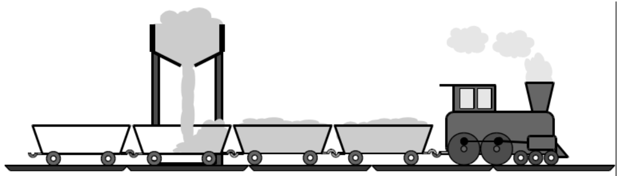
3)Um trem é carregado com areia ao passar sob uma ponte. A areia é despejada nos vagões à taxa de $500kg$ por segundo. Como a areia é despejada verticalmente de uma altura de vários metros, ao atingir a caçamba do vagão, a velocidade dos grãos de areia é de cerca de $14m/s$. A massa do vagão vazio é de $2.000kg$, e é preenchido com $6.000kg$ de areia ao passar sob a ponte.



a)(1,0) Desprezando-se as perdas por atrito com os trilhos, determine a força que a locomotiva precisa fazer para puxar o trem a uma velocidade constante de $0,5m/s$ e a potência necessária para manter o movimento. Note que como o sistema não pode ser considerado como uma partícula não é conveniente a utilização do teorema trabalho-energia cinética.

b)(1,0) Determine a força suportada pelo trecho de trilhos sob um vagão quando este estiver 50% preenchido de areia. Suponha que o trecho de trilhos em questão suporta somente este vagão neste momento.

c) (0,5) Se a locomotiva desengatar do primeiro vagão quantos segundos se passarão até que o restante do trem reduza sua velocidade à metade da inicial? Suponha que a massa do restante do trem (incluindo a areia) seja de $10.000kg$ no instante do desengate.

Solução:

a) Como a areia cai com velocidade horizontal nula no vagão, é necessário transferir a ela um impulso $dJ_x = dmv_T$ para que a massa dm que caiu no intervalo dt atinja a velocidade do trem $v_T = 0,5\text{m/s}$. Como o impulso é dado por $dJ_x = F_x dt$ a força horizontal média é $F_x = \frac{dm}{dt}v = 500 \times 0,5 = 250\text{N}$. A potência é dada por $P = F_x v = 250 \times 0,5 = 125\text{W}$.

b) A massa total do vagão, quando 50% preenchido é $m_V = 2000+0,5\times 6000 = 5000\text{kg}$, e seu peso $m_V g = 50000\text{N}$. A força adicional vertical correspondente ao impulso necessário para frear a areia que cai atingindo o vagão com velocidade vertical $v_a = 14$ m/s é $F_y = \frac{dm}{dt}v_a = 500 \times 14 = 7000\text{N}$, portanto a força total suportada pelo trilho é a soma destas duas forças verticais $N = 57000\text{N}$.

c) A força corresponte ao impulso horizontal *absorvido* do trem pela areia agora depende do tempo, através da velocidade instantânea do trem $v_x(t)$, isto é, $F_x(t) = -\frac{dm}{dt}v_x(t)$ (o sinal de menos indica que esta força é oposta à direção da velocidade). Pela segunda lei: $F_x(t) = m\frac{dv_x(t)}{dt} = -\frac{dm}{dt}v_x(t)$, onde m é a massa total do trem no instante t. Rearranjando: $\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{dm}{m}$. Integrando dos dois lados esta equação, considerando os limites de integração de v_T até $\frac{v_T}{2}$ para a velocidade e $m_0 = 10000\text{kg}$ até m_F para a massa temos:$\ln\frac{1}{2} = \ln\frac{m_0}{m_F}$, ou seja, a massa final do trem será $m_F = 2m_0 = 20000\text{kg}$. O tempo necessário para que caia a massa $m_a = m_F - m_0 = 10000\text{kg}$ de areia é $t = \frac{10000}{500} = 20\text{s}$.

Outra maneira de chegar a este resultado é considerar conservação da componente x do momento linear total do sistema *"trem-com-areia (m_0) mais massa-de-areia-que-cairá (m_a)"* sobre o qual não atua nenhuma força externa horizontal: $P_x = m_0 v_T + 0m_a = m_0 v_T = (m_0 + m_a)\frac{v_t}{2}$, de onde se obtem a massa de areia $m_a = m_0 = 10000\text{kg}$, e daí o tempo de 20s como na solução anterior.