a sua velocidade. Mediram-se as velocidades de elétrons, cujas energias cinéticas, determinadas mediante uma medição calorimétrica, variavam de 0,5 a 15 MeV. À medida que a velocidade dos elétrons aumentava para o valor limite c, o valor observado para a energia cinética variava exatamente de acordo com a previsão da equação (9.38).

A equivalência $E = Mc^2$ leva a várias relações úteis. Assim, a conexão entre a velocidade e o momento: $\mathbf{u} = \mathbf{p}/M$ conduz a:

$$\mathbf{u} = \frac{c^2\mathbf{p}}{E} \quad . \tag{9.40}$$

O quadrivetor momento p_μ em (9.34) pode ser chamado agora de quadrivetor energia-momento da partícula, podendo ser decomposto como:

$$p_\mu = \left(\mathbf{p}, \frac{iE}{c}\right) \quad . \tag{9.41}$$

A soma invariante (9.35) pode ser escrita agora na forma:

$$\sum_{\mu=1}^{4} p_\mu^2 = \mathbf{p}^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m^2c^2 \tag{9.42}$$

que implica na relação entre a energia do momento:

$$E(p) = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} \quad . \tag{9.43}$$

Estas relações tomam uma forma particularmente simples para partículas cuja massa de repouso é nula, tais como fótons e neutrinos. Neste caso, temos a relação:

$$p = E/c \qquad \text{para} \qquad m = 0 \quad . \tag{9.44}$$

Podemos observar da relação (9.36) que as partículas com massa de repouso nula precisam se movimentar sempre com a velocidade limite c, para que tenham uma energia E diferente de zero.

9.6 A CONSERVAÇÃO DA ENERGIA-MOMENTO EM REAÇÕES DE PARTÍCULAS

A lei de conservação da energia-momento e a relação massa-energia tornaram-se princípios fundamentais na física contemporânea. O propósito desta seção é apresentar alguns exemplos típicos que mostram que as relações da mecânica relativística formam uma base necessária para o estudo de fenômenos que ocorrem em física nuclear e de partículas elementares.

Um certo número de processos que ocorrem nestas áreas resultam de reações de decaimento de partículas. A lei de conservação da energia-momento impõe restrições fundamentais nas possíveis reações. Consideremos o decaimento de uma partícula em outras duas, supondo que este ocorre espontaneamente, sem a intervenção de forças externas. Seja m a massa da partícula que se desintegra, no seu sistema próprio de repouso. Neste sistema, o momento inicial é portanto zero. O invariante do quadrado do quadrivetor de energia-momento é igual a:

$$I = c^2 \sum_{\nu} p_\nu p_\nu = p^2 c^2 - E^2 = -m^2 c^4 \quad . \tag{9.45}$$

Depois do decaimento, encontramos duas partículas com massas m_1, m_2, momentos $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ e energias E_1, E_2.

No sistema de repouso da partícula inicial, o momento total após o decaimento é nulo:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0 \quad .$$

Assim, o invariante I pode ser escrito na forma:

$$I = \left(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2\right)^2 c^2 - \left(E_1 + E_2\right)^2 = -m^2 c^4$$

ou

$$mc^2 = E_1 + E_2 \quad . \tag{9.46}$$

Escrevendo as energias E_1 e E_2 em termos das energias cinéticas correspondentes:

$$E_1 = m_1c^2 + T_1 \quad ; \quad E_2 = m_2c^2 + T_2$$

temos que:

$$mc^2 = (m_1 + m_2)c^2 + T_1 + T_2 \quad . \tag{9.47}$$

Sendo que as energias cinéticas das partículas produzidas após o decaimento são positivas, resulta de (9.47) que o decaimento espontâneo de um corpo só é possível se:

$$m > (m_1 + m_2) \tag{9.48}$$

isto é, somente se a massa do corpo for maior que a soma das massas de repouso dos produtos de decaimento.

Como um exemplo encontrado em física nuclear, consideremos o núcleo ${}^{8}_{4}\mathrm{Be}$. Este núcleo tem uma massa $m = 8{,}00531$ u.a.m, que é menor que a soma das massas de 4 prótons e quatro nêutrons: $\sum m_i = 4 \cdot 1{,}007825$ u.a.m + $4 \cdot 1{,}008665$ u.a.m = 8,065960 u.a.m. Portanto o núcleo ${}^{8}_{4}\mathrm{Be}$ é estável com respeito ao decaimento em prótons e nêutrons individuais. Por outro lado, a massa de ${}^{8}_{4}\mathrm{Be}$ é maior que a massa de dois núcleos de ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$: $2m_{\mathrm{Hc}} = 2 \cdot 4{,}002603$ u.a.m. = 8,005206 u.a.m. Assim, o núcleo ${}^{8}_{4}\mathrm{Be}$ é instável e deve decair espontaneamente em duas partículas alfa, o que realmente ocorre.

Como um outro exemplo encontrado na área de partículas elementares, vamos considerar o decaimento de píons carregados em múons. A massa dos píons $\pi^{\pm}$ é igual a 273 m_e, sendo a massa dos múons $\mu^{\pm}$ igual a 207 m_e. A vida média dos píons $\pi^{\pm}$ é $2{,}6 \cdot 10^{-8}$ s. Estes decaem num méson $\mu^{\pm}$ e um neutrino ν:

$$\pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu \quad .$$

O estudo desta reação permite estimar de uma forma mais precisa a massa de repouso do neutrino. Isto é possível porque, conhecendo a massa de repouso dos

píons e múons, podemos encontrar a energia cinética do múon T_μ como função da massa do neutrino, e comparar este valor com a experiência.

Com esta finalidade consideremos o píon no seu sistema de repouso. Após o decaimento o momento total permanece zero, de modo que os momentos do méson μ e do neutrino tem a mesma magnitude $p_\mu = p_\nu = p$, e direções opostas: $\mathbf{p}_\mu + \mathbf{p}_\nu = 0$. A lei de conservação da energia-momento se reduz à lei de conservação da energia (9.47):

$$m_\pi c^2 = \left(m_\mu + m_\nu\right)c^2 + T_\mu + T_\nu = m_\mu c^2 + T_\mu + E_\nu \quad .$$

Usando a relação energia-momento (9.43) e o fato de que $p_\nu = p_\mu$, podemos expressar a equação acima como:

$$m_\pi c^2 = m_\mu c^2 + T_\mu + \sqrt{p_\nu^2 c^2 + m_\nu^2 c^4} = m_\mu c^2 + T_\mu + \sqrt{p_\mu^2 c^2 + m_\nu^2 c^4} \quad . \tag{9.49}$$

Em seguida, podemos usar a identidade

$$T + mc^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \qquad \text{ou} \qquad T^2 + 2mc^2 T = p^2 c^2$$

para escrever (9.49) na forma:

$$m_\pi c^2 - \left(T_\mu + m_\mu c^2\right) = \sqrt{T_\mu^2 + 2m_\mu c^2 T_\mu + m_\nu^2 c^4} \quad .$$

Tomando o quadrado desta fórmula, encontramos que a energia cinética do méson μ produzida no decaimento do píon é:

$$T_\mu = \frac{\left(m_\pi - m_\mu\right)^2 - m_\nu^2}{2m_\pi}\, c^2 \quad . \tag{9.50}$$

Esta energia pode ser medida através da ionização produzida pelo méson μ. A partir do valor medido para T_μ resulta que, dentro do limite da precisão experimental, $m_\nu \simeq 0$.

Um fenômeno interessante é observado na reação de aniquilação de um par elétron-pósitron, com a produção de fótons. Este processo ocorre geralmente para pequenos valores das energias cinéticas do elétron e do pósitron. Neste caso, a energia do estado inicial é aproximadamente:

$$E\left(e^+, e^-\right) \simeq 2m_e c^2 = 1{,}02\text{MeV} \quad .$$

A conservação simultânea da energia e do momento requer que esta energia seja emitida na forma de dois fótons emergentes em direções opostas, sendo a energia de cada fóton igual a 0,51MeV. Várias experiências estabeleceram que o processo de aniquilação é de fato acompanhado por esta radiação. O fenômeno de aniquilação de elétrons e pósitrons representa uma das confirmações mais expressivas da relação massa-energia.

PROBLEMAS

1. Use um argumento similar ao da seção 9.1, para mostrar explicitamente que a equação da onda permanece inalterada sob uma transformação de Lorentz.

2. Mostre que uma transformação de Lorentz relacionando os sistemas inerciais K e K' pode ser expressa como:

$$x' = x \quad ; \quad y' = y$$

$$z' = z \cosh \alpha - ct \operatorname{senh} \alpha \quad ; \quad t' = t \cosh \alpha - \frac{z}{c} \operatorname{senh} \alpha$$

onde $\tanh \alpha = v/c$. Verifique que esta transformação corresponde a uma rotação por um ângulo (αi) no espaço quadridimensional.

3. A partícula Λ°, cuja massa de repouso é de $1116\text{MeV}/c^2$, tem uma vida média de $2{,}4 \cdot 10^{-10}$s no seu sistema próprio de referência. Qual é a distância percorrida por esta partícula no laboratório, quando a sua velocidade é igual a $0{,}99c$?

4. Num meio transparente cujo índice de refração é n, a velocidade da luz relativa ao meio é c/n. Use a fórmula da transformação de velocidades para

mostrar que, se o meio tem uma velocidade v em relação ao laboratório, então a velocidade da luz em relação ao laboratório é dada aproximadamente pela fórmula:

$$c_l = \frac{c}{n} \pm \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v$$

onde o sinal mais se aplica quando **c** é paralela a **v**, e o sinal menos para **c** antiparalela a **v**. Este resultado foi observado na experiência de Fizeau (1859) sobre a velocidade da luz em fluidos em movimento.

5. Use a transformação de velocidades recíproca à da equação (9.23), para verificar explicitamente a relação:

$$\gamma(u') = \gamma(u)\gamma(v)\left(1 - vu_z/c^2\right) \quad .$$

6. No sistema de referência K', uma partícula se move com velocidade u' ao longo de uma linha reta no plano $y' - z'$; a direção do movimento faz um ângulo θ' com o eixo z'.

(a) Mostre que, no sistema de referência K, a direção do movimento da partícula faz um ângulo θ com o eixo z tal que:

$$\tan\theta = \frac{u'\sqrt{1 - v^2/c^2}\,\operatorname{sen}\theta'}{u'\cos\theta' + v} \quad .$$

(b) Suponha que uma fonte na origem do sistema K' emite partículas em todas as direções. Mostre que, para $v \to c$, todas as partículas, exceto aquelas emitidas exatamente para trás ($\theta' = 180°$), formarão um feixe estreito na direção frontal ($\theta = 0$) no sistema K.

7. Derive as seguintes fórmulas para a transformação de Lorentz da aceleração:

$$a'_x = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{a_x}{\left(1-vu_z/c^2\right)^2} + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{vu_x a_z/c^2}{\left(1-vu_z/c^2\right)^3} \quad ,$$

$$a'_y = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{a_y}{\left(1-vu_z/c^2\right)^2} + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{vu_y a_z/c^2}{\left(1-vu_z/c^2\right)^3} \quad ,$$

$$a'_z = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}\frac{a_z}{\left(1-vu_z/c^2\right)^3} \quad .$$

8. Justifique por que a fase de uma onda plana tem um mesmo valor em todos os sistemas de referência inerciais. Usando este fato, defina no sistema K um vetor de propagação quadridimensional, mostrando que a sua parte "espacial" é $\mathbf{k}$, sendo a quarta componente igual a $i\omega/c$. Obtenha as equações de transformação para o sistema K'. Se $\mathbf{v}$ é a velocidade de K' relativa a K e sendo θ o ângulo entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{k}$, mostre que a freqüência medida em K' será

$$\omega' = \frac{1-(v/c)\cos\theta}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,\omega \quad .$$

Esta expressão relativista para o efeito Doppler produz um deslocamento também na direção transversal $\theta = \pi/2$.

9. Considere o decaimento do píon π° em dois fótons:

$$\pi^\circ \rightarrow \gamma + \gamma \quad .$$

Usando a lei de conservação da energia-momento, e sendo θ o ângulo entre as direções de propagação dos fótons, mostre que:

$$\operatorname{sen}(\theta/2) = \frac{m_\pi c^2}{2\sqrt{E_1 E_2}}$$

onde E_1, E_2 são as energias dos dois fótons no sistema de referência de repouso do píon.

10. Considere a questão da possibilidade de aniquilação de um par elétron-pósitron num único fóton. Mostre que este processo é incompatível com a conservação simultânea da energia e do momento.

10

ELETRODINÂMICA RELATIVÍSTICA

A invariância na forma das equações da eletrodinâmica sob as transformações de Lorentz foi mostrada por Lorentz e Poincaré, mesmo antes da formulação por Einstein da teoria da relatividade. Vamos discutir agora esta covariância e considerar as suas conseqüências. Partindo do fato experimentalmente comprovado da conservação da carga elétrica, podemos deduzir a covariância das equações de Maxwell. Esta importante propriedade exibe claramente a unidade essencial do eletromagnetismo.

10.1 QUADRIVETORES NA ELETRODINÂMICA

Conforme vimos no capítulo anterior, uma quantidade L_μ é denominada de quadrivetor se ela consistir de quatro componentes, cada uma se transformando de acordo com a relação:

$$L'_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} L_\nu \tag{10.1}$$

onde $a_{\mu\nu}$ é a matriz de transformação de Lorentz:

$$\left(a_{\mu\nu}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma\\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma\end{pmatrix} \tag{10.2}$$

e

$$\beta=\frac{v}{c} \quad ; \quad \gamma(v)=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad . \tag{10.3}$$

Na discussão da eletrodinâmica relativística é conveniente usar a convenção da somatória de Einstein. De acordo com esta convenção, uma somatória sobre índices repetidos é automaticamente implicada. Então, a relação (10.1) pode ser escrita simplesmente como:

$$L'_{\mu}=a_{\mu\nu}L_{\nu} \quad . \tag{10.4}$$

Vamos introduzir em seguida o operador gradiente no espaço quadridimensional, que é definido como:

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3},\frac{\partial}{\partial x_4}\right)=\left(\boldsymbol{\nabla},\frac{\partial}{\partial x_4}\right) \quad . \tag{10.5}$$

De acordo com o problema (10.1), este gradiente se transforma como um quadrivetor. Tomando o produto escalar deste gradiente com ele mesmo, obtemos a versão quadridimensional do operador laplaciano:

$$\Box=\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}=\nabla^2+\frac{\partial}{\partial x_4}\frac{\partial}{\partial x_4}=\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{10.6}$$

Sendo o operador gradiente um quadrivetor, o operador d'alambertiano $\Box$ é uma quantidade invariante por transformações de Lorentz. Portanto, a equação da onda (9.4) que pode ser escrita como:

$$\Box\psi = 0 \quad , \tag{10.7}$$

mostra que a eletrodinâmica é consistente com os princípios da relatividade de Einstein.

Como vimos na equação (4.12), a equação da continuidade que exprime a lei de conservação da carga tem a forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad . \tag{10.8}$$

Na teoria da relatividade é claro que a densidade de corrente e a densidade de carga não podem ser entidades completamente separáveis. Isto ocorre porque uma distribuição de carga estática em um dado sistema de referência aparece como uma distribuição de carga e de corrente num outro sistema que se move relativamente ao primeiro sistema. Portanto, agruparemos as densidades de corrente $\mathbf{J}$ e de carga ρ de acordo com:

$$J_\mu = (\mathbf{J}, ic\rho) \quad . \tag{10.9}$$

Então, o produto escalar de $\partial/\partial x_\mu$ com J_μ será:

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial J_j}{\partial x_j} + \frac{\partial (ic\rho)}{\partial (ict)} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad .$$

Conseqüentemente, a equação da continuidade pode ser expressa numa forma quadridimensional como:

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \quad . \tag{10.10}$$

Ao escrevermos a equação (10.9), fizemos uma hipótese implícita de que J_μ é um quadrivetor. Vamos mostrar agora que este é, de fato, o caso. No sistema de referência K', onde a partícula se encontra em repouso, um elemento de carga dq_0 é dado pelo produto da densidade de carga ρ_0 pelo elemento de volume dV_0:

$$dq_0 = \rho_0 dV_0 \quad .$$

Como a carga se conserva, então dq_0, quando visto no sistema de laboratório K, deverá ter o mesmo valor:

$$dq = dq_0 = \rho_0 dV_0 = \rho dV \tag{10.11}$$

onde ρ e dV são as densidades de carga e o elemento de volume no laboratório. Visto que K' se move com velocidade $\mathbf{v} = (0,0,v)$ ao longo do eixo z, teremos em virtude da contração de Lorentz que:

$$dV_0 = dx_0\, dy_0\, dz_0 = dx'\, dy'\, dz' = dx\, dy\, \gamma dz = \gamma dV \quad . \tag{10.12}$$

Conseqüentemente:

$$\rho = \rho_0 \gamma = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \tag{10.13}$$

Assim, a densidade da carga ρ se relaciona à densidade de carga própria ρ_0 da mesma forma que a massa está relacionada com a massa própria. Portanto, a lei da conservação se aplica somente à carga total. Experimentalmente, verificou-se que, apesar da grande velocidade dos elétrons $u \sim 0{,}4c$ em átomos de Césio ($Z = 55$), a diferença relativa entre a carga dos elétrons e a carga do próton é menor que 10^{-19}!

Sendo que $\mathbf{J} = \rho\mathbf{u}$, podemos escrever J_μ na forma:

$$J_\mu = (\rho\mathbf{u}, ic\rho) = \rho_0 \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \rho_0 \frac{p_\mu}{m} \equiv \rho_0 U_\mu \quad . \tag{10.14}$$

Nesta expressão, a densidade de carga própria ρ_0 e a massa própria m são invariantes. p_μ é o quadrivetor momento, de modo que p_μ / m é também um quadrivetor, denominado quadrivelocidade da partícula. Podemos construir o quadrivetor "velocidade" mediante a derivação do quadrivetor x_μ em relação ao tempo próprio τ, que é um invariante de Lorentz: $U_\mu = d\, x_\mu / d\tau$. Então, J_μ possui as propriedades de transformação de U_μ e deve ser portanto um quadrivetor.

Previamente, achamos ser conveniente escolher os potenciais **A** e Φ de modo que estes satisfaçam a condição de Lorentz (4.22):

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad .$$

Definindo:

$$A_\mu = \left(\mathbf{A}, i\Phi\right) \tag{10.15}$$

vemos que a condição de Lorentz pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial A_j}{\partial x_j} + \frac{\partial\left(i\Phi\right)}{\partial\left(ict\right)} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \tag{10.16}$$

que é invariante por transformações da relatividade restrita, desde que A_μ seja um quadrivetor. Para verificar esta propriedade, notamos que, de acordo com as equações (4.23) e (4.24), os potenciais **A** e Φ satisfazem as equações de onda:

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \quad ; \quad \nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \quad . \tag{10.17}$$

Usando (10.9) e (10.15), podemos expressar as relações (10.17) na forma:

$$\Box A_\mu = -\frac{4\pi}{c} J_\mu \quad . \tag{10.18}$$

A parte espacial desta equação é equivalente à equação da onda para **A**, sendo a quarta componente equivalente à equação da onda para Φ. Tendo em vista que na equação (10.18) J_μ é um quadrivetor e □ é um invariante de Lorentz, é claro que A_μ deve ser um quadrivetor.

10.2 O TENSOR DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Conforme vimos nas equações (4.18) e (4.19), os campos elétricos **E** e magnéticos **B** podem ser expressos em termos dos potenciais como:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad ; \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{10.19}$$

Os vetores **E** e **B** não são componentes de quadrivetores, mas representam seis componentes E_1, E_2, E_3, B_1,B_2,B_3 que podem ser usadas para definir o tensor do campo eletromagnético. Para isto, consideramos

$$E_1 = -\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_1}{\partial t} = -\frac{1}{i}\frac{\partial A_4}{\partial x_1} + \frac{1}{i}\frac{\partial A_1}{\partial x_4} = \frac{1}{i}\left[\frac{\partial A_1}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_1}\right]$$

e analogamente para E_2 e E_3. As componentes de **B** são:

$$B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}$$

e analogamente para B_2 e B_3. Vamos definir o conjunto de quantidades

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{10.20}$$

de maneira que $iE_1 = F_{41}$, $B_1 = F_{23}$ etc. Calculando todas as componentes do tensor $\overleftrightarrow{F}$ é teremos:

$$\left(F_{\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{10.21}$$

Este é um tensor anti-simétrico, cujos elementos diagonais são nulos. Através do uso do tensor do campo eletromagnêtico, as equações de Maxwell podem ser expressas de uma maneira muito simples. Considere a equação:

$$\frac{\partial F_{\rho\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial F_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} = 0 \qquad (10.22)$$

Se escolhermos ρ, μ,ν como sendo qualquer combinação de 1,2,3, então (10.22) se reduz a:

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial B_3}{\partial x_3} + \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} = 0$$

que é a equação de Maxwell: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Analogamente, se colocarmos um dos índices ρ, μ, ν igual a 4, então obteremos as componentes da equação:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad .$$

Por exemplo, para $\rho = 1$, $\mu = 2$, $\nu = 4$ teremos de (10.22):

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial B_3}{\partial t} + \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} = 0$$

que corresponde à terceira componente da lei de Faraday. Portanto, vemos que as equações homogêneas de Maxwell são representadas pela equação (10.22). As equações não-homogêneas podem ser obtidas a partir de:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} J_\mu \quad . \qquad (10.23)$$

Para verificar isso, considere o caso $\mu = 1$. Então:

$$\frac{\partial F_{1\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} J_1 \qquad \text{ou:} \qquad \frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial (ict)} = \frac{4\pi}{c} J_1 \quad .$$

Usando a relação (10.21), podemos escrever a equação acima como:

$$0 + \frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} J_1$$

que representa a componente 1 da equação de Ampère-Maxwell:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \quad .$$

Para $\mu = 4$, obteremos analogamente de (10.23) a lei de Gauss: $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$. Assim, as quatro equações de Maxwell são representadas somente pelas duas equações (10.22) e (10.23) envolvendo as derivadas do tensor eletromagnético. Diferenciando (10.23) em relação a x_μ e somando sobre μ, resulta:

$$\frac{\partial^2 F_{\mu\nu}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} \quad .$$

Visto que $F_{\mu\nu}$ é um tensor anti-simétrico, e trocando os índices mudos μ,ν, obtemos:

$$-\frac{\partial^2 F_{\nu\mu}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = -\frac{\partial^2 F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu \partial x_\mu} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} \quad .$$

Vemos então que a quadridivergência de J_μ deve se anular:

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \quad .$$

Conseqüentemente, a equação da continuidade está contida nas equações do campo eletromagnético.

10.3 PROPRIEDADES DE TRANSFORMAÇÃO DO TENSOR DO CAMPO

Quando uma equação expressando uma relação física é transformada de um sistema de referência para outro, através da transformação das coordenadas de acordo com a equação (9.10), a equação será covariante se a sua forma permanecer invariável. Para que as equações do campo sejam covariantes com respeito às transformações de Lorentz, é necessário que as componentes do tensor do campo $F_{\mu\nu}$ tenham a mesma forma em todos os sistemas de referência. Isto é, se:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \qquad \text{em} \qquad K \tag{10.24.a}$$

então devemos ter também:

$$F'_{\mu\nu} = \frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\mu} - \frac{\partial A'_\mu}{\partial x'_\nu} \qquad \text{em} \qquad K' \quad . \tag{10.24.b}$$

Este requerimento especifica a maneira como $F_{\mu\nu}$ se comporta através de uma transformação de Lorentz. Para ver isto, lembremos que os quadrivetores x_μ e A_μ se transformam como:

$$x'_\mu = a_{\mu\sigma} x_\sigma \qquad ; \qquad A'_\nu = a_{\nu\rho} A_\rho \quad . \tag{10.25}$$

A transformação inversa de x_μ é [veja a equação (9.19)] $x_\sigma = a_{\mu\sigma}\, x'_\mu$, de modo que:

$$\frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\mu} = a_{\mu\sigma} \quad . \tag{10.26}$$

Portanto:

$$F'_{\mu\nu} = a_{\nu\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma}\frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\mu} - a_{\mu\sigma}\frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\rho}\frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\nu} \tag{10.27}$$

$$= a_{\mu\sigma}a_{\nu\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma} - a_{\mu\sigma}a_{\nu\rho}\frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\rho} = a_{\mu\sigma}a_{\nu\rho}F_{\sigma\rho} \quad .$$

Esta relação descreve as propriedades de transformações das componentes do tensor $F_{\mu\nu}$. Podemos expressar este resultado de uma maneira mais compacta em termos da matriz transposta a^t como:

$$F' = a\,F\,a^t \quad . \tag{10.28}$$

Esta equação pode ser usada, juntamente com a forma (10.2), para calcularmos as componentes dos campos elétricos e magnéticos em sistemas de referência em movimento. Teremos que:

$$F' = \begin{pmatrix} 0 & B'_3 & -B'_2 & -iE'_1 \\ -B'_3 & 0 & B'_1 & -iE'_2 \\ B'_2 & -B'_1 & 0 & -iE'_3 \\ iE'_1 & iE'_2 & iE'_3 & 0 \end{pmatrix} = a\,F a^t$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -\gamma(B_2 - \beta E_1) & -i\gamma(E_1 - \beta B_2) \\ -B_3 & 0 & \gamma(B_1 + \beta E_2) & -i\gamma(E_2 + \beta B_1) \\ \gamma(B_2 - \beta E_1) & -\gamma(B_1 + \beta E_2) & 0 & -iE_3 \\ i\gamma(E_1 - \beta B_2) & i\gamma(E_2 + \beta B_1) & iE_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Identificando os termos, obtemos as relações:

$$E'_1 = \gamma(E_1 - \beta B_2) \quad ; \quad B'_1 = \gamma(B_1 + \beta E_2)$$

$$E'_2 = \gamma(E_2 + \beta B_1) \quad ; \quad B'_2 = \gamma(B_2 - \beta E_1) \tag{10.30}$$

$$E'_3 = E_3 \quad ; \quad B'_3 = B_3$$

Podemos colocar este conjunto numa forma mais compacta, decompondo os campos vetoriais em componentes perpendiculares e paralelas à direção do movimento. Se o movimento do referencial K' com respeito a K é descrito pelo vetor velocidade $\mathbf{v}$, então [veja o problema 10.5]:

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}_{\perp}\right) \quad ; \quad \mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}$$

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{E}_{\perp}\right) \quad ; \quad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \quad . \tag{10.31}$$

Fica claro destas equações que os campos elétricos e magnéticos não têm existência separada. Um campo elétrico puro num dado sistema transforma-se num campo elétrico e magnético em outro sistema que se move em relação ao primeiro.

Como uma ilustração, vamos considerar um capacitor de placas paralelas, tendo a densidade de carga $\mp\,\sigma_0$, movendo-se com velocidade $\mathbf{v}$ ao longo do eixo z, conforme mostra a figura 10.1.

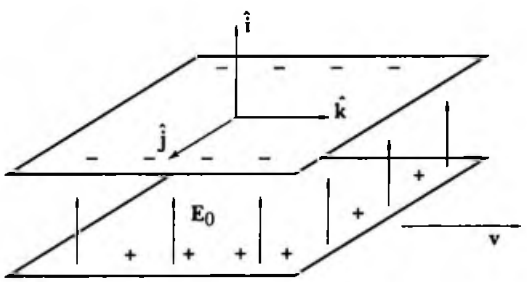


Figura 10.1

No sistema próprio, o campo elétrico $\mathbf{E}_0 = 4\pi\sigma_0\,\hat{\mathbf{i}}$ é perpendicular à velocidade $\mathbf{v}$. Usaremos agora as equações inversas de (10.31), obtidas fazendo as transformações : $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{E}'$, $\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{B}'$ e $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$. Identificando $\mathbf{E}'_{\perp}$ com $\mathbf{E}_0$, obteremos para os campos no laboratório:

$$\mathbf{E}_{\perp} = \gamma\,\mathbf{E}'_{\perp} = 4\pi\gamma\sigma_0\hat{\mathbf{i}} \quad ; \quad \mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{B}_{\perp} = \gamma\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{E}' = \frac{\gamma}{c}\mathbf{v}\times\left(4\pi\sigma_0\hat{\mathbf{i}}\right) = \frac{4\pi}{c}\gamma\sigma_0 v\,\hat{\mathbf{j}} \quad . \tag{10.32}$$

Para entendermos fisicamente estes resultados, notemos que no laboratório, devido à contração de Lorentz, as placas se encurtam na direção do movimento. Tendo em vista a conservação da carga elétrica, a densidade de carga observada no laboratório será então aumentada por um fator γ: $\sigma = \gamma\sigma_0$. Assim, aplicando a lei de Gauss, obtemos diretamente a expressão para $\mathbf{E}_\perp$ dada em (10.32). Podemos entender a relação para $\mathbf{B}_\perp$, notando que as placas em movimento constituem um circuito de corrente no laboratório, com densidades de correntes: $\mathbf{J}_{\mp} = \mp\gamma\sigma_0\mathbf{v}$. De acordo com a lei de Ampère, este circuito produzirá então um campo magnético na direção $\hat{\mathbf{j}}$, em concordância com a segunda expressão em (10.32).

10.4 TRANSFORMAÇÃO RELATIVÍSTICA DOS CAMPOS DE UMA CARGA EM MOVIMENTO UNIFORME

Como um exemplo da transformação dos campos eletromagnéticos, vamos considerar os campos vistos por um observador num sistema K, quando uma carga puntiforme q se move numa trajetória retilínea com uma velocidade $\mathbf{v}$. A carga está em repouso no sistema K' e a transformação dos campos é dada pela inversa da relação (10.30). Vamos supor que a carga se movimente na direção positiva x_3, e que sua menor distância de separação em relação ao observador seja b. A figura 10.2 mostra um sistema de eixos convenientes.

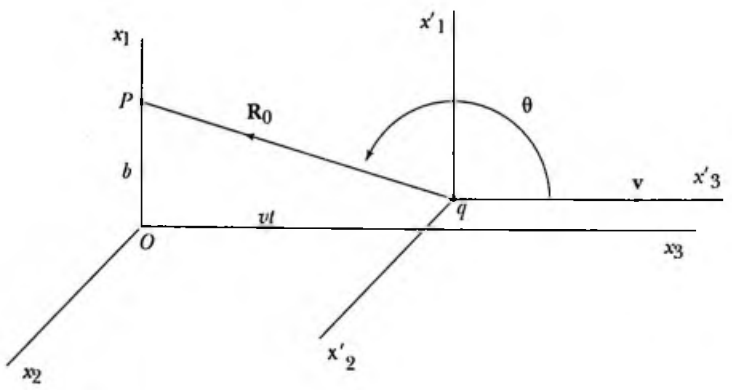


Figura 10.2

No instante $t = t' = 0$, as origens dos dois sistemas coincidem e a carga q está à distância mínima do observador. No referencial K', o ponto P do observador, onde os campos são avaliados, tem as coordenadas: $x'_3 = -vt'$, $x'_1 = b$, $x'_2 = 0$, estando a uma distância $R' = (b^2 + v^2t'^2)^{1/2}$ de q. Vamos precisar exprimir R' em termos das coordenadas de K. A única coordenada que precisa ser transformada é o tempo

t', dado por: $t' = \gamma(t - vx_3/c^2) = \gamma t$, pois $x_3 = 0$ para o ponto P no referencial K. No referencial de repouso K' da carga, o campo magnético é nulo, sendo as componentes do campo elétrico no ponto de observação dadas por:

$$E'_3 = -\frac{qvt'}{R'^3} \quad ; \quad E'_1 = \frac{qb}{R'^3} \quad ; \quad E'_2 = 0 \quad . \tag{10.33}$$

Em termos das coordenadas de K, as componentes não-nulas dos campos são:

$$E'_1 = \frac{qb}{\left(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2\right)^{3/2}} \quad ; \quad E'_3 = -\frac{q\gamma vt}{\left(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2\right)^{3/2}} \quad . \tag{10.34}$$

Então, usando as relações inversas de (10.30), encontraremos para os campos transformados no sistema K:

$$E_1 = \gamma E'_1 = \frac{q\gamma b}{\left(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2\right)^{3/2}} \quad ; \quad E_3 = E'_3 = -\frac{q\gamma vt}{\left(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2\right)^{3/2}} \tag{10.35}$$

$$B_2 = \gamma\beta E'_1 = \beta E_1$$

com as outras componentes nulas. Podemos expressar o denominador em termos da distância radial R_0 entre a posição instantânea da carga e o observador, e do ângulo θ que aparece na figura. Notando que:

$$b^2 + \gamma^2 v^2 t^2 = b^2 + \gamma^2 x_3^2 = R_0^2 \operatorname{sen}^2\theta + \gamma^2 R_0^2 \cos^2\theta$$

$$= R_0^2\left(\operatorname{sen}^2\theta + \frac{\cos^2\theta}{1-\beta^2}\right) = \gamma^2 R_0^2\left(1 - \beta^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) \tag{10.36}$$

a expressão do campo fica:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{R_0^3 \gamma^2} \frac{q\mathbf{R}_0}{\left(1 - \beta^2 \text{sen}^2\theta\right)^{3/2}} \tag{10.37}$$

sendo o campo magnético dado por:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \quad . \tag{10.38}$$

Estes resultados são idênticos àqueles obtidos nas equações (8.14) e (8.15), a partir das considerações dos potenciais de Liénard-Wiechert. As configurações do campo da figura 8.3 se aplicam portanto também neste caso. A compressão das linhas de força na direção transversal resulta em conseqüência da contração da distância na direção do movimento. Este problema ilustra que a eletrodinâmica de Maxwell, desenvolvida anteriormente à teoria da relatividade, é relativisticamente correta. A expressão para os campos de uma partícula em movimento, obtida de uma forma tão laboriosa pelo método de Liénard-Wiechert, segue de uma maneira simples e natural da teoria de relatividade.

10.5 A DENSIDADE DE FORÇA ELETROMAGNÉTICA

Consideremos a equação de movimento de uma partícula com carga q num campo eletromagnético:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B}\right) \quad . \tag{10.39}$$

Podemos expressar o lado direito em termos do tensor do campo eletromagnético dado pela equação (10.21). Por exemplo:

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B}\right)_1 = E_1 + \frac{u_2 B_3 - u_3 B_2}{c} = -iF_{41} - \frac{u_2}{c} F_{21} - \frac{u_3}{c} F_{31} \quad .$$

Sendo $F_{11} = 0$, esta é precisamente a componente $\nu = 1$ da quantidade $-(1/\gamma c) U_\mu F_{\mu\nu}$, onde U_μ é o quadrivetor velocidade definido na equação (10.14). A quarta componente desta quantidade é dada por:

$$-\frac{1}{\gamma c}\sum_{k=1}^{3} U_k F_{k4} = i\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{u}}{c} \quad . \tag{10.40}$$

Portanto, esta componente está relacionada com a taxa de variação da energia da partícula no campo:

$$\frac{dE}{dt} = q\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{u} \quad . \tag{10.41}$$

Sendo $E = -icp_4$, onde p_4 é a quarta componente do quadrivetor momento da partícula, podemos escrever que:

$$\frac{dp_4}{dt} = -\frac{q}{\gamma c} U_\mu F_{\mu 4} \quad . \tag{10.42}$$

Combinando este resultado com a equação (10.39), obtemos:

$$\frac{dp_\nu}{dt} = -\frac{q}{\gamma c} U_\mu F_{\mu\nu} \quad . \tag{10.43}$$

Conforme vimos na equação (9.21), temos que $dt = \gamma d\tau$ onde $d\tau$ é o intervalo de tempo próprio da partícula. Então, podemos escrever a equação de movimento (10.43) numa forma manifestamente covariante:

$$\frac{dp_\nu}{d\tau} = -\frac{q}{c} U_\mu F_{\mu\nu} \tag{10.44}$$

sendo que os dois membros desta equação representam quadrivetores.

Na seqüência, será útil definir um quadrivetor f_ν que está relacionado com o lado direito de (10.44):

$$f_\nu = -\frac{1}{c}\rho_0 U_\mu F_{\mu\nu} = -\frac{1}{c} J_\mu F_{\mu\nu} \tag{10.45}$$

onde usamos novamente a relação (10.14). Através da equação de Maxwell (10.23), podemos escrever o quadrivetor f_ν na forma:

$$f_\nu = \frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\rho} F_{\rho\mu} \tag{10.46}$$

Calculando as componentes do quadrivetor $f_\nu = (\mathbf{f}, f_4)$, encontramos:

$$\mathbf{f} = \rho\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{u} \times \mathbf{B}\right) \tag{10.47.a}$$

$$f_4 = \frac{i}{c}\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{i}{c}\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \quad . \tag{10.47.b}$$

Portanto, f_ν é um quadrivetor associado à densidade de força eletromagnética (chamado de força de Minkowski). A sua parte espacial corresponde à densidade da força de Lorentz (4.27), sendo que a parte temporal representa a taxa do trabalho realizado pelo campo sobre as cargas por unidade de volume.

10.6 TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

A expressão (10.46) para a densidade da força eletromagnética pode ser escrita numa forma similar à lei de conservação (10.10), exceto que necessitamos aqui de uma expressão quadrivetorial. Esta forma corresponde a uma divergência espaço-temporal $\sum_\rho \partial_\rho(...)$ de um tensor apropriadamente determinado, que pode ser identificado a partir das equações de Maxwell (10.22). O resultado será uma equação quadrivetorial, cujas componentes serão equivalentes às equações de continuidade (4.35) e (4.54), mas expressas de uma forma manifestamente covariante.

Como um primeiro passo para transformar (10.46) numa divergência espaço-temporal, vamos escrever $4\pi f_\nu$ como:

$$4\pi f_\nu = \partial_\rho\left(F_{\rho\mu} F_{\mu\nu}\right) - F_{\rho\mu}\partial_\rho F_{\mu\nu} \tag{10.48.a}$$

onde $\partial_\rho \equiv \partial/\partial x_\rho$. O último termo pode ser reexpresso de três maneiras alternativas. Primeiramente,

$$F_{\rho\mu}\partial_\rho F_{\mu\nu} = \left(-F_{\mu\rho}\right)\partial_\rho\left(-F_{\nu\mu}\right) = F_{\rho\mu}\partial_\mu F_{\nu\rho} \tag{10.48.b}$$

resulta da anti-simetria do tensor do campo, sendo a última igualdade obtida trocando os nomes dos índices de soma mudos, $\rho \leftrightarrow \mu$. Em seguida, a substituição da equação de Maxwell (10.22) leva a:

$$F_{\rho\mu}\partial_\rho F_{\mu\nu} = -F_{\rho\mu}\left(\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu}\right) \quad . \tag{10.48.c}$$

A metade da soma das expressões equivalentes (10.48.b) e (10.48.c) resulta num cancelamento que dá:

$$F_{\rho\mu}\partial_\rho F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}F_{\rho\mu}\partial_\nu F_{\rho\mu} = -\frac{1}{4}\partial_\nu\left(F_{\rho\mu}^2\right) \tag{10.48.d}$$

representando um gradiente espaço-temporal da soma invariante $F_{\rho\mu}F_{\rho\mu} = F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$. Assim, (10.48.a) pode ser escrito:

$$4\pi f_\nu = \partial_\rho\left(F_{\rho\mu}\,F_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{4}\partial_\nu\left(F_{\alpha\beta}\right)^2 = \partial_\rho\left(F_{\rho\mu}\,F_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\delta_{\rho\nu}F_{\alpha\beta}^2\right) \tag{10.48.e}$$

que é justamente a forma que estamos procurando.

Este resultado define um tensor obviamente simétrico:

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4\pi}\left(F_{\mu\rho}\,F_{\rho\nu} + \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}^2\right) = T_{\nu\mu} \tag{10.49}$$

de maneira que:

$$f_\nu = \partial_\mu T_{\mu\nu} \quad . \tag{10.50}$$

As várias componentes deste tensor podem ser identificadas com os elementos do campo eletromagnético introduzidos no capítulo 4. Assim, usando a representação (10.21) do tensor do campo, temos:

$$T_{11} = -\frac{F_{1\rho}^2}{4\pi} + \frac{F_{\alpha\beta}^2}{16\pi} = -\frac{B_3^2 + B_2^2 - E_1^2}{4\pi} + \frac{B^2 - E^2}{8\pi} = \frac{E_1^2 + B_1^2}{4\pi} - \frac{E^2 + B^2}{8\pi}$$

que é justamente a componente diagonal 11 do tensor das tensões de Maxwell (4.50). Como um exemplo de um elemento não-diagonal, consideremos:

$$T_{12} = \frac{F_{1\rho}F_{\rho 2}}{4\pi} = \frac{F_{13}F_{32} + F_{14}F_{42}}{4\pi} = \frac{E_1E_2 + B_1B_2}{4\pi}$$

Quando os índices μ e/ou ν são iguais a 4, temos:

$$T_{44} = -\frac{F_{4\rho}^2}{4\pi} + \frac{B^2 - E^2}{8\pi} = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} = u$$

que é justamente a densidade de energia do campo (4.33) no vácuo. A quantidade

$$T_{14} = \frac{F_{1k}F_{k4}}{4\pi} = -\frac{i}{4\pi}\left(B_3E_2 - B_2E_3\right) = -i\frac{\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)_1}{4\pi}$$

pode ser reconhecida como sendo a densidade de momento do campo (4.43), multiplicada por $-ic$. Portanto, o tensor (10.49) pode ser representado pelas componentes da matriz

$$\left(T_{\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} & -icg_x \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} & -icg_y \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} & -icg_z \\ -icg_x & -icg_y & -icg_z & u \end{pmatrix} \tag{10.51}$$

representando as densidades de energia-momento do campo eletromagnético e o seu fluxo. Este tensor tem traço nulo, em conseqüência da relação (4.50) para os seus elementos espaciais:

$$T_{\mu\mu} = \sum_{k=1}^{3} T_{kk} + u = 2u - 3u + u = 0 \quad .$$

A decomposição (10.51) mostra que a componente espacial da equação da divergência (10.50) é:

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ji} + \frac{1}{(ic)} \frac{\partial T_{4i}}{\partial t} = -\frac{\partial g_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} \tag{10.52}$$

que é precisamente a equação de continuidade (4.54), que expressa a conservação do momento linear no campo eletromagnético. A quarta componente é proporcional a:

$$icf_4 = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = ic \frac{\partial}{\partial x_j} T_{j4} + \frac{\partial}{\partial t} T_{44} = \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} \tag{10.53}$$

visto que $c^2\mathbf{g} = \mathbf{S}$ é o vetor de Poynting. Esta relação, que é idêntica a (4.35), descreve a conservação da energia no campo eletromagnético.

PROBLEMAS

1. Verifique explicitamente que o gradiente quadridimensional de um escalar no espaço de Minkowski se transforma como um quadrivetor.

2. Dado o fato de que $(\mathbf{A}, i\Phi)$ é um quadrivetor, e sendo o potencial estático de Coulomb q/r, mostre que os potenciais $\mathbf{A}$, Φ devidos a uma partícula que se move uniformemente ao longo do eixo z, passando pela origem no tempo $t = 0$, são:

$$A_z(\mathbf{r}, t) = \frac{q\beta}{\left[(z - vt)^2 + (1 - \beta^2)(x^2 + y^2)\right]^{1/2}} \quad ; \quad A_x = A_y = 0$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{\left[(z - vt)^2 + (1 - \beta^2)(x^2 + y^2)\right]^{1/2}} \quad .$$

Estas relações são equivalentes aos potenciais de Liénard-Wiechert associados com uma carga em movimento uniforme.

3. Mostre que a equação (10.22) é satisfeita identicamente pelo tensor $F_{\mu\nu}$ definido na equação (10.20). Esta relação é análoga à equação tridimensional: $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$.

4. Usando um cálculo explícito, mostre que as equações (10.22) e (10.23) são covariantes por uma transformação de Lorentz.

5. No sistema de referência K os campos eletromagnéticos são dados por **E** e **B**. Verifique que no sistema de referência K', movendo-se com velocidade uniforme **v** em relação a K, os campos elétricos e magnéticos podem ser expressos na forma dada pela equação (10.31).

6. No seu sistema de repouso, um solenóide cilíndrico comprido de raio R tem um campo magnético $\mathbf{B}_0$ no seu interior, paralelo ao eixo, sendo o campo magnético zero no exterior do cilindro. Se este solenóide estiver se movimentando com velocidade **v** perpendicular ao seu eixo, determine o campo elétrico associado ao solenóide.

7. Suponha que no laboratório existe um campo elétrico $\mathbf{E}_0$ na direção x e um campo magnético $\mathbf{B}_0$ na direção y, tal que $|\mathbf{E}_0| > |\mathbf{B}_0|$.

   (a) Encontre a velocidade **v** de um sistema de referência x', y', z' onde o campo magnético é zero. Qual é a magnitude do campo elétrico neste sistema de referência?

   (b) Discuta a possibilidade da existência (ou não) de um sistema de referência onde o campo elétrico se anula.

8. Use o campo elétrico da equação (10.37) para uma carga em movimento uniforme, mostrando explicitamente que a lei de Gauss é satisfeita também neste caso. Assim, verifique que o fluxo do campo no sistema de laboratório através de uma superfície esférica é $4\pi q$.

9. Um fio condutor retilíneo, infinitamente longo, cuja área transversal é desprezível, está em repouso e tem uma densidade linear de carga uniforme

q_0 num referencial inercial K'. O referencial K' e o fio movem-se com velocidade $\mathbf{v}$ paralela ao fio, em relação ao referencial de laboratório K.

(a) Escreva os campos elétrico e magnético em coordenadas cilíndricas no referencial de repouso do fio condutor. Usando as propriedades dos campos sob a transformação de Lorentz, calcule as componentes dos campos elétrico e magnético no laboratório.

(b) Quais são as densidades de carga e de corrente associadas ao fio condutor no referencial de laboratório?

(c) A partir das densidades de carga e de corrente no laboratório, calcule diretamente os campos elétrico e magnético no laboratório. Compare os resultados com os da parte (a).

10. Mostre que o produto escalar $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ no sistema K é um invariante, sendo igual ao produto escalar $\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}'$ no sistema K'. Assim, se $\mathbf{E}$ é ortogonal a $\mathbf{B}$ em K, então $\mathbf{E}'$ será perpendicular a $\mathbf{B}'$ em K'.

11. Verifique que o quadrivetor f_ν definido na equação (10.45) tem as componentes dadas de acordo com a relação (10.47). Mostre que $f_\nu U_\nu = 0$ e interprete este resultado.

12. Mostre que o termo $F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ na equação (10.49) é invariante por transformações de Lorentz. Verifique que esta quantidade é igual a: $2(B^2 - E^2)$.

13. Considere um capacitor de placas paralelas, contendo entre as placas um campo elétrico $\mathbf{E}_0$ na direção do eixo z. Calcule as componentes do tensor de energia-momento.

14. Numa dada região do espaço, existem campos elétricos e magnéticos cruzados, tais que $\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{y}}$. Encontre todas as componentes do tensor de energia-momento.

15. Considere um campo elétrico uniforme $\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{z}}$. Determine os campos elétricos $\mathbf{E}'$ e $\mathbf{B}'$ observados num sistema de referência x', y', z' que se move com velocidade $\mathbf{v}$ na direção z. Encontre as componentes do tensor de energia-momento neste sistema de referência.

11

MOVIMENTO RELATIVÍSTICO DE PARTÍCULAS EM CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS

Vamos começar este capítulo com a análise das propriedades da força de Lorentz sob as transformações da teoria da relatividade. Em seguida, estudamos o movimento de partículas em diversas configurações de campos elétricos e magnéticos. Tem especial importância a dinâmica das cargas em campos magnéticos não-uniformes, que é relevante para o confinamento do plasma. Finalmente, discutiremos o movimento relativístico de partículas com spin em campos eletromagnéticos.

11.1 DERIVAÇÃO DA FORÇA DE LORENTZ NA TEORIA DA RELATIVIDADE

A expressão (1.48) para a força de Lorentz foi obtida a partir dos dados experimentais. Vamos apresentar agora uma dedução simples desta expressão, baseada nas leis de transformação dos campos eletromagnéticos.

Considere uma carga q movendo-se com velocidade $\mathbf{u}$ em relação ao sistema inercial K. Seja K' o sistema de referência onde a partícula está em repouso, conforme indica a figura 11.1.

Neste referencial, atuará sobre a partícula somente o campo elétrico $\mathbf{E}'$ que produz uma força:

$$\mathbf{F}' = q\mathbf{E}' \quad . \tag{11.1}$$

O nosso problema é encontrar a força que atua sobre a partícula no sistema inercial K. Para isso, é necessário expressar $\mathbf{F}'$ em termos da força $\mathbf{F}$ que atua

no sistema de referência K. A fórmula desta transformação pode ser encontrada da seguinte maneira. Conforme vimos na equação (10.47), a força de Minkowski $f_\nu = (\mathbf{f}, i\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}/c)$, onde $\mathbf{f}$ é a densidade da força de Lorentz, é um quadrivetor. No sistema de referência K' que se move com a carga, temos então $f'_4 = 0$. Então, usando a transformação recíproca de (10.4), obtemos:

$$\mathbf{f}_\parallel = \gamma \mathbf{f}'_\parallel \qquad ; \qquad \mathbf{f}_\perp = \mathbf{f}'_\perp \tag{11.2}$$

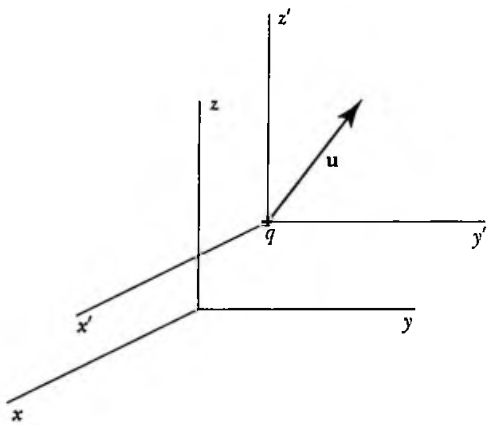


Figura 11.1

onde os índices $\parallel$ e $\perp$ se referem às componentes paralelas e perpendiculares ao vetor velocidade, respectivamente. A densidade de força $\mathbf{f}$ está relacionada com a força de Lorentz $\mathbf{F}$ mediante a integral:

$$\mathbf{F} = \int d^3x\, \mathbf{f} = \frac{1}{\gamma}\int d^3x'\, \mathbf{f} \tag{11.3}$$

onde a segunda igualdade decorre em virtude da contração espacial. Assim, vemos facilmente de (11.2) que a fórmula de transformação da força de Lorentz é dada por:

$$\mathbf{F}_\parallel = \mathbf{F}'_\parallel \qquad ; \qquad \mathbf{F}_\perp = \frac{1}{\gamma}\mathbf{F}'_\perp \quad . \tag{11.4}$$

Combinando (11.1) e (11.4) com as equações de transformações dos campos (10.31), encontramos para as componentes de $\mathbf{F}$ as relações:

$$\mathbf{F}_{\parallel} = q\,\mathbf{E}'_{\parallel} = q\mathbf{E}_{\parallel} \quad .$$

$$\mathbf{F}_{\perp} = \frac{q}{\gamma}\mathbf{E}'_{\perp} = q\left(\mathbf{E}_{\perp} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B}_{\perp}\right) \quad . \tag{11.5}$$

Conseqüentemente, usando as transformações de Lorentz, deduzimos a existência da força magnética $q(\mathbf{u} \times \mathbf{B})\ /c$ no referencial K. Portanto, neste referencial temos a relação:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B}\right) \tag{11.6}$$

que representa a equação fundamental de movimento da partícula em campos externos. Esta lei é suplementada por [veja a equação (10.41)]:

$$\frac{dE}{dt} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{u} \tag{11.7}$$

que descreve a taxa da mudança da energia da partícula, devida à potência fornecida pelos campos externos.

11.2 MOVIMENTO NUM CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME

Como um importante exemplo, vamos considerar o movimento de uma carga num campo magnético uniforme **B**. Escolhendo a direção do campo ao longo do eixo z, as equações de movimento (11.6) e (11.7) tomam a forma:

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{q}{c}u_y B \quad ; \quad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{q}{c}u_x B$$

$$\frac{dp_z}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{dE}{dt} = 0 \quad . \tag{11.8}$$

Como o campo magnético não realiza trabalho sobre a partícula carregada, a sua energia se conserva:

$$E = \text{constante} = E_0 \quad . \tag{11.9}$$

Usando a fórmula relativística (9.40), obtemos:

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{E}{c^2}u_x\right) = \frac{E_0}{c^2}\frac{du_x}{dt} \quad , \quad \frac{dp_y}{dt} = \frac{E_0}{c^2}\frac{du_y}{dt} \quad .$$

Portanto as equações para as componentes x e y do momento podem ser escritas na forma:

$$\frac{1}{u_y}\frac{du_x}{dt} = \frac{qcB}{E_0} \quad ; \quad \frac{1}{u_x}\frac{du_y}{dt} = -\frac{qcB}{E_0} \quad . \tag{11.10}$$

A equação (11.10) pode ser satisfeita colocando:

$$u_x = a\cos(\omega t + \alpha) \quad ; \quad u_y = -a\,\text{sen}(\omega t + \alpha) \quad . \tag{11.11}$$

onde a freqüência ω é dada por:

$$\omega = \frac{qcB}{E_0} = \frac{qB}{\gamma(u)mc} \quad . \tag{11.12}$$

Vemos da equação (11.11) que:

$$u_x^2 + u_y^2 = a^2 = (u_\perp)^2 = \text{constante} = (u_\perp)_0^2 \quad .$$

Assim, a quantidade $(u_\perp)_0$ representa a velocidade inicial de movimento da partícula no plano $x-y$ que permanece constante no tempo. Uma segunda integração leva à equação da trajetória no plano $x-y$:

$$x = x_0 + \frac{(u_\perp)_0}{\omega}\,\text{sen}(\omega t + \alpha) \quad ; \quad y = y_0 + \frac{(u_\perp)_0}{\omega}\cos(\omega t + \alpha) \quad .$$

Como pode ser visto de (11.8), a partícula se move com velocidade constante ao longo do eixo z:

$$z = z_0 + (u_z)_0 t \quad .$$

Se, em particular, $(u_z)_0 = 0$, então a trajetória representa um círculo no plano $x - y$, cujo raio é igual a:

$$R = \frac{(u_\perp)_0}{\omega} = \frac{(u_\perp)_0 E_0}{qcB} = \frac{cp_{\perp 0}}{qB} \tag{11.13}$$

onde $p_{\perp 0}$ é o momento inicial.

A freqüência ω de rotação no círculo é proporcional à intensidade do campo magnético e depende da energia inicial E_0. Para pequenas velocidades,

$$\gamma(u) \simeq 1 \qquad \text{e} \qquad \omega \simeq \frac{qB}{mc} \tag{11.14}$$

de modo que neste caso a freqüência (de cíclotron) ω torna-se independente da energia da partícula.

As fórmulas (11.12) e (11.13) têm uma grande importância na física contemporânea. A forma (11.13) é conveniente para a determinação do momento da partícula. O raio de curvatura da trajetória de uma partícula carregada num campo **B** conhecido possibilita a determinação do seu momento. Como é bem conhecido, num cíclotron a partícula se move em círculos num campo magnético entre dois condutores em forma semicircular, aos quais é aplicado um campo elétrico. As partículas passam através de uma fenda entre os condutores num campo elétrico que as acelera. Assim, após descrever um semicírculo com velocidade constante, a partícula é acelerada e descreve o próximo semicírculo com o novo valor da velocidade etc. Para uma aceleração contínua, o campo na fenda de aceleração deve estar numa fase definida no instante em que a partícula entra nessa região. Enquanto a partícula não adquire velocidades relativísticas, a freqüência do campo elétrico é determinada pela fórmula (11.14), sendo independente da energia da partícula. Contudo, quando a partícula adquire velocidades relativísticas, a freqüência de rotação depende da energia da partícula. Portanto, para uma aceleração subseqüente, é necessário que a variação da freqüência do campo elétrico

esteja em correspondência com a fórmula (11.12). Cíclotrons que operam nesta freqüência variável são chamados de síncrotrons.

11.3 MOVIMENTO EM CAMPOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS CRUZADOS

Vamos analisar agora o movimento de uma partícula carregada numa combinação de campos elétrico e magnético **E** e **B**, ambos uniformes e estáticos. Conforme vimos nos problemas (10.10) e (10.12), o produto escalar $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ é um invariante de Lorentz, da mesma forma que $B^2 - E^2$. Quando os campos são perpendiculares ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$), podemos encontrar então um referencial de Lorentz onde $\mathbf{E} = 0$ quando $|\mathbf{B}| > |\mathbf{E}|$, ou onde $\mathbf{B} = 0$ se $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$. Quando $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$, o campo elétrico é tão intenso que a partícula é continuamente acelerada na direção de **E** e sua energia média continua a aumentar com o tempo. Este caso é discutido nos problemas 11.4 e 11.5.

Nesta seção, queremos discutir o movimento de uma partícula em campos elétricos e magnéticos cruzados, quando $|\mathbf{B}| > |\mathbf{E}|$. Neste caso, podemos ir para um sistema de referência onde o campo elétrico se anula. Para encontrar este referencial, lembramos as transformações de Lorentz (10.31) para os campos elétricos e magnéticos:

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \quad ; \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{E}_{\perp} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_{\perp}\right)$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \quad ; \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}_{\perp}\right) \tag{11.15}$$

onde $\gamma = \gamma(v) = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$.

Vamos escolher o seguinte valor para **v**:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} c \tag{11.16}$$

Esta é uma velocidade permitida, tendo em vista que $v = EBc/B^2 = Ec/B < c$. A velocidade **v** é perpendicular tanto ao campo elétrico como ao campo magnético. Isto implica que as componentes paralelas dos campos na equação (11.15) se anulam. Portanto, os campos elétricos e magnéticos serão iguais às suas componentes perpendiculares à velocidade **v**. Neste caso, obtemos de (11.15) e (11.16):

$$\mathbf{E}' = \gamma\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2}\times\mathbf{B}\right) = \gamma\left(\mathbf{E} - \mathbf{E}\right) = 0 \quad , \tag{11.17}$$

e

$$\mathbf{B}' = \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2}\times\mathbf{E}\right) = \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{E^2}{B^2}\mathbf{B}\right) = \sqrt{1-\frac{E^2}{B^2}}\,\mathbf{B} \quad . \tag{11.18}$$

Assim, no sistema K' teremos um campo puramente magnético. Este campo tem a mesma direção de **B**, mas é reduzido por um fator de γ^{-1}. Então, o movimento em K' é o mesmo que foi descrito na seção anterior, sendo um círculo no plano perpendicular ao campo magnético. Seja $u'_\perp$ a componente da velocidade da partícula perpendicular ao campo magnético no sistema K'. Então, de acordo com a relação (11.13), o raio do círculo é:

$$R' = \frac{c}{qB'}\,m\gamma\left(u'\right)u'_\perp = \frac{mc\gamma\left(u'\right)u'_\perp}{q\sqrt{B^2 - E^2}} \quad . \tag{11.19}$$

No sistema do laboratório o movimento é uma combinação do movimento circular em K' com um movimento translacional com velocidade $\mathbf{v} = c\mathbf{E}\times\mathbf{B}/B^2$. Isto produz um movimento de natureza cicloidal, conforme indica a figura 11.2.

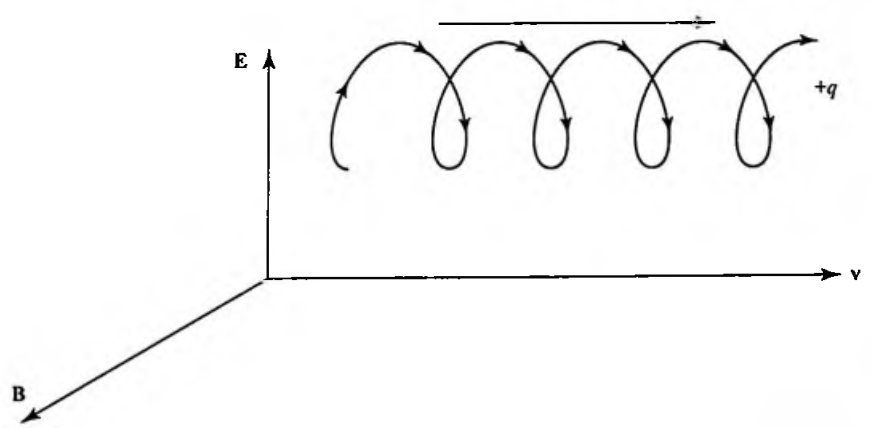


Figura 11.2

Com exceção das girações da partícula, vemos que o movimento médio é um deslocamento gradual na direção $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, chamado de arraste da partícula. Note que a direção deste arraste é independente do sinal da carga.

Uma interpretação qualitativa do fenômeno de arraste pode ser dada através do seguinte raciocínio. Considere, por exemplo, uma carga positiva que se move num círculo cujo plano é normal à direção do campo magnético **B**. Então o campo elétrico irá acelerar a partícula quando esta se mover no semicírculo esquerdo, e desacelerar a carga no seu movimento no semicírculo direito, de modo que a trajetória circular será distorcida. A partícula atravessa a parte superior do círculo com uma velocidade maior do que na parte inferior. Então, o campo magnético vai curvar mais a trajetória da partícula na parte inferior do círculo do que na parte superior. Portanto, a projeção do caminho atravessado pela partícula numa direção perpendicular a **E** e **B** será menor na parte inferior do círculo do que na sua parte superior. Conseqüentemente, resultará após cada revolução um certo deslocamento nesta direção, o que acarreta o arraste da partícula com velocidade **v**.

Na circunstância em que a velocidade inicial da partícula $\mathbf{u}_0$ é igual à velocidade de arraste, vemos que a força eletromagnética sobre a partícula se anula:

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{u}_0 \times \mathbf{B}\right) = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2} \times \mathbf{B}\right) = 0 \quad . \tag{11.20}$$

Neste caso, a partícula continuará a se mover com a velocidade $\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}$. Este fato possibilita a seleção de partículas carregadas de acordo com a sua velocidade. Quando um feixe de partículas incide normalmente numa região que tem campos elétricos e magnéticos cruzados, somente aquelas com velocidades iguais a cE/B não sofrerão deflexão. Esta propriedade é utilizada pelos chamados filtros de velocidade, que são dispositivos que produzem feixes de partículas com uma estreita faixa de velocidades.

11.4 MOVIMENTO DE PARTÍCULAS EM CAMPOS MAGNÉTICOS NÃO-UNIFORMES; O CONFINAMENTO DE UM PLASMA

Nas aplicações astrofísicas e termonucleares, é muito importante conhecer o comportamento das partículas em campos magnéticos que variam no espaço. No caso geral de campos que variam de uma forma arbitrária, o problema da integração das equações de movimento é muito complicado. Muitas vezes, é suficiente nos restringir aos casos práticos em que campos magnéticos estacionários variam lentamente no espaço.

Consideremos um campo magnético simétrico em torno do eixo z, tendo um pequeno gradiente nesta direção, como é indicado na figura 11.3.

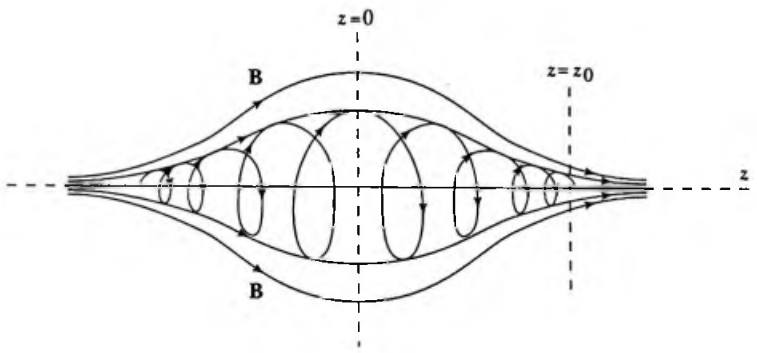


Figura 11.3

Vamos supor que, numa distância da ordem do raio de cíclotron R, a variação do campo magnético seja pequena, isto é:

$$R\left|\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}\right| \ll |\mathbf{B}| \quad . \tag{11.21}$$

Sendo que o campo magnético varia ao longo do eixo z, a componente radial B_ρ do campo será diferente de zero. Usando a equação de continuidade em coordenadas cilíndricas:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho B_\rho\right) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

temos:

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho B_\rho\right) = -\rho \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad .$$

Integrando esta equação, e desprezando a dependência de $\partial B_z / \partial z$ na coordenada ρ num círculo de raio $\rho \sim R$, encontramos:

$$B_\rho \simeq -\frac{1}{2}\rho\frac{\partial B_z}{\partial z} \quad . \tag{11.22}$$

Sendo a condição (11.21) satisfeita, a componente B_ρ é pequena em comparação com a componente B_z para $\rho < R$, de modo que $|\mathbf{B}| \simeq |B_z|$. Assim, podemos escrever aproximadamente:

$$B_\rho \simeq -\frac{1}{2}\rho\frac{\partial|\mathbf{B}|}{\partial z} \equiv -\frac{1}{2}\rho\frac{\partial B}{\partial z} \quad . \tag{11.23}$$

Sendo a componente do campo magnético $B_\rho \neq 0$, então uma partícula que se move num círculo no plano $x-y$ com a freqüência de cíclotron sofrerá a influência de uma força magnética na direção z. Esta força causará um arraste da partícula nesta direção. A componente u_z da velocidade da partícula satisfaz a equação de movimento:

$$m\gamma(u)\frac{du_z}{dt} = \frac{q}{c}u_\perp B_\rho = -\frac{q}{2c}u_\perp R\frac{\partial B}{\partial z} \simeq -\frac{q}{2c}u_{\perp 0}R_0\frac{\partial B}{\partial z} \tag{11.24}$$

onde o índice 0 denota quantidades medidas no ponto $z=0$. A última aproximação é correta até primeira ordem na pequena variação de $B(z)$. Substituindo em (11.24) a expressão do raio de cíclotron dada pela equação (11.13), calculada no ponto $z=0$, obtemos:

$$\frac{du_z}{dt} \simeq -\frac{u_{\perp 0}^2}{2B_0}\frac{\partial B(z)}{\partial z} \tag{11.25}$$

Podemos integrar esta equação de movimento, usando o fato de que:

$$\frac{d}{dt}B(z) = \frac{dz}{dt}\frac{\partial B(z)}{\partial z} = u_z\frac{\partial B(z)}{\partial z} \quad .$$

Então é fácil verificar por cálculo direto que a equação (11.25) tem como integral primeira a equação:

$$u_z^2 = u_0^2 - u_{\perp 0}^2 \frac{B(z)}{B_0} \tag{11.26}$$

onde $u_0^2 = u_{\perp 0}^2 + u_{z0}^2$ é o quadrado da velocidade da partícula em $z = 0$. Este permanece constante em virtude da conservação da energia:

$$u^2 = u_\perp^2 + u_z^2 = u_0^2 \quad . \tag{11.27}$$

Substituindo esta relação em (11.26), vemos que a quantidade:

$$\frac{u_\perp^2}{B(z)} = \frac{u_{\perp 0}^2}{B_0} \tag{11.28}$$

é uma constante, chamada de invariante adiabática. A partir desta condição, podemos mostrar que o fluxo magnético $\pi R^2 B$ associado à órbita da partícula permanece constante:

$$\pi R^2 B = \pi \left(\frac{u_\perp}{\omega} \right)^2 B = \pi \frac{\gamma^2 m^2 c^2}{q^2} \frac{u_\perp^2}{B} = \pi \frac{\gamma^2 m^2 c^2}{q^2} \frac{u_{\perp 0}^2}{B_0} \tag{11.29}$$

onde usamos a expressão (11.12) para a freqüência de cíclotron ω.

Assim, se B aumentar, o raio R diminuirá, de modo a satisfazer a constância do fluxo. Este resultado implica que a carga espirala em órbitas cada vez mais cerradas à medida que B aumenta, conforme podemos observar na figura. Neste caso, o segundo membro da equação (11.26) diminui de modo que a partícula converterá cada vez mais a sua energia de translação em energia de rotação. Quando $B(z)$ cresce o suficiente, a velocidade axial da partícula terminará por anular-se em algum ponto $z = z_0$. Então ela retorna, sendo refletida pelo campo magnético.

O exemplo acima descrito ilustra o princípio do "espelho magnético": as partículas carregadas são refletidas pelas regiões de campo magnético intenso. Este princípio pode ser aplicado ao confinamento de um plasma quente para a produção da energia termonuclear. Pode-se construir uma garrafa magnética, cujas linhas de campo têm a forma indicada na figura 11.3. As partículas injetadas

na região central do campo descreverão espirais ao longo do eixo, mas serão refletidas pelos campos magnéticos das extremidades.

Uma outra área de aplicação deste princípio é relativa aos campos magnéticos terrestres e siderais. Os cinturões de Van Allen que circundam a Terra consistem de elétrons e prótons confinados no campo magnético da Terra pelo processo de reflexão discutido anteriormente, conforme mostra a figura 11.4. As

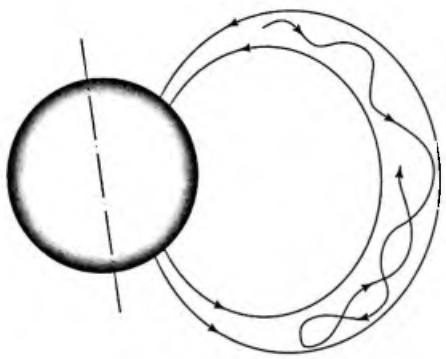


Figura 11.4

partículas espiralam em torno das linhas de campo magnético entre os pólos norte e sul do eixo magnético, onde são refletidas pelos campos magnéticos convergentes.

11.5 MOVIMENTO RELATIVÍSTICO DE UMA PARTÍCULA COM SPIN NUM CAMPO ELETROMAGNÉTICO; O MOMENTO MAGNÉTICO ANÔMALO DO ELÉTRON

Conforme vimos na equação (2.51), uma carga com momento angular **L** descreve um movimento de precessão num campo magnético. Vamos examinar agora a generalização relativística deste movimento para uma partícula com carga q, massa de repouso m que possui um momento angular intrínseco **s**. Com o fator giromagnético dado pela equação (2.50), a equação de movimento para o spin no referencial de repouso da partícula será:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt'} = \frac{gq}{2mc}\mathbf{s} \times \mathbf{B}' \tag{11.30}$$

onde as linhas indicam quantidades medidas no sistema próprio da partícula.

Para obtermos uma generalização relativística desta equação, precisamos generalizar o conceito de spin, a partir do vetor tridimensional **s** no referencial

de repouso da partícula. Vamos definir então no referencial inercial K um quadrivetor $S_\alpha = (\mathbf{S}, S_4)$ que tenha somente três componentes independentes e que se reduza a $(\mathbf{s}, 0)$ no referencial de repouso da partícula. De acordo com as fórmulas de transformação (10.1) e (10.2), temos, em virtude do anulamento da componente temporal no referencial de repouso K', que:

$$s_4 = \gamma\left(S_4 - i\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{S}\right) = -\frac{i}{c}U_\alpha S_\alpha = 0 \tag{11.31}$$

onde U_α é a quadrivelocidade da partícula definida na equação (10.14):

$$U_\alpha = \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \frac{ic}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) \equiv \gamma(\mathbf{u}, ic) \quad . \tag{11.32}$$

Vemos assim que a componente temporal do spin no referencial K é dependente da sua componente espacial, sendo dada por:

$$S_4 = i\frac{\mathbf{u}}{c}\cdot\mathbf{S} \quad . \tag{11.33}$$

Na análise subseqüente, será útil considerar também a relação explícita entre **S** e o spin **s** no referencial de repouso. Usando as transformações inversas de (10.1) e (10.2), é fácil mostrar que:

$$\mathbf{S}_\parallel = \gamma\,\mathbf{s}_\parallel \quad ; \quad \mathbf{S}_\perp = \mathbf{s}_\perp \quad . \tag{11.34}$$

Vemos assim que o spin **s** no referencial de repouso da partícula determina completamente as componentes do quadrivetor S_α em qualquer referencial inercial.

Voltando agora à equação (11.30), é claro que uma generalização óbvia do seu lado esquerdo é $dS_\alpha/d\tau$, onde τ é o tempo próprio da partícula. Para obter uma expressão covariante correspondente ao lado direito de (11.30), é conveniente lembrar a equação covariante que descreve o movimento de uma partícula num campo eletromagnético [veja a equação (10.44)]. Usando o fato de que $p_\alpha = mU_\alpha$, podemos escrever esta equação como:

$$\frac{dU_\alpha}{d\tau} = \frac{q}{mc} F_{\alpha\beta} U_\beta \quad . \tag{11.35}$$

A expressão covariante que descreve o movimento do spin tem uma forma análoga a (11.35):

$$\frac{dS_\alpha}{d\tau} = \frac{gq}{2mc} F_{\alpha\beta} S_\beta \quad . \tag{11.36}$$

Usando a representação (10.21) para o tensor do campo eletromagnético, é fácil verificar que a parte espacial desta expressão se reduz, no sistema de repouso da partícula, à equação (11.30).

Mas a equação (11.36) não pode ser a generalização completa da relação (11.30). Para mostrar isso, vamos considerar a derivada da expressão invariante (11.31):

$$\frac{d}{d\tau}\left(U_\alpha S_\alpha\right) = S_\alpha \frac{dU_\alpha}{d\tau} + U_\alpha \frac{dS_\alpha}{d\tau} = 0 \quad . \tag{11.37}$$

Então, usando a equação (11.35) resulta que:

$$U_\alpha \frac{dS_\alpha}{d\tau} = -\frac{q}{mc} S_\alpha F_{\alpha\beta} U_\beta = \frac{q}{mc} F_{\alpha\beta} U_\alpha S_\beta \quad . \tag{11.38}$$

Contudo, de acordo com a equação (11.36) temos que:

$$U_\alpha \frac{dS_\alpha}{d\tau} = \frac{gq}{2mc} F_{\alpha\beta} U_\alpha S_\beta \quad . \tag{11.39}$$

Portanto, a forma simples (11.36) é completa somente para $g = 2$. Notemos que este valor corresponde a uma partícula com spin $\hbar/2$, descrita pela equação de Dirac. Neste caso, num campo puramente magnético, a equação de movimento obedecida por **u** é exatamente a mesma que aquela obedecida por **S**. Conseqüentemente, o ângulo entre **u** e **S** permanecerá fixo para um movimento arbitrário num campo magnético.

Se $g \neq 2$, a equação (11.36) deverá continuar válida no sistema próprio de referência, mas alguns termos suplementares devem ser adicionados de modo que as conseqüências de (11.31) e (11.35) sejam compatíveis. Evidentemente, a componente espacial destes termos deve se anular no sistema de repouso da partícula, para que possamos ter concordância com a relação (11.30). Para colocar (11.39) numa forma consistente com (11.38) que é sempre válida, devemos modificar (11.36) de modo que:

$$U_\alpha \frac{dS_\alpha}{d\tau} = \frac{q}{mc} F_{\alpha\beta} U_\alpha S_\beta$$

$$= \frac{gq}{2mc} F_{\alpha\beta} U_\alpha S_\beta - (g-2)\frac{q}{2mc} F_{\alpha\beta} U_\alpha S_\beta \quad . \tag{11.40}$$

Assim, usando o fato de que $U_\alpha U_\alpha = -c^2$ e a convenção da somatória sobre índices repetidos, vemos que a relação (11.36) deve ser generalizada para:

$$\frac{dS_\alpha}{d\tau} = \frac{q}{2mc}\left[g F_{\alpha\beta} S_\beta + \frac{1}{c^2}(g-2)\left(U_\lambda F_{\lambda\beta} S_\beta\right) U_\alpha \right] \quad . \tag{11.41}$$

Como é evidente, as componentes espaciais desta expressão coincidem, no referencial de repouso da partícula, com a equação (11.30).

Vamos considerar finalmente a quarta componente da relação (11.41), supondo a existência de um campo puramente magnético no laboratório. Neste caso, a partir da representação (10.21) para o tensor do campo eletromagnético, vemos que o primeiro termo do lado direito da equação (11.41) se anula, obtendo-se então:

$$\frac{dS_4}{d\tau} = -\frac{iq}{mc}\frac{\gamma^2}{c}\left(\frac{g}{2} - 1\right)\mathbf{S}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{B}) \tag{11.42}$$

onde usamos a expressão (11.32) para a quadrivelocidade da partícula. Tendo em vista que $dt = \gamma d\tau$, como também a relação (11.33), a equação (11.42) pode ser escrita na forma:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{S}) = -\frac{q\gamma}{mc}\left(\frac{g}{2}-1\right)\mathbf{S}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{B}) \quad . \tag{11.43}$$

Para encontrar a taxa da variação da componente do spin paralela à velocidade, chamada de polarização longitudinal ou helicidade, consideramos a equação:

$$\frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{S}) = \frac{1}{u}\frac{d}{dt}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{u}) - \frac{1}{u^3}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{S})\left(\mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right) \quad . \tag{11.44}$$

Tendo em vista que num campo puramente magnético a energia da partícula se conserva, o último termo que é proporcional a du^2/dt se anula. Desta forma, a equação (11.43) pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{S}) = -\left(\frac{g}{2}-1\right)\frac{q\gamma}{mc}\mathbf{S}\cdot(\hat{\mathbf{u}}\times\mathbf{B}) \quad . \tag{11.45}$$

Usando agora a relação (11.34), podemos expressar a taxa de variação da helicidade no laboratório diretamente em termos do spin intrínseco da partícula:

$$\frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{s}) = -\left(\frac{g}{2}-1\right)\frac{q}{mc}\mathbf{s}\cdot(\hat{\mathbf{u}}\times\mathbf{B}) \quad . \tag{11.46}$$

Assim, para uma partícula com o fator $g = 2$, o spin precessa com a mesma freqüência que a freqüência do cíclotron da partícula no campo magnético. Conseqüentemente, a helicidade permanece constante neste caso. Esta propriedade é exemplificada na figura 11.5. Em virtude das correções radiativas, o

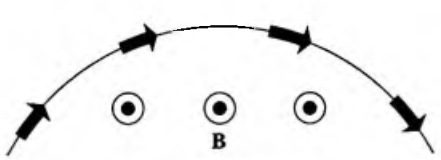


Figura 11.5

elétron tem um fator g que difere do valor 2 por uma pequena quantidade da ordem $\alpha = 1/137$, onde α é a constante de estrutura fina. Então, a polarização longitudinal

de um elétron em órbita num campo magnético irá modificar-se lentamente de acordo com a equação (11.46) onde $q = -e$. Este fato permite a determinação experimental muito precisa do fator $(g/2 - 1)$, denominado de momento magnético anômalo do elétron. Experiências mais recentes, realizadas na década de 1970, mostram que:

$$\frac{g}{2} - 1 = (115.965,77 \pm 0,35) \cdot 10^{-8} \quad . \tag{11.47}$$

Conforme veremos no capítulo 15, este valor está em excelente concordância com as previsões da eletrodinâmica quântica.

PROBLEMAS

1. Seja K' um sistema de referência inercial que se move com velocidade $\mathbf{v}$ em relação ao sistema inercial K. Considere o movimento de uma partícula cuja velocidade nos sistemas K e K' é respectivamente $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}'$. Deduza as seguintes equações cinemáticas que relacionam as forças nos sistemas K e K':

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_{\parallel} = \left(\frac{d\mathbf{p}'}{dt'}\right)_{\parallel} + \frac{\gamma(v)}{c^2}\left[\mathbf{u} \times \left(\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{p}'}{dt'}\right)\right]_{\parallel} \quad ,$$

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_{\perp} = \gamma(v)\left(\frac{d\mathbf{p}'}{dt'}\right)_{\perp} + \frac{\gamma(v)}{c^2}\left[\mathbf{u} \times \left(\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{p}'}{dt'}\right)\right]_{\perp} \quad .$$

[Sugestão: Use as propriedades de transformação de Lorentz do quadrivetor $p_\mu = (\mathbf{p}, iE/c)$, juntamente com as relações (9.23) e (9.25.a) para expressar a taxa temporal de variação do momento em K em termos de $d\mathbf{p}'/dt'$.]

2. Mostre que a aceleração de uma partícula com massa m e carga q num campo eletromagnético é dada por:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{q}{\gamma m}\left[\mathbf{E} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}}{c^2}\mathbf{u} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B}\right] \quad .$$

3. Considere o movimento do elétron no bétratron, onde a intensidade do campo magnético varia com o tempo. Considere o caso em que a variação do campo magnético com o tempo é tal que o elétron se move num círculo de raio constante R. Mostre que a condição para que isso seja possível pode ser expressa na forma:

$$B(R) = \frac{1}{2}\overline{B}$$

onde $\overline{B}$ é o valor médio do campo magnético dentro da órbita.

4. Considere o movimento de uma partícula num campo eletromagnético cruzado, uniforme e estático, onde $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$.

(a) Encontre o sistema de referência onde a partícula sofre a ação apenas de um campo puramente eletrostático.

(b) Suponha que a partícula com carga q e massa m se move ao longo do eixo z' neste sistema, sob a influência de um campo elétrico uniforme $E'\,\hat{\mathbf{e}}'_3$. Usando as equações de movimento relativísticas (11.6) e (11.7), mostre que se $z' = dz'/dt' = 0$ quando $t' = 0$, então:

$$z'(t') = \frac{mc^2}{qE'}\left\{\left[1+\left(\frac{qE't'}{mc}\right)^2\right]^{1/2} - 1\right\}$$

5. Considere o movimento de uma partícula com carga q e massa m, num campo puramente elétrico $\mathbf{E}_0$, que é uniforme e estático. Considere o movimento da partícula com uma velocidade inicial $\mathbf{u}_0$ perpendicular ao campo. Usando as equações de movimento relativísticas:

(a) Mostre que as expressões para as componentes da velocidade nas direções paralela e perpendicular a $\mathbf{E}_0$ são dadas por:

$$\mathbf{u}_{\parallel}(t) = \frac{(q\mathbf{E}_0 / \gamma_0 m)t}{\left[1+(t/\tau_0)^2\right]^{1/2}} \quad ; \quad \mathbf{u}_{\perp}(t) = \frac{\mathbf{u}_0}{\left[1+(t/\tau_0)^2\right]^{1/2}}$$

onde $\gamma_0 = \gamma(u_0)$ e $\tau_0 = \gamma_0 mc/qE_0$.

(b) Escrevendo $u_{\perp}(t) = \dot{x}(t)$, $u_{\parallel}(t) = \dot{z}(t)$ e supondo que a partícula se encontra na origem no instante $t = 0$, integre estas relações para obter as formas paramétricas.

$$x(t) = u_0\tau_0 \ln\left\{\frac{t}{\tau_0} + \left[1+\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2\right]^{1/2}\right\} \quad ;$$

$$z(t) = c\tau_0\left\{\left[1+\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2\right]^{1/2} - 1\right\} \quad .$$

6. Uma partícula de massa m e carga q move-se em campos elétricos e magnéticos cruzados, sendo **E** uniforme ao longo do eixo x e **B** paralelo ao eixo y. Considere o caso $|\mathbf{E}| < |\mathbf{B}|$.

(a) Escreva as equações de movimento da partícula no sistema K' onde o campo elétrico se anula, em termos do raio de giração R' e da freqüência ω'. Suponha que a velocidade inicial do elétron no laboratório é zero.

(b) Faça as transformações de Lorentz necessárias para obter as equações paramétricas explícitas da trajetória da partícula no sistema K.

7. Mostre que, para uma partícula carregada que se move num campo magnético lentamente variável, o momento magnético associado com o movimento orbital é constante.

8. Uma partícula é injetada no ponto $z = 0$ do espelho magnético da figura 11.3, com uma velocidade que faz o ângulo θ_0 com o eixo z. Mostre que no ponto z_0, onde a partícula é refletida pelo espelho magnético, a intensidade do campo é:

$$B(z_0) = \frac{B(0)}{\text{sen}^2\theta_0} \quad .$$

9. O campo magnético da Terra pode ser representado aproximadamente pelo campo de um dipolo magnético com o momento $|\mathbf{m}| = 8{,}1 \cdot 10^{25}$ Gauss·cm^3. Mostre que a equação para uma linha de campo que passa através do plano orbital equatorial magnético em $r = r_0$ é: $r = r_0 \text{sen}^2\theta$, onde θ é o ângulo polar medido a partir do eixo do dipolo.
[Sugestão: Ao longo de uma linha do campo, $r d\theta / dr = B_\theta / B_r$. Por quê?]

10. Um próton com energia cinética de 10MeV está inicialmente no plano magnético equatorial da Terra, a uma distância de $1{,}5R_{\text{Terra}}$ do centro da Terra. Suponha que a velocidade inicial do próton faz um ângulo α com o plano equatorial. Usando o resultado do problema anterior e o fato de que na superfície da Terra no plano equatorial o campo magnético tem uma magnitude de 0,31 Gauss, determine a latitude onde o próton será refletido pelas linhas magnéticas convergentes.
[Sugestão: o próton espirala em torno de uma linha de campo cuja equação é: $r = 1{,}5R_{\text{Terra}} \text{sen}^2\theta$.]

11. Partindo da relação (11.44) e usando para $d\mathbf{S}/dt$ a expressão dada pela parte espacial da equação (11.41), verifique a relação (11.45) para a taxa de variação da helicidade.

12

COLISÕES DE PARTÍCULAS CARREGADAS COM A MATÉRIA

Os efeitos da interação entre as partículas carregadas e a matéria são de grande importância na física nuclear e na física de plasmas. Uma partícula energética incidente na matéria sofre colisões com os elétrons e os núcleos atômicos. Para partículas mais pesadas, como mésons, prótons etc., estas colisões eletromagnéticas terão efeitos diferentes. Os elétrons atômicos podem absorver quantidades apreciáveis de energia sem causar deflexões significativas nas partículas incidentes. Por outro lado, os núcleos massivos absorvem pouca energia, mas causam o espalhamento das partículas em virtude da sua grande carga elétrica. Na prática, este espalhamento se realiza predominantemente em ângulos pequenos, de modo que as partículas incidentes mais pesadas se movem numa trajetória aproximadamente retilínea. Para elétrons incidentes, tanto a perda de energia como o espalhamento ocorrem em colisões com os elétrons atômicos. Conseqüentemente, a sua trajetória sofrerá grandes deflexões, de forma que os elétrons incidentes irão se difundir após percorrer uma curta distância na matéria.

Neste capítulo vamos estudar as colisões de partículas com a matéria, enfatizando tanto a transferência de energia como também os mecanismos de deflexão da direção incidente. A nossa discussão tratará basicamente das idéias físicas envolvidas, tendo em vista que a obtenção de resultados exatos necessita de um tratamento quântico. (Para uma análise mais completa, veja Jackson, Cap. 13.)

12.1 PERDA DE ENERGIA DEVIDA À IONIZAÇÃO

Uma partícula de massa M que se move através da matéria colide com os elétrons atômicos de massa m, transferindo para estes uma quantidade apreciável

de energia. Vamos calcular a taxa da perda de energia por uma partícula com carga ze que se move com velocidade **v** num meio contendo uma densidade N de elétrons. Para partículas energéticas, podemos considerar os elétrons como sendo praticamente livres e em repouso. Esta aproximação simplifica consideravelmente a nossa análise, levando a uma expressão para a perda de energia em boa concordância com o resultado exato.

Então, a força entre a partícula incidente e o elétron é ze^2/r^2, onde r é a distância entre estas. A trajetória de uma partícula rápida não é afetada apreciavelmente pelo elétron, e podemos considerar que a colisão demora um tempo suficientemente curto, de modo que o elétron não modifica substancialmente a sua posição. Neste caso, o impulso transmitido ao elétron será basicamente perpendicular à trajetória da partícula incidente, sendo dado pela relação:

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{\infty} eE_{\perp} dt = \int_{-\infty}^{\infty} eE_{\perp} \frac{dx}{v} = ze^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r^2} \cos\theta \frac{dx}{v} \tag{12.1}$$

onde $E_{\perp}$ é a componente do campo elétrico na posição do elétron que é normal à trajetória da partícula. A figura 12.1 mostra a geometria da colisão, ond b representa o parâmetro de impacto.

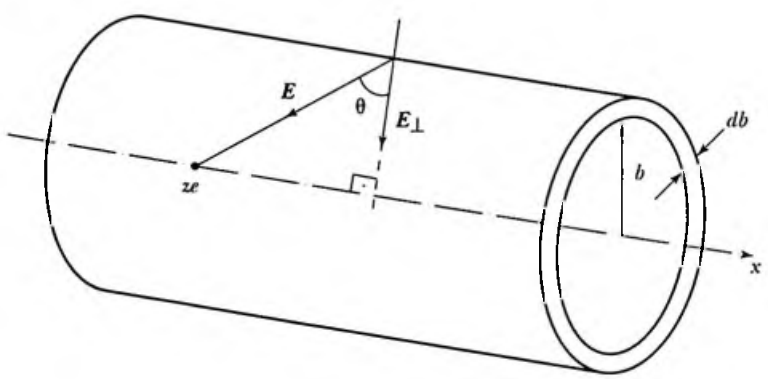


Figura 12.1

A integral (12.1) pode ser facilmente calculada aplicando o teorema de Gauss a um cilindro de raio b, tendo a trajetória da partícula como seu eixo. Note que o fluxo do campo elétrico através deste cilindro é dado por:

$$\int E_{\perp} 2\pi b \, dx = 4\pi ze \quad . \tag{12.2}$$

Substituindo este resultado na integral da equação (12.1), onde supomos v aproximadamente constante, obtemos:

$$\Delta p = \frac{2ze^2}{bv} \quad . \tag{12.3}$$

A energia transferida ao elétron será então:

$$\frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{2}{m}\left(\frac{ze^2}{bv}\right)^2 \quad . \tag{12.4}$$

O número de elétrons num elemento dx, que se encontram a uma distância entre b e $b + db$ do íon pesado, é igual a $2\pi b\, N\, db\, dx$. Portanto, a perda de energia por unidade de comprimento é:

$$\frac{dE}{dx} = 2\pi N \int \frac{(\Delta p)^2}{m} b\, db = \frac{4\pi N z^2 e^4}{mv^2} \int_{b_{\text{mín}}}^{b_{\text{máx}}} \frac{db}{b} \tag{12.5}$$

$$= 4\pi N \frac{z^2 e^4}{mv^2} \ln \frac{b_{\text{máx}}}{b_{\text{mín}}} \quad .$$

Vamos discutir a seguir os valores de $b_{\text{máx}}$ e $b_{\text{mín}}$ apropriados ao nosso problema. Para determinar $b_{\text{máx}}$ notamos que a hipótese de os elétrons serem livres representa uma boa aproximação quando o tempo de colisão é pequeno em comparação ao período do movimento orbital dos elétrons nos átomos. Conforme vimos após a equação (8.20), o tempo efetivo de colisão é da ordem $b/\gamma v$, onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. O período orbital é da ordem $1/\langle\omega\rangle$, onde $\langle\omega\rangle$ denota uma freqüência característica deste movimento. O limite para $b_{\text{máx}}$ dado por esta condição fica então:

$$b_{\text{máx}} \sim \frac{\gamma v}{\langle\omega\rangle} \quad . \tag{12.6}$$

O limite inferior $b_{\text{mín}}$ pode ser estimado a partir do princípio de incerteza da mecânica quântica. Tendo em vista que o elétron só pode ser localizado em relação à partícula pesada dentro de uma distância da ordem de $\hbar/p$, encontramos que:

$$b_{\text{mín}} \sim \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{\gamma m v} \quad . \tag{12.7}$$

Usando as relações (12.6) e (12.7), obtemos para a energia transferida (12.5) a expressão:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{mv^2} N \ln\left(\frac{\gamma^2 m v^2}{\hbar\langle\omega\rangle}\right) \quad . \tag{12.8}$$

A quantidade $\hbar\langle\omega\rangle$ representa uma média da energia de ionização do átomo da matéria, cuja magnitude é da ordem de $10Z$ eV, onde Z é o número atômico.

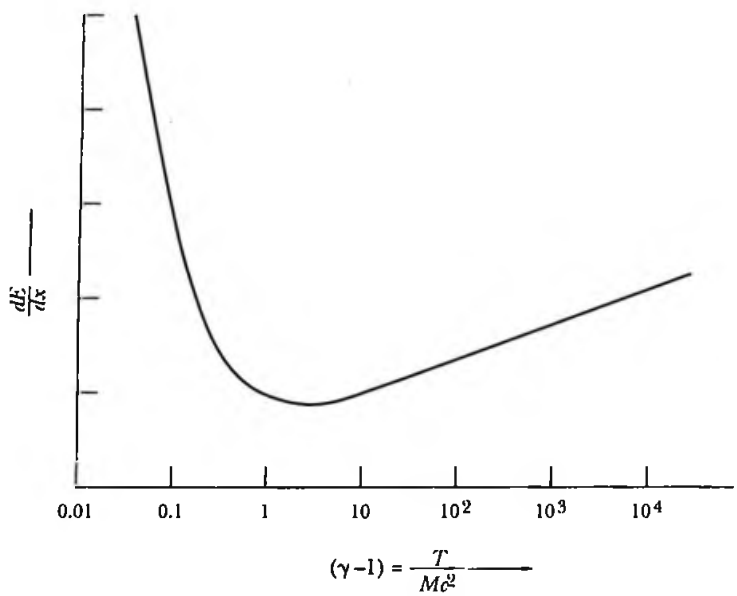


Figura 12.2

Um cálculo mais preciso leva à fórmula de Bethe (1930):

$$\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{mv^2} N \left[\ln\left(\frac{2\gamma^2 m v^2}{\hbar\langle\omega\rangle}\right) - \frac{v^2}{c^2}\right] \quad . \tag{12.9}$$

Note que, com exceção da correção v^2/c^2 e do fator 2 no argumento do logaritmo, a nossa expressão aproximada está de acordo com o resultado exato (12.9).

Esta equação mostra que dE/dx é independente da massa M da partícula, variando como $1/v^2$ para velocidades não-relativísticas. Após passar por um mínimo para $\gamma \sim 3$ (ver problema 12.2), dE/dx aumenta logaritmicamente com $\gamma = E/Mc^2$. A figura 12.2 mostra o aumento relativístico observado para a perda de energia por ionização num gás, como uma função de $\gamma - 1 = T/Mc^2$, onde T é a energia cinética da partícula.

Para $\gamma \sim 10^3$, dE/dx é cerca de 1,5 vezes maior que o seu valor mínimo. O aumento relativístico é associado com o fato de que o campo elétrico transversal da partícula é proporcional a γ, de modo que colisões cada vez mais distantes tornam-se importantes à medida que a energia da partícula aumenta.

12.2 ESPALHAMENTO COULOMBIANO DE PARTÍCULAS POR NÚCLEOS

Considere uma partícula com carga ze atravessando um meio cujo número atômico é Z. Ocasionalmente a partícula irá colidir elasticamente com o núcleo, sofrendo uma deflexão devida à interação eletrostática. Estas colisões nucleares podem produzir mudanças na direção da partícula incidente, sem modificar significativamente a sua energia. Para calcular o efeito destas colisões, vamos considerar por simplicidade que o centro espalhador fixo exerce uma força Zze^2/r^2 sobre a partícula incidente. Esta força, cujo potencial é:

$$V(r) = \frac{Zze^2}{r} \quad , \tag{12.10}$$

produz um movimento cuja órbita está no plano do centro fixo e da velocidade inicial $\mathbf{v}$ da partícula, que consideraremos não-relativística. Se $\mathbf{r}$ é o raio vetor do centro até a partícula cujo momento é $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$, então a segunda lei de Newton dá:

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{Zze^2\mathbf{r}}{r^3} \quad . \tag{12.11}$$

Multiplicando vetorialmente os dois lados por $\mathbf{r}$, temos:

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = 0 \tag{12.12}$$

Assim, o momento angular

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{12.13}$$

é uma constante de movimento, pois sua derivada temporal é zero.

A energia total:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{Zze^2}{r} \tag{12.14}$$

é uma outra constante de movimento.

O vetor:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{1}{Zze^2 m}\mathbf{L} \times \mathbf{p} + \frac{\mathbf{r}}{r} \quad , \tag{12.15}$$

que está no plano da órbita, é também constante no tempo, como pode ser verificado calculando $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ de acordo com as equações (12.11) e (12.13). Multiplicando escalarmente (12.15) por $\mathbf{r}$, e usando a fórmula para o triplo produto misto, temos:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{r} = \frac{L^2}{me^2 zZ} + r \quad . \tag{12.16}$$

Esta equação pode ser facilmente interpretada usando coordenadas polares com o eixo na direção de $\boldsymbol{\varepsilon}$. Então, podemos escrever (12.16) na forma:

$$\varepsilon r \cos\phi = \frac{L^2}{me^2 Zz} + r$$

ou

$$r = -\frac{L^2/me^2 Zz}{1 - \varepsilon \cos\phi} \tag{12.17}$$

que é a equação de uma hipérbole com excentricidade ε para $\varepsilon > 1$.

O ângulo entre as assíntotas da hipérbole é ϕ_0, sendo o ângulo de deflexão da partícula dado por $\theta = \pi - \phi_0$, conforme mostra a figura 12.3. Quando $\phi = \phi_0/2$, temos que r é infinito de modo que o denominador da expressão (12.17) se anula. Assim:

$$\cos\frac{\phi_0}{2} = \frac{1}{\varepsilon} = \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \tag{12.18}$$

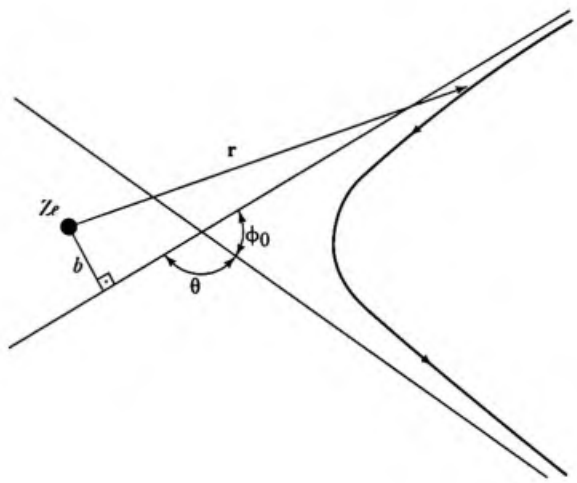


Figura 12.3

o que implica a relação:

$$\frac{Zze^2}{2Eb} = \tan\frac{\theta}{2} \tag{12.19}$$

onde $b = L/(2mE)^{1/2}$ é o parâmetro de impacto.

Vamos calcular agora a probabilidade para uma deflexão θ para uma partícula que atravessa o meio com número atômico Z. Supomos que esta deflexão é conseqüência de uma única deflexão nuclear. Este é o caso para grandes deflexões. Pequenas deflexões são geralmente o resultado da ação combinada de várias colisões, conforme veremos na próxima seção. Vamos calcular a seção de choque para o espalhamento nuclear $d\sigma/d\Omega$ e a probabilidade de espalhamento através de um ângulo entre θ e $\theta + d\theta$, quando a partícula atravessa

um meio de espessura x contendo N núcleos por unidade de volume. A probabilidade $P(\theta)\,d\Omega$ para o espalhamento através do ângulo θ no elemento de ângulo sólido $d\Omega$ é dada por:

$$P(\theta)d\Omega = \frac{d\sigma}{d\Omega} Nx d\Omega \quad . \tag{12.20}$$

Considere um núcleo massivo e um feixe incidente contendo uma partícula por unidade de área. Se a partícula tem o parâmetro de impacto b com respeito ao centro espalhador, então a deflexão será dada por (12.19). O número de partículas incidentes dn que têm o parâmetro de impacto entre b e $b + db$ é $2\pi b db = dn$, onde de acordo com (12.19)

$$db = -\frac{Zze^2}{4E} \frac{d\theta}{\text{sen}^2\theta/2} \quad . \tag{12.21}$$

Portanto:

$$|dn| = \pi \left(\frac{Zze^2}{2E} \right)^2 \frac{\cos(\theta/2)}{\text{sen}^3(\theta/2)} |d\theta| \quad . \tag{12.22}$$

Este é o número de partículas defletidas através de um ângulo entre θ e $\theta + d\theta$. Estas passam com densidade uniforme entre os dois cones de abertura θ e $\theta + d\theta$. O ângulo sólido entre estes cones é:

$$d\Omega = 2\pi \,\text{sen}\,\theta\, d\theta \tag{12.23}$$

e

$$\frac{dn}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left(\frac{Zze^2}{2E} \right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4(\theta/2)} \quad . \tag{12.24}$$

A quantidade $dn/d\Omega$ tem a dimensão de área, e a comparação com a equação (12.20) mostra que a seção de choque diferencial é:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4}\left(\frac{Zze^2}{mv^2}\right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4(\theta/2)} \quad . \tag{12.25}$$

Esta é a famosa fórmula de espalhamento de Rutherford (1912).

A equação (12.25) não fornece qualquer informação sobre o tamanho nuclear, tendo em vista que o núcleo foi considerado como uma carga puntiforme. Contudo, as dimensões finitas do núcleo afetam o espalhamento de partículas de altas energias, cujo comprimento de onda de de Broglie $\hbar/p$ é da ordem do raio nuclear. Neste caso, a seção de choque diferencial pode ser escrita como:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Ruth.}} \left|F(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\right|^2 \tag{12.26}$$

onde $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$ denotam os momentos inicial ou final da partícula espalhada. A função F é denominada fator de forma do núcleo e pode ser expressa em termos da densidade de carga nuclear $\rho(r)$ como:

$$F(\mathbf{p}-\mathbf{p}') = \frac{1}{Ze}\int \rho(r)\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}\right]dv \quad . \tag{12.27}$$

É claro que para uma carga puntiforme onde $\rho(\mathbf{r}) = Ze\delta(\mathbf{r})$, $F = 1$ de modo que (12.26) se reduz à seção de choque diferencial de Rutherford. Uma dada distribuição de carga pode ser testada experimentalmente comparando o valor observado de $d\sigma/d\Omega$ com aquele calculado a partir das equações (12.26) e (12.27).

De especial interesse são as distribuições de carga do próton e do nêutron. Hofstadter (1955) realizou experiências sobre o espalhamento de elétrons de altas energias (500 – 1.000MeV) por prótons e dêuterons. Estes estudos revelaram uma estrutura interna da distribuição da carga nuclear, que está mostrada na figura 12.4.

Numa primeira aproximação, a densidade da carga elétrica do próton pode ser representada pela exponencial:

$$\rho(r) = \rho(0)\exp(-r/d) \tag{12.28}$$

com $d = 0{,}23 \cdot 10^{-13}$ cm. O estudo detalhado dos fatores de forma do próton e do nêutron tornou-se muito importante para a física das partículas elementares.

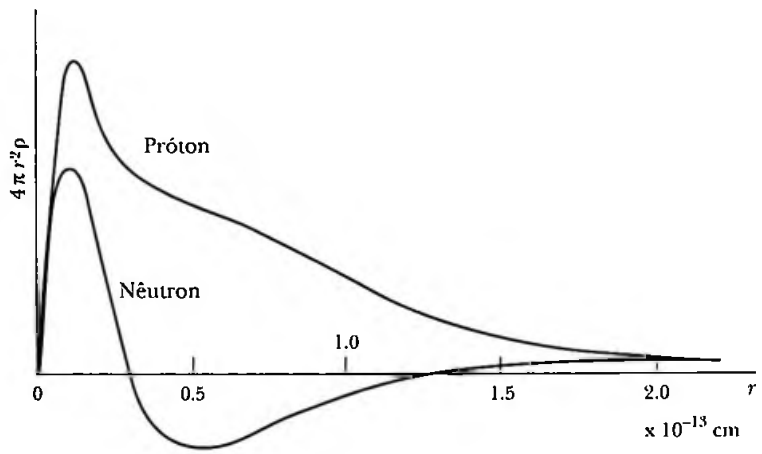


Figura 12.4

12.3 ESPALHAMENTO MÚLTIPLO

Na seção anterior, estudamos o espalhamento devido a uma única colisão coulombiana entre uma partícula carregada e o núcleo. Os eventos em que a partícula sofre um grande desvio são relativamente pouco freqüentes. Em geral, o espalhamento Rutherford de partículas rápidas ocorre em ângulos pequenos comparados com 1 radiano. Pequenas deflexões correspondem a regiões com grandes parâmetros de impacto, onde o núcleo pode ser considerado puntiforme. Neste caso, a seção de choque (12.25) se reduz à expressão:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2Zze^2}{pv}\right)^2 \frac{1}{\theta^4} \quad . \tag{12.29}$$

Vamos considerar agora o efeito cumulativo de múltiplas deflexões pequenas que produzem um certo desvio da direção inicial da partícula. A grandeza importante na região de espalhamento múltiplo é o ângulo médio quadrático definido por:

$$\left\langle \theta^2 \right\rangle = \frac{\int \theta^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega}{\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega} \tag{12.30}$$

Para calcular este ângulo, é importante notar que, para grandes parâmetros de impacto, a carga nuclear é efetivamente blindada pelos elétrons atômicos. Esta blindagem fará com que a seção de espalhamento tenda a um valor finito quando $\theta \to 0$, em lugar de aumentar como indica a equação (12.29). Assim, o efeito da blindagem dos elétrons atômicos modifica esta equação para a forma:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2Zze^2}{pv} \right)^2 \frac{1}{\left(\theta^2 + \theta_{\text{mín}}^2 \right)^2} \tag{12.31}$$

onde $\theta_{\text{mín}}$ é um ângulo de corte. O ângulo $\theta_{\text{mín}}$, abaixo do qual a seção de espalhamento se afasta do resultado simples (12.29), pode ser determinado classicamente usando um argumento similar àquele usado na derivação de (12.3). Considerando uma colisão de uma partícula não-relativística com carga ze incidente sobre um núcleo com carga Ze, encontramos que o ângulo para pequenas deflexões de partículas incidentes com parâmetro de impacto b será dado por:

$$\theta = \frac{\Delta p}{p} = \frac{2Zze^2}{bvp} \tag{12.32}$$

Podemos estimar $\theta_{\text{mín}}$ fazendo nesta equação $b = a$, onde a é o raio atômico que determina o alcance efetivo da blindagem dos elétrons atômicos:

$$\theta_{\text{mín}} \simeq \frac{2Zze^2}{pva} \tag{12.33}$$

A seção de espalhamento total, que aparece no denominador da expressão para $\langle \theta^2 \rangle$, pode ser obtida pela integração da equação (12.31) sobre todo o ângulo sólido:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \simeq 2\pi \left(\frac{2Zze^2}{pv} \right)^2 \int_0^{\pi} \frac{\theta \, d\theta}{\left(\theta^2 + \theta_{\text{mín}}^2 \right)^2} \tag{12.34}$$

$$\simeq \pi \left(\frac{2Zze^2}{pv} \right)^2 \frac{1}{\theta_{\text{mín}}^2} = \pi a^2 \quad .$$

Esta expressão mostra que a seção de espalhamento total é dada neste caso pelo valor clássico da área geométrica πa^2.

Para efetuar a integração da expressão que aparece no numerador de $\langle \theta^2 \rangle$, devemos considerar ângulos de espalhamento θ tais que $\theta < \theta_{\text{máx}} = 1$ rad. Observando que $\theta_{\text{máx}} \gg \theta_{\text{mín}}$, encontramos a expressão:

$$\left\langle \theta^2 \right\rangle = 2\theta_{\text{mín}}^2 \ln \left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{\theta_{\text{mín}}} \right) = 8 \left(\frac{Zze^2}{pva} \right)^2 \ln \left(\frac{pva}{2Zze^2} \right) \tag{12.35}$$

para o ângulo médio quadrático do espalhamento múltiplo.

12.4 CONDUTIVIDADE ELÉTRICA DO PLASMA

As considerações sobre o espalhamento múltiplo podem ser aplicadas também ao problema da condutividade elétrica num plasma. Vamos considerar por simplicidade um gás consistindo de N íons fixos com carga Ze por unidade de volume e uma densidade de elétrons $N_e = NZ$. O modelo de Drude para a condutividade elétrica é baseado na equação de movimento do elétron dada por (6.48). Escrevendo nesta equação a constante de amortecimento l em termos da freqüência de colisão ν: $l = m\nu$, obtemos:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - m\nu\mathbf{v} \quad . \tag{12.36}$$

De acordo com a equação (6.52), a condutividade elétrica para baixas freqüências devida ao movimento dos elétrons é:

$$\sigma_{el} = \frac{N_e e^2}{l} = \frac{NZe^2}{mv} \quad . \tag{12.37}$$

Para calcular a freqüência de colisão ν, notamos que na equação (12.36) $m\nu\mathbf{v}$ representa realmente a taxa de decréscimo do momento frontal da partícula, devida às colisões coulombianas. Vamos denotar por θ o ângulo de espalhamento resultante numa colisão elástica, conforme indica a figura 12.5. Neste caso, o

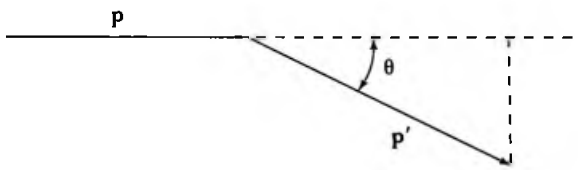


Figura 12.5

momento frontal perdido por uma partícula com momento p é $p(1 - \cos\theta)$. O valor médio desta quantidade, multiplicado pelo número de colisões por unidade de distância, representa a perda de momento frontal por unidade de distância, ou seja, $m\nu$. Como o número de colisões por unidade de distância é dado por $N\sigma$, onde σ representa a seção total de choque, podemos escrever que:

$$m\nu = N\sigma p\left\langle\left(1-\cos\theta\right)\right\rangle \quad . \tag{12.38}$$

Tendo em vista que o espalhamento coulombiano ocorre basicamente para pequenos ângulos, $\langle(1 - \cos\theta)\rangle \simeq \langle\theta^2\rangle/2$. Então a perda de momento frontal por unidade de comprimento é:

$$m\nu \simeq \frac{1}{2} N\sigma p\left\langle\theta^2\right\rangle = \pi Np\left(\frac{2Ze^2}{pv}\right)^2 \ln\left(\frac{\theta_{máx}}{\theta_{mín}}\right)$$

$$= 4\pi N \frac{\left(Ze^2\right)^2}{mv^3} \ln\left(\frac{mv^2 D}{2Ze^2}\right) \tag{12.39}$$

onde usamos as equações (12.34) e (12.35), com $p = mv$, $z = 1$ e $a = D$, tendo em vista que o raio de blindagem do plasma é dado pela distância de Debye (7.5):

$$D = \left(\frac{kT}{8\pi N_e e^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{kT}{8\pi N Z e^2} \right)^{1/2} \quad . \tag{12.40}$$

Substituindo este resultado na equação (12.37) obtemos a condutividade elétrica:

$$\sigma_{el}(v) \simeq \frac{mv^3}{4\pi Z e^2 \ln\left(mv^2 D / 2Ze^2 \right)} \quad . \tag{12.41}$$

Vamos tomar agora uma média sobre a distribuição térmica de velocidades. A variação com a velocidade na equação (12.41) vem principalmente do fator v^3. O argumento do logaritmo pode ser avaliado considerando a velocidade quadrática média $\langle v^2 \rangle = 3kT/m$. Usando este valor e o raio de Debye (12.40), o argumento do logaritmo pode ser escrito como:

$$\frac{m\langle v^2 \rangle}{2} \frac{D}{Ze^2} = 12\pi N D^3 \quad . \tag{12.42}$$

O valor médio da terceira potência da velocidade para uma distribuição de Maxwell de velocidades é:

$$\langle v^3 \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2} \quad . \tag{12.43}$$

Conseqüentemente, o valor da condutividade elétrica (12.41) mediada sobre a distribuição de Maxwell de velocidades é:

$$\sigma_{el} \simeq \frac{m}{Ze^2 \ln\left(12\pi N D^3 \right)} \left(\frac{2kT}{\pi m} \right)^{3/2} \quad . \tag{12.44}$$

Esta expressão descreve corretamente as características da condutividade devida ao movimento de elétrons não-relativísticos, estando em concordância qualitativa com o valor experimental.

PROBLEMAS

1. Uma partícula pesada carregada, de carga ze, massa M e velocidade não-relativística, colide com um elétron livre de massa m inicialmente em repouso. Sem fazer aproximações, além do fato de ser M muito maior que m, mostre que a energia transferida ao elétron em função do parâmetro de impacto b é:

$$\Delta E(b) = \frac{2\left(ze^2\right)^2}{mv^2} \frac{1}{b^2 + \left(ze^2/mv^2\right)^2} \quad .$$

2. Mostre que a perda de energia por ionização no ar tem um mínimo quando a energia da partícula E é da ordem de 3 Mc^2. Compare o valor da perda de energia neste ponto com o valor de dE/dx correspondente a $\gamma \sim 10^3$.

3. Usando a fórmula quântica (12.9) da perda de energia, calcule a taxa de perda de energia (em MeV/cm) no alumínio e no chumbo para um próton com energias cinéticas de 10, 100 e 1.000 MeV.

4. Uma partícula pesada relativística com carga $q = ze$ colide com um elétron livre em repouso. Usando a expressão para o campo elétrico relativístico dado pela equação (10.35) mostre que o impulso transferido ao elétron em função do parâmetro de impacto b é:

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{+\infty} eE_{\perp}(t)\,dt = \frac{2ze^2}{bv} \quad .$$

   Note que este resultado, que está de acordo com (12.3), é independente do fator γ.

5. Considere o desvio angular de uma partícula com carga ze, momento p e parâmetro de impacto b incidindo sobre um núcleo estático com carga Ze.

De acordo com o resultado do problema anterior, o desvio para pequenas deflexões:

$$\theta = \frac{\Delta p}{p} = \frac{2zZe^2}{pvb}$$

é válido também relativisticamente. Usando esta relação entre θ e b e um argumento similar ao da seção 12.2, mostre diretamente que a seção de choque diferencial para pequenos ângulos é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \left(\frac{2zZe^2}{pv}\right)^2 \frac{1}{\theta^4} \quad .$$

6. Verifique explicitamente que o vetor ε dado pela equação (12.15) é uma constante de movimento. Usando a expressão (12.18) para a excentricidade ε, deduza então a relação:

$$\frac{Zze^2}{2Eb} = \tan\frac{\theta}{2}$$

entre o parâmetro de impacto e o ângulo de deflexão da partícula.

7. A fórmula de Rutherford (12.25) é válida para um centro de espalhamento fixo. É possível generalizar esta fórmula levando em consideração a massa finita M do centro espalhador. Introduzindo coordenadas relativas dos corpos em colisão e usando a sua massa reduzida, mostre que a fórmula generalizada é dada por:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2zZ}{mv^2}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^4\theta} \frac{\left\{\cos\theta + \left[1-\left(m/M\right)^2\operatorname{sen}^2\theta\right]^{1/2}\right\}^2}{\left[1-\left(m/M\right)^2\operatorname{sen}^2\theta\right]^{1/2}}$$

onde $m < M$ é a massa da partícula incidente.

8. Verifique, a partir da relação (12.30), o resultado (12.35) para o ângulo quadrático médio de espalhamento múltiplo.

9. Usando a distribuição de Maxwell de velocidades:

$$W(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

mostre que:

$$\left\langle v^3 \right\rangle = \int d^3 v\, v^3 W(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} .$$

10. Para elétrons em movimento rápido no plasma, o ângulo de corte $\theta_{\text{mín}}$ deve ser calculado de acordo com o princípio de incerteza da mecânica quântica, sendo dado por:

$$\theta_{\text{mín}} = \frac{\Delta p}{p} = \frac{\hbar}{Dp}$$

onde D é o raio de Debye. Parafraseando os argumentos apresentados na seção (12.4), mostre que neste caso a condutividade elétrica será dada por uma expressão análoga à equação (12.44), exceto que o argumento do logaritmo fica multiplicado pelo fator:

$$f = \frac{Ze^2}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{3kT}} .$$

13

RADIAÇÃO DE CARGAS ACELERADAS

Conforme vimos no capítulo 5, cargas elétricas aceleradas emitem radiação eletromagnética. Nos fenômenos de radiação que envolvem uma carga puntiforme móvel ou um pequeno número destas cargas, é útil expressar as características da radiação diretamente em termos da trajetória da carga e do seu movimento. Vamos enfatizar os aspectos relacionados com a radiação total emitida, a distribuição angular da radiação e o seu espectro de freqüência. Discutimos também os importantes efeitos associados com a radiação por partículas relativísticas.

13.1 OS CAMPOS DE RADIAÇÃO DE UMA CARGA PUNTIFORME

No capítulo 8, obtivemos os potenciais eletromagnéticos Φ e $\mathbf{A}$ produzidos por partículas carregadas em movimento arbitrário. [Veja as equações (8.6) e (8.7).] Os campos vetoriais podem ser calculados então usando as relações:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad ; \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad . \tag{13.1}$$

Tendo em vista o aparecimento de derivadas temporais de $\mathbf{A}$, e portanto da velocidade, é claro que os campos eletromagnéticos são funções não apenas da velocidade, mas também da aceleração das partículas. Podemos assim separar $\mathbf{E}$

e **B** em duas componentes, uma que contém somente a velocidade, a outra envolvendo a aceleração e que se anula quando a aceleração é zero:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_v + \mathbf{B}_a \quad ; \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_v + \mathbf{E}_a \quad . \tag{13.2}$$

Os campos de velocidade $\mathbf{B}_v$ e $\mathbf{E}_v$ têm a mesma forma que os campos (8.14) e (8.15), obtidos a partir dos potenciais de Liénard-Wiechert. Estes campos, que variam com a distância como $1/R^2$, não transportam a energia irradiada pelas cargas.

Por outro lado, vimos no capítulo 5 que os campos de radiação $\mathbf{E}_a$ e $\mathbf{B}_a$ são ortogonais, tendo a mesma magnitude e uma dependência radial 1/R. Comparando as equações (5.18.a) e (5.18.b) temos que:

$$\mathbf{E}_a = \mathbf{B}_a \times \left[\hat{\mathbf{n}}\right] \tag{13.3}$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor unitário orientado da posição [retardada] da carga ao ponto de observação (veja a figura 8.1). Então, conhecendo o campo magnético de radiação, o campo $\mathbf{E}_a$ pode ser calculado a partir desta relação.

Para encontrar a expressão do campo magnético $\mathbf{B}_a$, é conveniente considerar o potencial vetor na forma equivalente à equação (8.3), isto é:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{q}{c}\int \frac{\mathbf{v}(t')}{R(t')}\,\delta\left(t' + \frac{R(t')}{c} - t\right)dt' \tag{13.4}$$

onde $R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')|$. Nesta equação, a única dependência nas coordenadas espaciais do ponto **r** é através de R. Assim, o operador rotacional que aparece ao calcularmos o campo magnético pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \rightarrow \boldsymbol{\nabla} R \times \frac{\partial}{\partial R} = \hat{\mathbf{n}} \times \frac{\partial}{\partial R} \quad .$$

Conseqüentemente, levando em consideração que o campo magnético de radiação varia com a distância como $1/R$, teremos:

$$\mathbf{B}_a(\mathbf{r},t) = \frac{q}{c}\int \frac{\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{v}(t')}{R(t')}\frac{\partial}{\partial R}\,\delta\left[t' + \frac{R(t')}{c} - t\right]dt' \tag{13.5}$$

$$= \frac{q}{c^2}\int \frac{\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{v}(t')}{R(t')}\,\delta'\left[t' + \frac{R(t')}{c} - t\right]dt'$$

onde a linha na função delta significa diferenciação com respeito ao seu argumento. Usando a propriedade:

$$\frac{d}{dt'}\delta\left[t' + \frac{R(t')}{c} - t\right] = \frac{d}{dt'}\left(t' + \frac{R(t')}{c}\right)\delta'\left[t' + \frac{R(t')}{c} - t\right]$$

$$= K\,\delta'\left[t' + \frac{R(t')}{c} - t\right]$$

onde K é dado pela expressão (8.5), podemos integrar por partes o integrando na equação (13.5) obtendo:

$$\mathbf{B}_a(\mathbf{r},t) = -\frac{q}{c^2}\int dt'\frac{d}{dt'}\left[\frac{1}{K}\frac{\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{v}(t')}{R(t')}\right]\delta\left[t' + \frac{R(t')}{c} - t\right] . \tag{13.6}$$

Estamos agora na posição de poder aplicar a fórmula (8.4), onde $f(t') = t' + R(t')/c$. Lembrando a relação (8.5), encontramos:

$$\mathbf{B}_a(\mathbf{r},t) = -\frac{q}{c^2}\left[\frac{1}{K}\frac{d}{dt'}\left(\frac{\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{v}}{KR}\right)\right]_{\tilde{t}} \tag{13.7}$$

onde o índice $\tilde{t}$ significa que todas as quantidades devem ser avaliadas no tempo retardado $\tilde{t} = t - R(\tilde{t})/c$.

Ao efetuarmos a diferenciação temporal, notamos que:

$$\frac{d}{dt'}\hat{\mathbf{n}} = \frac{d}{dt'}\frac{\mathbf{R}}{R} = -\frac{\mathbf{v}}{R} - \frac{\mathbf{R}}{R^2}\frac{dR}{dt'} = -\frac{\mathbf{v}}{R} + \frac{\hat{\mathbf{n}}}{R}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{v})$$

onde usamos a relação (8.5). Portanto a diferenciação do vetor unitário $\hat{\mathbf{n}}$ produzirá na equação (13.7) termos de ordem $1/R^2$, que são irrelevantes para o nosso cálculo. Os termos relevantes para a radiação resultam da diferenciação:

$$\mathbf{B}_a(\mathbf{r},t) = -\frac{q}{c^2}\left[\frac{\hat{\mathbf{n}}}{KR}\times\frac{d}{dt'}\left(\frac{\mathbf{v}}{K}\right)\right]_{\tilde{t}} = \frac{q}{c^2}\left[\frac{\hat{\mathbf{n}}}{KR}\times\left\{\frac{\mathbf{v}}{K^2}\frac{dK}{dt'}-\frac{1}{K}\mathbf{a}\right\}\right]_{\tilde{t}} \tag{13.8}$$

onde $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt'$.

Tendo em vista a observação acima e usando novamente a relação (8.5), obtemos que o campo magnético de radiação é dado por:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_a(\mathbf{r},t) &= -\frac{q}{c^2}\left[\frac{\hat{\mathbf{n}}}{K^2R}\times\left(\frac{\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{a}}{cK}\mathbf{v}+\mathbf{a}\right)\right]_{\tilde{t}} \\ &= \frac{q}{c^2}\left[\frac{\hat{\mathbf{n}}}{K^3R}\times\left\{\left(\hat{\mathbf{n}}\cdot\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\mathbf{a}-\left(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{a}\right)\frac{\mathbf{v}}{c}-\mathbf{a}\right\}\right]_{\tilde{t}} .\end{aligned} \tag{13.9}$$

É conveniente reescrever esta relação com ajuda da identidade vetorial (A.2), na forma:

$$\mathbf{B}_a(\mathbf{r},t) = \frac{q}{c^2}\left[\frac{\hat{\mathbf{n}}}{K^3R}\times\left\{\hat{\mathbf{n}}\times\left(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{a}-\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{a}\right)\right\}\right]_{\tilde{t}} . \tag{13.10}$$

Substituindo este resultado na equação (13.3), vemos que o campo elétrico de radiação é dado pela expressão:

$$\mathbf{E}_a(\mathbf{r},t) = \frac{q}{c^2}\left[\frac{\hat{\mathbf{n}}}{K^3R}\times\left\{\left(\hat{\mathbf{n}}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\times\mathbf{a}\right\}\right]_{\tilde{t}} . \tag{13.11}$$

Portanto, $\mathbf{B}_a$ e $\mathbf{E}_a$ mostram um comportamento típico de campos de radiação.

13.2 RADIAÇÃO POR CARGAS COM VELOCIDADE E ACELERAÇÃO COLINEARES

Quando **v** e **a** são colineares, os campos de radiação, usando as expressões (13.10) e (13.11), serão simplesmente:

$$\mathbf{E}_a = \frac{q}{c^2 K^3 R}\left[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{a})\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{a}\right] \tag{13.12}$$

$$\mathbf{B}_a = \hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E} \tag{13.13}$$

onde estamos subentendendo que todas as quantidades relacionadas com a partícula devem ser avaliadas nos tempos retardados. Sendo θ o ângulo entre a aceleração e a direção do ponto de observação, teremos que:

$$E_a^2 = \frac{q^2}{c^4 K^6 R^2}\left[a^2 - (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{a})^2\right] = \frac{q^2 a^2}{c^4 K^6 R^2}\operatorname{sen}^2\theta \quad . \tag{13.14}$$

Conseqüentemente, o vetor de Poynting associado com a radiação será:

$$\mathbf{S}_a = \frac{q^2 a^2 \operatorname{sen}^2\theta}{4\pi c^3 K^6 R^2}\hat{\mathbf{n}} \quad . \tag{13.15}$$

Nesta equação, $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ é a energia por unidade de área por unidade de tempo detectada num ponto de observação e num instante t, e que corresponde à radiação emitida pela carga no instante $\tilde{t} = t - R(\tilde{t})/c$. Se quiséssemos calcular a energia irradiada durante um período finito de aceleração, digamos de $\tilde{t} = T_1$ até $\tilde{t} = T_2$, escreveríamos:

$$U = \int_{t=T_1+R(T_1)/c}^{t=T_2+R(T_2)/c} \left[\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right]_{\tilde{t}}\, dt = \int_{\tilde{t}=T_1}^{\tilde{t}=T_2} (\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}})\frac{dt}{d\tilde{t}}\, d\tilde{t} \quad . \tag{13.16}$$

Vemos, então, que a grandeza útil e significativa é: $(\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}})\ dt/d\tilde{t}$, isto é, a potência irradiada por unidade de área em termos do tempo no referencial da carga. Por isso, definimos potência irradiada por unidade de ângulo sólido como:

$$\frac{dP(\tilde{t})}{d\Omega} = R^2(\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}})\frac{dt}{d\tilde{t}} = R^2(\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}})(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}) \quad . \tag{13.17}$$

Com a equação (13.15) para o vetor de Poynting, a distribuição angular da energia irradiada é:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2a^2\,\mathrm{sen}^2\theta}{4\pi c^3K^5} = \frac{q^2a^2\,\mathrm{sen}^2\theta}{4\pi c^3(1-\beta\cos\theta)^5} \quad . \tag{13.18}$$

Podemos notar o efeito relativístico que provém da transformação do referencial de repouso da partícula para o referencial do observador, manifestado pelo fator $(1-\beta\cos\theta)^5$ no denominador de (13.18). No limite relativístico, a distribuição angular é aumentada na direção frontal, conforme indicado na figura 13.1. Note que não há radiação na direção $\theta = 0$.

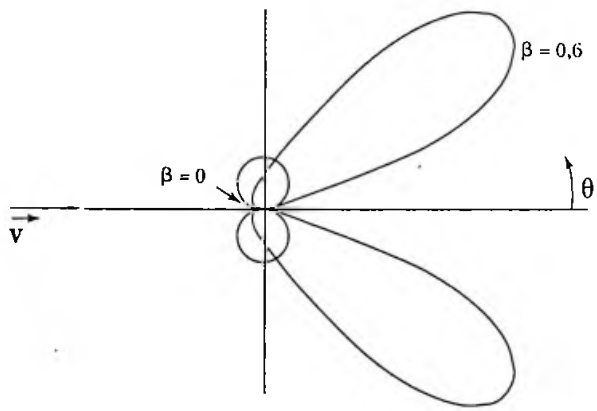


Figura 13.1

Uma aplicação interessante destes resultados é o cálculo da radiação emitida por um elétron desacelerado por um bloco de matéria, supondo que a direção de movimento permanece inalterada. Este fenômeno de radiação é conhecido com o nome de *bremsstrahlung*. A freqüência do espectro emitido pode ser obtida pela análise de Fourier do campo de radiação. Vamos supor por simplicidade que a mudança Δv na velocidade ocorre durante um curto intervalo de tempo $\Delta t'$, e que $v \ll c$. Se a radiação ocorre no tempo t_0, o campo elétrico durante este intervalo de tempo pode ser escrito como:

$$E(t) = \frac{e \operatorname{sen}\theta}{c^2 R} \frac{\Delta v}{\Delta t'} = \frac{e \operatorname{sen}\theta}{c^2 R} \Delta v \, \delta(t - t_0) \tag{13.19}$$

onde usamos que:

$$\dot{v} = \delta(t - t_0)\Delta v \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}\, dt = \Delta v \quad .$$

Escrevendo:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_\omega e^{-i\omega t}\, d\omega$$

teremos então para a transformada de Fourier E_ω:

$$E_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{i\omega t}\, dt = \frac{e \operatorname{sen}\theta}{2\pi c^2 R} \Delta v \, e^{i\omega t_0} \quad . \tag{13.20}$$

A energia total emitida é obtida integrando o vetor de Poynting sobre a superfície de uma esfera no intervalo de tempo quando ocorre a radiação. Assim:

$$U = \int \frac{dU}{dt'} dt' = \frac{c}{4\pi} \int dS \int_{-\infty}^{+\infty} E^2 dt \quad . \tag{13.21}$$

A freqüência da radiação emitida, correspondente ao campo cuja transformada de Fourier é E_ω, pode ser obtida usando o teorema de Parseval (8.22):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E^2 dt = 4\pi \int_0^{\infty} |E_\omega|^2 \, d\omega \quad . \tag{13.22}$$

Portanto, a energia emitida no intervalo de freqüência $d\omega$ será:

$$U_\omega d\omega = c \int_S |E_\omega|^2 dS \, d\omega = \frac{4e^2}{3c} \left(\frac{\Delta v}{c} \right)^2 \frac{d\omega}{2\pi} \quad . \tag{13.23}$$

Esta equação indica que o espectro de radiação é constante, sendo independente da freqüência. Na verdade, num caso mais realístico, o espectro será limitado no ponto onde a energia cinética do elétron é equivalente a um quantum de radiação:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \hbar\omega_{máx} \tag{13.24}$$

conforme indica a figura 13.2. Usando a hipótese de Planck, (13.23) pode ser

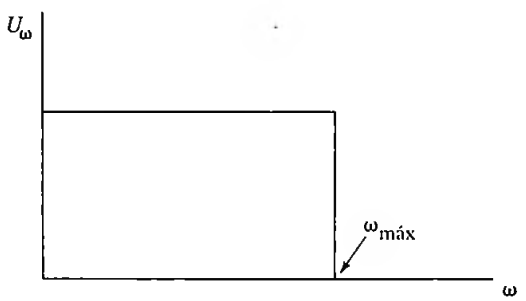


Figura 13.2

expressa em termos do número de fótons dN_ω emitidos durante o processo de aceleração, onde $dN_\omega\hbar\omega = U_\omega\, d\omega$. Desta forma, obteremos que:

$$dN_\omega = \frac{e^2}{\hbar c}\frac{2}{3\pi}\left(\frac{\Delta v}{c}\right)^2\frac{d\omega}{\omega} \simeq \frac{1}{137}\frac{2}{3\pi}\left(\frac{\Delta v}{c}\right)^2\frac{d\omega}{\omega} \tag{13.25}$$

Portanto, o número de fótons emitidos com freqüência $\omega \to 0$ tenderá a infinito, embora a energia total irradiada seja finita.

13.3 RADIAÇÃO POR UMA PARTÍCULA NUMA ÓRBITA CIRCULAR; RADIAÇÃO DE SÍNCROTRON

Como um segundo exemplo importante, vamos considerar uma partícula carregada que se move com velocidade angular uniforme numa órbita circular. Este movimento produz a chamada radiação de síncrotron, que é relevante na operação de síncrotrons e outros aceleradores de partículas. Quando a aceleração

a aponta para o centro da órbita circular, ela será portanto perpendicular à velocidade **v** da partícula. Sendo ρ o raio da órbita circular e ω_0 a freqüência angular, temos então as relações:

$$v = \rho\,\omega_0 \qquad ; \qquad a = \rho\,\omega_0^2 \quad . \tag{13.26}$$

Visto que neste problema não temos simetria em torno da direção de movimento, devemos introduzir o ângulo azimutal ϕ conforme a figura 13.3, onde a órbita se situa no plano $x_2 - x_3$. Da figura, podemos obter as seguintes relações

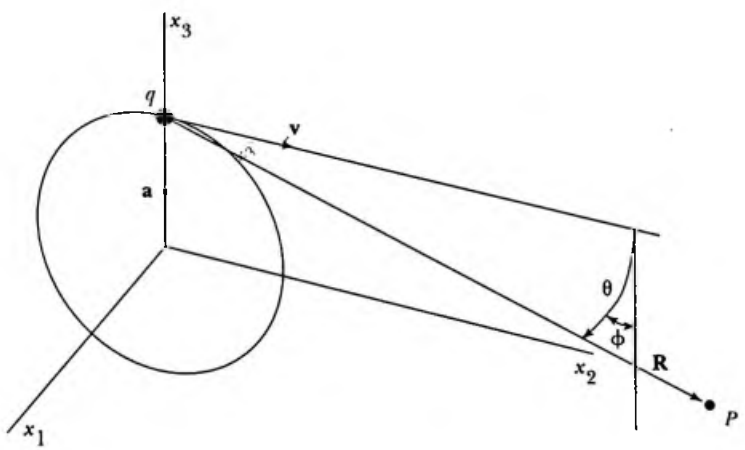


Figura 13.3

cinemáticas:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta} = \beta \cos\theta \qquad , \qquad \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a} = a\,\mathrm{sen}\,\theta \cos\phi \quad . \tag{13.27}$$

onde $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$. Usando a equação (13.11), podemos escrever que:

$$\mathbf{E}_a = \frac{q}{c^2 K^3 R}\hat{\mathbf{n}} \times \left(\mathbf{b} \times \mathbf{a}\right) \tag{13.28}$$

com $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}$.

Para calcularmos a radiação, devemos considerar E_a^2. Assim, devemos primeiramente calcular:

$$\left|\hat{\mathbf{n}}\times\left(\mathbf{b}\times\mathbf{a}\right)\right|^2 = \left(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{a}\right)^2 b^2 - 2\left(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{a}\right)\left(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{b}\right)\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\right) + \left(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{b}\right)^2 a^2 \quad . \tag{13.29}$$

Usando as relações cinemáticas (13.27), encontramos que:

$$b^2 = 1 - 2\beta\cos\theta + \beta^2 \quad ; \quad \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{b} = 1 - \beta\cos\theta \quad ;$$
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \quad . \tag{13.30}$$

Substituindo estes valores na equação (13.29), obteremos:

$$\left|\hat{\mathbf{n}}\times\left(\mathbf{b}\times\mathbf{a}\right)\right|^2 = a^2\left[\left(1-\beta\cos\theta\right)^2 - \left(1-\beta^2\right)\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\phi\right] \quad . \tag{13.31}$$

Conseqüentemente, achamos para E_a^2 a expressão:

$$E_a^2 = \frac{q^2a^2}{c^4K^6R^2}\left[\left(1-\beta\cos\theta\right)^2 - \left(1-\beta^2\right)\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\phi\right] \tag{13.32}$$

onde $K = (1 - \beta\cos\theta)$.

Para calcularmos a distribuição angular da energia irradiada, usaremos a relação (13.17), obtendo assim:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2a^2}{4\pi c^3}\frac{\left(1-\beta\cos\theta\right)^2 - \left(1-\beta^2\right)\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\phi}{\left(1-\beta\cos\theta\right)^5} \tag{13.33}$$

Quando $\beta \to 1$, a radiação tem um pico frontal pronunciado, e um lóbulo de menor intensidade na direção oposta. A figura 13.4 mostra a configuração da radiação no plano da órbita ($\phi = 0$), que se anula na direção $\theta = \arccos(\beta)$.

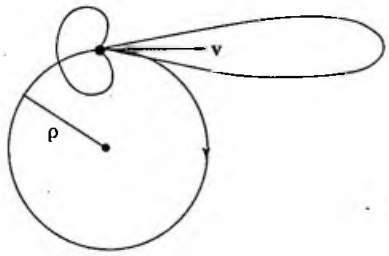


Figura 13.4

A potência total irradiada pela carga é [ver problema 13.5]:

$$P = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{2q^2a^2}{3c^3} \frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^2} \tag{13.34}$$

ou, em termos do raio ρ da órbita:

$$P = \frac{2q^2\rho^2\omega_0^4}{3c^3} \frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^2} \tag{13.35}$$

Vemos que esta expressão aumenta rapidamente quando $\beta \to 1$, de maneira que cargas relativísticas confinadas numa órbita circular irão irradiar uma grande parte das suas energias.

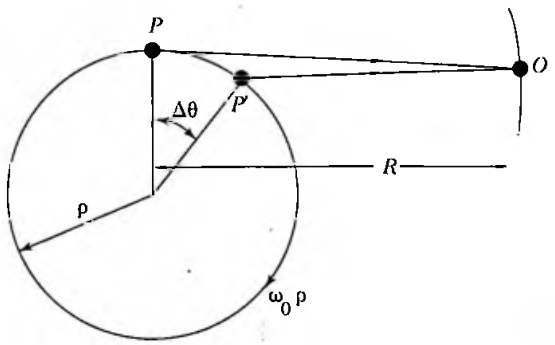


Figura 13.5

Vamos considerar agora a distribuição espectral da radiação emitida, discutindo qualitativamente as características do espectro associado com partículas relativísticas ($\gamma \gg 1$). Esta radiação é denominada radiação de síncrotron, tendo sido observada pela primeira vez em 1948 nos síncrotrons de elétrons.

Considere um observador que recebe um pulso de radiação, enquanto que a carga se move através de um ângulo $\Delta\theta$, conforme indica a fig. 13.5. O pulso é emitido durante o intervalo de tempo $\Delta\tilde{t} = \Delta\theta/\omega_0$, mas é recebido no intervalo de tempo:

$$\Delta t = \frac{dt}{d\tilde{t}}\Delta\tilde{t} \simeq (1-\beta)\frac{\Delta\theta}{\omega_0} \simeq \frac{\Delta\theta}{2\omega_0\gamma^2} \tag{13.36}$$

se $\gamma \gg 1$. O intervalo angular $\Delta\theta$ sobre o qual a radiação alcança o observador é da ordem $\Delta\theta \sim 1/\gamma$. Isto pode ser visto considerando o fator $1 - \beta\cos\theta$ no denominador da equação (13.33). Se $\gamma \gg 1$, este fator pode ser aproximado por:

$$1-\beta\cos\theta \approx \frac{1}{2}(1-\beta)(1+\beta) + \frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right) \tag{13.37}$$

Assim, a largura da distribuição angular da radiação é da ordem de γ^{-1}, de modo que a duração do pulso que alcança o observador será da ordem:

$$\Delta t \sim \frac{1}{\omega_0\gamma^3} \tag{13.38}$$

Devido ao caráter periódico do movimento da carga, este pulso será repetido com intervalos $T = 2\pi/\omega_0 \simeq 2\pi\rho/c$. A dependência temporal da potência recebida é ilustrada qualitativamente na figura 13.6. Escolhendo a origem do tempo no centro de um pico, podemos expressar a potência recebida por unidade de ângulo sólido como uma série de Fourier:

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \sum_n A_n \cos(n\omega_0 t) \tag{13.39.a}$$

onde $\omega_0 = c/\rho$, sendo A_n dado por

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{dP(t)}{d\Omega}\cos(n\omega_0 t)\,dt \quad . \tag{13.39.b}$$

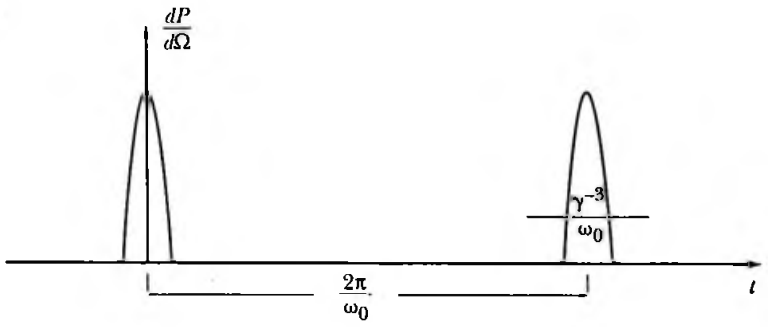


Figura 13.6

Para termos com $n\omega_0\,\Delta t \ll 1$, o cosseno é praticamente igual a 1. Assim, de acordo com a relação anterior, os coeficientes de Fourier A_n com $n < \gamma^3$ serão mais ou menos iguais. Por outro lado, se n aumenta de maneira que $n\omega_0\,\Delta t = n/\gamma^3 \gg 1$, então o cosseno começa a oscilar dentro do pulso de modo que as integrais se tornam rapidamente decrescentes. Concluímos que os harmônicos até a ordem γ^3 ocorrem no espectro da potência com intensidade aproximadamente igual, como está indicado na figura 13.7.

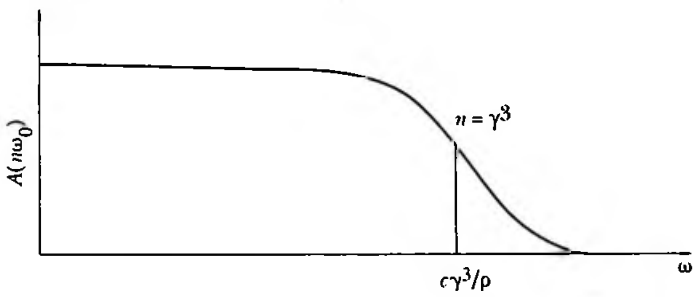


Figura 13.7

Para obter resultados quantitativos, devemos realmente analisar em série de Fourier os campos de radiação. O cálculo exato é muito complicado, mas a expressão final mostra um espectro de potência qualitativamente similar ao indicado na figura 13.7. Para elétrons com energia 1GeV = 10^3 MeV, movendo-se num sín-

crotron de raio de 5 m, $\gamma = 2 \cdot 10^3$ e $\omega_0/2\pi = 10^7$ Hz. O espectro se estende além de 10^{17} Hz, dentro da região dos raios-X.

A radiação de síncrotron é observada também nos domínios astronômicos, associada à nebulosa do Caranguejo. Observações detalhadas permitem concluir que a radiação de síncrotron está sendo emitida por elétrons com energias da ordem de 10^6 MeV, que se movem em órbitas circulares ou helicoidais, numa indução magnética da ordem 10^{-4} gauss. Estes elétrons terão então uma freqüência orbital:

$$\omega_0 = \frac{eB}{mc\gamma} = 9 \cdot 10^{-4}/\text{s}$$

mas a radiação de síncrotron correspondente terá freqüências da ordem de até $\omega_c = \gamma^3 \omega_0 \simeq 7 \cdot 10^{15}/\text{s}$. Assim, o espectro da radiação da nebulosa de Caranguejo estende-se sobre uma faixa de freqüência que vai das radiofreqüências até o ultravioleta.

13.4 A FÓRMULA DE LARMOR E SUA GENERALIZAÇÃO RELATIVÍSTICA

Se a velocidade da partícula é suficientemente pequena para que seja desprezada em comparação com c, então $K \to 1$ e o campo de aceleração (13.11) torna-se:

$$\mathbf{E}_a = \frac{q}{c^2}\left[\frac{\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{a})}{R}\right]_{\text{ret}} . \tag{13.40}$$

A parcela do vetor de Poynting que contribui para a radiação é:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}_a \times \mathbf{B}_a = \frac{c}{4\pi}|\mathbf{E}_a|^2 \hat{\mathbf{n}} . \tag{13.41}$$

Portanto, a potência irradiada por unidade de ângulo sólido será:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}|R\,\mathbf{E}_a|^2 = \frac{q^2}{4\pi c^3} a^2 \operatorname{sen}^2\Theta \tag{13.42}$$

onde Θ é o ângulo entre a aceleração e o vetor $\hat{\mathbf{n}}$, conforme mostra a figura 13.8.

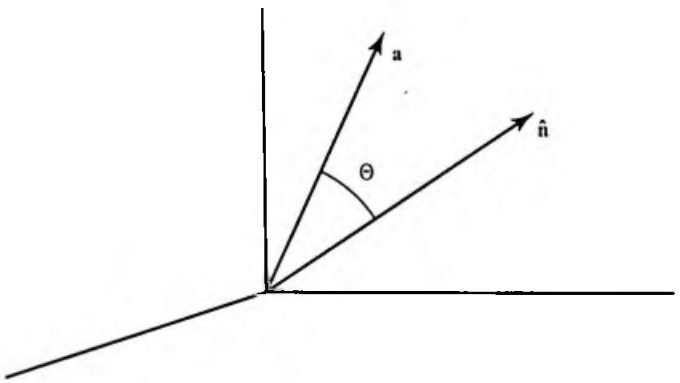


Figura 13.8

Esta distribuição angular em $\text{sen}^2\Theta$ da potência irradiada é um resultado característico. A potência total irradiada é obtida integrando (13.42) sobre todo o ângulo sólido. Obtemos assim:

$$P = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}a^2 \quad . \tag{13.43}$$

Esta é a fórmula obtida por Larmor em 1897, para a potência total irradiada por uma carga acelerada não-relativística.

Podemos generalizar este resultado para qualquer velocidade da partícula, estudando as propriedades da potência total irradiada $P = dE/dt$, sob as transformações de Lorentz. Com esta finalidade, notemos que, no sistema de repouso da partícula, a taxa de variação do seu momento devido à emissão da radiação é:

$$-\frac{d\mathbf{p}}{dt} = R^2 c \int \mathbf{g}\, d\Omega = \frac{R^2}{c}\int \mathbf{S}\, d\Omega = 0 \tag{13.44}$$

onde usamos a relação (4.43) para a densidade do momento do campo g e a expressão (13.41) para o vetor de Poynting. Este resultado mostra que, em virtude do cancelamento dos momentos emitidos em direções opostas, o momento total irradiado no sistema próprio da partícula é zero. Assim, usando a fórmula de transformação (9.33) para a energia, podemos escrever:

$$E = \frac{E'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad .$$

Então, com o auxílio da equação (9.21), obtemos a importante relação:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{dE'}{dt\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{dE'}{dt'} \tag{13.45}$$

que mostra ser P um invariante de Lorentz. Se pudermos encontrar um invariante de Lorentz que se reduza à fórmula de Larmor (13.43) quando $v \ll c$, teremos então a expressão geral para a potência total irradiada.

Para achar a generalização apropriada, escreveremos a fórmula de Larmor na forma sugestiva:

$$P = \frac{2}{3}\frac{q^2}{m^2c^3}\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right) \tag{13.46}$$

onde m é a massa da partícula e $\mathbf{p}$ é o seu momento. A generalização invariante de Lorentz é:

$$P = \frac{2}{3}\frac{q^2}{m^2c^3}\left(\frac{dp_\mu}{d\tau}\frac{dp_\mu}{d\tau}\right) \tag{13.47}$$

onde p_μ é o quadrimomento da partícula e $d\tau = dt/\gamma$ é o seu elemento de tempo próprio. Para verificar isso, vamos analisar a quarta componente do produto escalar em (13.47), por meio das relações (9.40) e (9.43):

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2}\mathbf{v} \quad ; \quad E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

Teremos que:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{dE}{d\tau}\right)^2 = \frac{p^2c^2}{E^2}\left(\frac{dp}{d\tau}\right)^2 = \frac{v^2}{c^2}\left(\frac{dp}{d\tau}\right)^2 \quad . \tag{13.48}$$

Substituindo este resultado em (13.47), obtemos:

$$P = \frac{2}{3}\frac{q^2}{m^2c^3}\gamma^2\left[\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)^2 - \frac{v^2}{c^2}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2\right] \quad . \tag{13.49}$$

Como este resultado se reduz a (13.46) no limite $v \ll c$, segue-se então que (13.49) representa a expressão geral para a potência total irradiada.

Uma área em que esta expressão relativística se aplica é a dos aceleradores de partículas carregadas. Para uma dada força aplicada (isto é, uma dada taxa de variação de momento), a potência irradiada (13.49) depende do inverso do quadrado da massa da partícula irradiante. Por isso, estes efeitos radiativos são maiores para os elétrons.

Num acelerador linear, o movimento é unidimensional. Da equação (13.49), é evidente que neste caso a potência irradiada é:

$$P = \frac{2}{3}\frac{q^2}{m^2c^3}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 \quad . \tag{13.50}$$

Vemos que esta potência não depende da energia da partícula. Por outro lado, nos aceleradores circulares o momento $\mathbf{p}$ varia rapidamente de direção à medida que a partícula descreve a sua órbita, mas a variação da energia por volta é pequena. Tendo em vista a equação (13.48), isto implica que:

$$\left|\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right| = \omega_0|\mathbf{p}| \gg \frac{1}{c}\frac{dE}{dt} = \frac{v}{c}\frac{dp}{dt} \quad . \tag{13.51}$$

Então, podemos escrever aproximadamente a potência irradiada (13.49) como:

$$P = \frac{2}{3}\frac{q^2}{m^2c^3}\gamma^2\omega_0^2p^2 = \frac{2}{3}\frac{q^2}{\rho^2c^3}v^4\gamma^4 \tag{13.52}$$

onde usamos que $\omega_0 = v/\rho$, sendo ρ o raio da órbita. É claro que, à medida que a velocidade aumenta, a energia irradiada vai aumentar tão rapidamente quanto aquela fornecida pelo acelerador. Assim, existe um limite prático para a energia dos elétrons que pode ser obtida em aceleradores circulares, que é da ordem de 10 GeV.

13.5 RADIAÇÃO DE FRENAGEM NAS COLISÕES COULOMBIANAS

Para energias médias e altas do elétron num meio material, a sua desaceleração deve-se principalmente à deflexão sofrida no campo coulombiano do núcleo. Esta desaceleração será acompanhada por radiação em forma de raios-X. Vamos considerar aqui um cálculo simples para o *bremsstrahlung* relativístico, envolvendo somente a aceleração transversal, que contém as características físicas essenciais de um tratamento mais completo.

Considere um elétron com velocidade v passando por um núcleo com carga Ze, com parâmetro de impacto b. Se b não for muito pequeno, o ângulo de deflexão de elétrons energéticos será pequeno, visto que a energia cinética será grande em comparação com a sua energia potencial. Neste caso, será uma boa aproximação considerar a trajetória do elétron como sendo um movimento retilíneo, conforme mostra a figura 13.9.

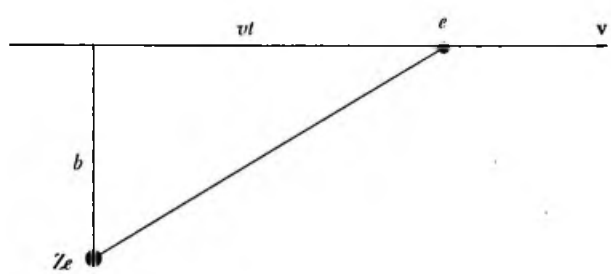


Figura 13.9

Tomando a origem do tempo $t = 0$ no instante em que a distância entre o elétron é b, a magnitude da força como uma função de tempo será:

$$eE(t) = \frac{Ze^2}{b^2 + v^2t^2} \quad . \tag{13.53}$$

Desta forma, a componente transversal à velocidade do campo elétrico é:

$$E_{\perp}(t) = \frac{Zeb}{\left(b^2 + v^2t^2\right)^{3/2}} \quad . \tag{13.54}$$

A equação (13.34), juntamente com a expressão correspondente para a aceleração (veja o problema 11.2), dá para a potência total irradiada o resultado:

$$P = \frac{2e^2\gamma^4}{3c^3}\left(\frac{E_{\perp}e}{m\gamma}\right)^2 = \frac{2Z^2e^6}{3m^2c^3}\gamma^2\frac{b^2}{\left(b^2 + v^2t^2\right)^3} \quad . \tag{13.55}$$

Integrando P com respeito ao tempo de trânsito obtemos a energia total emitida por radiação pelo elétron relativístico:

$$\Delta E = \frac{2Z^2e^6}{3m^2c^3}\gamma^2b^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\left(b^2 + v^2t^2\right)^3} \quad .$$

Temos obviamente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\left(1 + v^2t^2/b^2\right)^3} = 2\int_0^{\infty}\frac{dt}{\left(1 + v^2t^2/b^2\right)^3} = \frac{3}{8}\frac{\pi b}{v}$$

de forma que:

$$\Delta E = \frac{\pi}{4}\frac{Z^2e^6}{m^2c^3v}\frac{\gamma^2}{b^3} \quad . \tag{13.56}$$

A magnitude da energia irradiada aumenta rapidamente com o número atômico Z da matéria onde ocorre o movimento do elétron. A expressão (13.56) mostra que esta energia também aumenta rapidamente com a diminuição do parâmetro de impacto b.

Na prática, a partícula pode passar pelo núcleo a qualquer distância. Multiplicando (13.56) por $2\pi b\, db\, n$, onde n é a densidade de partículas no feixe

incidente e integrando sobre todos os valores de b, encontramos a energia efetiva irradiada pelo feixe de elétrons:

$$E_{\text{ef}} = \frac{\pi^2}{2}\frac{Z^2e^6}{m^2c^3v}n\gamma^2\int_{b_{\text{min}}}^{\infty}\frac{db}{b^2} = \frac{\pi^2}{2}\frac{Z^2e^6}{m^2c^3v}\frac{n\gamma^2}{b_{\text{mín}}} \tag{13.57}$$

Pode ser mostrado na mecânica quântica que a distância mínima $b_{\text{mín}}$ é da ordem $\hbar\gamma/mv$, de modo que:

$$E_{\text{ef}} = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\frac{nZ^2e^4}{mc^2}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{13.58}$$

onde $e^2/\hbar c \simeq 1/137$ é a constante de estrutura fina. Esta expressão permite calcular a perda de energia devida ao *bremsstrahlung* quando elétrons muito rápidos passam através da matéria. Comparando (13.58) com a fórmula (12.9) para a perda de energia por ionização, vemos que a radiação de frenagem é a causa principal que determina a desaceleração de elétrons relativísticos na matéria.

PROBLEMAS

1. A partir da equação (13.18), mostre que para uma partícula com **a** e **v** colineares, o máximo da radiação emitida ocorre para o ângulo

$$\theta_{\text{máx}} = \arccos\left[\frac{\sqrt{1+15\beta^2}-1}{3\beta}\right]$$

Usando o fato de que $(1-\beta)$ é uma quantidade pequena, mostre que $\theta_{\text{máx}} \to 1/2\gamma$, se $\beta \to 1$.

2. Integrando a equação (13.18), mostre que a potência total irradiada por uma carga com velocidade e aceleração colineares é:

$$P = \frac{2q^2a^2}{3c^3}\frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^3} \quad .$$

3. Um feixe de elétrons com velocidade inicial v_0 é uniformente desacelerado num material, até parar. Determine a distribuição angular da energia total irradiada durante o processo de desaceleração. Usando o resultado do problema anterior, calcule também a energia total irradiada.

4. Uma carga q movimenta-se com movimento harmônico simples ao longo do eixo z: $z(t') = b\cos(\omega_0 t')$.

   (a) Mostre que a potência instantânea irradiada pela carga por unidade de ângulo sólido é:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2c\beta^4}{4\pi b^2}\frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2(\omega_0 t')}{\left(1+\beta\cos\theta\operatorname{sen}\omega_0 t'\right)^5}$$

   onde $\beta = b\omega_0/c$.

   (b) Mediante uma mediação sobre o tempo, mostre que a potência média por unidade de ângulo sólido é:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2c\beta^4}{32\pi b^2}\left[\frac{4+\beta^2\cos^2\theta}{\left(1-\beta^2\cos^2\theta\right)^{7/2}}\right]\operatorname{sen}^2\theta \quad .$$

5. A partir da equação (13.33), verifique a expressão (13.34) para a potência total irradiada por uma carga em movimento numa órbita circular.

6. Use a equação (13.35) para mostrar que a energia perdida, por revolução, por um elétron numa órbita circular pode ser escrita para $\beta \to 1$ como:

$$\Delta T \simeq \int \frac{T^4}{\rho} \qquad \text{onde} \qquad T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - mc^2 \quad .$$

Determine $\int$ se ΔT e T são medidos em MeV e ρ em metros. [1MeV = 10^6 eV = $10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ erg = $1{,}6 \cdot 10^{-6}$erg]. Qual é o resultado para um síncrotron de elétrons onde $T = 10^4$ MeV e $\rho = 100$m?

7. A figura 13.4 mostra um exemplo da configuração da radiação no plano da órbita circular. Investigue a forma tridimensional desta configuração.

8. Um modelo simples do átomo de hidrogênio considera o elétron movendo-se numa órbita estacionária em torno do próton. Se o raio da órbita é $0{,}53 \cdot 10^{-8}$ cm, mostre que, baseado na teoria clássica, o elétron irradiaria energia a uma taxa de 0,46erg/seg, de forma que o átomo iria rapidamente entrar em colapso.

9. Um elétron de baixa energia tem uma velocidade $v_0 \ll c$ no infinito. A velocidade $\mathbf{v}_0$ é na direção de um campo fixo e repulsivo de Coulomb, cuja energia potencial é dada por:

$$U(r) = Ze^2/r$$

O elétron é desacelerado até parar e em seguida acelerado novamente na direção oposta à direção original do movimento. Mostre que, ao chegar de novo numa distância infinita do centro coulombiano, a energia cinética do elétron será aproximadamente:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\left(1 - \frac{16v_0^3}{45Zc^3}\right)$$

onde o termo dependente de v_0^5 representa a energia irradiada durante os processos de aceleração e desaceleração.
[Sugestão: Use a conservação da energia e despreze os efeitos da reação de radiação sobre o movimento do elétron.]

10. (a) O acelerador linear de Stanford acelera elétrons para uma energia final de 40 GeV. Esta aceleração é feita ao longo de um caminho de 3.000 metros. Qual é a potência irradiada pelo elétron? Compare este resultado com o valor da potência fornecida pelo acelerador ao elétron.

    (b) Um elétron com energia de 40GeV está-se movendo numa órbita circular de raio de 30m. Calcule a potência irradiada neste caso pelo elétron.

11. A partir da expressão (13.47), e sendo que $E = \gamma mc^2$; $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$, mostre que a potência total irradiada por uma carga pode ser escrita na forma:

$$P = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\gamma^6\left[(\mathbf{a})^2 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{a}\right)^2\right] .$$

    Este resultado foi obtido por Liénard em 1898.

12. Use a expressão (13.58) para calcular a perda de energia por radiação de frenagem, para elétrons com energias de 100 MeV no ar e de 10 MeV no chumbo.

14

DISPERSÃO, ESPALHAMENTO E REAÇÃO DA RADIAÇÃO

Vimos no capítulo anterior que uma carga acelerada perde energia devido à emissão da radiação eletromagnética. Ao estudarmos o balanceamento da energia de uma partícula que se move sob a influência de forças externas, é necessário levar em consideração as perdas por radiação. Vimos que o campo de radiação possui não apenas energia, mas também momento. Em virtude deste fato, a emissão da radiação é acompanhada por uma força de reação do campo sobre a partícula. A ação do campo de radiação sobre o movimento da partícula é chamada reação de radiação. Na maioria dos casos, estes efeitos radiativos têm importância muito pequena e podem ser desprezados. Entretanto, veremos que em certas situações, a reação de radiação tem efeitos observáveis em fenômenos relacionados com o espalhamento e a dispersão de ondas eletromagnéticas.

14.1 FORÇA DE REAÇÃO RADIATIVA

Para determinar a forma desta força, usaremos o princípio da conservação de energia. Por simplicidade, vamos limitar a nossa análise ao caso não-relativístico. A inclusão de efeitos relativísticos é discutida no problema 14.1. De acordo com a fórmula de Larmor (13.43), a energia irradiada por unidade de tempo por uma carga e que se move com velocidade $v \ll c$ e que experimenta uma aceleração $a = \dot{v}$ é:

$$P = \frac{2e^2a^2}{3c^3} = \frac{2e^2\dot{v}^2}{3c^3} \quad .$$

Portanto, para conservar a energia, a equação newtoniana que descreve o movimento da partícula sob a influência de uma força conservativa externa **F**:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} \tag{14.1}$$

deve ser modificada pela adição de uma força reativa $\mathbf{F}_r$, que descreve a reação do campo de radiação sobre a partícula. Assim:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_r \quad . \tag{14.2}$$

Vamos supor que a força reativa $\mathbf{F}_r$ seja pequena em comparação com as forças externas. O significado desta hipótese será discutido em seguida. Esta força de reação deve satisfazer a relação:

$$\mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v} = -\frac{2e^2}{3c^3}\dot{\mathbf{v}}^2 = -\frac{2e^2}{3c^3}\dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} \quad . \tag{14.3}$$

onde o lado direito representa o negativo da potência irradiada pela partícula. Em geral, **v** e $\dot{\mathbf{v}}$ são independentes, de maneira que não é possível encontrar uma função $\mathbf{F}_r$ que satisfaça esta equação em todos os instantes do tempo. Contudo, integrando (14.3) sobre um curto intervalo de tempo, podemos obter uma solução que assegure um balanceamento médio da energia:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v}\, dt = -\frac{2e^2}{3c^3}\int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}}\, dt \quad .$$

ntegrando o lado direito por partes, temos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v}\, dt = -\frac{2e^2}{3c^3}\left[\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}\right]_{t_1}^{t_2} + \frac{2e^2}{3c^3}\int_{t_1}^{t_2} \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}\, dt \quad . \tag{14.4}$$

Se considerarmos o intervalo de tempo $t_2 - t_1$ como sendo pequeno, ou se o movimento do sistema for periódico, então o estado do sistema nos tempos t_1 e t_2 será aproximadamente o mesmo (supomos que a perda de energia por radiação

é pequena comparada com a energia total da partícula). Nestes casos, podemos desprezar o primeiro termo no lado direito da equação (14.4), e escrever aproximadamente:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\mathbf{F}_r - \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}\right)\cdot \mathbf{v}\, dt = 0 \quad .$$

Assim, é possível identificar a força da reação radiativa como:

$$\mathbf{F}_r = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\mathbf{v}} \quad . \tag{14.5}$$

A equação de movimento (14.2) fica então:

$$m\left(\dot{\mathbf{v}} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3 m}\ddot{\mathbf{v}}\right) = \mathbf{F} \quad . \tag{14.6}$$

De acordo com a hipótese feita, a força de radiação $\mathbf{F}_r$ é pequena em comparação com a força externa que atua sobre a partícula. Se isto não fosse assim, por exemplo, se o caso oposto $F_r \gg F$ ocorresse, então a equação de movimento teria a forma:

$$m\dot{v} \approx F_r = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{v}$$

cuja solução é:

$$v = a_0 \exp\frac{3mc^3}{2e^2}t \quad .$$

Esta fórmula mostra que sob a ação da reação da radiação a aceleração aumentaria exponencialmente com o tempo, sendo a partícula auto-acelerada. Este comportamento contradiz a realidade experimental.

Portanto, somente a hipótese de que $F_r \ll F$ leva a um resultado que faz sentido físico. Neste caso, a aceleração $\dot{\mathbf{v}}$ em (14.6) representa essencialmente a aceleração da partícula no campo externo.

Se o movimento for periódico no tempo, com uma freqüência ω, podemos escrever a seguinte expressão para F_r:

$$F_r = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}|\ddot{v}| = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left|\frac{\dot{F}}{m}\right| = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{\omega}{m}F \quad . \tag{14.7}$$

Portanto, a condição de aplicabilidade da expressão (14.7) para a reação de radiação $F_r \ll F$ assume a forma:

$$e^2\omega/mc^3 \ll 1 \quad .$$

A violação desta desigualdade significa que a reação de radiação não é pequena, levando a resultados incorretos do ponto de vista físico. A teoria clássica do campo eletromagnético somente leva a resultados em concordância com os dados experimentais para freqüências:

$$\omega \ll mc^3/e^2 \quad . \tag{14.8}$$

Se m representar a massa do elétron, então a condição (14.8) é satisfeita para toda a região ótica e de raios-X. É interessante escrever esta desigualdade em termos do comprimento de onda $\lambda = 2\pi c/\omega$. Então, em lugar de (14.8) teremos:

$$\lambda \gg \frac{e^2}{mc^2} = r_0 \quad \surd \tag{14.9}$$

onde $r_0 \approx 2{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm é o raio clássico do elétron. Portanto, a eletrodinâmica clássica é apropriada para a descrição de fenômenos que ocorrem em regiões espaciais cuja dimensão é muito maior que o raio clássico do elétron. Introduzindo o tempo característico:

$$\tau_c = \frac{2}{3}\frac{r_0}{c} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3} \simeq 6{,}3 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{s} \tag{14.10}$$

podemos escrever a equação de movimento (14.6) na forma:

$$m\left(\dot{\mathbf{v}} - \tau_c \ddot{\mathbf{v}}\right) = \mathbf{F} \quad . \tag{14.11}$$

Vamos ilustrar agora o uso desta equação na explicação de efeitos radiativos pequenos. Consideremos o movimento de uma partícula num campo de força central, conservativo e atrativo: $\mathbf{F} = -F\hat{\mathbf{r}}$. Tomando o produto vetorial nos dois lados desta equação com o raio vetor $\mathbf{r}$, obtemos:

$$\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = m\tau_c \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{v}} = \tau_c \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}}\right) - m\tau_c \mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}} \quad .$$

Cada um dos fatores $m\dot{\mathbf{v}}$ no lado direito pode ser substituído por $\mathbf{F}$, visto que estes diferem de $\mathbf{F}$ apenas por $m\tau_c\dot{\mathbf{v}}$, sendo assim a correção proporcional a $\tau_c^2 \sim 4 \cdot 10^{-47}\,\mathrm{s}^2$. Portanto, até a primeira ordem em τ_c, podemos escrever que:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} \approx -\tau_c \mathbf{v} \times \mathbf{F} = -\tau_c F\,\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} \tag{14.12}$$

onde $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ é o momento angular orbital da partícula. Tendo o termo no lado direito da equação (14.12) sentido oposto a $\mathbf{L}$, vemos que a reação da radiação diminui lentamente a magnitude do momento angular.

14.2 AMORTECIMENTO RADIATIVO DE UM OSCILADOR HARMÔNICO

Considere um elétron ligado por uma força harmônica $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$, correspondente a uma freqüência natural $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$. A equação de movimento do elétron, que inclui a força radiativa, será então:

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = \tau_c \dddot{r} \quad . \tag{14.13}$$

Supondo que o lado direito desta equação é pequeno em comparação com o termo de ligação, podemos fazer a aproximação:

$$\ddot{r} \simeq -\omega_0^2 \dot{r} \tag{14.14}$$

de modo que a equação (14.13) pode ser escrita na forma:

$$\ddot{r} + \gamma \dot{r} + \omega_0^2 r = 0 \tag{14.15}$$

onde colocamos $\gamma \equiv \tau_c \omega_0^2$.

A solução desta equação, válida para $\gamma \ll \omega_0$, é:

$$r = A_0 e^{-i\omega_0 t} e^{-\gamma t/2} \tag{14.16}$$

Assim, tanto o potencial quanto a energia cinética serão amortecidos por um fator $e^{-\gamma t}$:

$$T \simeq \frac{m A_0^2 \omega_0^2}{2} e^{-\gamma t} \tag{14.17}$$

Então:

$$-\frac{dT}{dt} = \tau_c \omega_0^2 T = \frac{e^2 \omega_0^4 A_0^2}{3c^3} e^{-\gamma t} \tag{14.18}$$

Mas a equação (14.18) é precisamente a taxa de radiação, mediada sobre um ciclo, de maneira que a energia se conserva de acordo com a nossa dedução da força radiativa $\mathbf{F}_r$. Esta equação corresponde a um trem de ondas amortecido emitido pelo oscilador cuja amplitude inicial é A_0. É claro que $1/\gamma$ representa a duração média do pulso irradiado.

A limitação na freqüência imposta pela condição $\gamma \ll \omega_0$ é inteiramente desprezível, exceto para raios gama de altíssima energia. Em termos do quantum de energia da radiação emergente, esta desigualdade fica:

$$\hbar\,\omega_0 \ll \frac{3}{2}\frac{\hbar\,c}{e^2}\,m\,c^2 \simeq 100\,\text{Mev} \quad . \tag{14.19}$$

Devido ao amortecimento radiativo, a radiação emitida pelo oscilador não é monocromática. A largura da linha pode ser obtida fazendo-se uma análise do campo elétrico de radiação E_a. Este campo é proporcional à aceleração da carga, que é facilmente obtida a partir da equação (14.16). Escrevendo:

$$E_a = E_0 e^{-i\omega_0 t} e^{-\gamma t/2} = \int_{-\infty}^{+\infty} E_\omega\, e^{-i\omega t}\, d\omega \tag{14.20}$$

então

$$E_\omega = \frac{E_0}{2\pi}\int_0^\infty e^{-i\omega_0 t} e^{-\gamma t/2} e^{i\omega t}\, dt = \frac{E_0}{2\pi}\,\frac{1}{i\left(\omega_0 - \omega\right) + \gamma/2} \tag{14.21}$$

onde supomos que o elétron começa a oscilar no instante inicial $t = 0$. Esta equação corresponde a uma intensidade de radiação:

$$I_\omega = \frac{I_0\gamma}{2\pi}\,\frac{1}{\left(\omega - \omega_0\right)^2 + \gamma^2/4} \tag{14.22}$$

normalizada de maneira que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_\omega\, d\omega = I_0 \tag{14.23}$$

conforme mostra a figura 14.1.

A largura da raia correspondente a meia intensidade será portanto:

$$\Delta\omega \simeq \gamma = \tau_c \omega_0^2 \quad . \tag{14.24}$$

Expressando esta largura em termos do comprimento de onda, teremos:

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi\Delta\omega c}{\omega_0^2} = \frac{4\pi}{3} r_0 \simeq 10^{-12}\text{cm} \tag{14.25}$$

que é constante, independente da freqüência do oscilador. A relação entre a largura da raia e a vida média dada pela equação (14.24), isto é, $\Delta\omega\gamma^{-1} = 1$, é equivalente à relação:

$$\Delta E\, \Delta t \sim \hbar \tag{14.26}$$

onde $\Delta E = \hbar\, \Delta\omega$. Esta equação descreve uma relação quântica entre a vida média e a largura da energia de um estado.

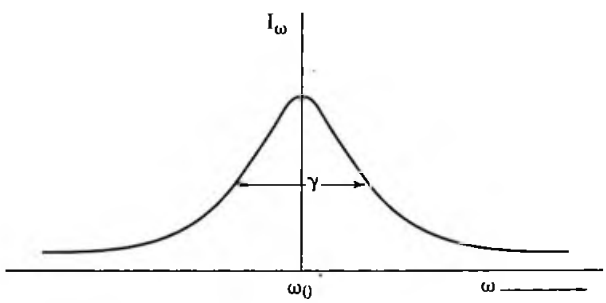


Figura 14.1

14.3 OSCILAÇÕES FORÇADAS

Na seção anterior, discutimos o movimento e a conseqüente radiação por um elétron ligado harmonicamente. Vamos considerar em seguida o movimento de um elétron ligado que é forçado a oscilar por uma onda eletromagnética externa. A teoria clássica de espalhamento e dispersão da luz é baseada neste tipo de consideração.

Para o tratamento de freqüências óticas, podemos supor que a velocidade do elétron é não-relativística e assim podemos desprezar o efeito do campo magnético da radiação incidente. A equação de movimento de um elétron ligado num campo elétrico $\mathbf{E}_0\, e^{-i\omega t}$ será então:

$$\ddot{\mathbf{r}} - \tau_c \dddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \tag{14.27}$$

Estaremos interessados no estado estacionário, cuja solução é proporcional a $e^{-i\omega t}$, de modo que podemos colocar:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \dot{\mathbf{r}} \quad . \tag{14.28}$$

Se quisermos levar em conta outros processos dissipativos, além do processo da reação da radiação, podemos incluir um termo resistivo $\Gamma' \dot{\mathbf{r}}$ no primeiro membro de (14.27), onde Γ' é uma constante de decaimento com dimensões de uma freqüência. Definindo assim:

$$\Gamma = \Gamma' + \tau_c \omega^2 \quad . \tag{14.29}$$

a equação de movimento fica, portanto:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \Gamma \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad . \tag{14.30}$$

A solução estacionária desta equação é dada por:

$$\mathbf{r} = -\frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad . \tag{14.31}$$

A aceleração da carga em termos do campo externo:

$$\mathbf{a} = -\frac{e}{m} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\Gamma\omega} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \tag{14.32}$$

pode ser substituída na equação (13.40) para o campo elétrico de aceleração, obtendo-se a potência irradiada. Vamos examinar em detalhe várias aplicações da equação (14.32).

14.4 ESPALHAMENTO THOMPSON POR ELÉTRONS LIVRES

Para um elétron livre e fracamente acelerado, $\omega_0 = 0$, $\Gamma \simeq 0$, de forma que :

$$\mathbf{a} = -\frac{e}{m}\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \tag{14.33}$$

Esta aceleração produz um campo de radiação de magnitude:

$$E_a(R) = \frac{e\,\mathrm{sen}\Theta\, a}{Rc^2} \tag{14.34}$$

onde Θ é o ângulo entre $\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{R}$, como indicado na figura 14.2.

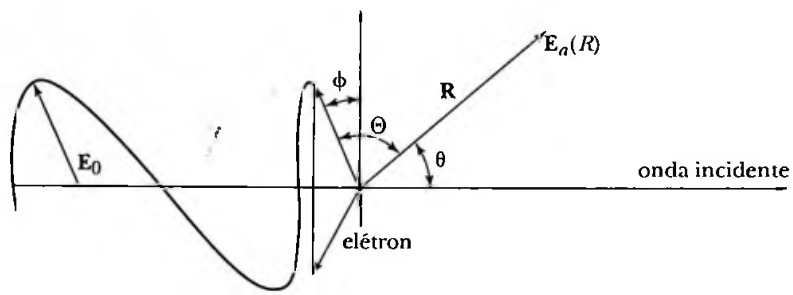


Figura 14.2

A taxa com que a energia re-irradiada atravessa uma unidade de área é:

$$|\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi}\left|\frac{ea\,\mathrm{sen}\Theta}{Rc^2}\right|^2 = r_0^2\mathrm{sen}^2\Theta\left(\frac{I_0}{R^2}\right) \tag{14.35}$$

onde $r_0 = e^2/mc^2$ é o raio clássico do elétron, e:

$$I_0 = \frac{c}{4\pi}E_0^2 \tag{14.36}$$

é a intensidade da onda incidente. Então:

$$\frac{dU}{dt} = \int R^2 |\mathbf{S}| d\Omega = \frac{8\pi I_0 r_0^2}{3} \quad . \tag{14.37}$$

Dividindo a equação (14.37) por I_0, obtemos a seção de choque efetiva de espalhamento por um elétron livre:

$$\sigma_0 = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \quad . \tag{14.38}$$

Esta relação é chamada de seção de choque para o espalhamento Thompson. Esta é constante, independente da freqüência.

A comparação com a experiência é facilitada se expressarmos a equação (14.35) em termos do ângulo de espalhamento θ e o ângulo de polarização ϕ, mostrados na fig. 14.2. Os ângulos Θ, θ, ϕ se relacionam por:

$$\cos\Theta = \cos\phi \, \operatorname{sen}\theta \tag{14.39}$$

isto é: $\operatorname{sen}^2\Theta = 1 - \cos^2\phi\,(1 - \cos^2\theta)$.

Se a onda incidente for não-polarizada, devemos tomar a média sobre os ângulos ϕ, obtendo assim:

$$\overline{\operatorname{sen}^2\Theta} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos^2\theta\right) \tag{14.40}$$

tendo em vista que a média de $\cos^2\phi$ é 1/2. Em termos de θ, a taxa total da energia espalhada é:

$$\frac{dU}{dt} = I_0 r_0^2 \int \frac{1 + \cos^2\theta}{2} d\Omega = \frac{8\pi I_0 r_0^2}{3} \quad . \tag{14.41}$$

A seção de choque diferencial por unidade de ângulo é dada por:

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \frac{r_0^2\left(1+\cos^2\theta\right)}{2} \tag{14.42}$$

Esta seção de choque é mostrada graficamente como função do ângulo de espalhamento na figura 14.3.

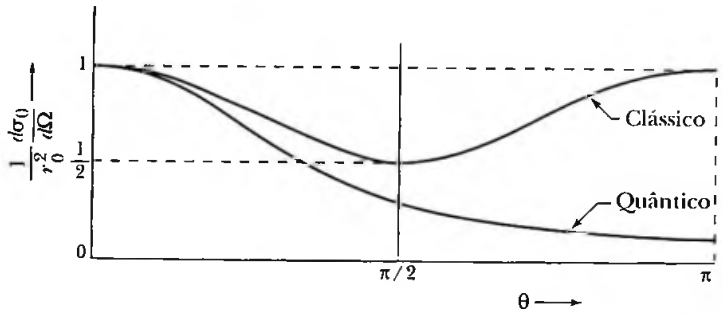


Figura 14.3

A fórmula quântica para a radiação espalhada se aproxima da equação (14.42) quando a freqüência tende a zero, mas a intensidade de espalhamento não é simétrica. Em geral, a radiação espalhada é mais concentrada na direção frontal, como indicado na figura. Existe uma outra característica do espalhamento Thompson que é modificada por considerações quânticas. Classicamente, a radiação espalhada tem a mesma freqüência que aquela da onda incidente. Quanticamente, cada fóton irradiado reparte alguma energia e momento com o elétron, de maneira que a freqüência do fóton espalhado depende do ângulo de espalhamento. Este é o espalhamento Compton, discutido no problema 14.3.

14.5 ESPALHAMENTO RAYLEIGH E O AZUL DO CÉU

No caso geral que envolve um elétron ligado harmonicamente, devemos usar a aceleração dada por (14.32) na equação (14.34), para determinar a energia reirradiada por unidade de área numa direção. Com esta substituição, a seção de choque irá diferir da seção de choque de um elétron livre por um fator:

$$\left|\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2+i\Gamma\omega}\right|^2 = \frac{\omega^4}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\Gamma^2\omega^2} \tag{14.43}$$

Assim, a seção de choque para o espalhamento por um elétron ligado será:

$$\sigma_e = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\omega^4}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \Gamma^2\omega^2} \tag{14.44}$$

Se $\omega \gg \omega_0$ e $\omega \gg \Gamma$, este resultado se reduz a $\sigma_e \simeq \sigma_0$, que é a seção de choque para um elétron livre. Sob a influência de uma onda de alta freqüência, o elétron ligado irradia como um elétron livre, visto que neste caso a força de ligação é desprezível em comparação com a força motriz externa. Se $\omega \ll \omega_0$, a equação (14.44) se reduz a:

$$\sigma_e \simeq \frac{8\pi}{3} r_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \tag{14.45}$$

Assim, a baixas freqüências, a seção de choque aumenta com a quarta potência da freqüência. Esta dependência da freqüência é chamada lei de Rayleigh (1871).

A cor azul do céu é uma conseqüência da lei de Rayleigh. A seção de choque de espalhamento para uma molécula de ar é aproximadamente dada pela expressão (14.45). A maioria das freqüências de ressonância para as moléculas de N_2, O_2, e H_2O estão na região ultravioleta, de modo que a hipótese $\omega \ll \omega_0$ é bem satisfeita para a luz visível. Assim, a luz na extremidade azul do espectro visível ($\lambda \simeq 4.000$ Å) é muito mais espalhada do que a luz na extremidade vermelha do espectro ($\lambda \simeq 7.000$ Å), a razão entre estas seções de choque sendo da ordem de $(7/4)^4 \simeq 9$. A luz azul será então espalhada para fora de um feixe de luz solar, preenchendo todo o céu.

Mas nesta explicação simples para a cor azul do céu, negligenciamos uma questão importante. Um volume de ar contém muitas moléculas e devemos saber como devem ser combinadas as contribuições individuais das moléculas. Na explicação acima, supomos implicitamente que as moléculas individuais contribuem incoerentemente para o espalhamento total: cada molécula produz uma intensidade de espalhamento de acordo com a equação (14.45), e a intensidade resultante é a soma destas intensidades. A validade deste procedimento é evidente para um gás com densidade baixa, onde as moléculas estão separadas por distâncias grandes em comparação com o comprimento de onda. Nestas condições, as acelerações e radiações dos centros espalhadores diferem em fase por valores grandes e aleatórios, de modo que as moléculas atuam então como fontes incoerentes e a intensidade da radiação espalhada será a

soma das intensidades individuais. Mas no ar a uma densidade normal, os elétrons em moléculas adjacentes se movem e irradiam em fase, atuando como fontes coerentes, de maneira que a *amplitude* de espalhamento é a soma das amplitudes individuais. A intensidade resultante seria então proporcional ao quadrado da amplitude resultante.

Se o ar fosse um dielétrico perfeito e uniforme, uma tal radiação coerente resultaria numa amplitude total nula para a onda espalhada, uma vez que a radiação de volumes diferentes de ar iria se cancelar por interferência destrutiva. Por exemplo, a figura 14.4 mostra dois volumes fixos e iguais de ar, cada placa estando na direção da luz incidente. Considere a radiação emitida numa direção

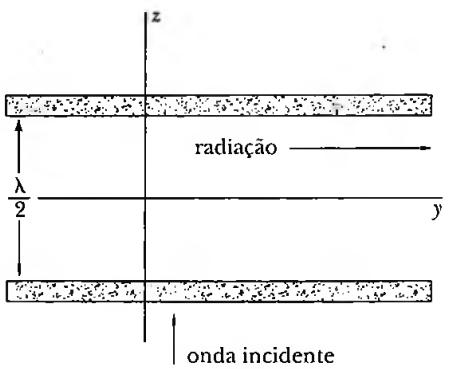


Figura 14.4

perpendicular à direção da incidência, sendo esta a radiação que alcança um observador situado a uma grande distância ao longo do eixo y. A onda incidente sobre a primeira placa está sempre 180° fora de fase com a onda incidente sobre a segunda placa. Assim, as contribuições devidas a qualquer par de moléculas situadas em pontos correspondentes neste par de placas sofrerão interferência destrutiva na posição do observador, a amplitude de espalhamento resultante sendo nula! Mas este perfeito cancelamento requer uma perfeita uniformidade do ar. Entretanto, esta uniformidade não acontece em virtude de pequenas flutuações estatísticas. Na média, os dois pequenos volumes na figura 14.4 contêm um número igual a N de moléculas, mas, num dado instante, os números reais de moléculas são $N+\delta N_1$ e $N+\delta N_2$. A amplitude da radiação espalhada produzida por cada volume é proporcional ao número de moléculas. Visto que as amplitudes diferem em fase por 180°, a amplitude resultante será proporcional à diferença entre os números de moléculas:

$$[\text{amplitude}] \sim (N + \delta N_1) - (N + \delta N_2) = \delta N_1 - \delta N_2 \tag{14.46}$$

A intensidade é proporcional ao quadrado desta diferença:

$$[\text{intensidade}] \sim (\delta N_1 - \delta N_2)^2 = \delta N_1^2 + \delta N_2^2 - 2\delta N_1 \delta N_2 \tag{14.47}$$

De acordo com a mecânica estatística, temos que na média $\delta N_1^2 = \delta N_2^2 = N$ e $\delta N_1\ \delta N_2 = 0$, visto que as duas flutuações não são correlacionadas, sendo cada uma positiva ou negativa ao acaso. A intensidade resultante será então proporcional a $2N$, isto é, proporcional ao número total de moléculas nos dois volumes. Isto significa que a contribuição resultante para o espalhamento é exatamente como seria se os espalhamentos fossem incoerentes! A descoberta da importância fundamental das flutuações na densidade para o espalhamento da luz em gases foi uma das primeiras realizações de Einstein na física.

14.6 DISPERSÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Se tivermos N centros espalhadores de elétrons por unidade de volume, cada um deles irá espalhar uma onda plana incidente de acordo com a relação (14.44). A radiação espalhada irá, em geral, se combinar coerentemente com o campo externo, modificando assim a velocidade efetiva da onda. É possível obter o efeito de um grande número de centros espalhadores pela superposição das ondas individuais. Contudo, para o estudo da dispersão, é mais conveniente tratar a re-irradiação como sendo devida a um efeito coletivo da polarização elétrica do material. A polarização se relaciona com os deslocamentos dos elétrons por:

$$\mathbf{P} = -Ne\mathbf{r} \tag{14.48}$$

O efeito da polarização volumétrica é adicionar uma corrente de polarização $\partial \mathbf{P}/\partial t$ à corrente de deslocamento $(1/4\pi) \cdot (\partial \mathbf{E}/\partial t)$. Como vimos nas relações (6.2) e (6.3), obteremos assim as equações homogêneas de onda:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad ; \quad \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{14.49}$$

onde o índice de refração n é dado, para o caso $\mu = 1$, por:

$$n = \sqrt{\varepsilon} = \left(1 + 4\pi \frac{P}{E}\right)^{1/2} \quad . \tag{14.50}$$

Para sistemas diluídos, como gases, nos quais a energia espalhada é muito pequena comparada com aquela do feixe incidente, é uma boa aproximação considerar o campo local no centro espalhador como sendo o campo da onda incidente. Assim, usando (14.31), teremos que:

$$n^2 = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} \quad . \tag{14.51}$$

Se o meio for denso, como em líquidos e sólidos, o campo local não será mais igual ao campo externo, sendo dado pela relação (1.24):

$$\mathbf{E}_{ef} = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P} \quad . \tag{14.52}$$

É este campo que deve ser substituído em (14.31) para obter a polarização definida pela equação (14.48). Quando os campos são eliminados, obtemos a relação de Clausius-Mossotti [ver o problema 14.6]:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi N e^2}{3m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} \quad . \tag{14.53}$$

Vamos considerar por simplicidade o caso de meios rarefeitos, onde n não difere apreciavelmente da unidade. Neste caso, podemos calcular n a partir da equação (14.51), mantendo apenas os dois primeiros termos na expansão binomial. Assim, teremos aproximadamente que:

$$n \simeq 1 + \frac{2\pi N e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} \quad . \tag{14.54}$$

Identificando as partes reais e imaginárias, obtemos as relações:

$$Re(n) \simeq 1 + \frac{2\pi Ne^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \Gamma^2\omega^2} \tag{14.55}$$

$$Im(n) \simeq \frac{2\pi Ne^2}{m} \frac{\Gamma\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \Gamma^2\omega^2} \tag{14.56}$$

O campo elétrico associado à onda que se propaga na direção z tem a forma:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\left[ikz - i\omega t\right] \tag{14.57}$$

onde:

$$k = \frac{\omega}{c} n = \frac{\omega}{c}\left[Re(n) + iIm(n)\right]$$

de maneira que podemos escrever:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\left[-\frac{\omega}{c} Im(n) z\right] \exp\left[\frac{i\omega}{c} Re(n) z - i\omega t\right] \tag{14.58}$$

Vemos portanto que a onda será atenuada no espaço por um fator proporcional a $Im(n)$. Observamos também que a velocidade de fase da onda é:

$$v = \frac{\omega}{Re(k)} = \frac{c}{Re(n)} \tag{14.59}$$

A equação (14.55) mostra que o índice de refração, e portanto também a velocidade de fase, é uma função da freqüência. Conseqüentemente, o meio será dispersivo.

As quantidades $Re(n) - 1$ e $Im(n)$ são mostradas na figura 14.5. Se $\omega < \omega_1$, teremos uma dispersão normal, quando a parte real do índice de refração aumenta à medida que a freqüência aumenta. O mesmo comportamento é observado para

$\omega > \omega_2$. A região $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$, onde $Re(n)$ decresce à medida que a freqüência aumenta, é chamada de região de dispersão anômala. Na região $\omega \simeq \omega_0$, temos

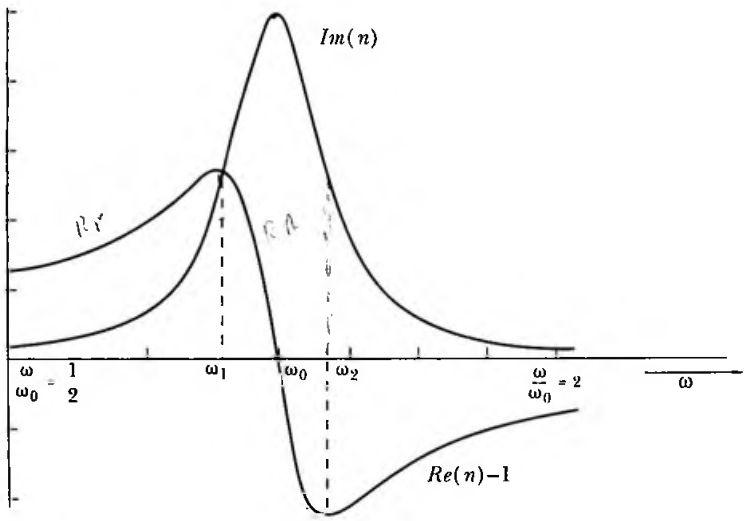


Figura 14.5

uma banda de absorção onde n tem uma apreciável componente imaginária. Pode-se mostrar [ver o problema 14.7] que as freqüências ω_1 e ω_2 correspondem aos pontos de meia-intensidade de $Im(n)$.

Vemos que para $\omega > \omega_0$, $Re(n) < 1$, de modo que nesta região a velocidade de fase (14.59) é maior que c. Entretanto, a velocidade média de transporte de energia, que é definida como a razão entre a média do vetor de Poynting e a densidade de energia, é sempre menor que a velocidade da luz no vácuo.

14.7 ABSORÇÃO DA RADIAÇÃO

Em adição ao espalhamento, o campo eletromagnético que interage com a matéria sofre também uma absorção. Na eletrodinâmica clássica, este processo pode ser calculado explicitamente no caso de um oscilador. Vamos estudar a situação em que a freqüência do campo é próxima da freqüência de ressonância ω_0, quando a absorção é maior. Para isso, vamos expandir o campo incidente e o deslocamento do oscilador em integrais de Fourier:

$$\mathbf{E}(t) = \int \mathbf{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad ;$$

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{r}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad .$$

Substituindo então as integrais de Fourier na equação de movimento de um oscilador (14.30), obtemos analogamente à equação (14.31):

$$\mathbf{r}(\omega) = -\frac{e}{m}\frac{\mathbf{E}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} \quad . \tag{14.60}$$

A energia absorvida pdo oscilador é obviamente igual ao trabalho realizado sobre ele pelo campo externo:

$$\Delta E = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\, dt = -e\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(t)\cdot\dot{\mathbf{r}}(t)\, dt \quad . \tag{14.61}$$

O cálculo desta integral pode ser efetuado usando uma generalização do teorema de Parseval (8.22):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(t)\, dt = 2\pi\int_0^{\infty}\left[f(\omega)\, g^*(\omega) + f^*(\omega)\, g(\omega)\right] d\omega \tag{14.62}$$

onde $f(t)$ e $g(t)$ são duas funções reais, cujas transformadas de Fourier são respectivamente $f(\omega)$ e $g(\omega)$.

Usando este teorema e as relações (14.60) e (14.61), resulta que a energia absorvida pela carga é:

$$\Delta E = -2\pi e\int_0^{\infty}\left[i\omega\mathbf{E}(\omega)\cdot\mathbf{r}^*(\omega) - i\omega\mathbf{E}^*(\omega)\cdot\mathbf{r}(\omega)\right] d\omega \tag{14.63}$$

$$= \frac{4\pi e^2}{m}\int_0^{\infty}\frac{\omega^2\Gamma\left|\mathbf{E}(\omega)\right|^2 d\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\Gamma^2} \approx \frac{\pi e^2}{m}\int_0^{\infty}\frac{\Gamma\left|\mathbf{E}(\omega)\right|^2 d\omega}{\left(\omega_0 - \omega\right)^2 + \left(\Gamma/2\right)^2}$$

O integrando tem um máximo muito pronunciado na região de ressonância. Vamos supor que a distribuição espectral da onda absorvida varie lentamente na região de ressonância em comparação com o fator ressonante. Então a integral pode ser calculada aproximadamente, usando a mudança de variável: $\omega - \omega_0 = \Gamma x/2$:

$$\int_0^\infty \frac{\Gamma\left|\mathbf{E}(\omega)\right|^2 d\omega}{\left(\omega_0-\omega\right)^2+\left(\Gamma/2\right)^2} = \int_{-2\omega_0/\Gamma}^\infty \frac{\frac{1}{2}\left(\Gamma\right)^2\left|\mathbf{E}\left(\omega_0+\frac{1}{2}\Gamma x\right)\right|^2 dx}{\left(\Gamma x/2\right)^2+\left(\Gamma/2\right)^2} \tag{14.64}$$

$$\approx 2\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mathbf{E}\left(\omega_0+\Gamma x/2\right)\right|^2 \frac{dx}{x^2+1} \approx 2\pi\left|\mathbf{E}\left(\omega_0\right)\right|^2$$

onde estendemos o limite inferior de integração até $-\infty$, tendo em vista que $\omega_0 \gg \Gamma$. Substituindo (14.64) em (14.63), encontramos:

$$\Delta E = \frac{2\pi^2 e^2}{m}\left|\mathbf{E}\left(\omega_0\right)\right|^2 = 2\pi^2 c^2 r_0\left|\mathbf{E}\left(\omega_0\right)\right|^2 \quad . \tag{14.65}$$

Note que a energia absorvida é independente de propriedades particulares do sistema absorvente, tais como o valor da constante de decaimento Γ' etc. Assim, a expressão (14.65) para a energia absorvida tem um caráter muito geral, sendo similar à expressão obtida na teoria quântica da radiação.

14.8 AMPLITUDE DE ESPALHAMENTO FRONTAL; O TEOREMA ÓTICO

Vamos discutir finalmente um teorema geral, que se refere ao espalhamento e absorção da radiação por uma coleção de objetos. Por simplicidade, vamos deduzir aqui este teorema somente no caso especial de uma onda eletromagnética espalhada por um elétron ligado harmonicamente. De acordo com a equação (13.40), a amplitude do campo elétrico de radiação produzido por um elétron acelerado é dada por:

$$E_a = \frac{e}{c^2}\operatorname{sen}\Theta\,\frac{a\left(t-R/c\right)}{R} \tag{14.66}$$

onde Θ é o ângulo entre a direção da aceleração e a direção da radiação [veja a fig.13.8]. Para um elétron ligado e acelerado por uma onda incidente, a aceleração $a(t)$ é dada pela equação (14.32), e obtemos assim que:

$$E_a = -\frac{e^2}{mc^2}\frac{\omega^2 E_0 \operatorname{sen}\Theta}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\Gamma\omega}\frac{e^{i(kR-\omega t)}}{R} \quad . \tag{14.67}$$

O fator que multiplica a onda esférica emergente: $E_0\, e^{i(kR-\omega t)}/R$ é chamado de amplitude de espalhamento:

$$A = -\frac{e^2}{mc^2}\frac{\omega^2 \operatorname{sen}\Theta}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\Gamma\omega} \quad . \tag{14.68}$$

Avaliando esta na direção de propagação da onda incidente, obtemos a amplitude frontal de espalhamento:

$$A_f = -\frac{e^2}{mc^2}\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\Gamma\omega} \quad . \tag{14.69}$$

Vamos examinar a parte imaginária desta função:

$$Im\left(A_f\right) = \frac{e^2}{mc^2}\frac{\Gamma\omega^3}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \Gamma^2\omega^2} \quad . \tag{14.70}$$

Veremos que esta expressão está relacionada com a seção total de choque, isto é, a taxa total com que o elétron remove energia da onda incidente. Para calcular esta taxa, notemos que, em condições estacionárias, a potência removida pelo elétron da onda incidente deve ser igual à soma da energia reemitida e da energia dissipada. A energia irradiada é representada pelo termo $\tau_c\omega^2$ na expressão (14.29). A outra parte desta expressão, descrita por Γ', representa os processos de dissipação não-radiativa. Portanto, temos que:

$$P_{\text{rem}} = \mathbf{F}_\Gamma \cdot \mathbf{v} = m\Gamma\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad . \tag{14.71}$$

Então, encontramos que a média temporal desta potência removida será:

$$\overline{P}_{\text{rem}} = \frac{m\Gamma}{2} Re\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}^*}{dt}\right) = \frac{m\Gamma}{2}\left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\omega^2 E_0^2}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \Gamma^2\omega^2} \tag{14.72}$$

A seção total de choque é definida como a razão entre $\overline{P}_{\text{rem}}$ e a média temporal do fluxo incidente:

$$\sigma_t = \frac{\overline{P}_{\text{rem}}}{cE_0^2 / 8\pi} = \frac{4\pi}{c}\frac{e^2}{m}\frac{\Gamma\omega^2}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \Gamma^2\omega^2} \tag{14.73}$$

Note que a seção de choque total inclui a seção de choque de espalhamento, visto que Γ inclui os efeitos da reação da radiação, que o elétron experimenta ao emitir a radiação (veja o problema 14.8). Comparando a expressão para σ_t com a equação (14.70), vemos imediatamente que:

$$\sigma_t = \frac{4\pi c}{\omega} Im\left(A_f\right) \quad . \tag{14.74}$$

Esta relação é denominada de teorema ótico. Ela é conseqüência de propriedades muito gerais relacionadas com a conservação da energia e do fluxo de potência. Uma versão correspondente do teorema ótico é válida também na mecânica quântica, onde tem importantes aplicações para o cálculo de seções de choque.

PROBLEMAS

1. A teoria relativística de elétron clássico de Dirac (1938) tem como equação de movimento:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = F_\mu + F_\mu^{\text{rad}}$$

onde $p_\mu = m\, U_\mu$ é o quadrimomento da partícula, τ é o seu tempo próprio e F_μ^{rad} é a generalização covariante da força de reação (14.5). Usando a condição $F_\mu\, U_\mu = 0$, que qualquer força deve satisfazer [ver o problema 10.11], mostre que:

$$F_{\mu}^{\text{rad}} = \frac{2e^2}{3mc^3}\left[\frac{d^2 p_{\mu}}{d\tau^2} - \frac{p_{\mu}}{m^2 c^2}\left(\frac{dp_{\nu}}{d\tau}\frac{dp_{\nu}}{d\tau}\right)\right]$$

2. Considere o movimento de uma partícula que se move numa trajetória circular num campo de forças centrais atrativo: $\mathbf{F} = -F\hat{\mathbf{r}}$. A partir do princípio de conservação de energia, mostre que a taxa de variação da energia da partícula devida à emissão da radiação é:

$$\frac{dE}{dt} \simeq -\frac{\tau_c}{m} F^2$$

Usando a relação (14.12), como também o fato de que a energia da partícula é metade da sua energia potencial (verifique isto), mostre que:

$$\frac{dL}{dE} = \frac{1}{2}\left|\frac{L}{E}\right|$$

3. A energia do fóton pode ser expressa pela relação: $E = \hbar\omega$, onde $\hbar$ é a constante de Planck e ω é a freqüência do fóton. O momento do fóton é dado por: $p = E/c = \hbar\omega/c$. Mostre que, se o fóton for espalhado por um elétron estacionário, a sua energia será:

$$E' = E\left[1 + \frac{E}{mc^2}(1 - \cos\theta)\right]^{-1}$$

onde θ é o ângulo de espalhamento do fóton.

4. Mostre que a seção de choque de espalhamento por um elétron livre de uma onda elipticamente polarizada: $\mathbf{E} = \mathbf{A}\cos\omega t + \mathbf{B}\,\text{sen}\,\omega t$, onde **A** e **B** são amplitudes mutuamente perpendiculares, é dada por:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \left[\frac{\left(\mathbf{A}\times\hat{\mathbf{n}}\right)^2 + \left(\mathbf{B}\times\hat{\mathbf{n}}\right)^2}{A^2 + B^2} \right]$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor unitário na direção da radiação.

5. Mostre que uma radiação inicialmente não-polarizada, após ser espalhada por uma coleção de cargas livres, será sempre polarizada pelo menos parcialmente, sendo a polarização máxima para um ângulo de 90°. [Este é o caso, por exemplo, para a luz azul do céu.] O termo "polarizado" significa que a luz terá assimetria azimutal quando analisada por um filtro de polarização.

6. Deduza a relação de Clausius-Mossotti dada pela equação (14.53).

7. Mostre que, na região de dispersão anômala num gás, as freqüências em que a parte real do índice de refração assume os seus valores máximos e mínimos correspondem aos pontos de meia-intensidade da sua parte imaginária.

8. Calcule a diferença entre a seção total de choque (14.73) e a seção de choque de espalhamento (14.44). Mostre que:

$$\sigma_a = \sigma_t - \sigma_e = \frac{4\pi}{c}\frac{e^2}{m}\frac{\Gamma'\omega^2}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \Gamma^2\omega^2}$$

onde $\sigma_a(\omega)$ é denominada seção de choque de absorção. Esta seção representa a energia absorvida por unidade de área por unidade de freqüência dividida pela energia incidente por unidade de área por unidade de freqüência.

9. A partir do resultado do problema anterior, e usando um procedimento análogo ao da seção 14.7, mostre que a expressão (14.65) pode ser escrita como a integral de $\sigma_a(\omega)$ sobre todas as freqüências:

$$\int_0^\infty \sigma_a(\omega)d\omega = \frac{2\pi^2 e^2}{mc}$$

quando se desprezam os efeitos do amortecimento radiativo.

10. Considere um meio rarefeito onde o índice de refração n é dado pela expressão (14.54). Mostre que a parte imaginária da amplitude de espalhamento frontal está relacionada com $Im(n)$ através da relação:

$$Im(A_f) = \frac{\omega^2}{2\pi c^2 N} Im(n) \quad .$$

15

FORMULAÇÃO LAGRANGIANA PARA O CAMPO ELETROMAGNÉTICO

O princípio variacional para partículas carregadas que interagem com campos eletromagnéticos é de grande utilidade para uma discussão sistemática das equações dinâmicas do movimento. A formulação lagrangiana mostra uma conexão fundamental entre as simetrias do espaço-tempo e as leis de conservação do campo eletromagnético. Além disso, através da formulação canônica dos campos, este método permite uma transição entre a eletrodinâmica clássica e a eletrodinâmica quântica.

15.1 LAGRANGIANA PARA UMA PARTÍCULA CARREGADA NUM CAMPO EXTERNO

O método de Lagrange da mecânica clássica pode ser aplicado ao movimento de uma carga num campo eletromagnético. O tratamento lagrangiano da mecânica está baseado no princípio da menor ação. Na mecânica não-relativística, o sistema é descrito pelas coordenadas generalizadas $\eta_i(t)$ e pelas velocidades generalizadas $\dot{\eta}_i(t)$. A lagrangiana L do sistema é um funcional de η_i e de $\dot{\eta}_i$ e talvez, explicitamente, do tempo. A ação A é definida como a integral de L sobre o tempo, ao longo de uma trajetória possível do sistema. O princípio da menor ação assegura que o movimento de um sistema mecânico se realiza de forma que, para passar de uma configuração inicial a num instante t_1 para uma outra configuração final b num instante t_2, a ação:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L\left[\eta_i(t), \dot{\eta}_i(t), t\right] dt \tag{15.1}$$

é um extremo. Considerando-se pequenas variações de coordenadas e de velocidades em torno da trajetória real, e fazendo $\delta A = 0$, obtêm-se as equações de movimento de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial \eta_i} \tag{15.2}$$

Desejamos estender o formalismo ao movimento relativístico de partículas, de forma coerente com a teoria da relatividade e levando, no caso de partículas carregadas num campo externo, à equação de movimento (11.6).

Com a finalidade de obter a lagrangiana apropriada para a equação da força de Lorentz, vamos começar com uma partícula relativística livre, cuja equação de movimento é:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\gamma m \mathbf{v}\right) = 0 \tag{15.3}$$

onde $\gamma = [1 - (v^2/c^2)]^{-1/2}$. Devemos escolher a lagrangiana L de modo que a equação de Euler-Lagrange (15.2) seja a mesma que a equação de movimento (15.3). Claramente, a lagrangiana apropriada para uma partícula livre é dada por:

$$L_{\text{livre}} = -mc^2\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2} \tag{15.4}$$

visto que:

$$\frac{\partial L_{\text{livre}}}{\partial v_i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m\gamma v_i$$

leva à equação (15.3), quando substituída na equação de Euler-Lagrange (15.2). Note que L_{livre} se reduz no limite não-relativístico, a menos de uma constante irrelevante, à expressão da energia cinética para uma partícula livre: $T = mv^2/2$.

Para obter a lagrangiana relativística de uma partícula em campos externos de uma forma mais sistemática, usaremos o princípio da invariância de Lorentz da ação. Que a ação seja um escalar de Lorentz segue do primeiro postulado da relatividade, tendo em vista o requerimento de que o extremo da ação determine as equações relativísticas de movimento. Se introduzirmos o tempo próprio através de: $dt = \gamma\, d\tau$, a integral da ação fica:

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\gamma L)\, d\tau \quad . \tag{15.5}$$

Sendo que o tempo próprio é invariante, a condição de que A seja também um invariante de Lorentz impõe que γL seja invariante. Esta é uma condição geral que deve ser satisfeita pela lagrangiana. Para uma partícula livre, L_{livre} só pode ser uma função da velocidade e da massa da partícula. A única quantidade invariante de Lorentz que envolve a velocidade é uma função do produto escalar $U_\alpha\, U_\alpha = -c^2$, onde U_α é a quadrivelocidade da partícula. Assim, concluímos que a lagrangiana de uma partícula livre é proporcional a γ^{-1}. Vemos então facilmente que a expressão apropriada é dada pela expressão (15.4).

A condição geral de que γL seja um invariante de Lorentz permite a determinação da lagrangiana de uma carga relativística em campos eletromagnéticos externos, desde que se saiba a lagrangiana para o movimento não-relativístico em campos estáticos. Uma carga em movimento lento é influenciada predominantemente pelo campo elétrico que é derivado do potencial escalar Φ. A energia potencial é: $U = q\Phi$. Sendo a lagrangiana não-relativística $(T - U)$, a parte de interação L_{int} da lagrangiana relativística deve-se reduzir no limite não-relativístico a: $L_{\text{int}} \rightarrow -q\,\Phi$.

O nosso problema se reduz então a encontrar uma expressão invariante de Lorentz para γL_{int} que se reduza a $-q\,\Phi$ para velocidades não-relativísticas. Sendo que Φ é a quarta componente do quadrivetor potencial A_α, podemos antecipar que γL_{int} envolverá o produto escalar de A_α com algum outro quadrivetor. Os únicos disponíveis são os quadrivetores de posição e de velocidade da partícula. Mas, devido ao fato de que γL deve ser também invariante por translações, a lagrangiana não pode depender explicitamente das coordenadas. Conseqüentemente, a lagrangiana de interação deve ser tal que:

$$\gamma L_{\text{int.}} = \frac{q}{c} U_\alpha A_\alpha = \gamma\left(-q\,\Phi + \frac{q}{c}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right) \tag{15.6}$$

onde usamos a convenção da somatória sobre índices repetidos.

A combinação de (15.4) e (15.6) leva à lagrangiana relativística completa para uma partícula carregada:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} - q\Phi \quad . \tag{15.7}$$

A verificação de que (15.7) conduz, via as equações de Euler-Lagrange, à equação da força de Lorentz (11.6) é considerada no problema 15.1. As componentes P_i do momento canônico são obtidas a partir da lagrangiana pela relação:

$$P_i \equiv \frac{\partial L}{\partial v_i} = \gamma m v_i + \frac{q}{c}A_i \tag{15.8}$$

tendo em vista que os potenciais externos são independentes da velocidade da partícula. O momento canônico $\mathbf{P} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}/c$ inclui portanto o efeito do campo através do potencial vetor. A parcela $q\mathbf{A}/c$ representa o momento armazenado no campo que pode ser transferido à partícula, da mesma forma que $q\Phi$ representa a energia potencial da partícula no campo. O momento canônico torna-se muito relevante no contexto da mecânica quântica.

15.2 LAGRANGIANA PARA UM SISTEMA CONTÍNUO

Na seção anterior, consideramos a formulação lagrangiana para uma partícula carregada num campo externo. Ao estendermos esta formulação para o campo eletromagnético, encontramos um problema no sentido de que o número de graus de liberdade do sistema é infinito. Vamos portanto estudar a transição de um sistema mecânico com N graus de liberdade para um sistema contínuo onde N se torna infinito. [Para uma análise mais completa, ver Goldstein, Cap.12.] Consideremos um conjunto de N partículas com massa m, conectadas por molas de comprimento a e constante elástica k, conforme mostra a figura 15.1.

Na mecânica clássica, a lagrangiana $L = T - U$ desse sistema é dada por:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[m\dot{\eta}_i^2 - k\left(\eta_{i+1} - \eta_i\right)^2\right] \quad . \tag{15.9}$$

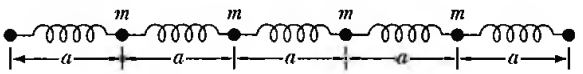


Figura 15.1

Esta equação pode ser escrita na forma:

$$L = \sum_{i=1}^{N} a\mathcal{L}_i \tag{15.10}$$

onde

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2}\left[\frac{m}{a}\dot{\eta}_i^2 - ka\left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a}\right)^2\right] \tag{15.11}$$

Para permitir que o número de graus de liberdade tenda a infinito, colocaremos:

$$a \to dx, \quad m/a \to \mu, \quad ka \to Y, \quad \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a}\right) \to \frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{15.12}$$

onde μ é a densidade de massa linear e Y é o módulo de Young. Através desta transição, substituímos o índice discreto i pela variável contínua x.

A lagrangiana torna-se então:

$$L = \frac{1}{2}\int\left[\mu\dot{\eta}^2 - Y\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]dx = \int \mathcal{L}dx \tag{15.13.a}$$

onde

$$\mathcal{L}\left(\eta, \dot{\eta}, \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left[\mu\dot{\eta}^2 - Y\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right] \tag{15.13.b}$$

A densidade da lagrangiana adquire assim uma dependência explícita na derivada espacial do "campo" η.

Vamos deduzir agora a equação de Euler-Lagrange correspondente à variação de:

$$\delta \int L\, dt = \delta \int\int \mathcal{L}\, dx\, dt = 0 \quad . \tag{15.14}$$

Utilizando as relações (15.13) e integrando por partes da maneira usual, encontramos:

$$\delta \int L\, dt = \int\int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta}\delta\eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x)}\delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial t)}\delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)\right\} dx\, dt$$

$$= \int\int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x)}\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial t)}\right]\right\} \delta\eta\, dx\, dt = 0 \quad .$$

A parte integrada se anulou em virtude da condição $\delta\eta = 0$ nos pontos extremos da integração sobre t. Sendo que $\delta\eta$ é uma função arbitrária de x, obtemos a equação:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x)}\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial t)}\right] = 0 \tag{15.15}$$

Note que, indo para o limite de uma variável contínua, substituímos um sistema de N equações diferenciais ordinárias por uma equação com derivadas parciais.

A partir da densidade de lagrangiana (15.13.b), temos que:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial x)} = -Y\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial t)} = \mu\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad .$$

Usando estas relações, vemos que a equação correspondente de Euler-Lagrange pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{1}{(Y/\mu)} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad . \tag{15.16}$$

Esta equação descreve uma onda de compressão, que se propaga com velocidade $(Y/\mu)^{1/2}$.

Estas considerações podem ser generalizadas para um campo quadridimensional $\eta(x_\mu)$, onde η pode ser qualquer parâmetro covariante. Neste caso, o princípio variacional é:

$$\delta \int\int \mathcal{L}\, d^3x\, dt = \delta \int \mathcal{L}\left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial x_\mu}\right) d^4x = 0 \tag{15.17}$$

Esta formulação é evidentemente covariante se a densidade da lagrangiana $\mathcal{L}$ for um escalar. Vamos variar novamente a dependência funcional de $\mathcal{L}$ em η e $\partial\eta/\partial x_\mu$, considerando x_μ como coordenadas independentes. Uma integração por partes leva a:

$$\int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \eta / \partial x_\mu)} \right] \right\} d^4x\, \delta\eta = 0 \tag{15.18}$$

que conduz às equações covariantes de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \eta / \partial x_\mu)} \right] \quad . \tag{15.19}$$

O nosso programa é encontrar uma densidade de lagrangiana $\mathcal{L}$ tal que uma equação como (15.19) possa levar na eletrodinâmica às equações de Maxwell.

15.3 LAGRANGIANA PARA O CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Vamos generalizar a análise da seção anterior, substituindo o campo $\eta(x)$ pelo quadripotencial do campo eletromagnético $A_\nu(x)$, onde $x \equiv x_\rho$ corresponde a um ponto no espaço-tempo e $\nu = 1,2,3,4$. A velocidade generalizada $\partial\eta/\partial x_\mu$ é

substituída pelo gradiente quadrivetorial $\partial A_\nu(x)/\partial x_\mu \equiv \partial_\mu A_\nu(x)$. Teremos então em correspondência com (15.19), a equação:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} \quad . \tag{15.20}$$

A integral de ação toma a forma:

$$A = \int\int \mathcal{L} d^3x\, dt = \int_{V_4} \mathcal{L}\left[A_\nu(x), \partial_\mu A_\nu, x_\rho\right] d^4x \quad . \tag{15.21}$$

A natureza invariante de Lorentz da ação é preservada desde que a densidade de lagrangiana $\mathcal{L}$ seja um escalar de Lorentz, em virtude de o elemento de volume quadridimensional ser invariante. De acordo com a analogia em relação à situação envolvendo partículas discretas, esperamos que a lagrangiana na ausência de cargas seja quadrática nas "velocidades", isto é, em $\partial_\alpha A_\beta$ ou $F_{\alpha\beta}$. Numa oscilação eletromagnética, a energia oscila entre as energias magnética e elétrica, do mesmo modo que a energia de oscilação mecânica oscila entre a energia cinética e potencial. O único escalar quadrático em $F_{\alpha\beta}$ que é proporcional a esta diferença é: $F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = 2(B^2 - E^2)$ [ver o problema 10.12]. O termo de interação de $\mathcal{L}$ envolve as densidades das fontes, descritas pelo quadrivetor de corrente J_α. A partir da lagrangiana (15.6) e usando a relação $J_\alpha \sim qU_\alpha$, podemos antecipar que $\mathcal{L}_{\text{int}}$. é um múltiplo de $J_\alpha A_\alpha$. Com esta motivação, postulamos a densidade de lagrangiana eletromagnética:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + \frac{1}{c} J_\alpha A_\alpha \quad . \tag{15.22}$$

Escolhemos o coeficiente e o sinal dos termos de interação para concordarem com (15.6), o sinal e a escala da lagrangiana livre sendo determinados pelas equações de Maxwell. A nossa tarefa é verificar que esta densidade de Lagrange leva corretamente, através do princípio variacional, às equações de Maxwell. Para usar a equação de Euler-Lagrange na forma dada na equação (15.20), vamos substituir a definição do tensor do campo eletromagnético e escrever:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} \delta_{\lambda\alpha}\delta_{\sigma\beta}\left(\partial_\alpha A_\sigma - \partial_\sigma A_\alpha\right)\left(\partial_\lambda A_\beta - \partial_\beta A_\lambda\right) + \frac{1}{c} J_\alpha A_\alpha \quad . \tag{15.23}$$

No cálculo de $\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu A_\nu)$, é preciso ter o cuidado de não esquecer nenhum termo. Existem quatro termos diferentes, conforme podemos ver no seguinte cálculo explícito:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} = -\frac{1}{16\pi}\delta_{\lambda\alpha}\delta_{\sigma\beta}(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\sigma}F_{\lambda\beta} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\alpha}F_{\lambda\beta} +$$

$$+ \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\beta}F_{\alpha\sigma} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\lambda}F_{\alpha\sigma}) \quad .$$

Em virtude da simetria de $\delta_{\mu\nu}$ e da anti-simetria de $F_{\mu\nu}$, todos os quatro termos são iguais, e a derivada fica:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} = -\frac{1}{4\pi}F_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}F_{\nu\mu} \quad . \tag{15.24}$$

A outra parte da equação de Euler-Lagrange é:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{1}{c}J_\nu \quad . \tag{15.25}$$

Portanto, as equações do movimento do campo eletromagnético são:

$$\partial_\mu\left(F_{\nu\mu}\right) = \frac{4\pi}{c}J_\nu \quad . \tag{15.26}$$

Estas equações são equivalentes à forma covariante das equações não-homogêneas de Maxwell (10.23).

15.4 INVARIÂNCIAS E LEIS DE CONSERVAÇÃO

Uma propriedade fundamental, provada por E. Noether em 1918, é a de que as propriedades de simetria da lagrangiana implicam na existência de quantidades conservadas. Por exemplo, se a lagrangiana não contiver explicitamente uma dada coordenada, então o momento canônico correspondente é conservado. Analogamente, a invariância da lagrangiana sob deslocamentos temporais ou translações espaciais

implicará na conservação da energia e do momento. Vamos discutir explicitamente o teorema de Noether no contexto dos campos eletromagnéticos.

A simetria por translações refere-se aos efeitos de uma transformação infinitesimal da forma:

$$x_\rho \rightarrow x'_\rho = x_\rho + \Delta_\rho \tag{15.27}$$

onde Δ_ρ é um quadrivetor infinitesimal constante. Esta translação no espaço-tempo é ilustrada na figura 15.2. Uma transformação de coordenadas $x \rightarrow x'$

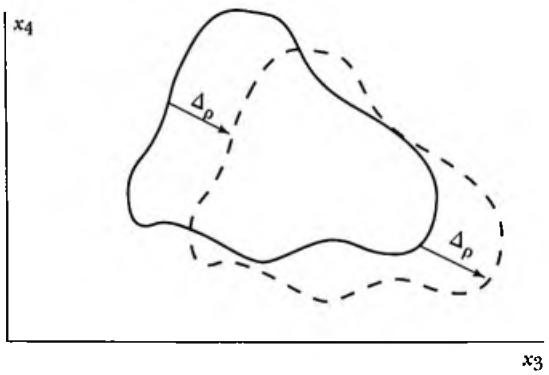


Figura 15.2

substitui o campo $A_\nu(x)$ por uma descrição correspondente $A'_\nu(x')$ relativamente ao novo sistema. Teremos então uma invariância se o novo campo $A'_\nu(x')$ satisfizer as equações de movimento (15.20), do mesmo modo que $A_\nu(x)$. Para isto, é necessário que a densidade de lagrangiana $\mathcal{L}$ tenha a mesma forma funcional nos dois casos. A invariância pode ser implementada impondo a igualdade das ações: $A = A'$, onde A é dada pela equação (15.21), sendo:

$$A' = \int_{V'_4} \mathcal{L}\left[A'_\nu(x'), \partial'_\mu A'_\nu, x'_\rho\right] d^4x' \quad . \tag{15.28}$$

Aqui V'_4 representa o volume do espaço quadridimensional referente ao sistema transladado.

O efeito sobre $\Delta A = A' - A$ devido à transformação (15.27) pode ser encontrado mais facilmente, mudando as variáveis de integração em (15.28) para as mesmas variáveis que aparecem na equação (15.21). Tendo em vista que uma translação

não distorce os elementos de volume, temos que $d^4x' = d^4x$ e a região de integração pode ser descrita da mesma forma para A e A'. Além disto, sendo que a translação não modifica o sistema físico, a invariância requer que $A'_\nu(x') = A_\nu(x)$. Analogamente, devemos ter também $\partial'_\mu A'_\nu = \partial_\mu A_\nu$, visto que $\partial'_\mu = \partial_\mu$ para variáveis que diferem apenas por uma constante. Assim,

$$\Delta A = \int d^4x \left\{ \mathcal{L}\left[A_\nu(x), \partial_\mu A_\nu, x_\rho + \Delta_\rho \right] - \mathcal{L}\left[A_\nu(x), \partial_\mu A_\nu, x_\rho \right] \right\} \tag{15.29}$$

representa o resultado de uma translação no espaço quadridimensional. Sendo Δ_ρ infinitesimal, podemos escrever o integrando como:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\rho} \right)_A \Delta_\rho \tag{15.30}$$

onde o índice A indica que a diferenciação opera apenas com respeito à dependência explícita de $\mathcal{L}$ com x. No decorrer da integração em (15.29), $A_\nu(x)$ e $\partial_\mu A_\nu$ irão variar, de forma que é conveniente introduzir a variação:

$$\partial_\rho \mathcal{L} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\rho} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\rho} \right)_A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \partial_\rho A_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu A_\nu \right)} \partial_\rho \left(\partial_\mu A_\nu \right) \ . \tag{15.31}$$

Tendo em vista que por hipótese $A_\nu(x)$ satisfaz as equações de movimento (15.20), $\partial \mathcal{L}/\partial A_\nu$, na equação (15.31) pode ser substituído por $\partial_\mu[\partial \mathcal{L}/\partial(\partial_\mu A_\nu)]$, com o resultado de que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\rho} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\rho} \right)_A + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu A_\nu \right)} \partial_\rho A_\nu \right] \ . \tag{15.32}$$

Usando esta expressão em (15.29) e impondo a condição da invariância translacional teremos a condição:

$$\Delta A = \Delta_\rho \int d^4x\, \partial_\mu \left[\mathcal{L}\delta_{\mu\rho} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} \partial_\rho A_\nu \right] = 0 \quad . \tag{15.33}$$

Sendo que a equação (15.33) deve ser satisfeita para variações arbitrárias Δ_ρ, obtemos então a relação:

$$\partial_\mu \mathcal{H}_{\mu\rho} = 0 \tag{15.34}$$

onde o tensor canônico $\mathcal{H}_{\mu\rho}$ é definido por:

$$\mathcal{H}_{\mu\rho} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} \partial_\rho A_\nu - \mathcal{L}\delta_{\mu\rho} \quad . \tag{15.35}$$

A anulação da quadridivergência deste tensor representa uma lei de conservação. Consideremos agora a interpretação da quantidade conservada $\mathcal{H}_{\mu\rho}$ no caso de um campo eletromagnético isolado da matéria, descrito pelo primeiro termo da equação (15.22). Usando a relação (15.24), podemos escrever então o tensor $\mathcal{H}_{\mu\rho}$ na forma:

$$\mathcal{H}_{\mu\rho} = \frac{1}{4\pi}\left[F_{\nu\mu}\, \partial_\rho A_\nu + \frac{1}{4}\delta_{\mu\rho} F^2_{\alpha\beta} \right] \quad . \tag{15.36}$$

A relação $F_{\rho\nu} = \partial_\rho A_\nu - \partial_\nu A_\rho = -F_{\nu\rho}$ permite a substituição de $\partial_\rho A_\nu$, levando à equação:

$$\mathcal{H}_{\mu\rho} = \frac{1}{4\pi}\left[F_{\mu\nu}\, F_{\nu\rho} + \frac{1}{4}\delta_{\mu\rho} F^2_{\alpha\beta} \right] + \frac{F_{\nu\mu}\, \partial_\nu A_\rho}{4\pi} = T_{\mu\rho} + \frac{F_{\nu\mu}\, \partial_\nu A_\rho}{4\pi} \tag{15.37}$$

onde $T_{\mu\rho}$ é precisamente o tensor de energia-momento do campo eletromagnético, dado pela equação (10.49). Vamos considerar o efeito da quadridivergência na equação (15.34), sobre o último termo em (15.37):

$$\partial_\mu \left(F_{\nu\mu}\, \partial_\nu A_\rho \right) = \partial_\mu \partial_\nu \left(F_{\nu\mu}\, A_\rho \right) - \partial_\mu \left(A_\rho \partial_\nu F_{\nu\mu} \right) \quad . \tag{15.38}$$

O último termo se anula em conseqüência da equação de Maxwell (15.26) para o campo eletromagnético livre. O primeiro termo no lado direito da equação (15.38) também se anula em virtude da anti-simetria de $F_{\mu\nu}$:

$$\partial_\mu \partial_\nu \left(F_{\nu\mu}\, A_\rho \right) \equiv \partial_\nu \partial_\mu \left(F_{\mu\nu}\, A_\rho \right) = -\partial_\nu \partial_\mu \left(F_{\nu\mu}\, A_\rho \right) \quad .$$

Conseqüentemente, a anulação da quadridivergência (15.34) implica:

$$\partial_\mu T_{\mu\rho} = 0 \tag{15.39}$$

que é exatamente a equação da continuidade (10.50) para o caso de um campo livre, quando a densidade de força f_ρ se anula.

Mostramos portanto que a conservação da energia-momento resulta em conseqüência da invariância por translações temporais e espaciais. Note que, se tivéssemos considerado apenas uma translação temporal ($\Delta_{1,2,3} = 0$), somente as componentes $T_{\mu 4}$ na equação (15.33) seriam identificadas. Como vimos na equação (10.51), estas descrevem a densidade de energia do campo eletromagnético e o seu fluxo. Analogamente, o momento linear é conservado porque as leis de Maxwell se aplicam igualmente nas diferentes localizações no espaço homogêneo. Uma análise semelhante mostra que a invariância por rotações devida à isotropia do espaço implica na conservação do momento angular do campo eletromagnético.

15.5 HAMILTONIANA PARA O CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Consideremos a componente $\mathcal{H}_{44}$ do tensor canônico $\mathcal{H}_{\mu\rho}$ dado pela relação (15.37). Usando a expressão (10.51) e as equações de Maxwell, podemos escrever que [ver o problema 15.7]:

$$\mathcal{H}_{44} = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + B^2 \right) + \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \left(\Phi \mathbf{E} \right) \quad . \tag{15.40}$$

Integrando esta equação sobre o espaço, o segundo termo no lado direito não dará qualquer contribuição para um campo localizado, pois se transforma numa integral de superfície no infinito, onde todos os campos e potenciais se anulam. Obtemos deste modo a hamiltoniana para o campo eletromagnético:

$$H = \int \mathcal{H}_{44} d^3x = \frac{1}{8\pi} \int \left[|\mathbf{E}|^2 + |\nabla \times \mathbf{A}|^2 \right] d^3x \quad . \tag{15.41}$$

A equação (15.41) é uma expressão para a energia total do campo eletromagnético. Em seguida, vamos confinar o campo a uma caixa de dimensão L. Tomaremos as condições de contorno de forma que os campos sejam periódicos com período L nas três dimensões espaciais. Este método leva, conforme veremos, a uma representação dos campos que é facilmente quantizada.

Em vista da periodicidade das condições de contorno, podemos expandir **E** e **A** numa série de Fourier em termos das funções:

$$\mathbf{f}_{k,\lambda}(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} \boldsymbol{\varepsilon}_{k,\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tag{15.42}$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}_{k,\lambda}$ ($\lambda = 1,2,3$) representam vetores unitários de polarização. As condições de contorno restringem **k** aos valores: $\mathbf{k} = (2\pi/L)\ (l\,\hat{\mathbf{x}} + m\,\hat{\mathbf{y}} + n\,\hat{\mathbf{z}})$, com l, m, n representando todos os inteiros positivos e negativos.

Desta forma, podemos escrever que:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \sqrt{4\pi} \sum_{k,\lambda} \mathbf{f}_{k,\lambda}(\mathbf{r}) q_{k,\lambda}(t) \tag{15.43}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \sqrt{4\pi} \sum_{k,\lambda} \mathbf{f}_{k,\lambda}(\mathbf{r}) p_{k,\lambda}(t) \quad . \tag{15.44}$$

As funções da equação (15.42) satisfazem as relações auxiliares:

$$\nabla \cdot \mathbf{f}_{k,\lambda} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{f}_{k,\lambda} \quad , \qquad \nabla \times \mathbf{f}_{k,\lambda} = i\,\mathbf{k} \times \mathbf{f}_{k,\lambda} \quad . \tag{15.45}$$

Vamos aplicar estas relações a um campo de radiação, que é puramente transversal. Escolhendo um calibre onde $\Phi = 0$, podemos então tomar $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Neste caso $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{k,\lambda} = 0$, e portanto a soma sobre as possíveis polarizações incluirá apenas duas componentes, $\boldsymbol{\varepsilon}_{k,1}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_{k,2}$, para cada $\mathbf{k}$, onde $\boldsymbol{\varepsilon}_{k,\lambda}$ é perpendicular a $\mathbf{k}$. Conseqüentemente:

$$\nabla \times \mathbf{f}_{k,1} = i k \mathbf{f}_{k,2} \tag{15.46}$$

Para o primeiro termo da hamiltoniana (15.41), devemos calcular:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi}\int |\mathbf{E}|^2 d^3x &= \sum_{k,\lambda}\sum_{k',\lambda'}\int d^3x \mathbf{f}_{k,\lambda}\cdot\mathbf{f}^*_{k',\lambda'} p_{k,\lambda} p^*_{k',\lambda'} \\ &= \frac{1}{L^3}\sum_{k,\lambda}\sum_{k',\lambda'}\boldsymbol{\varepsilon}_{k,\lambda}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{k',\lambda'} p_{k,\lambda} p^*_{k',\lambda'}\int d^3x\, e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} \\ &= \frac{(2\pi)^3}{L^3}\sum_{k,\lambda}\sum_{k',\lambda'}\boldsymbol{\varepsilon}_{k,\lambda}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{k',\lambda'} p_{k,\lambda} p^*_{k',\lambda'}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \end{aligned} \tag{15.47}$$

onde usamos a propriedade da função delta (B.6). Substituindo a somatória sobre k de acordo com a correspondência: $L^{-3}\sum_k = (2\pi)^{-3}\int d^3k$ e e usando a ortonormalidade dos vetores de polarização, obtemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi}\int |\mathbf{E}|^2 d^3x &= \frac{L^3}{(2\pi)^3}\sum_{\lambda,\lambda'}\int d^3k\int d^3k' \boldsymbol{\varepsilon}_{k,\lambda}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{k',\lambda'} p_{k,\lambda} p^*_{k',\lambda'}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\ &= \frac{L^3}{(2\pi)^3}\sum_{\lambda,\lambda'}\int d^3k \boldsymbol{\varepsilon}_{k,\lambda}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{k,\lambda'} p_{k,\lambda} p^*_{k,\lambda'} \\ &= \frac{L^3}{(2\pi)^3}\sum_{\lambda}\int d^3k p_{k,\lambda} p^*_{k,\lambda} = \sum_k\sum_{\lambda=1}^{2}|p_{k,\lambda}|^2 \quad . \end{aligned} \tag{15.48}$$

Calculando analogamente o segundo termo da hamiltoniana, obteremos [ver o problema 15.8]:

$$\frac{1}{4\pi}\int |\nabla \times \mathbf{A}|^2 \, d^3x = \sum_k \sum_{\lambda=1}^{2} k^2 \left|q_{k,\lambda}\right|^2 \quad . \tag{15.49}$$

Conseqüentemente, a hamiltoniana pode ser escrita na forma:

$$H = \frac{1}{2}\sum_k \sum_{\lambda=1}^{2} \left(\left|p_{k,\lambda}\right|^2 + k^2 \left|q_{k,\lambda}\right|^2 \right) \quad . \tag{15.50}$$

Cada termo na equação (15.50) é o mesmo que a hamiltoniana para um oscilador harmônico. Assim, o campo de radiação pode ser considerado equivalente a um conjunto de osciladores harmônicos.

A equação (15.50) possibilita uma transição apropriada para a eletrodinâmica quântica, onde as variáveis canônicas p e q são quantizadas, tornando-se operadores de absorção e criação de fótons. O princípio de incerteza permite a criação momentânea de um fóton virtual γ e a sua subseqüente absorção pelo elétron, conforme mostra a figura 15.3.

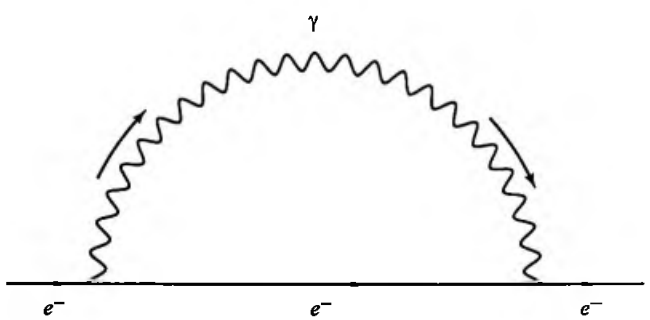


Figura 15.3

Este processo radiativo modifica a estrutura eletromagnética do elétron, de modo que o seu fator g terá correções em relação ao valor 2 previsto pela equação de Dirac. Cada vértice de interação da figura (15.3) é proporcional à carga do elétron, de maneira que a correção correspondente será da ordem $\alpha = e^2/\hbar c \simeq 1/137{,}04$, onde α é a constante de estrutura fina. As correções radiativas na eletrodinâmica quântica, associadas aos processos que envolvem vários fótons virtuais, levam à seguinte previsão para o momento magnético anômalo do elétron:

$$\left(\frac{g}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\pi} - 0{,}328478\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 1{,}195\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \tag{15.51}$$

Este resultado tem uma excepcional concordância com o valor experimental mencionado na equação (11.47), sendo a diferença relativa da ordem de uma parte em 10^8!!

PROBLEMAS

1. Mostre que a lagrangiana relativística para uma partícula carregada (15.7) conduz, via as equações de Euler-Lagrange, à equação da força de Lorentz:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right] \quad .$$

(Use a derivada convectiva $d/dt = (\partial/\partial t) + \mathbf{v} \cdot \nabla$ e as definições-padrão dos campos em termos dos potenciais.)

2. Mostre que, para uma partícula em movimento num campo eletromagnético, a velocidade **v** pode ser expressa em termos do momento canônico **P** [veja equação (15.8)] através da relação:

$$\mathbf{v} = \frac{c\mathbf{P} - q\mathbf{A}}{\left[\left(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2 + m^2c^2\right]^{1/2}} \quad .$$

3. A hamiltoniana é definida em termos da lagrangiana como:

$$H = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - L \quad .$$

Usando a expressão para **v** obtida no problema anterior, mostre que a hamiltoniana para uma partícula em movimento num campo eletromagnético é:

$$H = \sqrt{\left(c\mathbf{P} - q\mathbf{A}\right)^2 + m^2c^4} + q\Phi \quad .$$

4. Considere a densidade de lagrangiana correspondente a um campo escalar η:

$$\mathcal{L} = -\left[\partial_\mu \eta \, \partial_\mu \eta + \mu^2 \eta^2\right] \quad .$$

(a) Mostre que a equação de Euler-Lagrange é dada por:

$$\left(\Box - \mu^2\right)\eta = 0$$

(b) Verifique que a solução com simetria radial é:

$$\eta = e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,\frac{e^{-\mu r}}{r} \quad .$$

Esta forma descreve um campo escalar de Yukawa.

5. (a) Mostrar, a partir do princípio variacional, que as lagrangianas que só diferem por uma derivada total em relação ao tempo de uma função das coordenadas de posição e do tempo são equivalentes, no sentido de que levam às mesmas equações de Euler-Lagrange de movimento.

(b) Mostrar explicitamente que a transformação de calibre $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \psi$ dos potenciais na lagrangiana das partículas carregadas (15.7) gera apenas uma outra densidade equivalente.

6. Uma outra densidade de lagrangiana para o campo eletromagnético é:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi}\,\partial_\alpha A_\beta \partial_\alpha A_\beta + \frac{1}{c}\,J_\alpha A_\alpha \quad .$$

(a) Deduzir as equações de movimento de Euler-Lagrange. Sob que hipóteses estas são equivalentes às equações de Maxwell?

(b) Mostrar explicitamente que esta densidade de lagrangiana difere da (15.22) por uma quadridivergência. Esta quadridivergência afeta a ação ou as equações de movimento?

7. Usando as equações de Maxwell para o campo eletromagnético livre, deduza as seguintes relações para as componentes de $F_{\nu\mu}\,\partial_\nu A_\rho$:

$$F_{\nu 4}\partial_\nu A_4 = \nabla\cdot(\Phi\mathbf{E})$$

$$F_{\nu 4}\partial_\nu A_j = -i\,\nabla\cdot(A_j\mathbf{E})$$

$$F_{\nu j}\partial_\nu A_4 = i\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\Phi E_j) - (\nabla\times\Phi\mathbf{B})_j\right] \quad .$$

8. A partir das relações (15.43) e (15.46), verifique a equação (15.49).

9. A lagrangiana de Proca é:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} - \frac{\mu^2}{8\pi}A_\alpha A_\alpha + \frac{1}{c}J_\alpha A_\alpha$$

onde $\mu = m_\gamma c/\hbar$, e m_γ denota a massa do fóton. Usando as equações de Euler-Lagrange, mostre que as equações de movimento são:

$$\partial_\mu(F_{\nu\mu}) + \mu^2 A_\nu = \frac{4\pi}{c}J_\nu$$

No calibre de Lorentz e no limite estático, para uma carga q puntiforme em repouso na origem, só não é nula a componente temporal $A_4 = i\Phi$. Mostre que neste caso a solução da equação de Proca tem a forma:

$$\Phi(r) = qe^{-\mu r}/r \quad .$$

O fator exponencial altera o caráter do campo magnético da Terra de forma que se pode estabelecer um limite muito estrito para a massa do fóton, a partir de dados geomagnéticos.

10. Considere campos eletromagnéticos livres de fontes e confinados numa região localizada no espaço.

(a) Mostre que o tensor: $M_{\rho\mu\nu} \equiv x_\mu T_{\rho\nu} - x_\nu T_{\rho\mu}$, satisfaz a equação de continuidade: $\partial_\rho M_{\rho\mu\nu} = 0$.

(b) Mostre que, quando μ e ν são ambos índices espaciais, conclui-se a conservação do momento angular do campo eletromagnético:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r} \times \mathbf{g}) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\overleftrightarrow{T} \times \mathbf{r}) = 0$$

onde $\mathbf{g}$ é a densidade de momento do campo e $\overleftrightarrow{T}$ é o tensor de tensões de Maxwell. (Veja também o problema 4.14.)

16

MONOPOLOS MAGNÉTICOS E A QUANTIZAÇÃO DA CARGA ELÉTRICA

16.1 INTRODUÇÃO

Durante um longo tempo, acreditou-se que a carga magnética não tinha existência real, sendo apenas um conceito auxiliar. Na sua famosa monografia *De Magnete* (1600), Gilbert, tendo em vista a impossibilidade prática de separar os pólos de uma barra imantada, negou a existência de pólos magnéticos isolados. A denegação conclusiva para este conceito veio com o trabalho de Ampère (1825), que considerava a corrente elétrica como sendo a única fonte do magnetismo. Em 1873 Maxwell, o fundador da teoria do campo eletromagnético, apoiou as idéias de Ampère, rejeitando a idéia de carga magnética.

Desta forma, parecia que este conceito era destinado a ter somente uma função auxiliar na ciência. Entretanto, em 1931 Dirac desafiou a idéia dominante sobre a ausência da carga magnética na natureza e reabilitou este conceito. Dirac fez uso da simetria contida nas equações fundamentais de Maxwell para o campo eletromagnético:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \qquad (16.1)$$

Na primeira linha destas equações, encontramos no lado direito as densidades de carga elétrica ρ e da corrente elétrica $\mathbf{J}$. A simetria seria completa se em lugar de zero na primeira equação da segunda linha pudéssemos escrever a densidade de carga magnética $4\pi\rho_m$, e na segunda equação a densidade da corrente magnética $(4\pi/c)\mathbf{J}_m$. No seu trabalho [*Proc. R. Soc.* (London) **A133**, 60 (1931)] Dirac escreveu: "Nestas circunstâncias seria uma surpresa se a natureza não fizesse uso desta simetria".

O argumento de Dirac mostra que a simples existência de um monopolo magnético no universo ofereceria uma explicação sobre a natureza discreta da carga elétrica. Uma vez que a quantização das cargas é um dos mistérios mais profundos da física, a idéia de Dirac tem um grande apelo. Por este motivo, ela estimulou uma intensa atividade de pesquisa, tanto experimental quanto teórica. Recentemente houve uma renovação do interesse nos monopolos magnéticos, sendo que estes são previstos naturalmente pelas modernas teorias unificadas das interações fracas, eletromagnéticas e fortes. Contudo, não existe ainda evidência experimental conclusiva para a existência de cargas magnéticas.

16.2 MONOPOLOS MAGNÉTICOS

Podemos restaurar a simetria entre os campos elétricos e magnéticos, se incluirmos uma densidade magnética ρ_m e uma densidade de corrente $\mathbf{J}_m$ nas equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{16.2.a}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{16.2.b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi\rho_m \tag{16.2.c}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_m - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{16.2.d}$$

Agora, estas equações mostram uma simetria entre $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, sendo invariantes sob a substituição:

$$\mathbf{E} \to \mathbf{B} \qquad \mathbf{J} \to \mathbf{J}_m \qquad \rho \to \rho_m \tag{16.3}$$

$$\mathbf{B} \to -\mathbf{E} \qquad \mathbf{J}_m \to -\mathbf{J} \qquad \rho_m \to -\rho \quad . \tag{16.4}$$

Esta substituição é chamada transformação de dualidade. Apesar de esta generalização das equações de Maxwell parecer perfeitamente plausível, ela contém certas dificuldades que aparecem ao expressarmos o campo magnético como o rotacional do potencial vetor:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad . \tag{16.5}$$

Para ver por que isto pode conduzir a dificuldades, vamos integrar a equação (16.2.c) sobre o volume de uma esfera que contém um monopolo magnético g. De acordo com o teorema de Gauss, obtemos:

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi g \qquad \text{ou} \qquad \int \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi g \quad . \tag{16.6}$$

Agora, considere o lado esquerdo da segunda equação. Podemos calcular a integral de $\nabla \times \mathbf{A}$ sobre uma superfície esférica fechada, avaliando-a primeiramente sobre uma superfície aberta que consiste de uma superfície esférica, subtraindo um pequeno círculo de raio δ, conforme indica a figura 16.1.

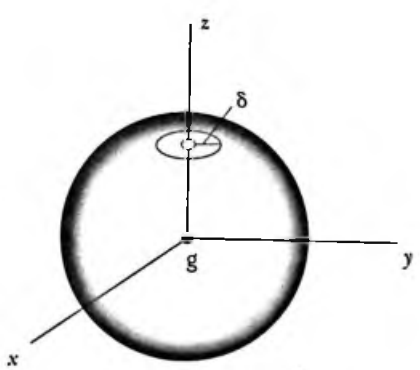


Figura 16.1

Em seguida tomaremos o limite $\delta \to 0$. De acordo com o teorema de Stokes, a integral de $\nabla \times \mathbf{A}$ sobre esta superfície esférica "aberta" é igual à integral de $\mathbf{A}$ em torno deste pequeno círculo:

$$\int \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\delta \to 0} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad . \tag{16.7}$$

Se $\mathbf{A}$ for livre de singularidades, então o potencial vetor aproxima-se de alguma constante à medida que δ tende a zero. O lado direito da equação (16.7) se reduz então a $\mathbf{A} \cdot \int d\mathbf{l}$, que é zero, isto é

$$\int \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad . \tag{16.8}$$

Mas isto contradiz a equação (16.6)! Para evitar este problema, devemos admitir a existência de singularidades em $\mathbf{A}(\mathbf{r})$: qualquer superfície fechada em torno de um monopolo magnético deve ter pelo menos um ponto em que $\mathbf{A}$ é singular de tal maneira que a integral de linha de $\mathbf{A}$ em torno da singularidade dá $4\pi g$ quando $\delta \to 0$. Se imaginarmos que o monopolo magnético é circundado por uma seqüência de superfícies esféricas concêntricas de raio cada vez maior, reconhecemos que os pontos singulares nestas superfícies formam uma linha que se estende do monopolo ao infinito, conforme mostra a figura 16.2. Esta linha de singularidades é chamada linha de Dirac do monopolo.

Figura 16.2

Por exemplo, o potencial vetor:

$$\mathbf{A} = -g\frac{1+\cos\theta}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\hat{\mathbf{e}}_{\phi} \tag{16.9}$$

produz, para $0 < \theta \leq \pi$, o campo magnético do monopolo [ver o problema 16.1]:

$$\mathbf{B} = g\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad . \tag{16.10}$$

Este potencial vetor tem uma linha de singularidades ao longo do semi-eixo positivo z, onde $\theta = 0$.

A expressão (16.9) corresponde de fato ao potencial vetor devido a um solenóide infinitamente delgado que está ao longo do semi-eixo positivo z, estendendo-se da origem até o infinito. Para um tal solenóide, as linhas de campo emergentes na extremidade inferior são radiais (veja figura 16.3), sendo análogas às linhas de um monopolo magnético. Esta semelhança entre os campos de um

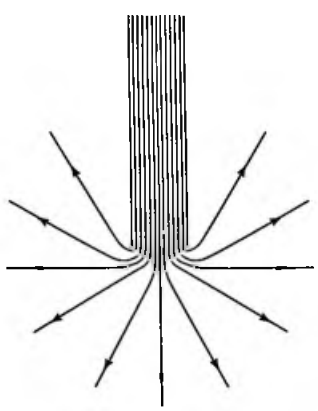


Figura 16.3

solenóide infinitamente delgado e de um monopolo magnético não acontece ao longo do semi-eixo z positivo: aqui, o campo do solenóide é infinito, ao passo que o campo magnético do monopolo é finito. É importante enfatizar que este campo magnético é bem comportado, sendo apenas o potencial vetor singular ao longo da linha de Dirac. No contexto da eletrodinâmica clássica esta singularidade não tem implicações físicas, visto que somente o campo magnético é observável.

16.3 QUANTIZAÇÃO DE DIRAC PARA A CARGA ELÉTRICA

Talvez a conseqüência mais fascinante da teoria dos monopolos magnéticos seja a condição de quantização para a carga elétrica, que resulta quando examinamos o momento angular nos campos eletromagnéticos. Considere um monopolo magnético g e uma carga elétrica q, conforme mostrado na figura 16.4. De acordo com a equação (4.43), a densidade do momento nos campos é $\mathbf{E} \times \mathbf{B}/(4\pi c)$. Este vetor é perpendicular a **E** e **B**. Portanto, na figura 16.4, o momento

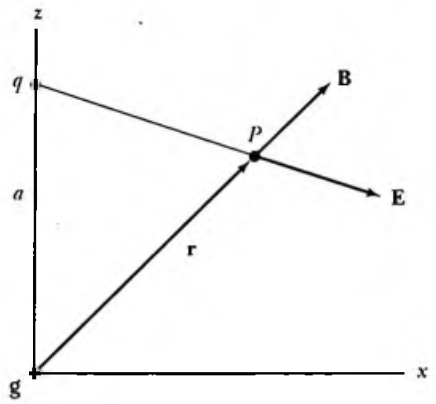


Figura 16.4

flui em círculos em torno do eixo z, produzindo um momento angular ao longo deste eixo, que é dado por:

$$\mathbf{L} = \int \mathbf{r} \times \left(\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi c} \right) dv = \frac{1}{4\pi c} \int \left[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})\mathbf{E} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E})\mathbf{B} \right] dv \quad . \tag{16.11}$$

Para um monopolo magnético na origem, $\mathbf{B} = g\mathbf{r}/r^3$. Substituindo esta forma na expressão (16.11), obtemos:

$$\mathbf{L} = \frac{g}{4\pi c} \int \left[\frac{1}{r} \mathbf{E} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right] dv \quad . \tag{16.12}$$

Vamos considerar a integração em termos das componentes de **L**. Com esta finalidade, escrevemos:

$$L_k = \frac{g}{4\pi c}\int\left[\frac{1}{r}E_k - \frac{x_k}{r^3}(x_i E_i)\right]dv = \frac{g}{4\pi c}\int E_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_k}{r}\right)dv \quad .$$

Podemos integrar por partes, usando:

$$E_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_k}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{E_i x_k}{r}\right) - \frac{x_k}{r}\frac{\partial E_i}{\partial x_i} \quad .$$

Desta maneira, obtemos:

$$L_k = \frac{g}{4\pi c}\int \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{E_i x_k}{r}\right)dv - \frac{g}{4\pi c}\int \frac{x_k}{r}(\nabla\cdot\mathbf{E})dv$$

$$= \frac{g}{4\pi c}\oint \frac{E_i x_k}{r}dS_i - \frac{g}{4\pi c}\int \frac{x_k}{r}(4\pi\rho)dv \quad . \tag{16.13}$$

A distâncias suficientemente grandes da carga elétrica, $E_i\, dS_i = q d\Omega$, de modo que a integral de superfície se anula por simetria. A densidade de carga para uma carga puntiforme q situada em $a\hat{\mathbf{z}}$ é: $\rho = q\delta(\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{z}})$. A integral restante em (16.13) torna-se então:

$$L_k = -\frac{gq}{c}\int \frac{x_k}{r}\delta(\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{z}})dv \quad . \tag{16.14}$$

As componentes L_x e L_y se anulam por simetria, sendo a única componente diferente de zero dada por:

$$L_z = -\frac{gq}{c} \quad . \tag{16.15}$$

Note que este resultado é independente da separação entre o monopolo magnético e a carga elétrica! De acordo com a mecânica quântica, vamos supor que a componente L_z seja um múltiplo inteiro de $\hbar/2$:

$$L_z = \frac{1}{2} n\hbar \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{16.16}$$

de onde resulta a relação:

$$\frac{gq}{c} = \frac{1}{2} n\hbar \quad . \tag{16.17}$$

Este resultado, chamado a condição de quantização de Dirac, leva à notável conclusão de que a carga elétrica é quantizada: para um dado g, q é proporcional ao inteiro n.

A regra de quantização (16.17) pode ser obtida também por um outro método, analisando o problema do movimento do monopolo num campo elétrico uniforme. Consideremos um campo elétrico uniforme **E** entre as placas de um condensador, como é mostrado na figura 16.5. É natural supor que o monopolo com carga magnética g move-se ao longo da órbita $A\,A'$ situada num plano normal ao vetor **E** (por analogia com o movimento de uma carga elétrica num campo magnético). A força de Lorentz atuando sobre a carga g que se move numa órbita circular com velocidade linear **v** será igual a:

$$F_E = g|\mathbf{E}|\frac{v}{c} \quad . \tag{16.18}$$

No equilíbrio, esta força é compensada pela força centrífuga $F_c = Mv^2/R$, onde M é a massa do monopolo e R é o raio da órbita.

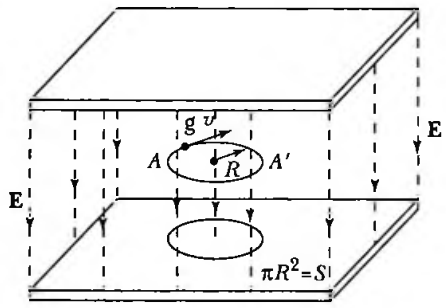


Figura 16.5

Da igualdade $F_E = F_c$, encontramos que:

$$|\mathbf{E}| = \frac{Mvc}{Rg} \quad . \tag{16.19}$$

Usaremos agora um resultado da mecânica quântica, de acordo com o qual o momento angular L_z de uma carga num campo elétrico estático e uniforme satisfaz a regra de quantização de Landau:

$$L_z = 2n\hbar \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{16.20}$$

quando os efeitos associados ao vácuo são subtraídos. Sendo que $L_z = MvR$, a equação (16.20) leva a:

$$MvR = 2n\hbar \quad . \tag{16.21}$$

Das equações (16.19) e (16.21), obtemos facilmente que:

$$|\mathbf{E}| = \frac{2}{R^2}\frac{\hbar c}{g}n \quad . \tag{16.22}$$

Notemos agora que o campo elétrico pode ser expresso em termos da carga sobre as placas do condensador de acordo com a fórmula:

$$|\mathbf{E}| = \frac{4\pi q}{S} \tag{16.23}$$

onde $S = \pi R^2$ é a área da órbita e q é a carga distribuída nas placas do condensador sobre esta área. Substituindo (16.23) na equação (16.22) encontramos para a carga observável q a relação:

$$q = n\frac{\hbar c}{2g} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{16.24}$$

que está em completa concordância com a fórmula de Dirac (16.17).

Se substituirmos $q = e$ e $n = 1$ na equação (16.24), encontraremos a unidade fundamental da carga magnética:

$$g = \frac{c\hbar}{2e} = \frac{137}{2}e \quad . \tag{16.25}$$

Usando este resultado, vemos que a força magnética entre dois monopolos é maior do que a força entre dois elétrons por um fator:

$$\frac{g^2}{e^2} \simeq \frac{1}{4}(137)^2 \simeq 4.692 \quad . \tag{16.26}$$

A partir desta relação, podemos estimar que o raio de um estado ligado formado por um par monopolo-antimonopolo será menor do que aquele do átomo de Bohr por um fator da ordem de 10^{-4}. Esta distância é extremamente pequena, sendo da ordem do raio clássico do elétron!

16.4 INTERAÇÃO DA CARGA MAGNÉTICA COM A MATÉRIA

Supondo que os monopolos magnéticos existam na natureza, devemos indagar sobre a maneira pela qual eles poderiam ser detectados.

Para responder a esta questão, vamos observar inicialmente que, analogamente à carga elétrica, a carga magnética deve satisfazer também uma lei de conservação [ver o problema 16.4]. Em outras palavras, os monopolos só podem ser criados aos pares, isto é, um monopolo e um antimonopolo, e aniquilados também aos pares.

Assim, podemos supor que um par de monopolos pode ser produzido numa colisão de altas energias entre as partículas, como, por exemplo, entre fótons e prótons. Nestes processos a energia envolvida deve ser maior que o dobro da energia de repouso Mc^2 do monopolo. Entretanto (veja a próxima seção), de acordo com as teorias unificadas das partículas elementares, a massa de um monopolo é da ordem de 10^{14} GeV/c^2. Esta energia é muito maior do que aquela produzida pelos mais poderosos aceleradores existentes na atualidade. Por isso, as pesquisas experimentais foram concentradas na detecção de monopolos magnéticos que poderiam ocorrer naturalmente nos raios cósmicos extremamente energéticos que incidem sobre a Terra.

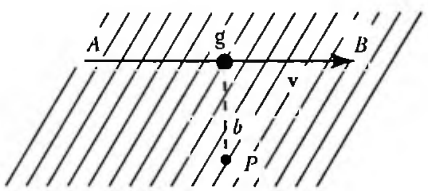


Figura 16.6

Um dos métodos básicos utilizados nestas pesquisas estuda os traços de ionização produzidos por monopolos que interagem com a matéria. Para estimar a intensidade de ionização produzida neste caso, consideremos um monopolo g passando por um ponto P ao longo da reta AB, conforme indica a figura 16.6.

Por analogia com uma carga elétrica cujo movimento com velocidade v produz um campo magnético $B \approx vE/c$, haverá um campo elétrico $E \approx vB/c$ gerado pelo movimento do monopolo. Sendo o campo magnético do monopolo $B \approx g/b^2$ quando este se encontra à distância b do ponto P, o campo elétrico que atuará na posição P será da ordem:

$$E \approx \frac{vg}{cb^2} \quad . \tag{16.27}$$

A ionização é proporcional à energia transferida pela partícula em movimento na matéria aos elétrons do meio. De acordo com a equação (12.9), esta energia é proporcional ao quadrado do campo elétrico da partícula e inversamente proporcional ao quadrado da sua velocidade. Conseqüentemente, a ionização produzida por um monopolo no ponto P será proporcional a:

$$I(g) \sim \left(\frac{vg}{cb^2}\right)^2 \frac{1}{v^2} = \frac{g^2}{c^2 b^4} \quad . \tag{16.28}$$

Vamos comparar esta expressão com a ionização produzida em P por uma carga q passando ao longo da reta AB. Sendo o campo elétrico da carga $E \approx q/b^2$, teremos:

$$I(q) \sim \left(\frac{q}{b^2}\right)^2 \frac{1}{v^2} = \frac{q^2}{v^2 b^4} \quad . \tag{16.29}$$

É importante notar que a ionização produzida por um monopolo é independente da sua velocidade. Portanto, o traço de ionização deixado por um monopolo nas emulsões fotográficas será muito pronunciado e uniforme. Por outro lado, para uma partícula elétrica carregada, tendo em vista que a sua velocidade diminui ao longo da trajetória, a ionização deverá aumentar.

Em 1975, uma experiência realizada por B. Price [*Phys. Rev. Lett.* **35**, 487 (1975)] teve um resultado positivo para um candidato ao monopolo. Um dispositivo experimental consistindo de um detetor de Cherenkov, que mede as velocidades das partículas, e de placas com emulsões nucleares foi colocado com o auxílio de um balão a grandes altitudes. Observou-se um evento cujas características de ionização estavam em concordância com a relação (16.28), correspondendo a um monopolo magnético com carga $g = c\hbar/e$.

Uma outra experiência realizada por Cabrera em 1982 [*Phys. Lett.* **48**, 1387 (1982)]também teve indícios positivos da existência de um monopolo com carga $g = c\hbar/2e$ (veja o problema 16.8). Experiências deste tipo estabeleceram um limite superior para o fluxo de monopolos incidentes sobre a Terra, da ordem de $10^{-10}/\text{cm}^2\text{s}$. Portanto, se os monopolos magnéticos existem, eles devem ser muito raros.

16.5 MONOPOLOS MAGNÉTICOS NA FÍSICA DE PARTÍCULAS ELEMENTARES

Apesar da falta de evidência experimental conclusiva, existem fortes razões teóricas para a existência de monopolos magnéticos. Estas decorrem de idéias gerais sobre a unificação das interações fundamentais. Durante as últimas décadas, houve grandes progressos na compreensão das forças fracas e fortes entre as partículas elementares.

As interações fracas são responsáveis pelos processos da radioatividade e da transmutação do hidrogênio em hélio no interior das estrelas. As interações fortes providenciam a força de ligação dos nêutrons e prótons nos núcleos atômicos. Estas forças têm um alcance muito curto, da ordem de 10^{-13} cm.

Apesar das diferenças óbvias, existe um mecanismo comum que caracteriza as interações eletromagnéticas, fracas e fortes: cada uma é mediada pela troca de partículas com spin 1, chamadas bósons de calibre. Estes bósons são diferentes nos três casos. Eles são denominados glúons no caso da interação forte, bósons W e Z na interação fraca e fótons no caso da interação eletromagnética. Todos estes bósons obedecem, entretanto, ao princípio unificado da invariância de calibre, discutido no capítulo 4, tendo por isso um comportamento físico análogo. Weinberg e Salam conseguiram unificar as interações fracas com a eletrodinâmica quântica, propondo em 1967 uma teoria eletrofraca das interações. Esta teoria foi posteriormente generalizada, englobando a teoria das interações fortes conhe-

cida por cromodinâmica quântica (veja, por exemplo, o livro de P. Davies citado na bibliografia).

A propriedade comum destas três interações de partículas, que podem ser descritas usando os bósons de calibre, sugere uma profunda unidade entre elas. Nesse sentido, o conceito crucial é que as intensidades de acoplamento destes bósons com as partículas elementares variam com a distância. Isto é muito similar à noção intuitiva da blindagem dielétrica na eletrodinâmica. No caso de um dielétrico, uma carga positiva colocada no material tende a atrair as cargas negativas e repelir as cargas positivas, polarizando as moléculas adjacentes. Esta blindagem tende a tornar a carga efetiva menor a grandes distâncias. Vice-versa, vindo de uma região distante, vemos que a carga elétrica efetiva aumenta gradualmente à medida que a distância da carga diminui. Na eletrodinâmica quântica, um efeito análogo acontece mesmo no "vácuo". Isto ocorre porque o "vácuo" é um meio dinâmico repleto de pares elétrons-pósitrons. Estes pares podem ser polarizados analogamente às moléculas no dielétrico, levando a uma blindagem da carga elétrica.

No caso das interações fracas e fortes, que são não-lineares, descobriu-se que os bósons de calibre correspondentes têm um efeito de antiblindagem sobre as cargas fracas e fortes. Deste modo, estas cargas efetivas diminuem gradualmente a curtas distâncias. Este comportamento é indicado na figura 16.7. É um fato

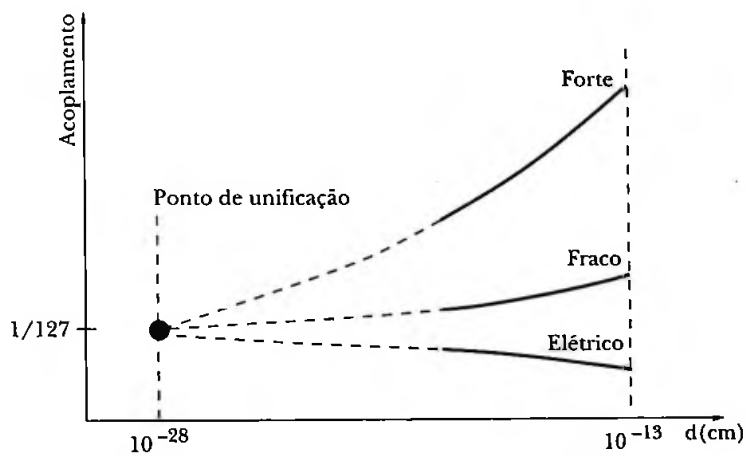


Figura 16.7

notável que, se estas interações forem extrapoladas, elas serão unificadas numa só interação a uma distância extremamente curta da ordem $d_0 = 10^{-28}$ cm.

G. t'Hooft mostrou [*Nucl. Phys.* **B79**, 276 (1974); **B105**, 538 (1976)] que as teorias unificadas contêm necessariamente partículas estáveis que possuem carga magnética, isto é, monopolos magnéticos. Estas aparecem como soluções inde-

pendentes do tempo com energia finita das equações não-lineares dos campos. Portanto, a existência dos monopolos magnéticos é uma conseqüência muito geral da unificação das interações fundamentais. A massa destes monopolos magnéticos é calculável, sendo da ordem

$$M \sim \frac{\hbar}{cd_0} \sim 10^{14} m_{\text{próton}} \tag{16.30}$$

Tendo em vista a sua enorme massa, qualquer monopolo que possa existir hoje deve ter sido produzido nos primórdios da existência do universo, quando este era extremamente quente. De acordo com o modelo de "Big-Bang", no intervalo inicial $\Delta t = 10^{-35}$s o universo era tão quente que colisões de partículas com energias da ordem 10^{14}GeV ou maiores ocorriam freqüentemente. Estas colisões poderiam produzir monopolos magnéticos. Uma vez produzidos, a sua abundância no universo poderia ser reduzida somente pela aniquilação de pares monopolos-antimonopolos. Em virtude da expansão do universo, esta aniquilação não foi completa, de modo que um certo número de monopolos poderia existir até hoje. O fato de os monopolos observáveis serem extremamente raros pode ser indicativo da forma pela qual ocorreu a evolução primordial do universo.

Embora o estudo teórico dos monopolos magnéticos possa levar a conexões surpreendentes entre a física de partículas e a cosmologia, vale a pena lembrar neste ponto as palavras de Faraday: "Nada é maravilhoso demais para ser verdade, se for consistente com as leis da natureza, mas em tais questões a experiência é o melhor teste".

PROBLEMAS

1. Mostre que, para $0 < \theta \leq \pi$, o potencial vetor:

$$\mathbf{A} = -g \frac{1 + \cos\theta}{r \operatorname{sen}\theta} \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

determina o campo magnético (16.10) para um monopolo. Verifique que, com esta escolha de **A**, a linha de Dirac está ao longo do eixo z positivo.

2. Mostre que, na notação tensorial quadridimensional, as equações (16.2) podem ser escritas na forma:

$$\partial_\mu F_{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} J_\nu \quad ; \quad \partial_\mu \tilde{F}_{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} K_\nu$$

onde $K_\nu = (\mathbf{J}_m, ic\rho_m)$ e $\tilde{F}_{\mu\nu} = (1/2i)\ \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$, com o tensor totalmente anti-simétrico $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ definido por:

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu\nu\alpha\beta \text{ for uma permutação par de 1,2,3,4} \\ -1 & \text{se } \mu\nu\alpha\beta \text{ for uma permutação ímpar de 1,2,3,4} \\ 0 & \text{quando pelo menos dois índices são iguais} \end{cases}$$

3. A transformação de dualidade mencionada nas equações (16.3) e (16.4) é um caso especial da seguinte transformação geral:

$$\mathbf{E} \to \mathbf{E}\cos\theta + \mathbf{B}\,\mathrm{sen}\,\theta \quad ; \quad \mathbf{B} \to -\mathbf{E}\,\mathrm{sen}\,\theta + \mathbf{B}\cos\theta$$

$$\rho \to \rho\cos\theta + \rho_m\,\mathrm{sen}\,\theta \quad ; \quad \rho_m \to -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta + \rho_m\cos\theta$$

$$\mathbf{J} \to \mathbf{J}\cos\theta + \mathbf{J}_m\,\mathrm{sen}\,\theta \quad ; \quad \mathbf{J}_m \to -\mathbf{J}\,\mathrm{sen}\,\theta + \mathbf{J}_m\cos\theta$$

onde θ é um parâmetro real arbitrário. Mostre que as equações (16.2) são invariantes sob esta transformação de dualidade.

4. A partir das equações modificadas de Maxwell (16.2), deduza a seguinte lei de conservação para as cargas magnéticas:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_m = 0 \quad .$$

5. Considere um monopolo como um solenóide extremamente comprido e delgado, como ilustrado na figura 16.3. Para que o solenóide não seja detectado experimentalmente, é necessário que a fase da função de onda quântica de uma partícula que é transportada em torno do solenóide seja igual a 1. Esta fase pode ser escrita como:

$$\exp\left[-\frac{iq}{\hbar c}\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}\right]=1 \quad .$$

Mostre que esta condição leva à condição de quantização de Dirac (16.17).

6. Considere o movimento de uma partícula com carga elétrica q_1 e carga magnética g_1 no campo de uma partícula fixa na origem com carga elétrica q_2 e carga magnética g_2.

(a) Mostre que a equação de movimento da primeira partícula é:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\left(q_1q_2+g_1g_2\right)\frac{\mathbf{r}}{r^3}+\left(q_1g_2-q_2g_1\right)\frac{\mathbf{v}}{c}\times\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad .$$

(b) Tomando o produto vetorial da equação de movimento com **r**, mostre que a quantidade vetorial:

$$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times m\mathbf{v}-\frac{1}{c}\left(q_1g_2-q_2g_1\right)\frac{\mathbf{r}}{r}$$

é uma constante de movimento. Esta constante de movimento é o momento angular do sistema.

(c) Mostre que a quantização da componente do momento angular ao longo da linha que conecta as partículas leva a:

$$\left(q_2g_1-q_1g_2\right)=\frac{1}{2}n\hbar c$$

e verifique que esta condição de quantização mais geral inclui a equação (16.17) como um caso especial.

7. Considere uma transformação de Lorentz do campo de um monopolo magnético estacionário. Determine os campos magnéticos e elétricos para um

monopolo em movimento, descrevendo qualitativamente as linhas do campo elétrico.

8. Mostre que em conseqüência da equação (16.2.d), uma corrente de monopolos gera um campo elétrico que satisfaz a relação:

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{4\pi}{c} I_m \quad .$$

Assim, um fluxo de monopolos cria uma força eletromotriz numa espira que circunda o fluxo de monopolos. Esta propriedade foi usada por Cabrera numa experiência para a detecção de monopolos. Ele utilizou uma bobina supercondutora, onde circulam as correntes geradas pela força eletromotriz. Considere uma bobina contendo N espiras, e suponha que um monopolo magnético executa um movimento oscilatório com freqüência ν através da bobina. Se o monopolo contém uma carga $g = c\hbar/2e$, determine a força eletromotriz média na bobina.

9. O acoplamento efetivo $\alpha(r)$ na eletrodinâmica quântica é descrito aproximadamente pela seguinte expressão:

$$\alpha(r) = \frac{\alpha}{1 + (2\alpha/3\pi)\ln(r/a_0)}$$

onde $\alpha \simeq 1/137$ é a constante de estrutura fina e a_0 é o raio de Bohr. Estime o valor numérico do acoplamento efetivo $\alpha(d_0)$, onde d_0 é a distância de unificação das interações eletromagnéticas, fracas e fortes.

APÊNDICES

APÊNDICE A
A. FÓRMULAS VETORIAIS

O objetivo deste apêndice é apresentar um resumo da análise vetorial, contendo fórmulas úteis para as aplicações na eletrodinâmica. Note que **A**, **B**, **C** são campos vetoriais arbitrários, sendo que Φ e ψ denotam campos escalares arbitrários.

A1. RELAÇÕES VETORIAIS

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \tag{A.1}$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} \tag{A.2}$$

$$\nabla\times\nabla\psi=0 \tag{A.3}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0 \tag{A.4}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A} \tag{A.5}$$

$$\nabla \cdot (\psi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \mathbf{A} \tag{A.6}$$

$$\nabla \times (\psi \mathbf{A}) = \nabla \psi \times \mathbf{A} + \psi \nabla \times \mathbf{A} \tag{A.7}$$

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \tag{A.8}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \tag{A.9}$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \tag{A.10}$$

A2. RELAÇÕES INTEGRAIS

Se V é o volume limitado por uma superfície fechada S, com $d\mathbf{a} = \hat{\mathbf{n}}\, da$ onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o versor normal externo a da, então:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} \qquad \text{(Teorema da divergência)} \tag{A.11}$$

$$\int_V \nabla \psi\, dv = \oint_S \psi\, d\mathbf{a} \tag{A.12}$$

$$\int_V \nabla \times \mathbf{A}\, dv = \oint_S d\mathbf{a} \times \mathbf{A} \tag{A.13}$$

$$\int_V \left(\Phi \nabla^2 \psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \psi\right) dv = \int_S \Phi\, d\mathbf{a} \cdot \nabla \psi \quad \text{(Identidade de Green)} \tag{A.14}$$

Se S é uma superfície aberta limitada pelo contorno C, cujo elemento de linha é $d\mathbf{l}$,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \qquad \text{(Teorema de Stokes)} \tag{A.15}$$

$$\int_S d\mathbf{a} \times \nabla \psi = \oint_C \psi\, d\mathbf{l} \tag{A.16}$$

A3. AS RELAÇÕES DIFERENCIAIS

Coordenadas cartesianas (x, y, z)

$$\nabla\Phi = \hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial\Phi}{\partial z} \tag{A.17}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{A.18}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{e}}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{e}}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{e}}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \tag{A.19}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \tag{A.20}$$

Coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z)

$$\nabla\Phi = \hat{\mathbf{e}}_\rho \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial\Phi}{\partial z} \tag{A.21}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{A.22}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{e}}_\rho \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{e}}_\phi \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho} \right) + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\phi\right) - \frac{\partial A_\rho}{\partial\phi} \right) \tag{A.23}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \tag{A.24}$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$\nabla\Phi = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \tag{A.25}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\, A_\theta\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \tag{A.26}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} = {} & \hat{\mathbf{e}}_r \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\, A_\phi\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right] + \\ & + \hat{\mathbf{e}}_\theta\left[\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\, A_\phi\right)\right] + \\ & + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\, A_\theta\right) - \frac{\partial Ar}{\partial\theta}\right]\end{aligned} \tag{A.27}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} \tag{A.28}$$

Apêndice B
B. Função Delta

Freqüentemente, encontramos a necessidade de discutir os efeitos relacionados com cargas localizadas, descritas como elementos puntiformes. Para descrever estas situações, é útil introduzir a função delta de Dirac. Esta função se anula, exceto quando seu argumento é zero:

$$\delta(x-x') = 0 \qquad , \qquad x \neq x' \tag{B.1}$$

sendo a integral desta função multiplicada por $f(x')$ dada por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\,\delta(x-x')\,dx' = f(x) \quad . \tag{B.2}$$

Em três dimensões podemos escrever que

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta(z-z') \tag{B.3}$$

$$\int_{\text{todo espaço}} f(\mathbf{r}')\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dv' = f(\mathbf{r}) \tag{B.4}$$

Vamos apresentar algumas propriedades adicionais da função delta:

$$\begin{aligned} &\delta(f)\,df = \delta(x)\,dx \\ &\int \psi(x)\,\delta[f(x)-\gamma]\,dx = \left[\frac{\psi(x)}{|df/dx|}\right]_{f(x)=\gamma} \end{aligned} \tag{B.5}$$

A função delta pode ser representada em termos de sua transformada de Fourier como:

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}d^3k \quad . \tag{B.6}$$

Usando esta representação, vamos provar a importante relação:

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad . \tag{B.7}$$

Para isso, escrevemos a função $1/r$ em termos da sua transformada de Fourier:

$$\frac{1}{r} = \int c(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k \quad . \tag{B.8.a}$$

Invertendo esta relação, temos que:

$$c(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dv \quad . \tag{B.8.b}$$

Nesta fórmula, integramos primeiramente com respeito ao ângulo, escolhendo o eixo polar na direção do vetor **k**:

$$\begin{aligned} c(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{1}{r} r^2 dr \int_0^\pi e^{-ikr\cos\theta} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{i}{k} \int_0^\infty \left(e^{-ikr} - e^{ikr} \right) dr = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{k^2} \quad . \end{aligned}$$

Substituindo este resultado em (B.8.a), temos:

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{k^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k \quad . \tag{B.9}$$

Aplicando o laplaciano nos dois lados desta equação, obtemos:

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -\frac{2}{(2\pi)^2} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k \quad .$$

Conseqüentemente, usando (B.6), vemos que:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{2}{(2\pi)^2}(2\pi)^3\,\delta(\mathbf{r}) = -4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad .$$

Esta equação pode ser expressa numa forma mais geral como:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad . \tag{B.10}$$

que se reduz a (B.7) transferindo a origem para $\mathbf{r}'$.

APÊNDICE C
C. POLINÔMIOS DE LEGENDRE

Os polinômios de Legendre $P_n(\mu)$ satisfazem a equação diferencial:

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{dP_n}{d\mu}\right]+n(n+1)P_n=0 \quad . \tag{C.1}$$

Vamos expandir $P_n(\mu)$ numa série de potências. Como queremos que $P_n(\mu)$ sejam finitos para valores de μ entre 0 e 1, consideramos somente potências positivas de μ:

$$P_n(\mu)=\sum_{l=0}^{\infty}A_{n,l}\,\mu^l \quad . \tag{C.2}$$

O primeiro termo da equação (C.1) leva então a:

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{dP_n}{d\mu}\right]=\sum_{l=0}^{\infty}A_{n,l}\,l(l-1)\mu^{l-2}-\sum_{l=0}^{\infty}A_{n,l}\,l(l+1)\mu^l \quad . \tag{C.3}$$

A primeira soma no lado direito desta equação pode ser reescrita notando que os primeiros dois termos se anulam:

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{\infty}A_{n,l}\,l(l-1)\mu^{l-2}&=\sum_{l=2}^{\infty}A_{n,l}\,l(l-1)\mu^{l-2}\\&=\sum_{l=0}^{\infty}A_{n,l+2}(l+2)(l+1)\mu^l \quad .\end{aligned} \tag{C.4}$$

Usando este resultado em (C.1), encontramos a seguinte relação entre os coeficientes:

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_{n,l+2}(l+2)(l+1)-A_{n,l}\,l(l+1)+A_{n,l}\,n(n+1)\right]\mu^l=0 \quad . \tag{C.5}$$

Igualando a zero os coeficientes das potências de μ^l, temos a seguinte relação de recorrência:

$$\frac{A_{n,l+2}}{A_{n,l}} = \frac{l(l+1) - n(n+1)}{(l+1)(l+2)} \tag{C.6}$$

Para determinar as funções $P_n(\mu)$, vamos considerar primeiramente o caso em que n é par. Vemos imediamente que, se l é ímpar, não existe nenhum valor de l tal que $l(l+1) - n(n+1)$ se anule. Assim, se existem termos ímpares, à medida que l aumenta, a razão $A_{n,l+2}/A_{n,l}$ se aproxima de 1. Isto cria problemas quando $\mu = 1$, porque a série vai divergir neste ponto. A única solução para este problema é colocar $A_{n,l} = 0$, pois neste caso todos os termos ímpares irão desaparecer. Não há problema com as potências pares de l. Quando chegamos ao termo $l = n$, a razão $A_{n,l+2}/A_{n,l}$ se anula. Assim $A_{n,n+2} = 0$ e a série termina. Concluímos que, se n for par, $P_n(\mu)$ contém somente potências pares de μ. Quando n é ímpar, podemos usar um argumento idêntico para mostrar que $P_n(\mu)$ terá apenas potências ímpares de μ.

De acordo com a convenção de normalização $P_n(1) = 1$, e sendo $P_0(\mu)$ uma constante, vemos que:

$$P_0(\mu) = 1 \quad . \tag{C.7}$$

Em seguida notamos que $P_1(\mu)$ é proporcional a μ. Assim, usando a nossa convenção, temos:

$$P_1(\mu) = \mu \quad . \tag{C.8}$$

Para obter $P_2(\mu)$ devemos usar a relação de recorrência (C.6) para obter $A_{2,2}/A_{2,0}$:

$$\frac{A_{2,2}}{A_{2,0}} = -\frac{6}{2} = -3 \quad .$$

Escolhendo $A_{2,0}$ de acordo com a nossa normalização temos:

$$P_2(\mu) = \frac{3\mu^2 - 1}{2} \quad . \tag{C.9}$$

Indo para $P_3(\mu)$, achamos primeiramente que:

$$\frac{A_{3,3}}{A_{3,1}} = -\frac{5}{3} \quad .$$

Fixando $A_{3,1}$ pela convenção, encontramos:

$$P_3(\mu) = \frac{5\mu^3 - 3\mu}{2} \quad . \tag{C.10}$$

Para provar a propriedade de ortogonalidade (3.27) consideremos a equação:

$$\int_{-1}^{+1} P_{n'}(\mu)\left\{\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{dP_n}{d\mu}\right] + n(n+1)P_n(\mu)\right\} d\mu = 0 \tag{C.11}$$

que é válida em virtude da equação diferencial (C.1). Integrando o primeiro termo por partes obtemos:

$$\int_{-1}^{1}\left(1-\mu^2\right)\frac{dP_{n'}(\mu)}{d\mu}\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}d\mu = n(n+1)\int_{-1}^{1} P_{n'}(\mu)P_n(\mu)\,d\mu \quad . \tag{C.12}$$

Em seguida vamos escrever uma equação correspondente com n e n' trocados. Subtraindo estas relações, obtemos:

$$\left[n(n+1) - n'(n'+1)\right]\int_{-1}^{1} P_{n'}(\mu)P_n(\mu)\,d\mu = 0 \quad . \tag{C.13}$$

Para obter a normalização da integral quando $n = n'$, vamos escrever:

$$\int_{-1}^{1}\left[P_n(\mu)\right]^2 d\mu = f(n) = \frac{an+b}{cn+d} \tag{C.14}$$

onde expressamos o fator de normalização $f(n)$ em termos das constantes a, b, c e d na forma indicada em (C.14). Estas constantes podem ser determinadas calculando explicitamente o lado esquerdo da equação com o auxílio das relações (C.7 – C.10). Encontramos assim que:

$$a = 0 \quad ; \quad b = 2 \quad ; \quad c = 2 \quad ; \quad d = 1 \quad . \tag{C.15}$$

Desta maneira, obtemos a relação de ortogonalidade dos polinômios de Legendre:

$$\int_{-1}^{1} P_n(\mu) P_{n'}(\mu)\, d\mu = \frac{2}{2n+1}\,\delta_{nn'} \quad . \tag{C.16}$$

Apêndice D
D. Funções de Bessel

As funções de Bessel são soluções da equação diferencial:

$$u^2\frac{d^2R}{du^2}+u\frac{dR}{du}+\left(u^2-n^2\right)R=0 \quad . \tag{D.1}$$

Vamos expandir $R(u)$ numa série de potências em torno do ponto $u = 0$:

$$R(u)=u^b\sum_{k=0}^{\infty}a_k u^k \quad . \tag{D.2.a}$$

Então:

$$\frac{dR}{du}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+b)a_k u^{k+b-1} \quad , \tag{D.2.b}$$

$$\frac{d^2R}{du^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+b)(k+b-1)a_k u^{k+b-2} \quad . \tag{D.2.c}$$

Substituindo (D.2) na equação diferencial (D.1) obtemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+b)(k+b-1)a_k+(k+b)a_k+\left(u^2-n^2\right)a_k\right]u^{k+b}=0 \quad . \tag{D.3}$$

Sendo as várias potências de u linearmente independentes, os coeficientes de cada potência devem se anular, resultando:

$$\left[(k+b)(k+b-1)+(k+b)-n^2\right]a_k+a_{k-2}=0 \quad . \tag{D.4}$$

Notando que $a_{-2} \equiv 0$, obtemos para $k = 0$ a relação:

$$b^2 - n^2 = 0 \tag{D.5}$$

cujas soluções são:

$$b_1 = n \geq 0 \quad ; \quad b_2 = -n \tag{D.6}$$

Para o caso $k = 1$, temos:

$$\left[(b+1)^2 - n^2\right] a_1 = 0 \quad . \tag{D.7}$$

Assim, $a_1 = 0$ para as duas soluções b_1 e b_2.

Se usarmos $b_1 = n$ na equação (D.4) obtemos:

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(n+k)^2 - n^2} = -\frac{a_{k-2}}{k(2n+k)} \tag{D.8}$$

que é a relação de recorrência para a equação de Bessel. Como $a_1 = 0$, esta equação requer que todos os a_k com k ímpar devem se anular. Desse modo, vemos que k é restrito a valores pares. Substituindo $k = 2\lambda$ na equação (D.8), λ será um número natural e

$$a_{2\lambda} = -\frac{a_{2\lambda-2}}{2^2 \lambda(n+\lambda)} \quad . \tag{D.9}$$

Assim:

$$\lambda = 1 \quad ; \quad a_2 = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 1(n+1)}$$

$$\lambda = 2 \quad ; \quad a_4 = -\frac{a_2}{2^2 \cdot 2(n+2)} = \frac{a_0}{\left(2^2\right)^2 \cdot 1 \cdot 2(n+1)(n+2)}$$

tendo em geral que:

$$a_{2\lambda} = -\frac{(-1)^{\lambda} a_0}{2^{2\lambda}\,\lambda!(n+1)(n+2)\ldots(n+\lambda)} \quad . \tag{D.10}$$

Portanto, no caso $b_1 = n$ a solução é:

$$R_1(u) = u^n \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda} a_0}{2^{2\lambda}\,\lambda!(n+1)(n+2)\ldots(n+\lambda)} u^{2\lambda} \quad . \tag{D.11}$$

Com a convenção $a_0 \equiv 1/(2^n\, n!)$, $R_1(u)$ torna-se a função de Bessel de ordem n:

$$\begin{aligned} J_n(u) &= \frac{u^n}{2^n n!} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda}}{2^{2\lambda}\,\lambda!(n+1)(n+2)\ldots(n+\lambda)} u^{2\lambda} \\ &= \left(\frac{u}{2}\right)^n \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(\lambda+n+1)} \left(\frac{u}{2}\right)^{2\lambda} \end{aligned} \tag{D.12}$$

A solução para $b_2 = -n$ é:

$$J_{-n}(u) = \left(\frac{u}{2}\right)^{-n} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(\lambda-n+1)} \left(\frac{u}{2}\right)^{2\lambda} \quad . \tag{D.13}$$

A solução geral da equação de Bessel é usualmente escrita em termos das funções $J_n(u)$ e $N_n(u)$, onde a função de Neumann $N_n(u)$ é dada por:

$$N_n(u) = \frac{J_n(u)\cos n\pi - J_{-n}(u)}{\operatorname{sen} n\pi} \quad . \tag{D.14}$$

Se $n \neq$ inteiro, é claro que $N_n(u)$ é linearmente independente de $J_n(u)$. No limite $n \to$ inteiro, pode ser mostrado que $N_n(u)$ continua sendo linearmente independente de $J_n(u)$.

As funções de Bessel $J_n(u)$ são regulares na origem, onde têm uma variação da forma:

$$J_n(u) \sim \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{u}{2}\right)^n \quad , \qquad u \ll 1 \quad . \tag{D.15}$$

As formas assintóticas destas funções são:

$$J_n(u) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cos\left(u - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad , \qquad u \gg 1 \quad . \tag{D.16}$$

As funções de Bessel têm portanto na região assintótica uma variação senoidal com amplitude decrescente. A região de transição entre as formas dadas pelas equações (D.15) e (D.16) ocorre na região $u \approx n$.

Por outro lado, as funções de Neumann são singulares na origem, onde:

$$N_n(u) \sim \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\ln\left(\dfrac{u}{2}\right) & (n=0) \\ \\ -\dfrac{\Gamma(n)}{\pi}\left(\dfrac{2}{u}\right)^n & (n \neq 0) \end{cases} \qquad u \ll 1 \tag{D.17}$$

Elas têm as seguintes formas assintóticas:

$$N_n(u) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \operatorname{sen}\left(u - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad , \qquad u \gg 1 \quad . \tag{D.18}$$

A partir das formas assintóticas (D.16) e (D.18), podemos ver que cada função de Bessel tem um número infinito de raízes. As primeiras raízes das funções de Bessel J_0 e J_1 são dadas na tabela seguinte:

Funções de Bessel	1ª raiz	2ª raiz	3ª raiz	4ª raiz
J_0	2,405	5,520	8,654	11,792
J_1	3,832	7,016	10,173	13,324

Mencionamos a seguir algumas propriedades úteis das funções de Bessel:

$$\frac{d}{du}\left[uJ_1(u)\right] = uJ_0(u) \quad . \tag{D.19.a}$$

Esta equação pode ser verificada diretamente a partir das séries (3.57):

$$\frac{d}{du}(uJ_1) = \frac{d}{du}\left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{2^3 2!} + \frac{u^6}{2^5 2! 3!} - \ldots\right] = u - \frac{u^3}{2^2} + \frac{u^5}{2^4 (2!)^2} - \ldots$$

$$= u\left[1 - (u/2)^2 + \frac{(u/2)^4}{(2!)^2} - \ldots\right] = uJ_0 \quad .$$

Integrando a equação (D.19.a) obtemos a relação:

$$\int uJ_0(u)\,du = uJ_1(u) \quad . \tag{D.19.b}$$

As funções $J_n(u)$ satisfazem as relações de recorrência:

$$J_{n-1}(u) + J_{n+1}(u) = \frac{2n}{u} J_n(u) \tag{D.20.a}$$

$$J_{n-1}(u) - J_{n+1}(u) = 2\frac{dJ_n(u)}{du} \quad . \tag{D.20.b}$$

Estas podem ser verificadas diretamente a partir da representação (D.12) para as funções de Bessel de ordem n.

Para determinar a condição de ortogonalidade satisfeita por estas funções, vamos denotar a n-ésima raiz de J_n por $k_m a$, isto é: $J_n(k_m a) = 0$. A equação diferencial satisfeita por $J_n(k_m\rho)$ é:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dJ_n(k_m\rho)}{d\rho}\right)+\left(k_m^2-\frac{n^2}{\rho^2}\right)J_n(k_m\rho)=0 \quad . \tag{D.21}$$

Se multiplicarmos esta equação por $\rho J_n(k_{m'}\rho)$ e integrarmos entre 0 e a, obtemos:

$$\int_0^a J_n(k_{m'}\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dJ_n(k_m\rho)}{d\rho}\right)d\rho + \tag{D.22}$$

$$+\int_0^a\left(k_m^2-\frac{n^2}{\rho^2}\right)\rho\,J_n(k_{m'}\rho)\,J_n(k_m\rho)d\rho=0 \quad .$$

Uma integração por partes, combinada com o fato de que $\rho J_n(k_m\rho)$ se anula em $\rho = 0$ e $\rho = a$, leva ao resultado:

$$-\int_0^a\rho\frac{dJ_n(k_{m'}\rho)}{d\rho}\frac{dJ_n(k_m\rho)}{d\rho}d\rho+\int_0^a\left(k_m^2-\frac{n^2}{\rho^2}\right)\rho\,J_n(k_{m'}\rho)\,J_n(k_m\rho)d\rho=0$$

Se escrevermos agora a mesma expressão, com os índices m e m' trocados, e subtrairmos estas expressões, obtemos a condição de ortogonalidade:

$$\left(k_m^2-k_{m'}^2\right)\int_0^a\rho J_n(k_m\rho)\,J_n(k_{m'}\rho)d\rho=0 \quad . \tag{D.23}$$

A partir das relações (D.20) e usando a equação diferencial, encontramos que a integral normalizada das funções de Bessel é dada por:

$$\int_0^a\rho J_n(k_m\rho)\,J_n(k_{m'}\rho)d\rho=\frac{a^2}{2}J_{n+1}^2(k_m a)\delta_{mm'} \quad . \tag{D.24}$$

BIBLIOGRAFIA

As referências seguintes relacionam os textos consultados que forneceram elementos úteis na preparação do presente curso. Para um estudo adicional em nível de pós-graduação, recomendamos especialmente os excelentes livros de Jackson e de Landau & Lifshitz, que apresentam um tratamento mais abrangente sobre diversos tópicos da teoria eletromagnética.

ABRAHAM, M. & BECKER, R. *Electricity and Magnetism.* London, Blackie, 1952.

ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions.* New York, Dover, 1965.

BARUT, A. O. *Electrodynamics and Classical Theory of Fields.* New York, Macmilan, 1964.

BLEANEY, B. I. & BLEANEY, B. *Electricity and Magnetism.* Oxford University Press, 1976.

BUTKOV, E. *Mathematical Physics.* Reading, Mass, Addison-Wesley, 1968.

CLEMMOW, P. C. & DOUGHERTY, J. *Electrodynamics of Particles and Plasmas.* Reading, Mass., Addison-Wesley, 1969.

DAVIES, P. *The New Physics.* Cambridge, Cambridge University Press, 1989.

DIRAC, P. A. M. *The Principles of Quantum Mechanics.* London, Oxford Univ. Press, 1958.

EYGES, L. *The Classical Electromagnetic Field.* New York, Dover, 1980.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B. & SANDS, M. *The Feynman Lectures on Physics.* Reading, Mass., Addison-Wesley, 1963.

FRENCH, A. P. *Special Relativity.* New York, Norton, 1968.

FRENKEL, J. "Classical Spectrum of Bremsstrahlung." *European Journal of Physics* **13**, 286 (1992).

GINZBURG, V. L. *Applications of Electrodynamics in Theoretical Physics and Astrophysics.* New York, Gordon and Breach, 1989.

GOLDSTEIN, H. *Classical Mechanics.* Reading, Mass., Addison-Wesley, 1980.

GRADSHTEIN, I. S. & RYZHIK, I. M. *Tables of Integral, Series and Products.* New York, Academic Press, 1965.

HAUSER, W. *Introduction to the Principles of Electromagnetism.* Reading, Mass., Addison-Wesley, 1971.

HEALD, M. A. & MARION, J. B., *Classical Electromagnetic Radiation.* New York, Saunders College Publishing, 1995.

JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics.* New York, Wiley, 1975. Traduzido para a língua portuguesa com o título: *Eletrodinâmica Clássica,* Rio de Janeiro, Editora Guanabara Dois, 1983.

JAUCH, J. M. & ROHRLICH, F. *The Theory of Photons and Electrons.* New York, Springer-Verlag, 1976.
KONOPINSKI, E. J. *Electromagnetic Fields and Relativistic Particles,* New York, McGraw-Hill, 1981.
LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. M. *The Classical Theory of Fields. Oxford,* Pergamon, 1971.
—— *Electrodynamics of Continuous Media.* Reading, Mass., Addison-Wesley, 1960.
LEVICH, B. *Theory of Electromagnetic Fields, Theory of Relativity.* North Holland, 1970.
LORRAIN, P. & CORSON, D. R. *Electromagnetic Fields and Waves.* San Francisco, W. H. Freeman, 1970.
OHANIAN, H. C. *Classical Electrodynamics.* Boston, Allyn and Bacon, 1988.
PANOFSKY, W. K. & PHILLIPS, M. *Classical Electricity and Magnetism.* Reading, Mass., Addison-Wesley, 1962.
RAYCHAUDHURI, A. K. *Classical Theory of Electricity and Magnetism.* Oxford, Oxford Univ. Press, 1990.
REITZ, J. R.; MILFORD, F. J. & CHRISTY, R. W. *Fundamentos da Teoria Eletromagnética,* Rio de Janeiro, Editora Campos, 1982.
ROHRLICH, F. *Classical Charged Particles.* Reading, Mass., Addison-Wesley, 1965.
SAKURAI, J. J. *Advanced Quantum Mechanics.* Reading, Mass., Addison-Wesley, 1967.
SCHWARTZ, M. *Principles of Electrodynamics.* New York, McGraw-Hill, 1972.
SEGRÈ, E. *Nuclei and Particles.* New York, W.A.Benjamin, 1965.
THIRRING, W. E. *Principles of Quantum Electrodynamics.* New York, Academic Press, 1958.
TONNELAT, M. A. *Electromagnetic Theory and Relativity.* Holland, Reider, 1966.
VANDERLINDE, J., *Classical Electromagnetic Theory.* New York, Wiley, 1993.
VONSOVSKY, S. V. *Magnetism of Elementary Particles.* Moscou, Mir, 1975.
WHITTAKER, E. T. *A History of the Theories of Aether and Electricity.* London, Nelson, 1953.

Índice Remissivo

A

Absorção de radiação, 344
Alfvén, ondas de, 194
Amortecimento radiativo, 331
Ampère, lei de, 31, 39
Ampère-Maxwell, equação de, 101
Amplitude de espalhamento, 340, 347
Ângulo médio quadrático, 294
Antenas lineares, 145
Antiblindagem, 385

B

Bessel, funções de, 78, 209, 402
Bethe, fórmula de, 288
Biot e Savart, lei de, 33
Blindagem
  da carga elétrica, 385
  da carga nuclear por elétrons atômicos, 295
Bósons de calibre, 384

C

Calibre dos potenciais, 106
  invariância de, 106
  transformações de, 103
Campo
  de uma carga em movimento uniforme, 205
  transformação relativística, 254
  de uma fonte oscilante, 128
  de radiação, 130, 131, 306
  de velocidade, 304
  elétrico, 19, 20
    energia do, 25
    induzido, 96
    pressão do, 115
  elétrico resultante de um dipolo, 48
  magnético devido ao dipolo, 58
Carga
  conservação da, 17, 100, 245
  de polarização, 28
  densidade de, 21, 27, 374
  livre, 29
  magnética, 374, 380, 382
Cherenkov
  efeito, 212
  na física de partículas, 216
Clausius-Mossotti, relação de, 342
Colisões
  com os elétrons atômicos, 285
  coulombianas, 294
  de partículas carregadas com a matéria, 285
  nucleares, 289
Compton, espalhamento, 338
Condutividade

complexa, 167
elétrica do plasma, 296
imaginária, 167
perfeita, 86
Conservação
da energia no campo eletromagnético, 107
de energia-momento em reações, 236
do momento no campo eletromagnético, 112
do momento angular, 117
Contorno
condições de, 40
periódicas, 366
problemas de, 87
em meios materiais, 67
Coordenadas
cartesianas, 68, 393
cilíndricas, 78, 393
esféricas, 72, 394
Corrente
de deslocamento, 100
de monopolos, 389
densidade de, magnética, 374
na teoria da relatividade, 245
Corrente elétrica, 30
de magnetização, 39
densidade de, 30
estacionária, 31
induzida, 95
livre, 39
Coulomb, lei de, 18
Covariância, 243, 251

D

Debye, raio de blindagem, 185, 298
Descontinuidade
da carga, 22
da magnetização, 89
do potencial, 49
Deslocamento
densidade de corrente de, 121
vetor de, 29, 41, 76
Diamagnetismo perfeito, 86
Dielétrico, 26
índice de refração do, 213
lei de Gauss para, 29
Diodo elétrico, 83
Dipolo elétrico, 47
Dirac
equação de, 60, 278
função delta de, 33, 395
linha de singularidade do monopolo, 376
monopolos de, 374
quantização de, 378
Dispersão
anômala, 344
de ondas eletromagnéticas, 341
relação de, 199
teoria clássica, 334
Dissipação, 347
Divergência, teorema da, 21, 100, 392
Doppler
deslocamento de, 224
efeito relativístico, 241
Drude, modelo de, 166, 296

E

Einstein, 221, 341
postulados de, 223
relação massa-energia, 234, 239
Eletrodinâmica quântica, 281
acoplamento efetivo, 389
correções radiativas na, 368
unificação das interações, 384
vácuo da, 385
Elétron
criação e aniquilação, 20, 239
estabilidade do, 17
freqüência de cíclotron do, 170
massa do, 18
raio clássico do, 119
relativístico, 211
Energia
conservação no campo eletromagnético, 107
da interação de dois dipolos, 54
de repouso do monopolo, 382
de um sistema de cargas, 23
de uma distribuição de cargas num campo externo, 53
densidade de, 25, 109
eletrostática do núcleo atômico, 26
fluxo de, 110
irradiada, 130, 215
por unidade de freqüência, 215
relativística, 234
Equações
da magneto-hidrodinâmica, 187

de onda, 154
do campo eletromagnético, 95
Equilíbrio dinâmico de um plasma, 191
Esfera
condutora, 18
dielétrica, 75
supercondutora, 87
uniformemente carregada, 25
Espaço quadridimensional, 226, 239, 244
Espalhamento
coulombiano de partículas por núcleos, 289
da luz pela luz, 20
de Rutherford, 293
frontal, 346
múltiplo, 294
Rayleigh, 338
Thompson, 336
Euler-Lagrange, equações de, 354, 360, 370
Expansão em multipolos, 49, 50, 56

F

Faraday, 386
efeito, 172
lei de, 95
Fase, velocidade de, 155, 171, 343
Fator de forma do núcleo, 293
Fibras óticas, 173
Fluxo
de corrente, 100
de energia, 110
de momento, 116
de monopolos, 384
do momento angular, 122
elétrico, 20
magnético, 96
Força
de Lorentz, 37, 107
de reação radiativa, 327
eletromotriz, 96
magnética, 35
entre monopolos, 382
Formulação Lagrangiana para o Campo Eletromagnético, 353
Fórmulas Vetoriais, 391
Fóton
energia do, 134
helicidade do, 165
massa do, 18
operadores de criação de, 368
spin do, 165
virtual, 95, 208
Fourier
análise de, 71, 128, 208
coeficientes de, 315
componentes de, 209
intregrais de, 344
transformada de, 214, 309
Freqüência
de colisão, 181
de Larmor, 61
de ressonância, 344
do plasma, 168, 187
Funções harmônicas, 67

G

Galileu, transformações de, 221
Gauss, lei de, 20, 29
Giromagnética, razão, 60, 66
Green, identidade de, 68, 392

H

Hamiltoniana para o campo eletromagnético, 365
Hertz, 101

I

Intensidade de radiação, 144, 333
Interferência, 125, 340
Invariante, 222, 236, 247
Invariâncias e leis de conservação, 361
Ionização, 285
energia de, 288
traços produzidos por monopolos, 383
Ionosfera, propagação de ondas, 168

L

Lagrangiana
para uma partícula carregada, 353
para o campo eletromagnético, 359
para um sistema contínuo, 356
Landau, regra de quantização, 381
Laplace, equação de, 21
em coordenadas cartesianas, 68
em coordenadas cilíndricas, 78
em coordenadas esféricas, 72

unicidade da solução, 67
Larmor
fórmula de, 316
precessão de, 59
Legendre, polinômios de, 72, 398
Lenz, lei de, 96
Liénard-Wiechert, potenciais de, 203, 212, 216
Lorentz
condição de, 105, 107, 247
densidade de força, 108
força de, 37, 107
derivação da, 266
invariante de, 246
transformação de, 225, 226
inversa, 228
matriz de, 243

M

Magnetização, 38
correntes de, 39
densidade de, 66
não-homogênea, 38
Massa eletromagnética, 117
do elétron, 118
evidência experimental, 119
Maxwell, 18, 99
distribuicão de velocidades de, 298
equações de, 95, 103, 374
tensor das tensões de, 115, 160
Meissner, efeito, 86
Minkowski
espaço de, 226
expressões de, 117
força de, 258
Momento angular, 60, 66
conservação do, 122
do campo eletromagnético, 372
em ondas planas, 162
magnético anômalo do elétron, 281
orbital do elétron, 99
Monopolos magnéticos, 374
em física de partículas elementares, 384
Movimento
em campos elétricos e magnéticos cruzados, 270
em campos magnéticos não uniformes, 272
relativístico de uma partícula com spin, 276
Multipolos Magnéticos, 56

N

Neumann, função de, 404, 405
Newton, leis de, 36, 222
Noether, teorema de, 362

O

Ohm
lei de, 46, 170
forma generalizada da, 188
Ondas
eletromagnéticas, 9, 43, 153
verificação experimental, 101
eliticamente polarizadas, 158
momento angular em, 162
planas em meios condutores, 165
planas em meios não condutores, 153
Oscilações forçadas, 334
Oscilador harmônico, 186
amortecimento radiativo de um, 331

P

Parseval, teorema de, 210, 218
Partícula(s)
arraste da, 272
colisões de, 285
em campos eletromagnéticos, 265
Plasma
condutividade elétrica do, 296
confinamento de um, 272
fenômenos eletromagnéticos em, 183
freqüência do, 187
ionosférico, 167
oscilações de, 184
Poisson, equação de, 21, 83, 184
Polarização
linear e circular, 157
longitudinal, 280
plano de, 172
vetor de, 157
vetores unitários de, 366
Potência
emitida por um dipolo oscilante, 138
média irradiada, 133
média por unidade de ângulo sólido, 146
total irradiada, 133
total irradiada por um quadrupolo, 143

total irradiada por uma antena de meia onda, 148
total irradiada por uma carga, 317, 325
Potencial
escalar, 20, 355
expansão em multipolos, 49
retardado, 125
vetor, 34, 56, 129
Poynting
teorema de, 111
vetor de, 110, 307
Pressão
de radiação, 160
magnética, 190

Q

Quadrivelocidade, 246, 277
Quadrivetor
energia-momento, 232
na eletrodinâmica, 243
Quadrupolo
potencial do, 51
radiação de, 139
tensor de, 51
Quantização, para a carga elétrica, 378

R

Radiação
por uma partícula numa órbita circular, 310
de Cherenkov, 213
de dipolo elétrico, 131
de dipolo magnético, 136
de frenagem, 320
de uma carga puntiforme, 303
por cargas com velocidade e aceleração colineares, 307
por sistemas de cargas e correntes, 125
Rayleigh
espalhamento de, 338
explicação para o azul do céu, 339
lei de, 339
Refração
índice de, 168, 171, 172
do meio dielétrico, 213
Relações vetoriais, 391
Relatividade restrita, 221-242
postulados da, 223
Rutherford, seção de choque diferencial, 293

S

Seção de choque
de absorção, 350
para o espalhamento, 339
para o espalhamento nuclear, 291
total, 348
Separação de variáveis, 68
Síncrotron, 270
radiação de, 314
Spin
da onda, 162
do fóton, 165
do próton, 139
equação de movimento para, 276
precessão do, 280
Stokes, teorema de, 392
Supercondutores, meios, 86
Superposição linear, 18
Susceptibilidade, 40

T

Tempo
característico, 330
dilatação do, 229
próprio, 257, 277, 318
retardado, 126, 204
Tensor
das tensões de Maxwell, 115, 260
de energia-momento do campo eletromagnético, 258, 364
propriedades de transformação, 251
Teorema ótico, 348
Thompson
espalhamento, 336
seção de choque, 337
Torque
sobre dipolos magnéticos, 59
Transformação relativística dos campos, 254

U

Unicidade, propriedade de, 68
Unidades, sistema de, 19, 30

V

Vácuo
clássico, 30

da eletrodinâmica quântica, 385
Velocidade
da luz, 213, 225, 240
de Alfvén, 196
fórmulas de transformação, 231

Z

Zeeman, efeito, 97

SOBRE O AUTOR

Josif Frenkel é professor titular do Instituto de Física da Universidade de São Paulo. Obteve o doutorado em física pela Universidade de Wisconsin (Estados Unidos) em 1973. Desenvolve pesquisas em física das partículas elementares e teoria quântica de campos, tendo publicado mais de 100 trabalhos em periódicos científicos internacionais.

ACADÊMICA

1. *Chordata: Manual para um Curso Prático*
   Elizabeth Höfling e outros
2. *O Renascimento*
   Teresa Aline Pereira de Queiroz
3. *Princípios de Eletrodinâmica Clássica*
   Josif Frenkel
4. *Laboratório de Virologia: Manual Técnico*
   José Alberto Neves Candeias
5. *Controle Robusto Multivariável: Módulo LQG/LTR*
   José Jaime da Cruz
6. *Jornalismo Econômico*
   Bernardo Kucinski
7. *Introdução à Biologia Vegetal*
   Eurico Cabral de Oliveira
8. *Mecânica Clássica Moderna*
   Walter F. Wreszinski
9. *Introdução à Física Estatística*
   Sílvio R. A. Salinas
10. *Probabilidade: Um Curso Introdutório*
    Carlos A. B. Dantas
11. *Modelagem e Simulação de Processos Industriais e de Sistemas Eletromecânicos*
    Claudio Garcia
12. *Cronobiologia: Princípios e Aplicações*
    Nelson Marques e Luiz Menna-Barreto (orgs.)
13. *Estudos de Morbidade*
    Maria Lúcia Lebrão
14. *Preparos Cavitários para Amálgama e Resina Composta*
    André Luiz Baracchini Centola e outros
15. *A Identidade e a Diferença*
    Edward Lopes
16. *Literatura Comparada*
    Sandra Nitrini
17. *Eletroquímica: Princípios e Aplicações*
    Edson A. Ticianelli e Ernesto R. Gonzalez
18. *Amostragem Probabilística*
    Nilza Nunes da Silva
19. *Pensando a Educação nos Tempos Modernos*
    Maria Lucia Spedo Hilsdorf
20. *Números: Uma Introdução à Matemática*
    César Polcino Milies e Sônia Pitta Coelho
21. *Arquiteturas no Brasil (1900-1990)*
    Hugo Segawa
22. *Distribuição de Renda: Medidas de Desigualdade e Pobreza*
    Rodolfo Hoffmann
23. *Ondas e Ondaletas: Da Análise de Fourier à Análise de Ondaletas*
    Pedro A. Morettin
24. *Introdução à Estrutura e Evolução Estelar*
    Walter J. Maciel
25. *Região e Geografia*
    Sandra Lencioni
26. *Museus Acolhem Moderno*
    Maria Cecília França Lourenço
27. *Energia Elétrica para o Desenvolvimento Sustentável*
    Lineu Belico dos Reis e Semida Silveira (orgs.)
28. *Astronomia: Uma Visão Geral do Universo*
    Amâncio C. S. Friaça, Elisabete Dal Pino, Laerte Sodré Jr. e Vera Jatenco-Pereira (orgs.)

29. *Manual Prático de Microbiologia Básica*
Rogério Lacaz-Ruiz

30. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos*
Armando de Oliveira Fortuna

31. *Os Significados Urbanos*
Lucrécia d'Alessio Ferrara

32. *Ética em Computação*
Paulo Cesar Masiero

33. *Patologias Cardíacas da Gestação*
Januário de Andrade (org.)

34. *Um Curso de Álgebra Linear*
Flávio Ulhoa Coelho e Mary Lilian Lourenço

35. *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*
Tânia Tomé e Mário José de Oliveira

36. *Novos Instrumentos de Gestão Ambiental Urbana*
Heliana Comin Vargas e Helena Ribeiro (orgs.)

37. *Gestão de Serviços de Saúde: Descentralização/ Municipalização do SUS*
Márcia Faria Westphal e Eurico Sampaio de Almeida (orgs.)

38. *Avaliação e Classificação de Reservas Minerais*
Jorge Kazuo Yamamoto

39. *Teoria Quântica dos Campos*
Marcelo Otavio Caminha Gomes

40. *Noções de Probabilidade e Estatística*
Marcos Nascimento Magalhães e Antonio Carlos Pedroso de Lima

41. *Astrofísica do Meio Interestelar*
Walter J. Maciel

42. *Princípios de Oceanografia Física de Estuários*
Luiz Bruner de Miranda, Belmiro Mendes de Castro e Björn Kjerfve

43. *Gravidez & Nascimento*
Maria Delizete Bentivegna Spallicci, Maria Teresa Zulini da Costa e Marta Maria Melleiro (orgs.)

44. *O Discurso Ficcional na TV: Sedução e Sonho em Doses Homeopáticas*
Anna Maria Balogh

45. *Do Léxico ao Discurso pela Informática*
Zilda Maria Zapparoli e André Camlong

46. *Petrologia Metamórfica: Fundamentos para a Interpretação de Diagramas de Fase*
Maria Angela Fornoni Candia, Gergely Andres Julio Szabó e Eliane Aparecida Del Lama

47. *Cartografia Temática: Cadernos de Mapas*
Marcello Martinelli

48. *Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas*
Humberto Lima Soriano

49. *Técnicas Eletroquímicas em Corrosão*
Stephan Wolynec

50. *Termodinâmica*
Walter F. Wreszinski

51. *Mecânica Quântica*
A. F. R. de Toledo Piza

52. *Transitórios Eletromagnéticos em Sistemas de Potência*
Luiz Cera Zanetta Júnior

53. *Fundamentos de Química Experimental*
Maurício Gomes Constantino, Gil Valdo José da Silva e Paulo Marcos Donate

54. *Curso Básico de Terminologia*
Lidia Almeida Barros

55. *Macroeconomia Aplicada à Análise da Economia Brasileira*
Carlos José Caetano Bacha

56. *Descobrindo o Universo*
Sueli M. M. Viegas e Fabíola de Oliveira (orgs.)

57. *Árabe e Português: Fonologia Contrastiva com Aplicação de Tecnologias Informatizadas*
Safa Abou Chahla Jubran

58. *Iniciação a Conceitos de Sistemas Energéticos para o Desenvolvimento Limpo*
José Aquiles B. Grimoni, Luiz Cláudio R. Galvão e Miguel Edgar M. Udaeta (orgs.)

59. *Introdução à Cosmologia*
Ronaldo E. de Souza

60. *Hidrodinâmica e Ventos Estelares: Uma Introdução*
Walter J. Maciel

61. *Dinâmica da Água no Solo*
Paulo Leonel Libardi

Título	*Princípios de Eletrodinâmica Clássica*
Produção	Silvana Biral
Projeto Gráfico	Plinio Martins Filho
Capa	Lygia Eluf
Editoração Eletrônica	Ponto & Linha
Editoração de Texto	Alice Kyoko Miyashiro
Revisão de Texto	Geraldo Gerson de Souza
Revisão de Provas	Cristina Yamazaki
	Juliana Franco Cardoso
Ilustrações	Ponto & Linha
Divulgação	Regina Brandão
Secretaria Editorial	Eliane dos Santos
Formato	19,5 x 27 cm
Mancha	32 x 52 paicas
Tipologia	New Baskerville 11/16.25
Papel	Cartão Supremo 250 g/m² (capa)
	Off set LD 90 g/m² (miolo)
Número de Páginas	424
Tiragem	1000
Fotolito	Ponto & Linha
Impressão	Imprensa Oficial