Noções de Probabilidades Parte II

Vamos considerar alguns exemplos.

Casal com dois filh@s (meninos ou meninas)

"Um casal é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de que as duas crianças sejam meninas? Se sei que a criança mais velha é menina, qual é a prob. das duas serem meninas? Se, por outro lado, souber apenas que uma das crianças é menina (por exemplo, vi o casal com essa criança do sexo feminino, mas não sei se era a criança mais nova ou mais velha); qual é a prob. agora de que as duas crianças sejam meninas?"

Qual seria a primeira providência para tentar resolver este problema?

Primeiro temos que formular o problema!

Ou seja, o problema precisa ser formulado matematicamente.

Qual é o espaço amostral e quais são as probabilidades?

O espaço amostral parece natural: são duas crianças e há apenas uma característica

$$\Omega = \{ (H,H), (H,M), (M,H), (M,M) \}$$

"mais velha" "mais nova"

Quais são as probabilidades?

Parece natural considerarmos, pelo menos inicialmente, a situação mais simples: o sexo de cada criança pode ser H ou M com a mesma probabilidade (1/2) e o sexo da mais velha e da mais nova são independentes.

Obs: É importante notar que estamos fazendo duas suposições (prob. = 1/2 e independência) que poderiam NÃO ser verdade na situação de interesse. Por exemplo, poderia ser que as crianças foram adotadas; ou houve fertilização "in vitro"; ou outra situação ainda mais bizarra. O ponto aqui é: apesar das hipóteses, das suposições serem razoáveis (prob. 1/2 e independência) elas não têm NECESSARIAMENTE que ser verdadeiras numa situação real. Ao fazer suposições você está escolhendo uma particular versão do problema.

Vamos considerar a versão mais simples: Ω como acima, assumindo equiprobabilidade.

$\Omega = \{(H,H), (H,M), (M,H), (M,M)\}$

Se $\omega \in \Omega$, $P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$

O problema menciona três eventos:

A = "as duas crianças são meninas"

B = "a criança mais velha é menina"

C = "pelo menos uma das crianças é menina"

e o problema pergunta

$P(A) = ?$ $\quad P(A|B) = ?$ $\quad P(A|C) = ?$

(Tente primeiro determinar a resposta "intuitivamente" ...)

Usando a teoria que já foi apresentada:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{(M,M)\})}{P(\{(M,H), (M,M)\})} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(\{(M,M)\})}{P(\{(M,H), (M,M), (H,M)\})} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

"Problema do Prisioneiro"

(lista2.pdf)

6. Três prisioneiros são informados pelo carcereiro, que nunca mente, que um deles foi escolhido ao acaso para ser executado ao amanhecer enquanto os outros dois irão ser libertados. O prisioneiro A pede ao carcereiro que lhe diga confidencialmente o nome de um dos que vai ser solto entre os outros dois, argumenta ele que isto não lhe trará informação alguma, visto que pelo menos um dos outros dois vai ser solto. O carcereiro recusa, argumentando que se A souber isto, a probabilidade dele ser executado que era $1/3$ passa a ser de $1/2$. Algum dos dois tem razão ? Construa um modelo adequado a esta situação.

Novamente, começamos formulando o problema. Encontramos uma ambiguidade, algo que precisa ser definido mas que pode ser feito de formas distintas:
A ambiguidade é: qual é o procedimento do carcereiro se o prisioneiro A for o escolhido e os dois outros, B e C sairão livres? Como ele escolhe entre os dois? Isso importa?

Como antes, o melhor é considerar primeiro a solução mais simples: se B e C vão sair livres, o carcereiro indica um deles, escolhendo "ao acaso", ou seja, com prob. iguais.

Com essa escolha,
qual é o Ω e quais são as probabilidades?

O espaço amostral é o conjunto de todos os resultados do experimento aleatório.

Quais são os possíveis resultados neste problema? Temos duas informações

1) Quem foi escolhido: A, B ou C
2) O que o carcereiro diz para A que pode ser "B sai livre" ou "C sai livre".

Então $\Omega = \{(A,b), (A,c), (B,c), (C,b)\}$

"A foi escolhido"

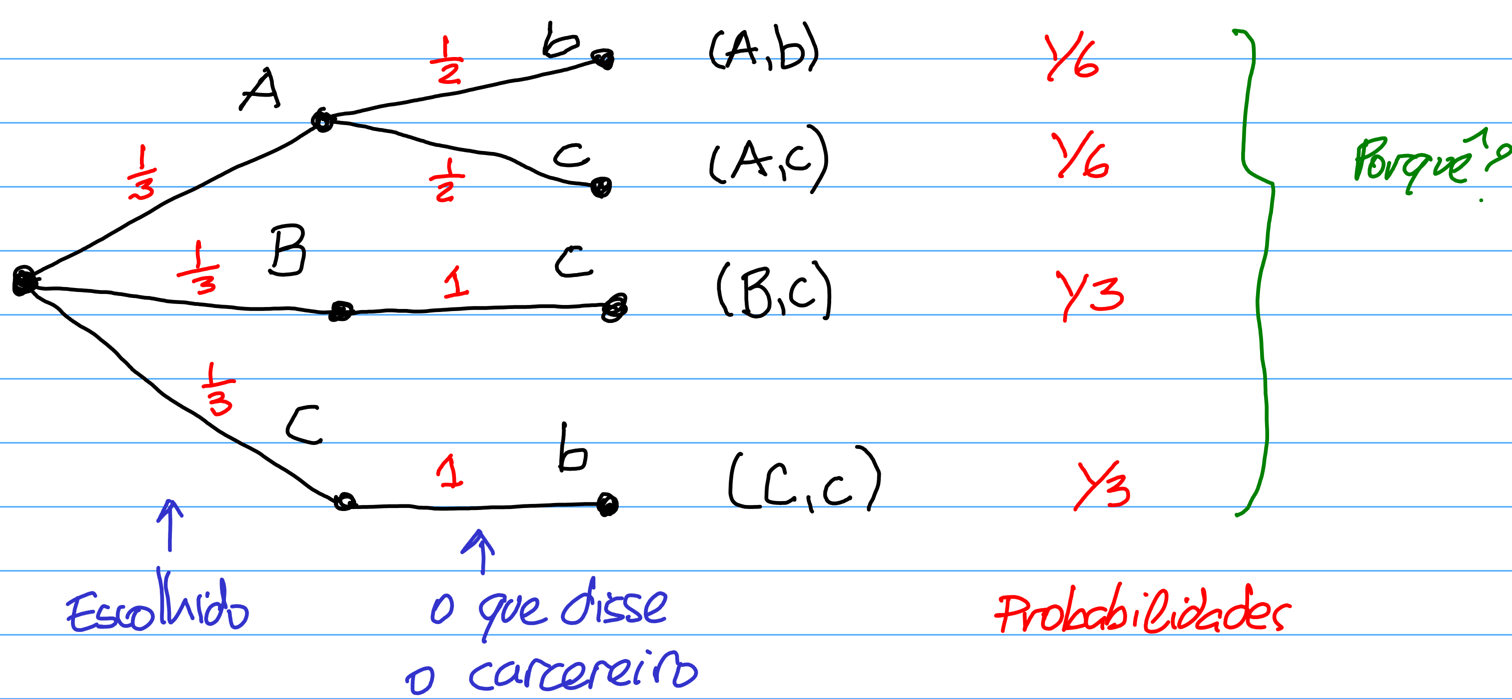
carcereiro falou "B sai livre"

Carcereiro falou "C sai livre"

"B escolhido"

"C escolhido"

Para encontrar as probabilidades podemos usar um diagrama (árvore de possibilidades)



Obs: vamos simplificar a notação: $P((A,b)) = P(\{(A,b)\})$, etc...

Defino o evento A = "foi escolhido A" $= \{(A,b),(A,c)\}$

Justificando o cálculo das prob. acima

$$P((A,b)) = \underbrace{P(A)}_{\text{prob. de A ser escolhido}} \cdot \underbrace{P((A,b)|A)}_{\text{Prob. de A ser escolhido e o carcereiro falar B sabendo-se que A foi escolhido}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

analogamente:

$$P((A,c)) = P(A)\cdot P((A,c)|A) = 1/6$$

$$P((B,c)) = P(B)\cdot P((B,c)|B) = 1/3 \cdot 1 = 1/3$$

$$P((C,b)) = P(C)\cdot P((C,b)|C) = 1/3 \cdot 1 = 1/3$$

Com o experimento aleatório definido, qual são as perguntas?

Há duas questões

1) O que o carcereiro fala tem alguma informação?
2) Qual são as prob. após a fala do carcereiro?

Notação $\begin{cases} c = \text{"carcereiro falou C"} = \{(A,c),(B,c)\} \\ b = \text{"carcereiro falou B"} = \{(A,b),(C,b)\} \end{cases}$

As perguntas:

Pergunta 1) $P(A|c) = P(A|b)$?

se forem diferentes então a fala do carcereiro teve informação.

Pergunta 2) $P(A/c) = ?$ $P(A/b) = ?$

quais são as probabilidades após a fala do carcereiro.

Com o problema formulado matematicamente, não há qualquer dificuldade no calculo desses dois termos e resolver as duas questões ao mesmo tempo:

$$P(A/c) = \frac{P(A \cap c)}{P(c)} = \frac{P((A,c))}{P(\{(A,c),(B,c)\})} = \frac{1/6}{1/6 + 1/3} = \frac{1}{3} = P(A)$$

$$P(A/b) = \frac{P(A \cap b)}{P(b)} = \frac{P((A,b))}{P(\{(A,b),(C,b)\})} = \frac{1}{3} = P(B)$$

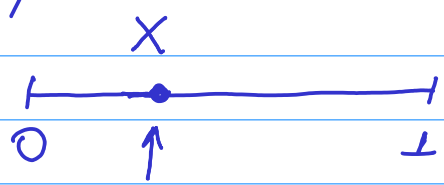
ou seja, o que o carcereiro disse não muda em nada a expectativa de A ter sido escolhido ou não...

- O que acontece com a prob. dos outros dois?
- O que acontece se mudarmos o critério usado pelo carcereiro para decidir, se puder apontar B ou C? Isso muda algo?

Nos exemplos vistos até agora o espaço amostral é discreto, ou seja é um conjunto enumerável.

obs: Um conjunto A é dito enumerável se existe uma maneira de se escolher, um por vez, elementos de A tal que todos os elementos de A eventualmente são escolhidos. Ou seja, A pode ser indicado como $A=\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, um conjunto finito ou infinito.

Exemplo de experimento aleatório com espaço amostral não enumerável: "Quebro uma barra de comprimento 1 em dois pedaços ao acaso"

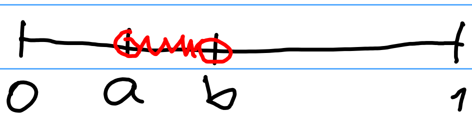


$$\Omega = [0,1]$$

X = Ponto escolhido para dividir o intervalo $[0,1]$ em 2 pedaços $[0,x)$ e $[x,1]$

Para descrever que o ponto X é escolhido "ao acaso" digo que, se (a,b) é um intervalo em $[0,1]$ então

$$\underbrace{P(X\in(a,b))}_{\text{quebra foi dentro do intervalo}} = |b-a|$$



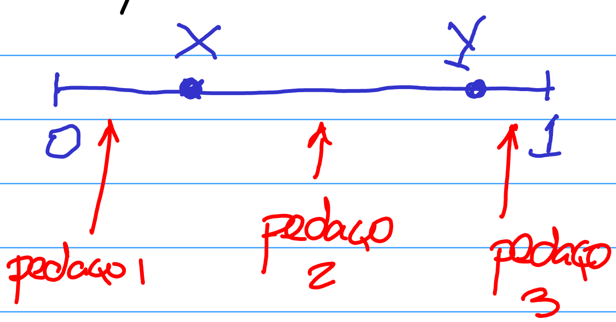
$0 \leq a \leq b \leq 1$

Obs: Definir a probabilidade apenas para esses intervalos simples é o suficiente para estender a definição para "quase" todos os subconjuntos de $[0,1]$ (Teorema de extensão de Caratheodory.)

Problema relacionado: "Quebro, ao acaso, uma barra de tamanho 1, em três pedaços; qual é a prob. de ser possível construir um triângulo com esses três pedaços?"

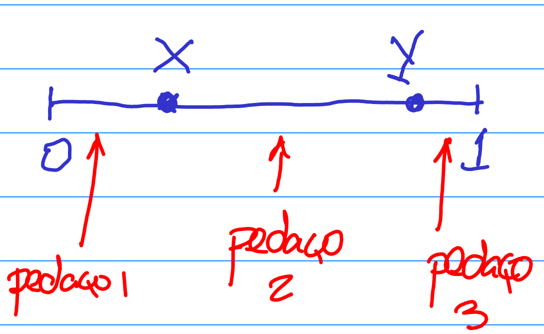
Novamente, precisamos começar formulando o problema como um experimento aleatório bem definido.

Espaço Amostral:

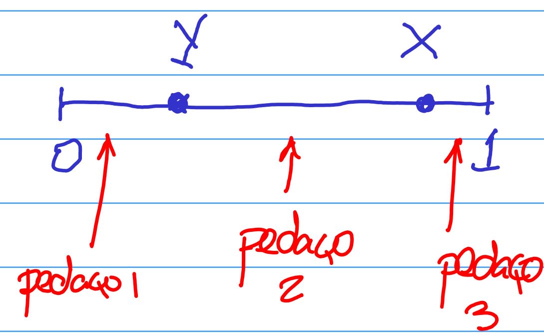


O resultado do experimento aleatório está definido se soubermos a posição das duas quebras X e Y.

Vamos assumir que $X < Y$ ou os dois pontos serão escolhidos em $[0,1]$?
Talvez o mais simples seja assumir tanto X como Y escolhidos em $[0,1]$ e definir os pedaços como:

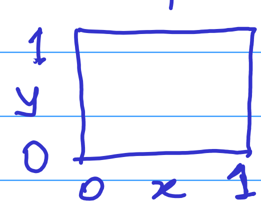


ou



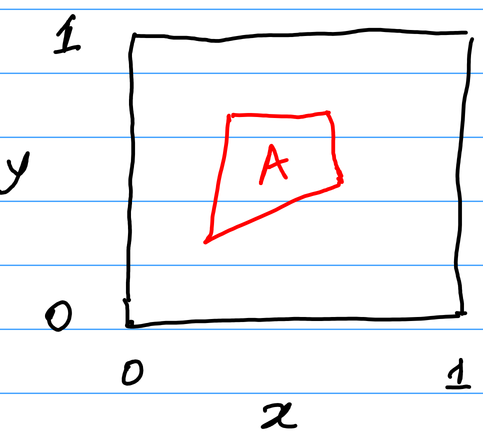
Dessa forma, Ω = espaço amostral = $\{(x,y) \in [0,1]^2\}$

$\Omega =$



Agora precisamos definir probabilidades aos eventos $A \subset \Omega$.

Novamente (Teorema de extensão) basta definirmos a probabilidade para "eventos simples".



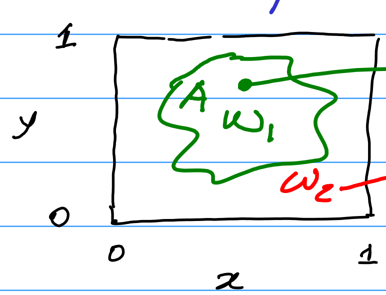
Suponha que $A \subset [0,1]^2$ é uma "figura geométrica simples" (ou seja, algo cuja área você sabe determinar por geometria elementar...")

Definimos: Probabilidade de escolher $A = \{\omega \in \Omega : \omega \in A\}$ é a área de A //

Agora que o problema está bem formulado, qual é a probabilidade de ser possível formar um triângulo?

Um elemento de Ω é um par (x,y), que determina a posição das duas quebras e o tamanho dos três pedaços.

Para quais pares (x,y) podemos construir um triângulo com os correspondentes três pedaços?

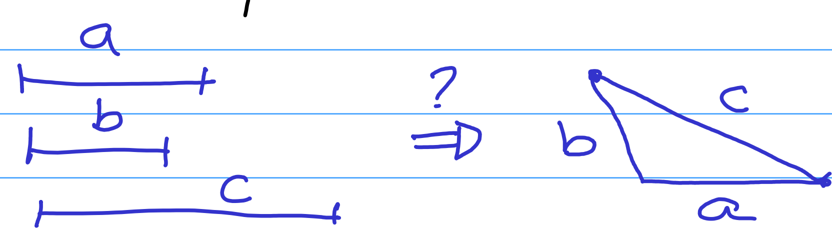


"Sim, forma triângulo!"

"Não forma triângulo"

Prob. de formar triângulo = "área de A"

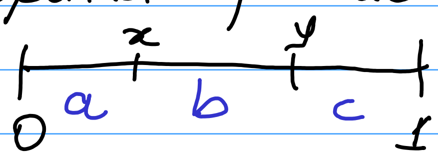
Geometria: dados três segmentos de reta de comprimentos a, b e c, qual é a condição para ser possível construir um triângulo?



Condições

$$\begin{cases} a+b \geq c & (1) \\ a+c \geq b & (2) \\ b+c \geq a & (3) \end{cases}$$

Suponha que as quebras foram em x e y com $x \leq y$. A_1

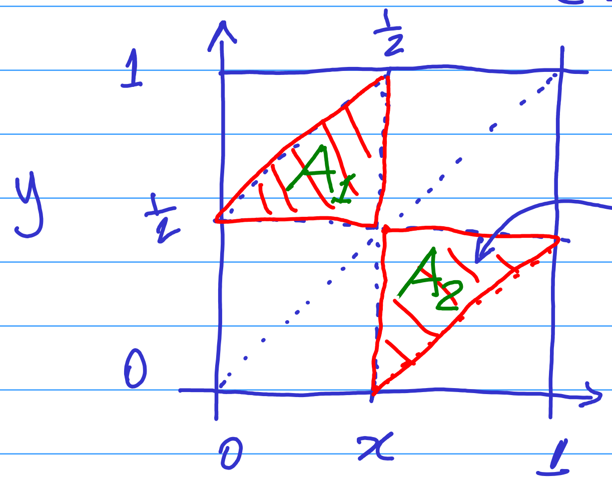


Comprimentos: $a = x$, $b = y - x$, $c = 1 - y$

(1) $x + (y-x) \geq 1-y \Rightarrow y \geq 1/2$

(2) $x + (1-y) \geq y - x \Rightarrow y \leq x + \frac{1}{2}$

(3) $(y-x) + (1-y) \geq x \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$

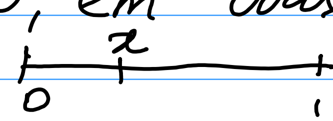


$A = \{\omega \in \Omega$; "Posso formar triângulo"$\}$
$= A_1 \cup A_2$

caso $x > y$, A_2, verifique!

Portanto $P(A) = 1/4$

Exercício: Considere outra estratégia para quebrar "ao acaso". Por exemplo, em duas etapas:

1) Quebro em 2. 

x = "ao acaso"

2) Quebro o pedaço da direita "ao acaso"...

ou 2) Quebro o maior pedaço "ao acaso"...