

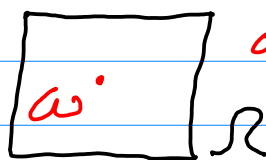
Noções de Teoria de Probabilidades

construção de um modelo probabilístico

Três componentes: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

- Ω = conjunto, "o conjunto de todos os possíveis resultados"

Espaço Amostral



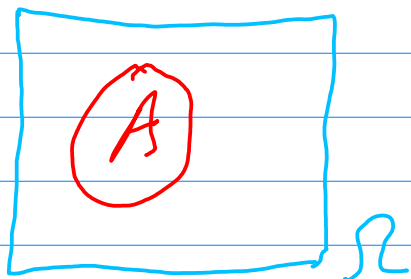
ω = possível resultado
= elemento de Ω

- $\mathcal{F}$ = conjunto de subconjuntos de Ω

$A \subset \Omega$

A = "evento"

$A \in \mathcal{F}$



Neste curso podemos
supor que todo subconjunto
de Ω está em $\mathcal{F}$ = "classe de eventos"

- P = "função que define a probabilidade de cada evento"

$$P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$$

se $A \in \mathcal{F}$, $P(A)$ = "prob. de observar o evento A "

Observação importante: um modelo probabilístico só está definido se soubermos: Ω = espaço amostral e quais são as probabilidades definidas pela função P (Lembre que estamos assumindo, por simplicidade, que $\mathcal{F}$ contém todos os subconjuntos de Ω)

Frequentemente apenas o espaço amostral é definido e a definição das probabilidades fica subentendida. E isso pode ser um problema, pois pode haver mais de uma definição "natural" das probabilidades. Vamos discutir alguns exemplos depois...

Condições para as três componentes $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de um modelo probabilístico.

Ω : conjunto não-vazio qualquer } ou seja, " Ω pode ser qualquer coisa!"

$\mathcal{F}$: contém todos os subconjuntos de Ω que você "pode ter interesse".
neste curso, vamos assumir que $\mathcal{F}$ contém todos os subconjuntos de Ω

P : função de $\mathcal{F}$ nos números reais

$$P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfazendo as seguintes condições:

1) Se $A \in \mathcal{F}$

então

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

2) Como Ω , o espaço amostral, contém todos os resultados possíveis, ele ocorre com certeza, isto é:

$$P(\Omega) = 1 \quad \text{"evento seguro"}$$

3) Suponha uma coleção de eventos de interesse

$$A_1, A_2, A_3, \dots ; A_i \in \mathcal{F} \text{ para todo } i \geq 1$$

Suponha também que quaisquer dois desses eventos nunca podem acontecer juntos, isto é:

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ se } i \neq j \quad (A_i \text{ e } A_j, i \neq j, \text{ são dois eventos disjuntos})$$

$$\text{então } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

obs: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots =$ "acontecer pelo menos um desses eventos $A_1, A_2, A_3, \dots$ "

Consequências destas condições:

Probabilidade do evento vazio, $\emptyset$, está fixada.

Considere a condição 3) no caso particular

$$A_1 = \Omega \text{ e } A_i = \emptyset \text{ para } i \geq 2$$

Neste caso $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ e essa condição implica

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i) \\ &= P(\Omega) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) \end{aligned}$$

Mas $P(\Omega) = 1$, pela condição 2)

portanto $P(\emptyset) = 0$, " $\emptyset$ = evento impossível"

Probabilidades de eventos complementares

Notação: se $A \subset \Omega$ então $A^c \equiv \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$

↑ indica que é uma definição

A^c = "evento complementar de A"

Agora usamos a condição 3) com

$$A_1 = A, A_2 = A^c, A_i = \emptyset \text{ para } i \geq 3$$

↑
evento qualquer fixado

verifique que
essa coleção
satisfaz $A_i \cap A_j = \emptyset$
se $i \neq j$

Então, as condições 2) e 3) implicam

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(A) + P(A^c) + \sum_{i \geq 3} P(\emptyset)$$

$P(\mathbb{R}) = 1$ $= 0$

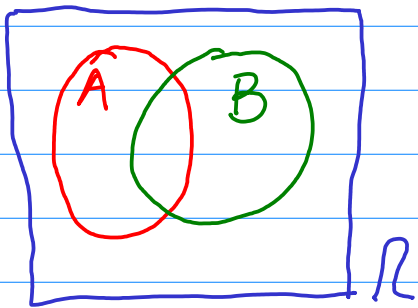
e portanto $P(A^c) = 1 - P(A)$ para todo evento A .

Probabilidade da união de dois eventos quaisquer

Sejam A e B dois eventos quaisquer.

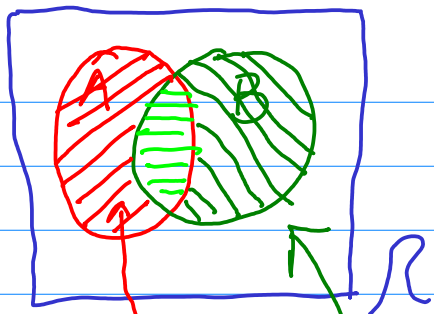
Qual é a relação entre

$P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cup B)$?



Não podemos usar diretamente a condição 3) se A e B não forem disjuntos, isto é, se $A \cap B \neq \emptyset$

Mas podemos escrever $A \cup B$ como a união de eventos disjuntos.



$$A \cup B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

com A_1, A_2 e A_3 disjuntos

$$A_1 = A \cap B^c$$

$$A_2 = A \cap B$$

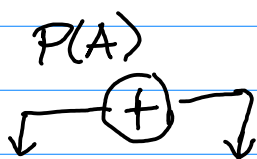
$$\text{e } A_3 = A^c \cap B$$

Então, escolhendo $A_i = \emptyset, i \geq 4$ temos

$$P(A \cup B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

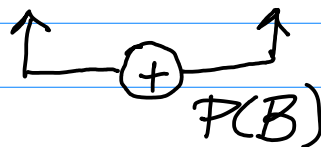
usando cond. 3) e que $P(\emptyset) = 0$

portanto



$A \cap B$
||

$$P(A \cup B) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_2) - P(A_2)$$



$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Alguns exemplos:

"Lançamento de um dado honesto"

Modelo de Probabilidade correspondente:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

P "com distribuição uniforme"

$$P(\{i\}) = \frac{1}{6} \text{ para todo } i \in \Omega$$

Porquê $\frac{1}{6}$?

Assumir que o dado é honesto pode ser interpretado como: "todos os possíveis resultados, elementos de Ω , têm a mesma probabilidade".

se tomamos $A_i = \{i\}$ para $1 \leq i \leq 6$ e

$A_i = \emptyset$ para $i \geq 7$

temos $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_1, A_2, \dots$ eventos disjuntos.

Se $P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_6) = a$ = "constante a ser determinada"

então $1 = P(\Omega) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_6) = 6a$

e portanto $P(A_i) = a = \frac{1}{6}$, $1 \leq i \leq 6$

Note que a definição das probabilidades de $A_i = \{i\}$, $1 \leq i \leq 6$, define a prob. de TODOS os eventos (quantos eventos existem neste caso?)

Para ilustrar, seja $A = \text{"sair par"} = \{2, 4, 6\}$

se o dado é honesto ($P(A_i) = \frac{1}{6}$, $1 \leq i \leq 6$)

O valor de $P(A)$ ainda precisa ser definido?

Não precisa. Temos necessariamente $P(A) = \frac{1}{2}$

$$P(A) = P(\underbrace{A_2 \cup A_4 \cup A_6}_{\text{união disjunta}}) = P(A_2) + P(A_4) + P(A_6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

↑ condição 3)

Note que há $2^6 = 64$ possíveis eventos. Para fixar a prob. de TODOS eles basta fixar a prob. de apenas 6 deles, $A_1, A_2, \dots, A_6$.

obs: esse é um resultado bastante importante: para definir a prob. de TODOS os eventos de interesse basta definir a probabilidade para um conjunto de eventos relativamente pequeno.

Neste nosso exemplo simples (lançamento de um dado honesto) o resultado é trivial. Mas o resultado geral é bem mais interessante e importante: "teorema de extensão de Caratheodory".

obs: Quando Ω é um conjunto finito,
digamos $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ e temos
 $P(\{\omega_i\})$ igual para todo i (e portanto $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N}$, $1 \leq i \leq N$)

digamos que temos um modelo de probabilidade
equiprovável

Notação: Se A é um conjunto finito, denotamos por
 $|A| = \#$ de elementos de A

Exercício: Se (Ω, P) é um modelo de prob.
equiprovável e $A \subset \Omega$ então

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Note que, necessariamente, estamos assumindo
 $|\Omega|$ finito.

Outro exemplo: "lanço um dado desonesto, com
um peso escondido, que faz com que a prob. de
sair a face 6 seja o dobro das demais, que são
igualmente prováveis"

Qual é o modelo probabilístico associado?

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; ou seja, o espaço amostral não muda.

e as probabilidades?

$P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ com $\mathcal{F} = \text{"todos os 64 eventos possíveis"}$.

Segundo o enunciado, com $A_i = \{i\}$, $i \in \Omega$

temos $P(A_6) = 2 \cdot P(A_j)$, $1 \leq j \leq 5$
e

$$P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_5)$$

Exercício: Determine $P(A)$, $A \subset \Omega$ para este dado desonesto.

Outro exemplo: "examino um baralho bem embaralhado".

Interpretação: tenho um baralho com N cartas e embaralho de tal forma que todas as possíveis seqüências das N cartas têm a mesma probabilidade.

Podemos entender "examino o baralho" como identificando qual a particular seqüência resultou do embaralhamento.

Portanto, o problema assume que todas as $N! = N \times (N-1) \times (N-2) \times \dots \times 1$ possíveis permutações das N cartas têm a mesma probabilidade.

(Novamente um exemplo envolvendo um modelo equiprovável...)

Temos

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{N!}\}$$

onde $\omega_i = \text{"particular sequência das } N \text{ cartas"}$

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N!}$$

Com um pouco mais de detalhe, imagine que as cartas foram codificadas de alguma forma qualquer por N números $1, 2, 3, \dots, N$

então $\omega_i = (c_1, c_2, \dots, c_N)$ indica que a i -ésima carta do baralho era a carta $c_1 \in \{1, 2, \dots, N\}$, e assim por diante, que a última carta era $c_N \in \{1, 2, \dots, N\}$.

$c_i = \text{"}i\text{-ésima carta"}$ identificada por um número em $\{1, 2, \dots, N\}$

$\Omega = \{\omega = (c_1, c_2, \dots, c_N), c_i \in \{1, 2, \dots, N\}, c_i \neq c_j \text{ se } i \neq j\}$
= "conjunto de todas as $N!$ permutações dos números de 1 até N "

$e, e \in A \subset \mathbb{R}$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\mathbb{R}|}, \quad |\mathbb{R}| = N!$$

"Matching Problem"

Considere um baralho embaralhado.

Defina $B_i =$ "a i -ésima carta é a carta identificada pelo número i "

Digamos que o evento B_i , $1 \leq i \leq N$, indica que "há uma coincidência na posição i "

Qual é a probabilidade de não haver nenhuma coincidência?

Esta probabilidade certamente depende de N .

O que acontece quando N cresce?

Esta prob. converge? Para 0? Para 1? Outro valor?

Vamos mostrar depois que esta prob. converge

para $1/e$, quando $N \rightarrow \infty$, onde

$e = 2.71828... =$ "número de Euler"

Probabilidade Condicional e Independência.

Modelos probabilísticos descrevem experimentos cujo resultado é incerto e temos apenas condições de determinar a "chance", a "probabilidade" de cada evento.

Se A é o evento de interesse (digamos, se acontece A você ganha um jogo; caso contrário, perde) a sua "expectativa" de que A vai acontecer (e você ganhar o jogo...) é quantificada pelo número $P(A)$

Suponha que o jogo já aconteceu mas você desconhece o resultado.

Suponha que, apesar de não saber se A aconteceu ou não, você sabe que aconteceu "certa coisa", representada por um evento B .

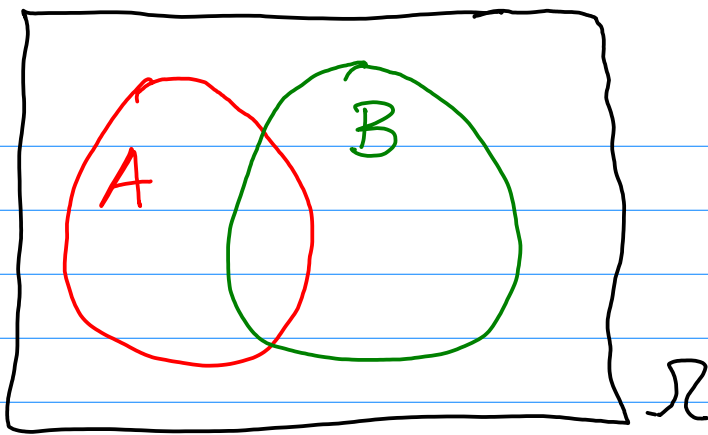
Com esta "informação parcial": aconteceu B
qual é sua expectativa agora da ocorrência de A ?

Primeiro, notação:

$P(A)$ = "prob. de ocorrer A SEM NENHUMA informação"

$P(A|B)$ = "prob. de ocorrer A SABENDO que aconteceu B "

Intuição:

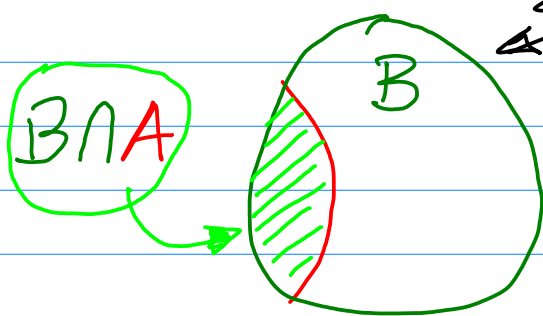


$$P(A)$$

$$P(A|B) = ?$$

⇓ Se sei que aconteceu B

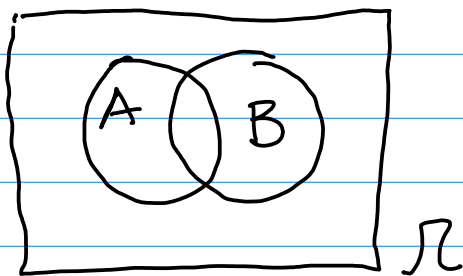
"B virou o novo espaço amostral"



Agora A só pode acontecer se acontecer $A \cap B$

A prob. de A agora depende de
quão grande é essa probabilidade: $P(A \cap B)$ EM RELAÇÃO
ao "tamanho" de B: $P(B)$

Definição: se A e B são dois eventos
qualquer, com $P(B) > 0$, então



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Portanto, para quaisquer dois eventos A e B , temos

$$P(A \cap B) = \begin{cases} P(B) \cdot P(A|B) & \text{se } P(B) > 0 \\ P(A) \cdot P(B|A) & \text{se } P(A) > 0 \end{cases}$$

Note que é possível que aconteça

$$P(A|B) = P(A)$$

que significa esta identidade?

Significa que a informação de que aconteceu o evento B **não muda** sua expectativa sobre a expectativa de que A ocorreu ou não!

A informação "ocorreu B " foi **irrelevante**!

Quando isto acontece, temos uma importante relação entre esses dois eventos:

Definição: dois eventos A e B são ditos **independentes** se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Esta identidade implica:

$$P(A|B) = P(A) \quad (\text{se } P(B) > 0)$$

e

$$P(B|A) = P(B) \quad (\text{se } P(A) > 0)$$

ou seja, a informação de que um deles aconteceu não muda em nada a chance da ocorrência do outro:

"são independentes"

Obs: em situações "do mundo real", é muito raro encontrar eventos independentes.

Por exemplo: "sorteio um eleitor Brasileiro"; seja

A = "eleitor vota num certo candidato"

$P(A)$ = "proporção de eleitores que votam nesse candidato"

suponha que você seleciona uma amostra e defino:

B = "o eleitor escolhido está em B "

(por exemplo, sua amostra poderia ser:
 B = "todos os seus colegas da USP")

Você acha que "tipicamente" $P(A|B) = P(A)$?

Exemplo : "Numa sala há 3 homens e 2 mulheres ; sorteio ao acaso duas pessoas "

Possível construção do modelo probabilístico:

Podemos imaginar que houve duas escolhas sucessivas.

Como só temos uma característica associada a cada indivíduo desta sala, ser homem ou mulher, teríamos quatro possibilidades no espaço amostral

$$\Omega = \{ (H,H), (H,M), (M,H), (M,M) \}$$



"homem na 1ª escolha, mulher na segunda"

Quais são as probabilidades associadas aos $2^4 = 16$ eventos ?

Começamos definindo a prob. de cada "evento elementar"

$\{ \omega \}$ onde $\omega \in \Omega$ (só podemos usar esta estratégia se Ω for enumerável ...)

Esta, e as demais, probabilidades devem ser estabelecidas pela interpretação do

"Modelo probabilístico" associado.

A interpretação "natural" seria: escolho o 1º indivíduo ao acaso dentre os 5; em seguida escolho o 2º dentre os 4 indivíduos remanescentes.

Ou seja, se definimos os eventos

$H_1 = \text{"1º é homem"}$; $H_2 = \text{"2º é homem"}$

$M_1 = \text{"1º é mulher"}$; $M_2 = \text{"2º é mulher"}$

temos

$P(H_1) = \frac{3}{5}$ = "prob. de escolher um dos 3 homens dentre os 5"

e

$$P(M_1) = \frac{2}{5}$$

Já para a segunda escolha, as prob. depende do que aconteceu na 1ª escolha.

Se o 1º escolhido foi Homem, temos agora 2 homens e 2 mulheres restando na sala.

Portanto a chance do 2º ser homem é $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Ou seja: $P(H_2|H_1) = \frac{1}{2}$

Analogamente: $P(M_2|H_1) = \frac{1}{2}$

$$P(H_2|M_1) = \frac{3}{4}$$

$$P(M_2|M_1) = \frac{1}{4}$$

Com estas definições temos:

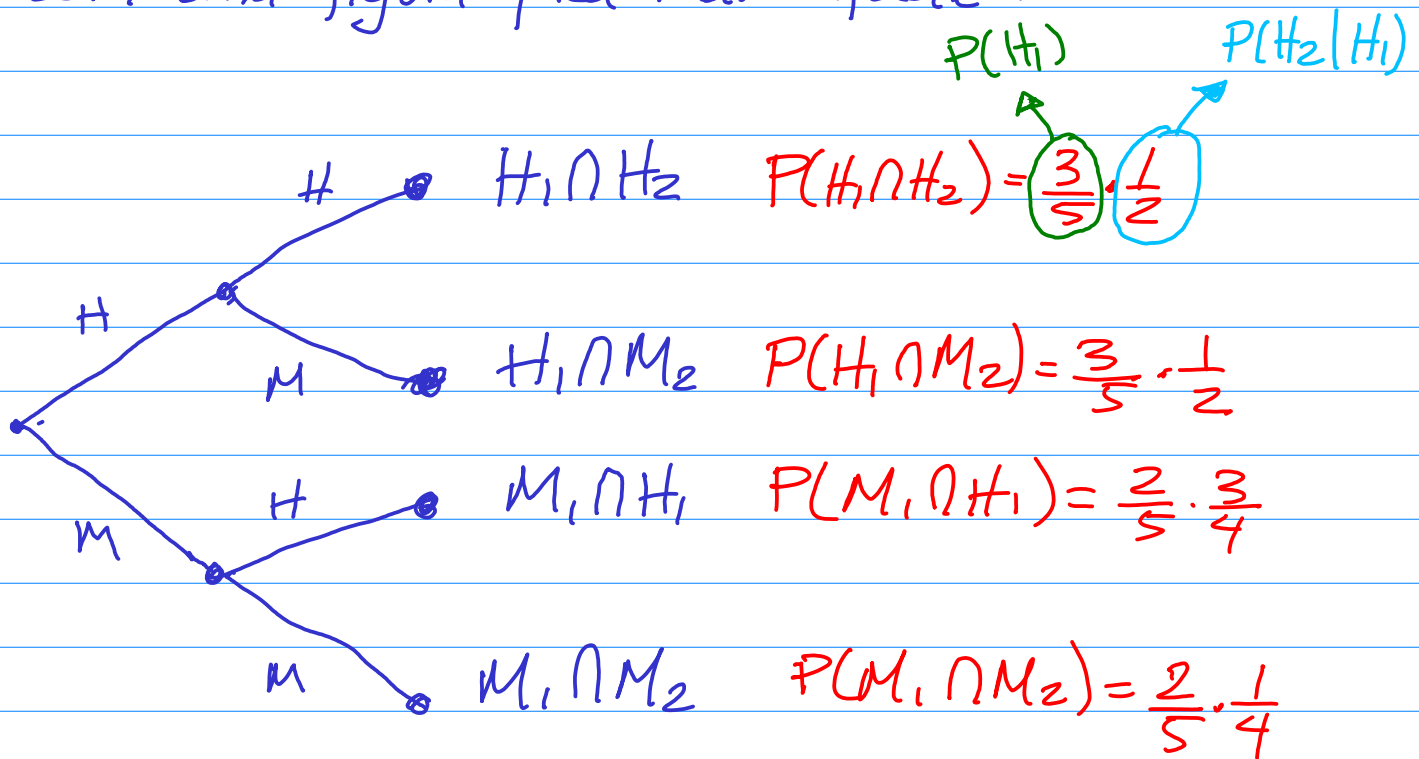
$$P(\{H, H\}) = P(H_1 \cap H_2) = P(H_1) \cdot P(H_2 | H_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

$$P(\{H, M\}) = P(H_1 \cap M_2) = P(H_1) \cdot P(M_2 | H_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

$$P(\{M, H\}) = P(M_1 \cap H_2) = P(M_1) \cdot P(H_2 | M_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

$$P(\{M, M\}) = P(M_1 \cap M_2) = P(M_1) \cdot P(M_2 | M_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

Com uma figura fica mais fácil:



Exercícios: Determine

$$P(H_2) \text{ e } P(H_1 | H_2)$$