# 7600054 — Sistemas Complexos

**Gonzalo Travieso**

2020-04-13

# Outline


1. Estabilidade estrutural

2. Bifurcação

# Pontos fixos hiperbólicos

- Um ponto fixo $\mathbf{x}^*$ de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é dito hiperbólico se *nenhum dos autovalores do jacobiano nesse ponto* $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)$ *tem valor absoluto 1*.
- No caso de mapas unidimensionais, se o valor absoluto da derivada de $f(x)$ em $x^*$ for diferente de 1.
- Se algum dos autovalores do jacobiano (ou a derivada) tiver valor absoluto 1, o ponto fixo é denominado não-hiperbólico.

# Estabilidade estrutural

- O nome estabilidade estrutural é usado para indicar a estabilidade de um ponto fixo com relação a pequenas mudanças nos parâmetros. "Estabilidade" quer dizer aqui que o ponto fixo não muda sua característica.
- Para analisar isso, consideramos uma família de mapas que depende de um conjunto de parâmetros:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu),$$

  onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é o ponto no espaço de estado e $\mu \in \mathbb{R}^r$ é um conjunto de $r$ parâmetros.
- Consideramos que a função $\mathbf{f}$ é suficientemente suave. Dito de outra forma ela é $C^k$ para algum $k$ suficiente.
- Seja agora

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mu^*)$$

  um ponto fixo hiperbólico do mapa com os parâmetros fixados em $\mu^*$.

# Estabilidade estrutural (cont)

- Nessas condições, existe uma função suave $\mathbf{x}(\mu)$ tal que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(\mu), \mu) = \mathbf{x}(\mu)$$

  para $\mu \approx \mu^*$ com $\mathbf{x}(\mu^*) = \mathbf{x}^*$.
- Como os autovetores de $\mathbf{Df}(\mathbf{x}(\mu), \mu)$ são funções contínuas de $\mu$ para $\mu \approx \mu^*$, então os pontos fixos $\mu$ são também hiperbólicos e têm a mesma estabilidade que $\mathbf{x}^*$.
- Portanto, pontos fixos hiperbólicos são estruturalmente estáveis.

# Questão

## Responda

O que acontece de diferente se o ponto fixo é não-hiperbólico?

# Bifurcação

Num sistema dinâmico, quando ocorre uma mudança no comportamento de longo prazo em termos dos tipos, número ou características dos atratores devido à uma mudança nos parâmetros do sistema, dizemos que ocorreu uma bifurcação.

# Bifurcação de nó de sela (*saddle node*)

- Considere novamente o nosso mapa 1:

$$f(x, \mu) = \mu + x - x^2.$$

- Temos que

$$f(0, 0) = 0,$$

  e portanto $x = 0$ é um ponto fixo para $\mu = 0$.

- Entretanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = (1 - 2x)_{x=0} = 1,$$

  e portanto o ponto fixo é não-hiperbólico.

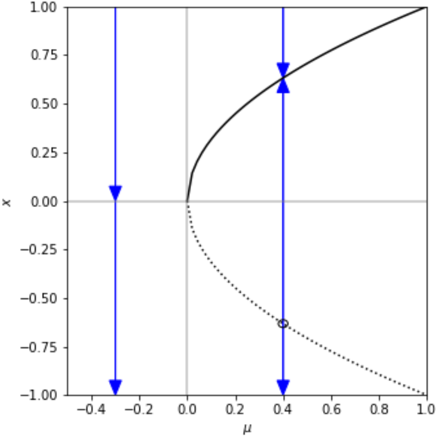
# Bifurcação de nó de sela (cont)

- Para $\mu < 0$, não há pontos fixos ($x = \mu + x - x^2$ não tem solução real).
- Para $\mu > 0$ temos dois pontos fixos:

$$x^* = \pm\sqrt{\mu}.$$

- Como já vimos, e pode ser verificado facilmente, $x = \sqrt{\mu}$ é estável, enquanto que $x = -\sqrt{\mu}$ é instável.
- Portanto, quando $\mu$ passa de negativo para positivo (passando pela situação com um ponto fixo não-hiperbólico em $x = 0$), surgem dois pontos fixos, um deles instável e o outro estável.
- Isto é denominado uma bifurcação de nó de sela.

# Retrato de fase



# Condições para uma bifurcação de nó de sela

- Ponto fixo $x^*$ para parâmetro $\mu^*$: $x^* = f(x^*, \mu^*)$
- O ponto fixo é não-hiperbólico: $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, \mu^*) = 1$.
- A derivada em relação ao parâmetro é não-nula: $\frac{\partial f}{\partial \mu}(x^*, \mu^*) \neq 0$.
- A derivada segunda em relação a $x$ é não nula: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, \mu^*) \neq 0$.

## Exercício

Verifique que essas condições são satisfeitas para o mapa 1 em $x^* = 0$ e $\mu^* = 0$.

# Bifurcação transcrítica

- Considere agora o nosso mapa 2:

$$f(x,\mu) = x + \mu x - x^2.$$

- Novamente, $x = 0$ é ponto fixo para $\mu = 0$.
- Também novamente, esse ponto fixo é não-hiperbólico:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = (1 + \mu - 2x)_{x=0,\mu=0} = 1.$$

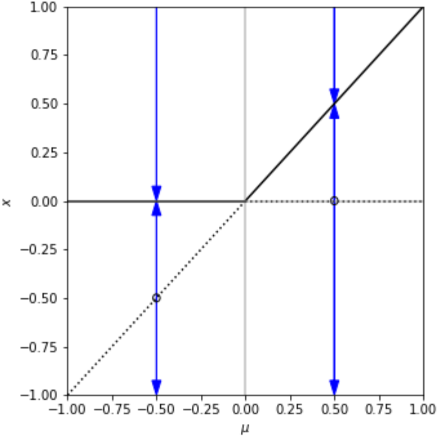
# Bifurcação transcrítica (cont)

- Os pontos fixos são as soluções de

$$x(\mu - x) = 0,$$

  isto é, $x = 0$ e $x = \mu$ para todos os valores de $\mu$.
- $x = 0$ é estável se $|1 + \mu| < 1$, isto é, para $-2 < \mu < 0$. Para $\mu > 0$ ele é instável.
- $x = \mu$ é estável se $|1 - \mu| < 1$, e portanto é estável na faixa $0 < \mu < 2$. Para $\mu < 0$ ele é instável.
- Resumindo, ao passar de $\mu < 0$ para $\mu > 0$ o ponto fixo que era estável se torna instável, enquanto o ponto fixo que era instável se torna estável.
- Isso é donominado uma bifurcação transcrítica.

# Retrato de fase



# Condições para a bifurcação transcrítica

- Ponto fixo $x^*$ para parâmetro $\mu^*$: $x^* = f(x^*, \mu^*)$
- O ponto fixo é não-hiperbólico: $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, \mu^*) = 1$.
- A derivada em relação ao parâmetro é nula: $\frac{\partial f}{\partial \mu}(x^*, \mu^*) = 0$.
- A derivada segunda em relação a $x$ é não nula: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, \mu^*) \neq 0$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x^*, \mu^*) \neq 0$.

**Exercício**

Verifique que essas condições são satisfeitas para o mapa 2 em $x^* = 0$ e $\mu^* = 0$.

# Bifurcação de forquilha

- Considere agora o nosso mapa 3:

$$f(x,\mu) = x + \mu x - x^3.$$

- Novamente, $x = 0$ é ponto fixo para $\mu = 0$.
- Também

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \left(1 + \mu - 3x^2\right)_{x=0,\mu=0} = 1,$$

e o ponto fixo é não-hiperbólico.

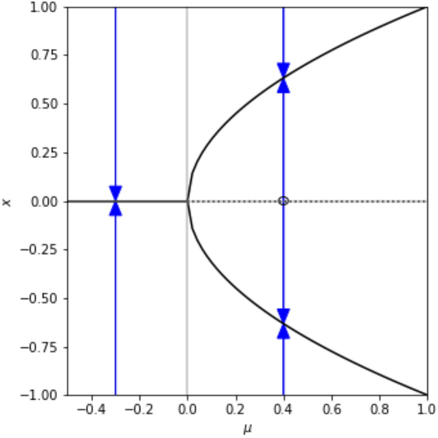
# Bifurcação de forquilha (*pitchfork*)

- Os pontos fixos são as soluções de

$$x(\mu - x^2) = 0,$$

  isto é, $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{\mu}$.
- $x = 0$ é estável se $|1 + \mu| < 1$, isto é, para $-2 < \mu < 0$.
- $x = \pm\sqrt{\mu}$ só existem para $\mu > 0$ e são estáveis se $|1 - 2\mu| < 1$, isto é, em $0 < \mu < 1$.
- Resumindo, na transição de $\mu < 0$ para $\mu > 0$ um ponto fixo ($x = 0$) estável se torna instável, enquanto que dois novos pontos fixos ($x = \pm\sqrt{\mu}$) estáveis surgem.
- Isto é denominado uma bifurcação de forquilha.

# Retrato de fase



# Condições para a bifurcação de forquilha

- Ponto fixo $x^*$ para parâmetro $\mu^*$: $x^* = f(x^*, \mu^*)$
- O ponto fixo é não-hiperbólico: $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, \mu^*) = 1$.
- A derivada em relação ao parâmetro é nula: $\frac{\partial f}{\partial \mu}(x^*, \mu^*) = 0$.
- A derivada segunda em relação a $x$ é nula: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, \mu^*) = 0$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x^*, \mu^*) \neq 0$.
- A derivada terceira em relação a $x$ é não-nula: $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x^*, \mu^*) \neq 0$.

**Exercício**

Verifique que essas condições são satisfeitas para o mapa 3 em $x^* = 0$ e $\mu^* = 0$.

# Bifurcação de duplicação de período

- Vamos considerar agora o seguinte mapa:

$$f(x,\mu) = -(1+\mu)x + x^3.$$

- O ponto $x = 0$ é novamente um ponto fixo para $\mu = 0$.
- A derivada nesse ponto fixo vale:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\mu) = \left(-(1+\mu) + 3x^2\right)_{x=0,\mu=0} = -1,$$

e o ponto fixo é não-hiperbólico.

# Bifurcação de duplicação de período (cont)

- Os pontos fixos são as soluções de

$$x(x^2 - 2 - \mu) = 0,$$

  que resulta em $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{\mu + 2}$.
- $x = 0$ é estável se $|1 + \mu| < 1$, isto é, $-2 < \mu < 0$.
- $x = \pm\sqrt{\mu + 2}$ só existem para $\mu \geq -2$ e são sempre instáveis, pois $|5 + 2\mu| > 1$ só é satisfeito para $-3 < \mu < -2$.
- Portanto, para $\mu > 0$ os três pontos fixos desse mapa são instáveis!

# Bifurcação de duplicação de período (cont)

- Vejamos agora a segunda iteração do mapa

$$f^2(x,\mu) = f(f(x,\mu),\mu),$$

e portanto

$$f^2(x,\mu) = -(1+\mu)(-(1+\mu)x + x^3) + (-(1+\mu)x + x^3)^3.$$

- Então temos (com uma certa quantidade de manipulação algébrica):

$$f^2(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial f^2}{\partial x}(0,0) = 1, \qquad \frac{\partial^2 f^2}{\partial x^2}(0,0) = 0,$$

$$\frac{\partial^3 f^2}{\partial x^3}(0,0) = -12, \qquad \frac{\partial f^2}{\partial \mu}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f^2}{\partial x \partial \mu}(0,0) = 2.$$

- Isto significa que $f^2$ tem uma bifurcação de forquilha em $x^* = 0$, $\mu^* = 0$.

# Bifurcação de duplicação de período (cont)

- Isso significa que surgem dois novos pontos fixos de $f^2(x, \mu)$, que serão pontos periódicos de período 2 de $f(x, \mu)$.
- Veja que esse é valor onde o ponto fixo $x = 0$ deixa de ser estável. Portanto um ponto fixo desaparece e é substituído por um ciclo de período 2.

# Condições para a bifurcação de duplicação de período

- Ponto fixo $x^*$ em $\mu^*$: $f(x^*, \mu^*) = x^*$.
- Ponto não hiperbólico, com derivada negativa: $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, \mu^*) = -1$.
- O mapa $f^2(x, \mu) = f(f(x, \mu), \mu)$ deve ter uma bifurcação de forquilha em $x^*$ com $\mu^*$:
  - $\frac{\partial f^2}{\partial x}(x^*, \mu^*) = 1$
  - $\frac{\partial f^2}{\partial \mu}(x^*, \mu^*) = 0$
  - $\frac{\partial^2 f^2}{\partial x^2}(x^*, \mu^*) = 0$
  - $\frac{\partial^2 f^2}{\partial x \partial \mu}(x^*, \mu^*) \neq 0$
  - $\frac{\partial^3 f^2}{\partial x^3}(x^*, \mu^*) \neq 0$

# Uma observação

Veja que, se $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ são os dois pontos de período 2 de $f(x, \mu)$ para $\mu = \mu^*$, então:

$$\frac{\partial f^2}{\partial x}(x^{(1)}, \mu^*) = \frac{\partial}{\partial x} f(f(x, \mu), \mu)\bigg|_{x=x^{(1)}, \mu=\mu^*}.$$

Pela regra da cadeia, calculamos o produto da derivada da função de fora pela derivada da função de dentro. Mas enquanto a derivada da função de dentro é avaliada em $x^{(1)}$, a derivada da função de fora deve ser avaliada em $f(x^{(1)}, \mu^*) = x^{(2)}$. Portanto:

$$\frac{\partial f^2}{\partial x}(x^{(1)}, \mu^*) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^{(1)}, \mu^*) \frac{\partial f}{\partial x}(x^{(2)}, \mu^*).$$

Chegaremos ao mesmo resultado se avaliarmos a derivada de $f^2$ em $x^{(2)}$, confirmando que basta estabelecer a estabilidade de um dos pontos fixos de $f^2$ para verificar a estabilidade do ciclo limite.

# Exemplo

O mapa logístico $L(x,r) = rx(1-x)$ tem uma bifurcação de duplicação de período em $r=3$ (ponto fixo $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$). Lembrando: $L^2(x,r) = r^2x(1-x)(1-rx(1-x))$.

- $L(\frac{2}{3},3) = \frac{2}{3}$.
- $\frac{\partial L}{\partial x}(\frac{2}{3},3) = (r(1-2x))_{x=2/3,r=3} = -1$.
- $\frac{\partial L^2}{\partial x} = \left(r^2(1-2x)(1-2rx(1-x))\right)_{x=2/3,r=3} = 1$.
- $\frac{\partial L^2}{\partial r} = (rx(1-x)(2-3rx(1-x)))_{x=2/3,r=3} = 0$.
- $\frac{\partial^2 L^2}{\partial x^2} = \left(2r^2(6rx(1-x)-1-r)\right)_{x=2/3,r=3} = 0$.
- $\frac{\partial^2 L^2}{\partial x \partial r} = (2r(1-2x)(1-3rx(1-x)))_{x=2/3,r=3} = 2$.
- $\frac{\partial^3 L^2}{\partial x^3} = \left(12r^3(1-2x)\right)_{x=2/3,r=3} = 108$.

# Bifurcação de Hopf

- O nosso próximo tipo de bifurcação não ocorre em mapas unidimensionais.
- Considere então o mapa logístico com retardo:

$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_{t-1}).$$

Precisamos re-escrever usando $y_t = x_{t-1}$:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= rx_t(1 - y_t), \\ y_{t+1} &= x_t. \end{aligned}$$

- Como já visto, os pontos fixos são $[0, 0]^T$ e $[1 - 1/r, 1 - 1/r]^T$.
- Para analisar a estabilidade, verificamos o jacobiano:

$$\begin{bmatrix} r(1-y) & -rx \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

# Bifurcação de Hopf (cont)

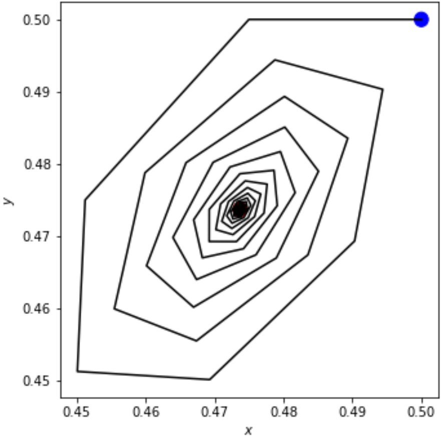
- No ponto fixo não trivial $[1 - 1/r, 1 - 1/r]^T$ os autovalores do jacobiano são
$$\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5 - 4r}\right).$$
- Para $1 < r \leq \frac{5}{4}$ os autovalores são reais e de módulo menor do que 1.
- Para $r > 5/4$ os autovalores passam a ser complexos:
$$\frac{1}{2}\left(1 \pm i\sqrt{4r - 5}\right).$$
- O ponto fixo não trivial será então não-hiperbólico quando
$$\left|\frac{1}{2}\left(1 \pm i\sqrt{4r - 5}\right)\right| = \frac{1}{4}\left(1 + (4r - 5)\right) = 1.$$

  Isto corresponde a
$$r = 2.$$

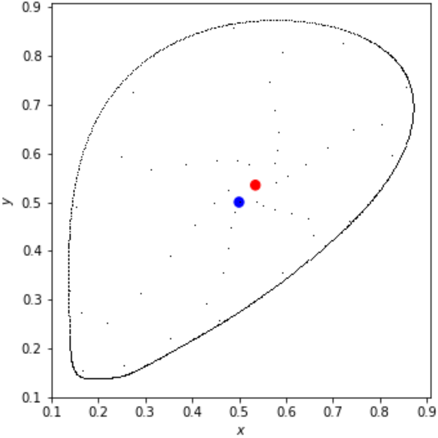
# Bifurcação de Hopf (cont)

- Para $r = 2$, no ponto fixo $[1/2, 1/2]^T$ os autovalores são $e^{\pm i\pi/3}$ (duas das raízes sextas da unidade).
- Para $r < 2$, o ponto fixo é estável. Para $r > 2$ aparece um ciclo limite.
- Esta é denominada uma bifurcação de Hopf.

# Exemplo: Mapa logistico com retardo e $r = 1.9$



# Exemplo: Mapa logistico com retardo e $r = 2.15$



# Exercício

## Experimento

Experimente rodar o mapa logístico com atraso para alguns outros valores de $r$ pouco abaixo e pouco acima de 2.
O que você nota à medida que $r$ vai se afastando de 2 para cada lado?