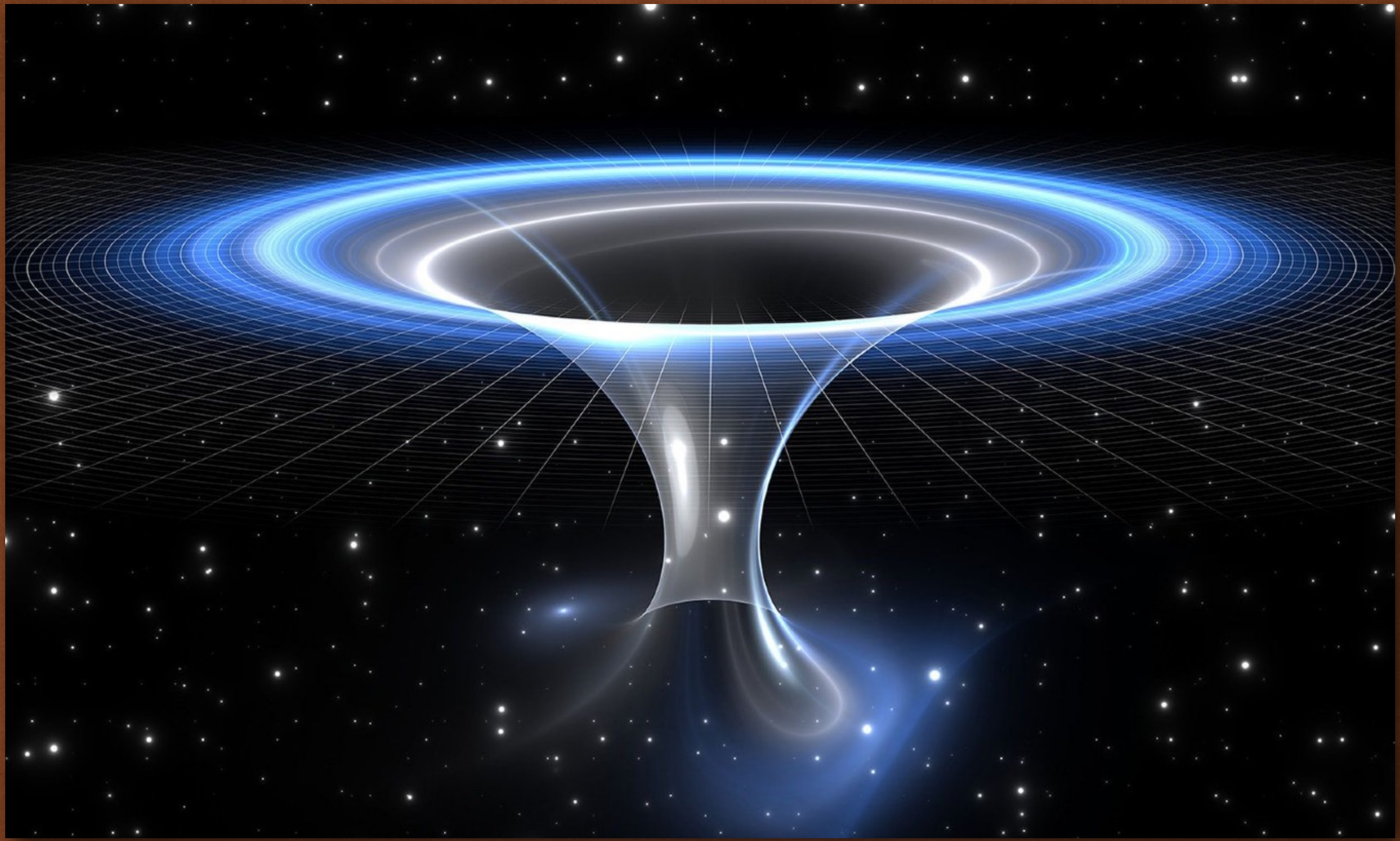
INTRODUÇÃO À



RELATIVIDADE

AULA 11 - 13/04/2020

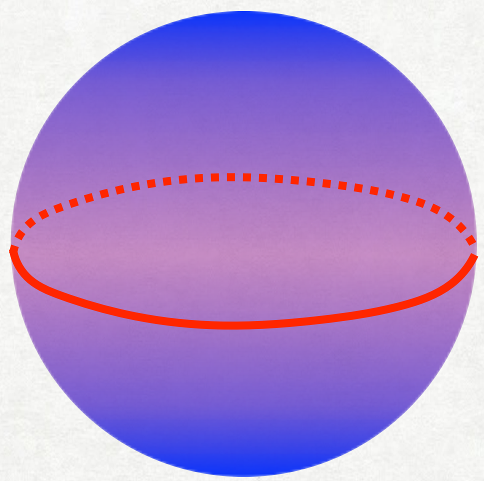
- Espaços curvos e o transporte paralelo
- Exemplo de transporte paralelo na esfera
- A derivada covariante
- **Leitura: Capítulo 2 até 3.4 do Carroll**

EXEMPLO DA AULA PASSADA: ESFERA 2D (+ 1D=TEMPO)

- Nosso primeiro exemplo de "espaço-tempo curvo" é a esfera (1+2)D:

$$ds^2 = -\,c^2dt^2 + R^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\,\theta\, d\varphi^2)$$

$$= -\,c^2dt^2 + R^2 d\Omega^2$$



- A equação da geodésica nessa esfera se escreve:

$$\frac{d^2x^\gamma}{d\tau^2} + \Gamma^\gamma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad , \quad \text{com}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}\left(\partial_\mu\, g_{\nu\sigma} + \partial_\nu\, g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma\, g_{\mu\nu}\right)$$

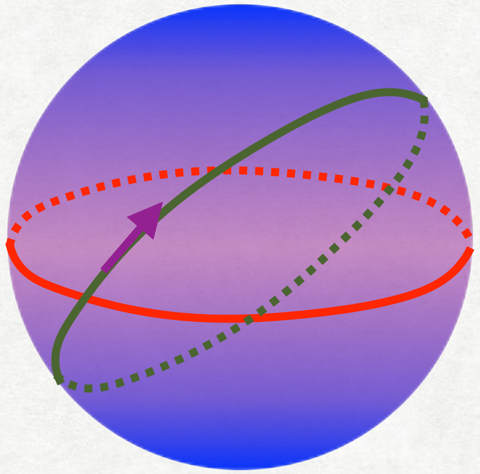
$$\Gamma^1_{22} = -\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$$

(Todos os outros $\Gamma \to 0$)

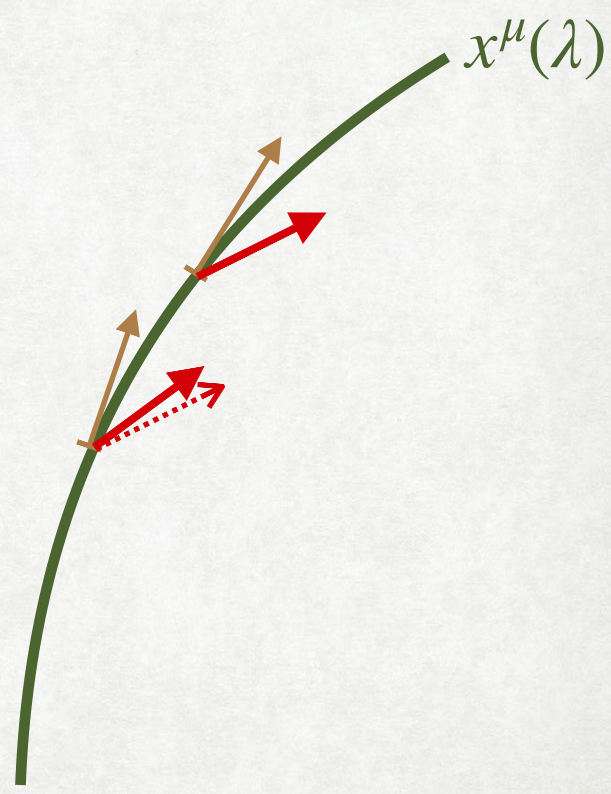
EXEMPLO DA AULA PASSADA: ESFERA 2D (+ 1D=TEMPO)

- Vimos na aula passada que uma geodésica ("movimento livre") nessa esfera é um ***grande círculo***



- Mas uma questão ainda mais interessante (e geral) seria: o que acontece com um vetor qualquer que é ***transportado*** ao longo de uma curva qualquer?

- Ou seja, vamos supor que temos um observador se movimentando por uma trajetória qualquer, e esse observador carrega consigo um "vetor" — digamos, um giroscópio. ***O que acontece com esse vetor***?



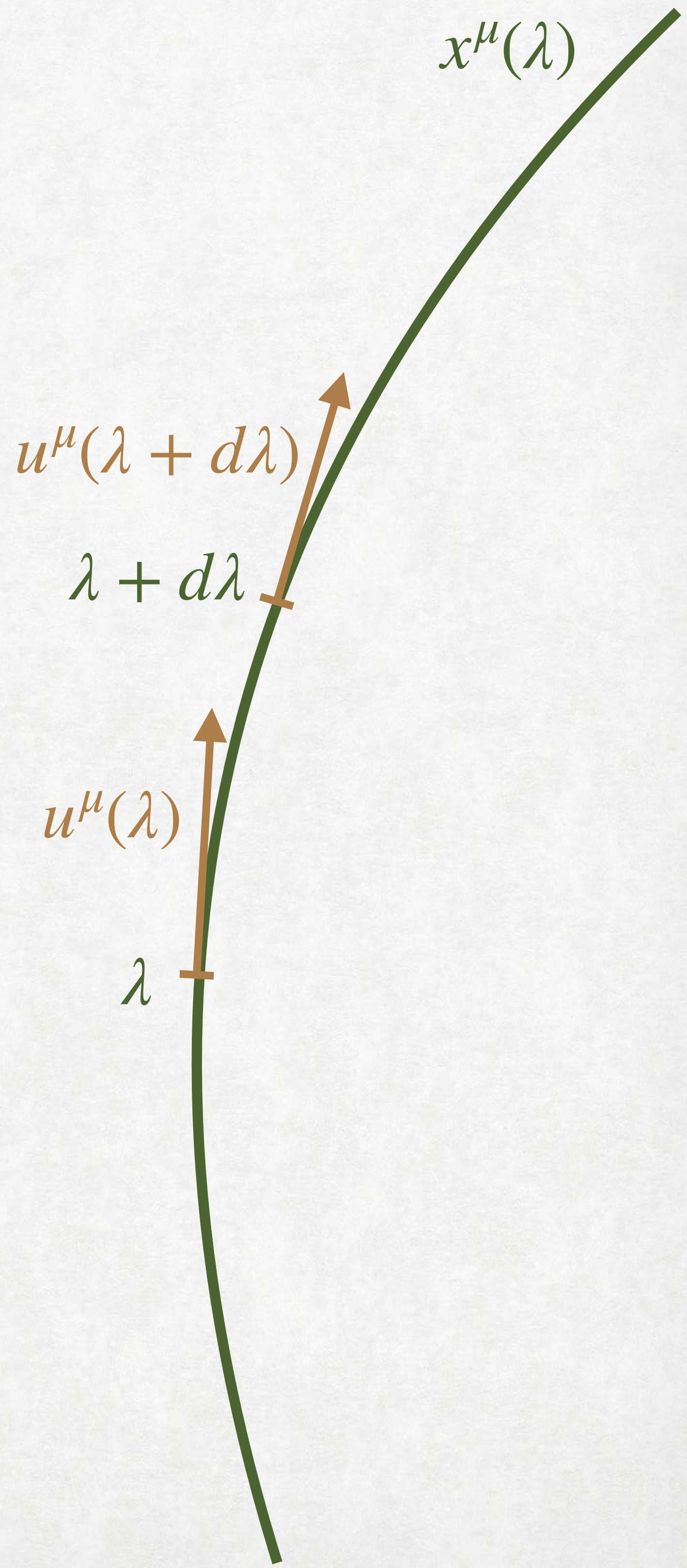
TRANSPORTE PARALELO

- O movimento ao longo de uma trajetória $x^\mu(\lambda)$ pode ser denotado pelo vetor tangente à curva:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \ ,$$

- Se essa curva for uma geodésica, a relação entre $u^\mu(\lambda)$ e $u^\mu(\lambda + d\lambda)$ é dada pela Equação da Geodésica:

$$\frac{du^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0$$



TRANSPORTE PARALELO

- Mas o vetor V^μ também é transportado, e modificado, ao longo da curva:

$$V^\mu(\lambda) \quad \to \quad V^\mu(\lambda + d\lambda)$$

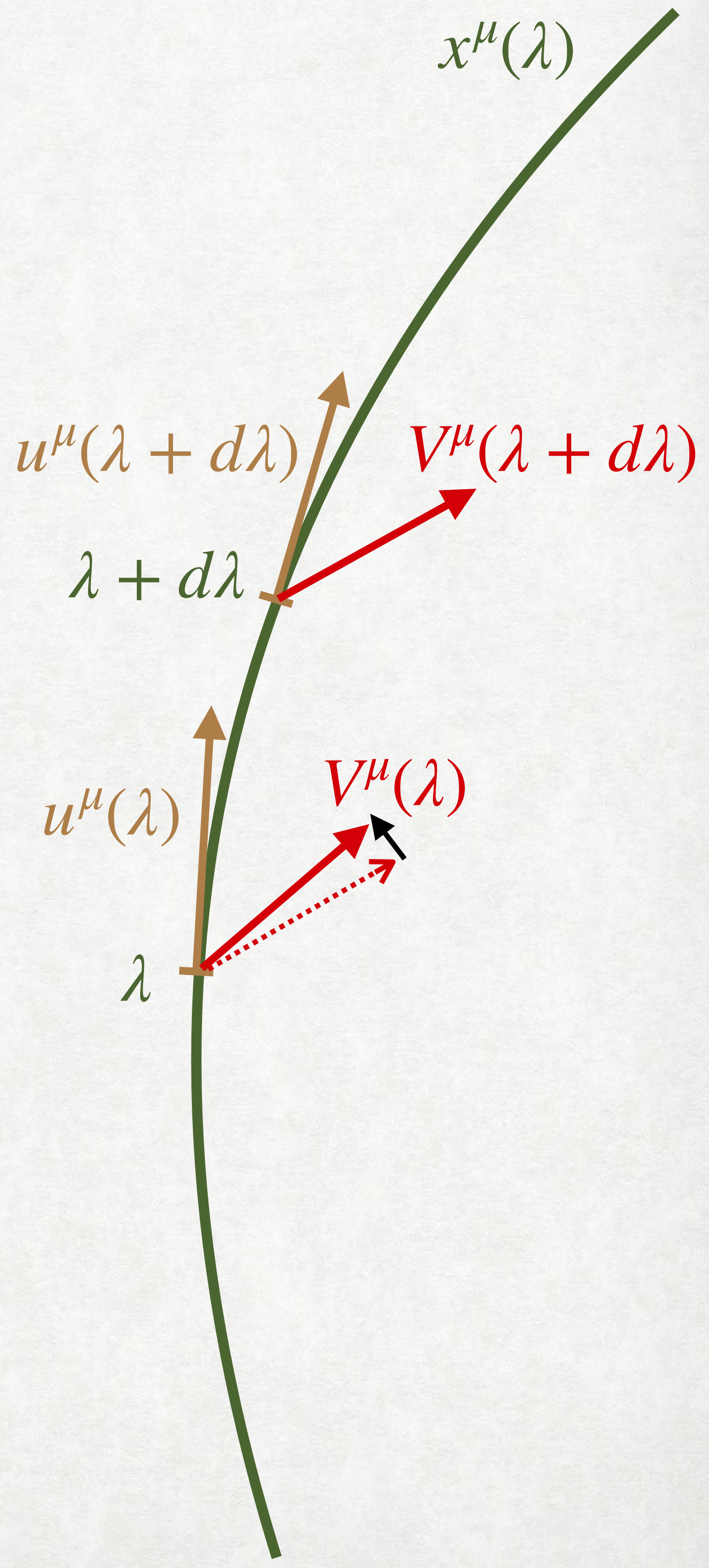
- A pergunta é: qual equação podemos usar para expressar

$$\frac{dV^\mu}{d\lambda} = \frac{V^\mu(\lambda + d\lambda) - V^\mu(\lambda)}{d\lambda} \quad = \quad ???$$

- Podemos começar a pensar nesse problema partindo do princípio de que o produto escalar seja um… escalar! Ou seja, que isso é um ***invariante***:

$$||u\,V|| = g_{\mu\nu}\,V^\mu\,u^\nu$$

Essa "norma" deveria permanecer constante ao longo do movimento. Vamos ver onde isso nos leva.



TRANSPORTE PARALELO

- Se esse produto escalar se conserva ao longo da trajetória, temos que:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(g_{\mu\nu}\, V^\mu\, u^\nu\right) = 0$$

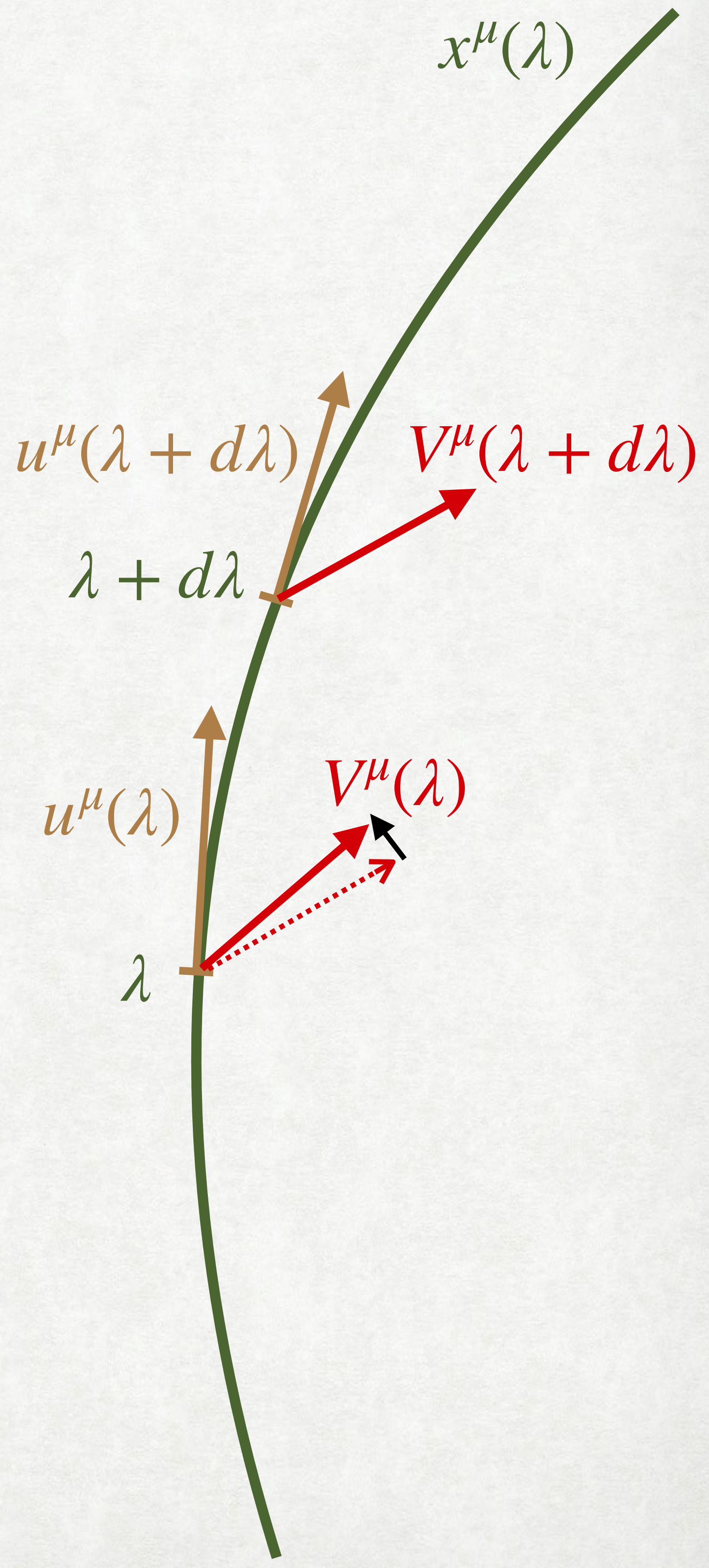
- Abrindo essa expressão temos

$$0 = \frac{d\, g_{\mu\nu}}{d\lambda}\, V^\mu\, u^\nu + g_{\mu\nu}\, \frac{d\, V^\mu}{d\lambda}\, u^\nu + g_{\mu\nu}\, V^\mu\, \frac{d\, u^\nu}{d\lambda}$$

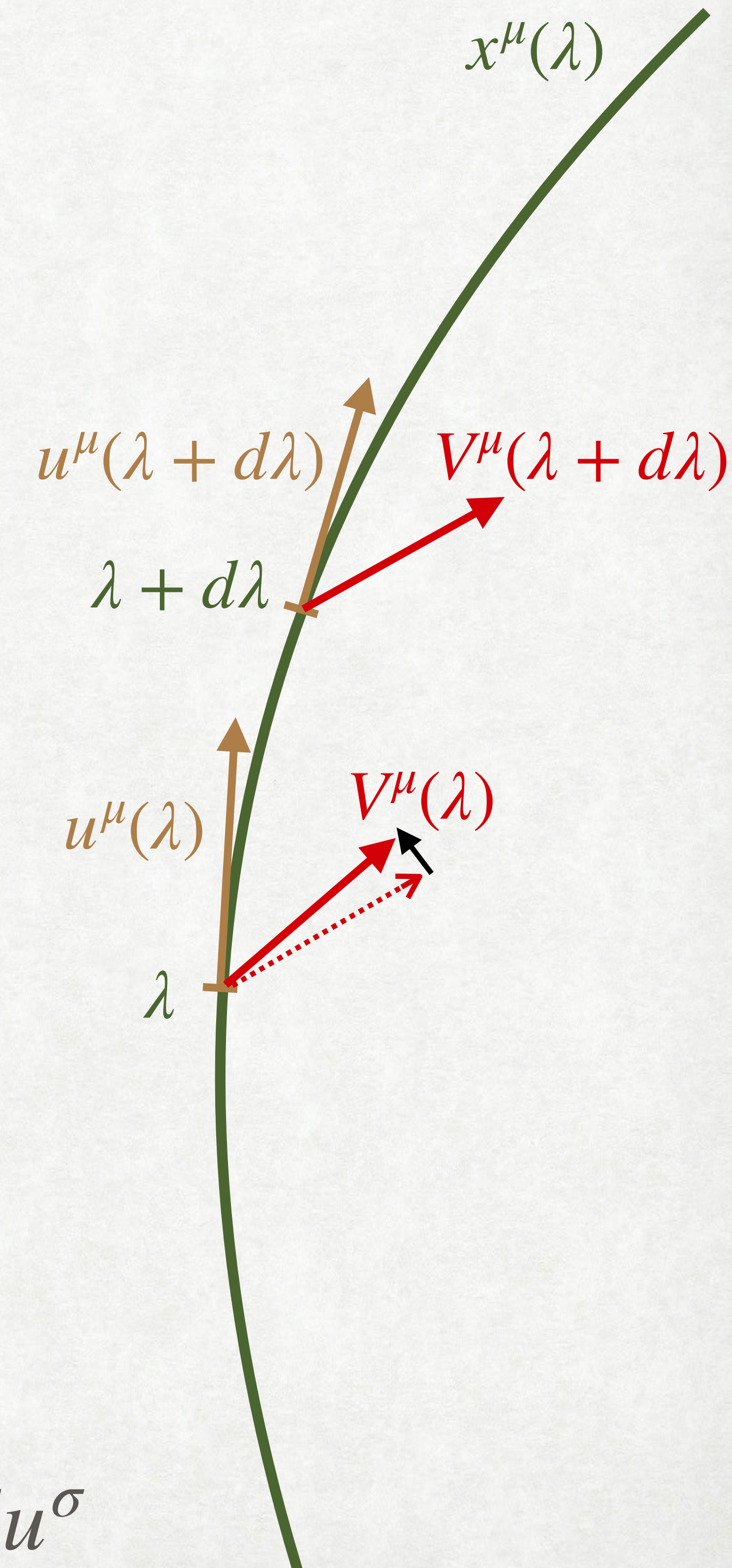
- Mas já vimos na aula passada que:

$$\frac{d\, g_{\mu\nu}}{d\lambda} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} = \partial_\sigma g_{\mu\nu}\, u^\sigma$$

$$= \left(g_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\sigma\mu} + g_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\right) u^\sigma$$



TRANSPORTE PARALELO



- Substituindo essa última expressão na equação de cima, e usando a equação da Geodésica para $du^\nu/d\lambda$, temos:

$$0 = \Big(g_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\sigma\mu} + \cancel{g_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Big) u^\sigma V^\mu u^\nu} + g_{\mu\nu}\frac{dV^\mu}{d\lambda}u^\nu$$

$$+\cancel{g_{\mu\nu}V^\mu \left(-\Gamma^\nu_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta\right)}$$

- Agora preste bem atenção: os dois termos indicados se cancelam! Para ver isso, vamos trocar $\nu \leftrightarrow \alpha$ e $\beta \rightarrow \sigma$ no último termo:

$$V^\mu\, g_{\mu\nu}\Gamma^\nu_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = V^\mu\, g_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\beta}u^\nu u^\beta = V^\mu\, g_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\sigma}u^\nu u^\sigma$$

TRANSPORTE PARALELO

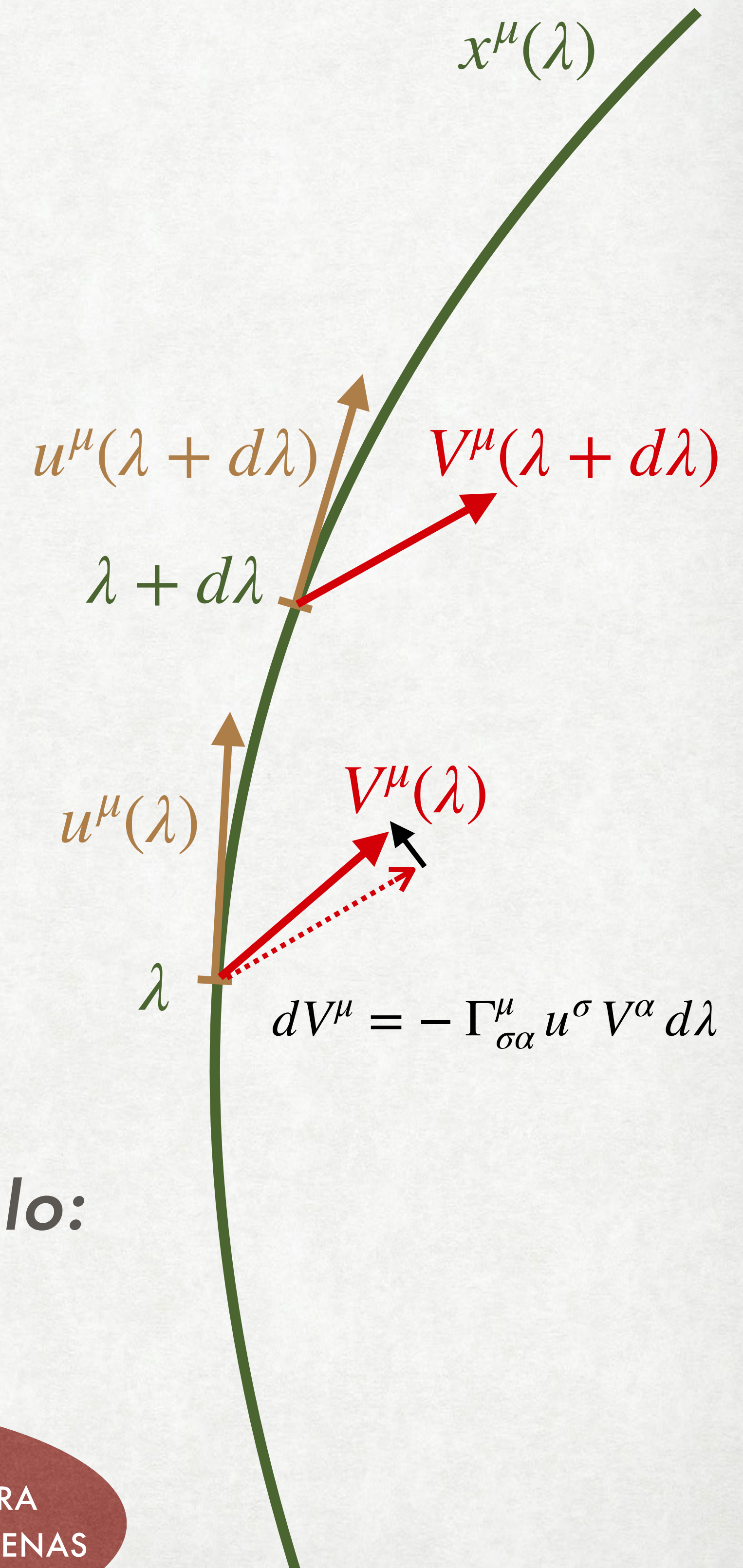
- Ficamos então com a expressão:

$$0 = g_{\alpha\nu}\,\Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\,u^{\sigma}\,V^{\mu}\,u^{\nu} + g_{\mu\nu}\frac{dV^{\mu}}{d\lambda}u^{\nu}$$

mas trocando $\alpha \leftrightarrow \mu$ no primeiro termo temos:

$$0 = g_{\mu\nu}\,\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}\,u^{\sigma}\,V^{\alpha}\,u^{\nu} + g_{\mu\nu}\frac{dV^{\mu}}{d\lambda}u^{\nu}$$

$$\Rightarrow \quad g_{\mu\nu}\,u^{\nu}\left(\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}\,u^{\sigma}\,V^{\alpha} + \frac{dV^{\mu}}{d\lambda}\right) = 0$$

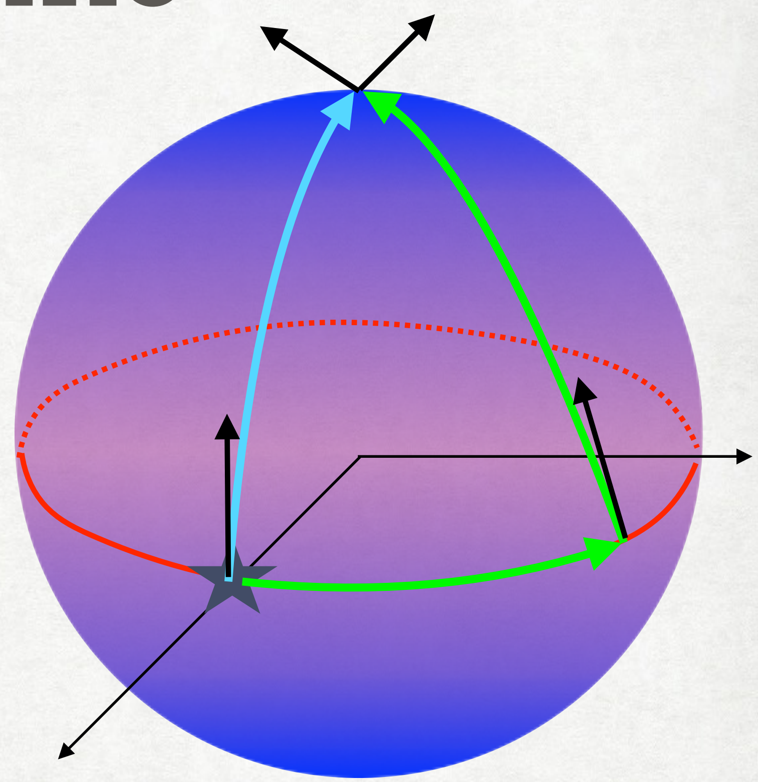


- Assim, chegamos na ***Equação do Transporte Paralelo:***

$$\frac{dV^{\mu}}{d\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}\,u^{\sigma}\,V^{\alpha} = 0$$

DETALHE: A EQUAÇÃO DO TRANSPORTE PARALELO VALE PARA **QUALQUER TRAJETÓRIA**, NÃO APENAS PARA GEODÉSICAS!

EXEMPLO DE TRANSPORTE PARALELO



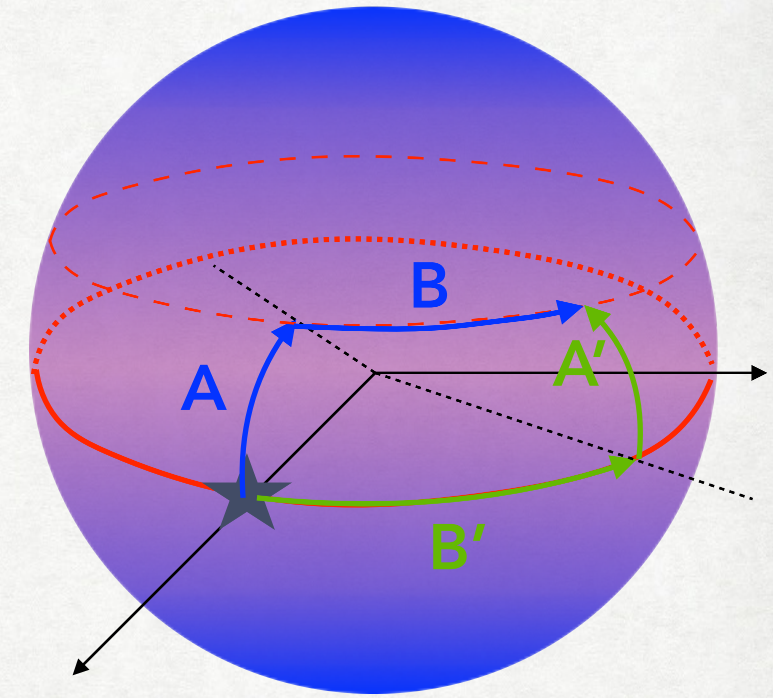
- Um primeiro exemplo de transporte paralelo pode ser visto no caso do espaço mais simples que temos até o momento: a esfera 2D (vamos tomar $R \to 1$ por simplicidade)

- Em geral, o exemplo que se vê "por aí" é como a figura ao lado.

- Percebemos algo muito estranho: o mesmo vetor, levado direto ao Polo Norte, resulta ***diferente*** se esse mesmo vetor for levado primeiro até o outro meridiano, e depois transportado até o Polo Norte!

- Porém, apesar desse exemplo estar correto, essa ilustração não nos diz o que acontece de um modo mais geral, quando não vamos até o polo (Sul ou Norte).

EXEMPLO DE TRANSPORTE PARALELO



- Vamos agora dar um exemplo de como se faz o transporte paralelo de um modo bem mais geral

- Para o problema ficar um pouco mais simples, vamos iniciar no ponto ★, ou seja, $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$

- A partir daí, vamos definir dois caminhos muito simples:

1. (A) Vamos subir pelo meridiano até $\theta = \theta_f$; depois, vamos (B) andar pela latitude $\varphi = 0 \to \varphi = \varphi_f$

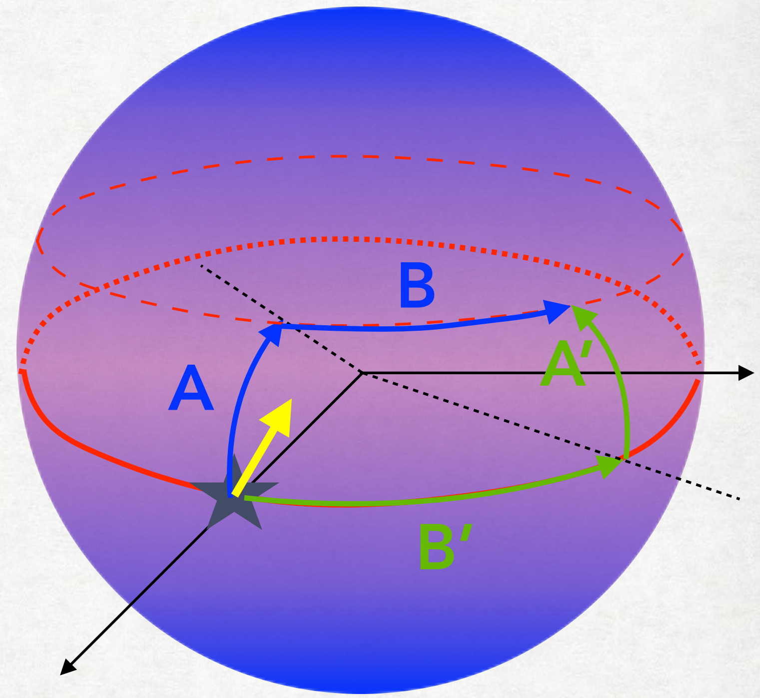
2. (B′) Vamos andar pelo equador até $\varphi = \varphi_f$; depois, vamos (A′) andar pelo meridiano até $\theta = \theta_f$

EXEMPLO DE TRANSPORTE PARALELO

- Vamos supor um vetor inicial qualquer:

$$V^{\mu}_{(i)} = \{V^{\theta}_{(i)}, V^{\varphi}_{(i)}\}$$

NESTE EXERCÍCIO PODEMOS IGNORAR A DIMENSÃO TEMPORAL: ELA NÃO FAZ NADA!



- Vamos começar pela trajetória A. Podemos denotar o ponto inicial como $\lambda = 0$, e o ponto final ($\theta = \theta_f$) como $\lambda = 1$.

- A trajetória A pode então ser escrita como:

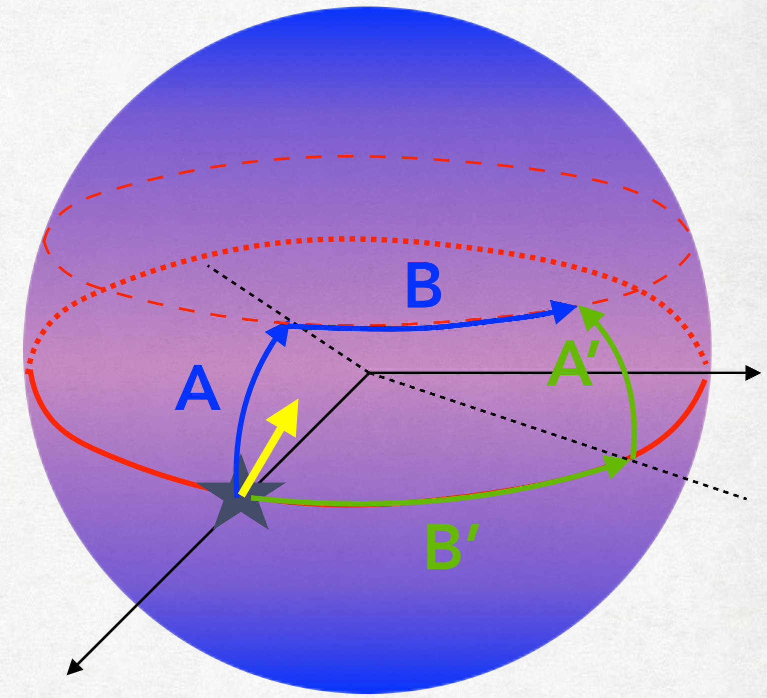
$$x^{\mu}_{A} = \{\theta(\lambda) = \pi/2 + \Delta\theta \times \lambda \,, \varphi(\lambda) = 0\} \quad , \quad \text{com } \Delta\theta = \theta_f - \pi/2$$

- Assim, o vetor tangente da trajetória é:

$$u^{\mu}_{A} = \frac{dx^{\mu}_{A}}{d\lambda} = \{\Delta\theta \,, 0\}$$

EXEMPLO DE TRANSPORTE PARALELO

- Vamos agora resolver as duas equações do transporte paralelo (usando $\theta \to x^1$, $\varphi \to x^2$):



$$0 = \frac{dV^1}{d\lambda} + \Gamma^1_{\alpha\beta} V^\alpha u^\beta_A = \frac{dV^1}{d\lambda} + \Gamma^1_{\alpha\,1} V^\alpha u^1_A$$

$$0 = \frac{dV^2}{d\lambda} + \Gamma^2_{\alpha\beta} V^\alpha u^\beta_A = \frac{dV^2}{d\lambda} + \Gamma^2_{\alpha\,1} V^\alpha u^1_A$$

$$V^\mu_{(i)} = \{V^\theta_{(i)}, V^\varphi_{(i)}\}$$

$$u^\mu_A = \{\Delta\theta, 0\}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^2_{1\,2} = \Gamma^2_{2\,1} = \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$$

- Mas $\Gamma^1_{\alpha\,1} = 0$ para qqr α, logo a primeira equação diz que:

$$\frac{dV^1}{d\lambda} = 0 \quad , \quad \text{e portanto} \quad V^1 = const. = V^\theta_{(i)}$$

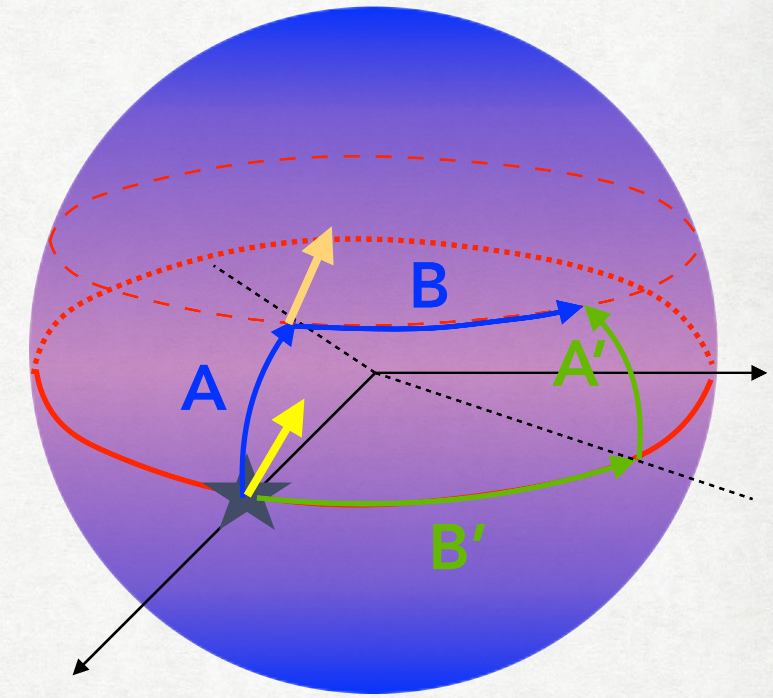
- A segunda equação é um pouco mais complicada, mas resulta em:

$$\frac{dV^2}{d\lambda} = \Delta\theta \frac{dV^2}{d\theta} = -\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta} V^2\,\Delta\theta \quad , \text{ cuja solução é} \quad V^2(\theta) = V^\varphi_{(i)}\,\mathrm{sen}^{-1}\,\theta$$

EXEMPLO DE TRANSPORTE PARALELO

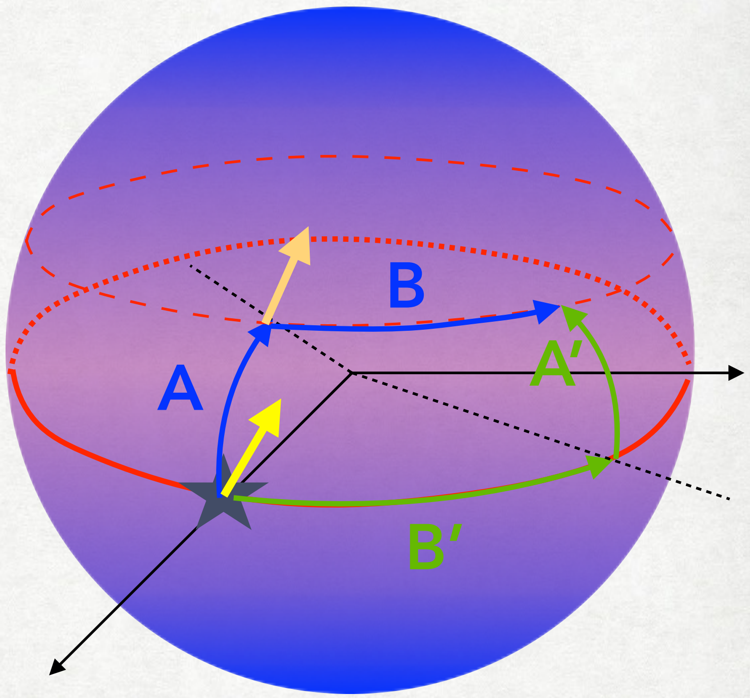
- Portanto, obtivemos que, ao transportar o vetor V^μ ao longo da trajetória A, resulta em:

$$V^\mu(\text{inicial}) = \{V^\theta_{(i)}, V^\varphi_{(i)}\} \;\rightarrow\; \{V^\theta_{(i)}, V^\varphi_{(i)}\,\text{sen}^{-1}\,\theta_f\}$$



$$V^\mu_{(i)} = \{V^\theta_{(i)}, V^\varphi_{(i)}\}$$
$$\downarrow \text{A}$$
$$V^\mu_{(i)} = \{V^\theta_{(i)}, V^\varphi_{(i)}\,\text{sen}^{-1}\,\theta_f\}$$

EXEMPLO DE TRANSPORTE PARALELO



- Agora vamos partir do ponto final da trajetória A e iniciar na trajetória B.

- Podemos novamente denotar o ponto inicial como $\lambda = 0$, e o ponto final ($\varphi = \varphi_f$) como $\lambda = 1$.

- A trajetória B pode ser descrita como:

$$x_B^\mu = \{\theta(\lambda) = \theta_f\,, \varphi(\lambda) = \varphi_f \times \lambda\}$$

- Assim, o vetor tangente da trajetória é:

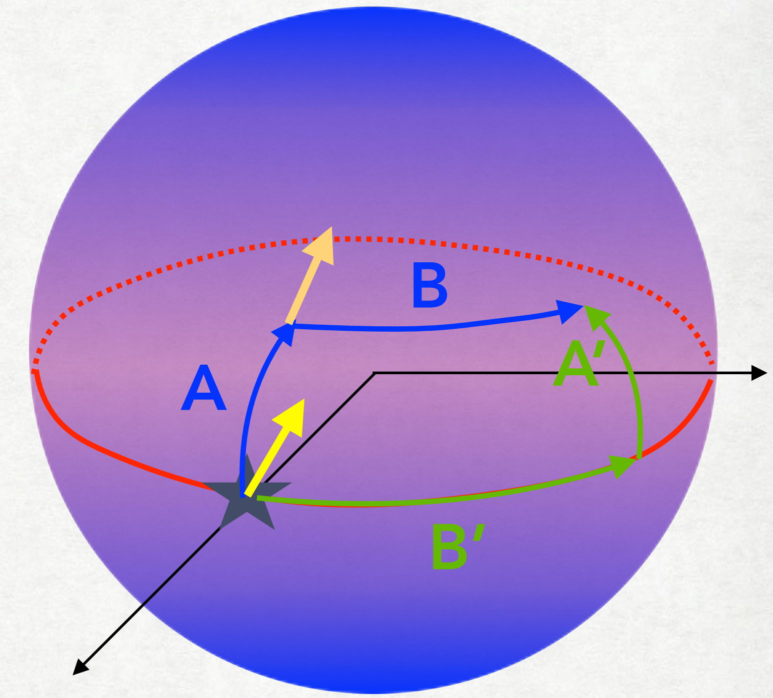
$$u_B^\mu = \frac{dx_B^\mu}{d\lambda} = \{0\,, \varphi_f\}$$

EXEMPLO DE TRANSPORTE PARALELO

- Vamos novamente resolver as equações do transporte paralelo:

$$0 = \frac{dV^1}{d\lambda} + \Gamma^1_{\alpha\beta} V^\alpha u^\beta_B = \frac{dV^1}{d\lambda} + \Gamma^1_{\alpha\,2} V^\alpha u^2_B$$

$$0 = \frac{dV^2}{d\lambda} + \Gamma^2_{\alpha\beta} V^\alpha u^\beta_B = \frac{dV^2}{d\lambda} + \Gamma^2_{\alpha\,2} V^\alpha u^2_B$$



$$V^\mu_{(i)} = \{V^\theta_{(i)}\,,\,V^\varphi_{(i)}\}$$

$$u^\mu_B = \{0\,,\varphi_f\}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^2_{1\,2} = \Gamma^2_{2\,1} = \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$$

- Após um pouquinho de álgebra, e tomando $\dfrac{d}{d\lambda} \to \varphi_f \dfrac{d}{d\varphi}$, as duas equações se reduzem a:

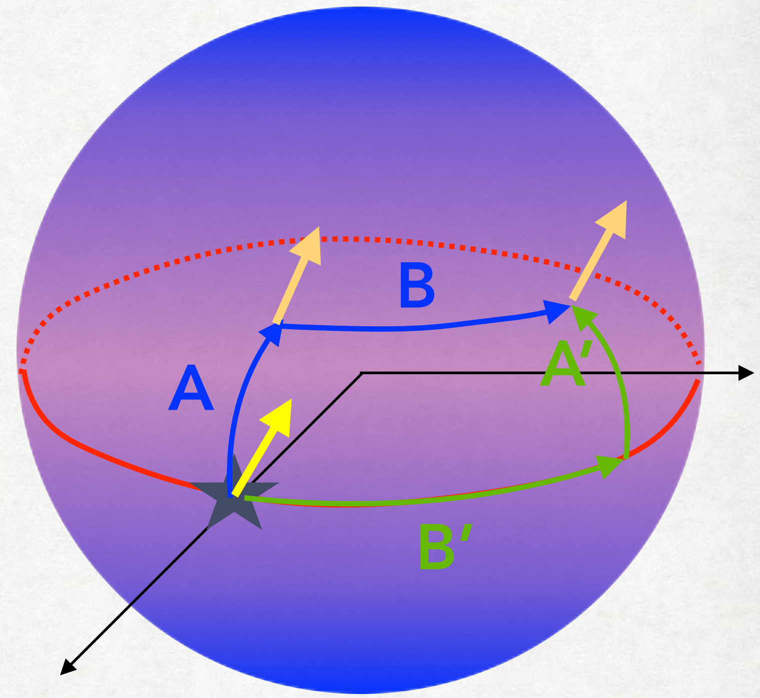
$$\frac{dV^1}{d\lambda} - \mathrm{sen}\,\theta_f \cos\theta_f\, V^2 = 0$$

$$\frac{dV^2}{d\lambda} + \frac{\cos\theta_f}{\mathrm{sen}\,\theta_f} V^1 = 0$$

LEMBRE-SE: NA TRAJETÓRIA B, O ÂNGULO θ PERMANECE CONSTANTE EM $\theta = \theta_f$

EXEMPLO DE TRANSPORTE PARALELO

- Vou deixar a resolução desse sistema (simples!!) por conta de vocês. A resposta é:



$$V_B^1 = V_{(i)}^\theta \times \cos(\varphi \, \cos\theta_f) + V_{(i)}^\varphi \times \mathrm{sen}\,(\varphi \, \cos\theta_f)$$

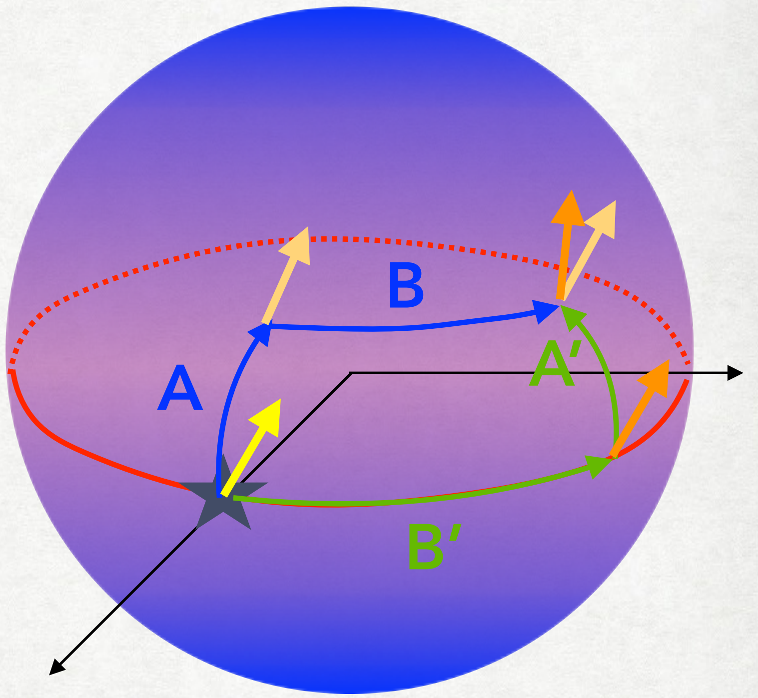
$$V_B^2 = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta_f} \left[V_{(i)}^\varphi \times \cos(\varphi \, \cos\theta_f) - V_{(i)}^\theta \times \mathrm{sen}\,(\varphi \, \cos\theta_f) \right]$$

- Ou seja, no ponto final do percurso B o vetor assume a expressão:

$$V^1 \to V_{(i)}^\theta \times \cos(\varphi_f \, \cos\theta_f) + V_{(i)}^\varphi \times \mathrm{sen}\,(\varphi_f \, \cos\theta_f)$$

$$V^2 \to \frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta_f} \left[V_{(i)}^\varphi \times \cos(\varphi_f \, \cos\theta_f) - V_{(i)}^\theta \times \mathrm{sen}\,(\varphi_f \, \cos\theta_f) \right]$$

EXEMPLO DE TRANSPORTE PARALELO



- Agora vamos tomar o outro caminho: partindo do ponto de início, primeiro vamos por B', pelo Equador.

- Se você escrever as equações do transporte paralelo, vai ver que elas são triviais, e que:

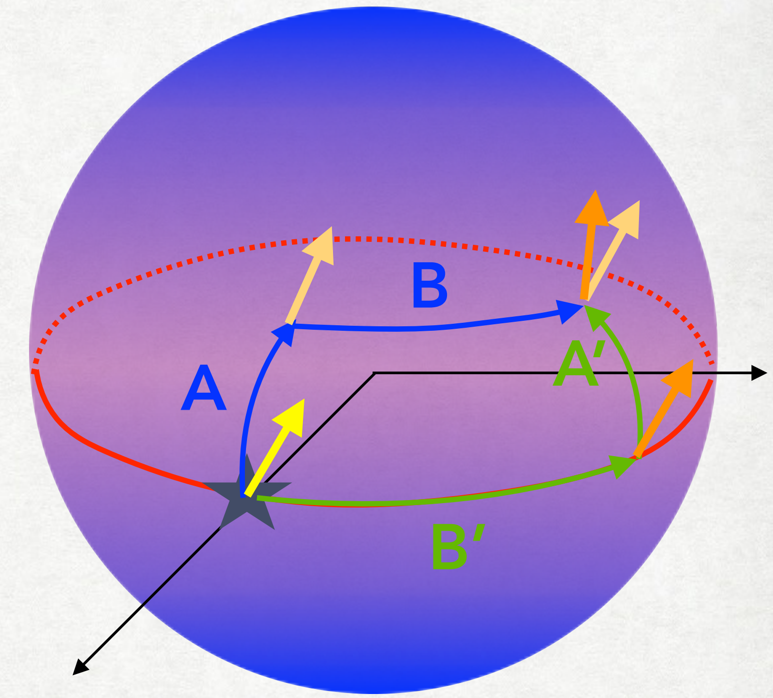
$$V^{\mu} = \{V^{\theta}_{(i)}, V^{\varphi}_{(i)}\} \to \{V^{\theta}_{(i)}, V^{\varphi}_{(i)}\} \quad !!!$$

- Se agora você subir pela trajetória A', resolvendo as equações do transporte paralelo naquele caso você vai encontrar que, após ser levado pelo segundo percurso:

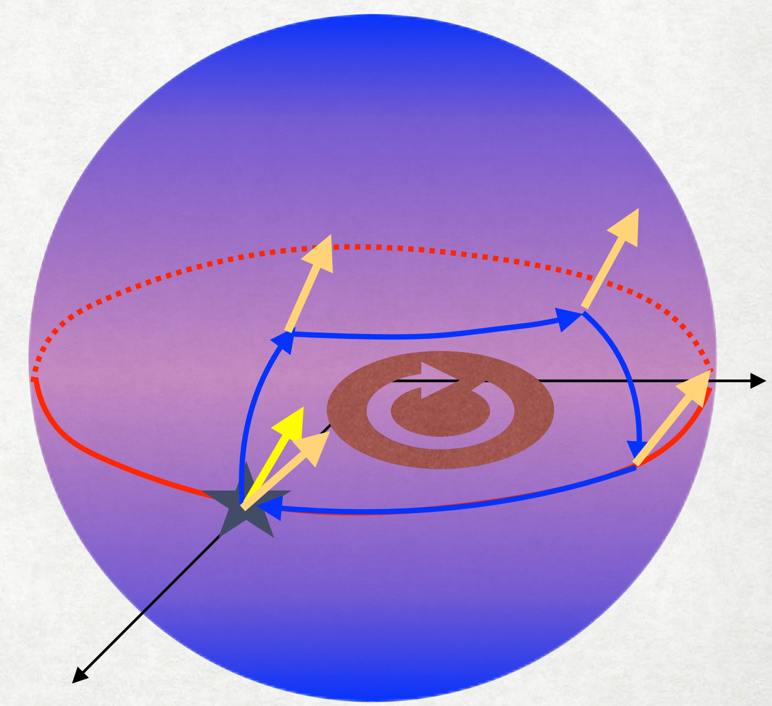
$$V^{\mu} \to \{V^{\theta}_{(i)}, V^{\varphi}_{(i)} \times \mathrm{sen}^{-1}\,\theta_f\}$$

EXEMPLO DE TRANSPORTE PARALELO

- É evidente (veja slides anteriores) que o mesmo vetor, quando transportado pelos dois caminhos diferentes, acaba sendo transformado para algo diferente, dependendo do trajeto.

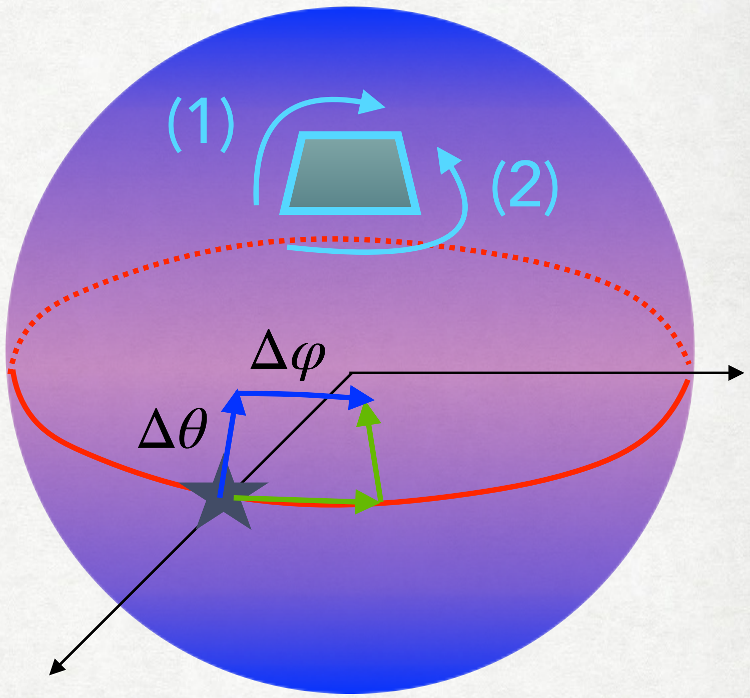


- Você também poderia imaginar que, ao transportar o vetor por um circuito fechado, ao retornar para o ponto inicial esse mesmo vetor terá se transformado.



EXEMPLO DE TRANSPORTE PARALELO

- Se você tiver paciência e fizer uma expansão em série de Taylor, tomando $\Delta\theta \to 0$ e $\varphi_f = \Delta\varphi \to 0$, vai ver que:

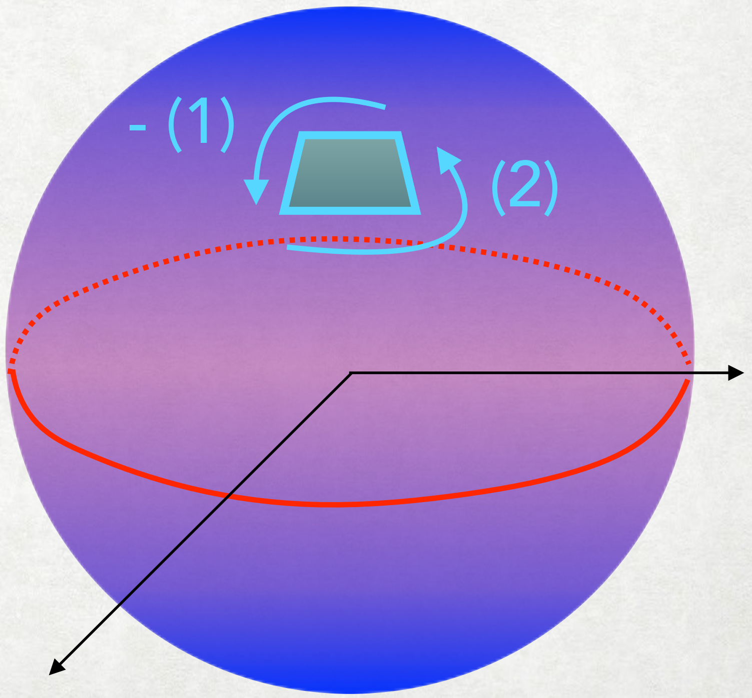


$$\Delta V^\mu = V^\mu_{(2)} - V^\mu_{(1)} \to \{V^\varphi_{(i)}, \, -V^\theta_{(i)}\} \times \Delta\theta \, \Delta\varphi$$

- Se você tiver ainda mais paciência de fazer esse cálculo para qualquer quadrilátero na esfera, partindo de qualquer ponto θ_0 (o que fizemos aqui foi para $\theta_0 = \pi/2$), você vai encontrar que:

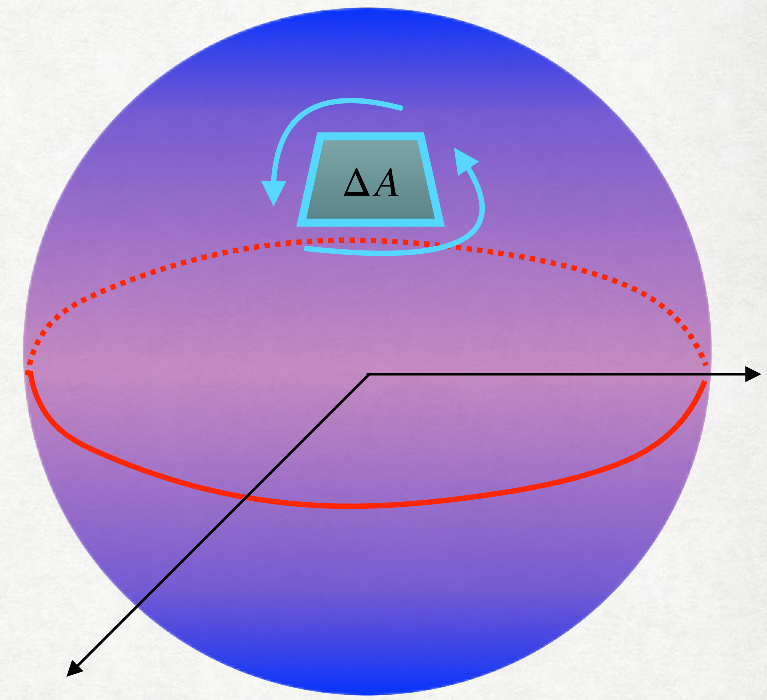
$$\Delta V^\mu \to \{V^\varphi_{(i)}, \, -V^\theta_{(i)}\} \times \boxed{\text{sen}\, \theta_0 \, \Delta\theta \, \Delta\varphi}$$

ÁREA!!!



- Note também que o circuito completo, começando por (2) e tomando o caminho inverso de (1), corresponde a esse ΔV^μ acima

EXEMPLO DE TRANSPORTE PARALELO



- Se retornarmos as dimensões espaciais usando o raio da esfera (R), o que encontramos é que

$$\Delta V \sim (\text{algo}) \times (V) \times \Delta A$$

- Num espaço plano (Euclideano), esse "algo" é ***zero***.

- Num espaço curvo, esse "algo" é a ***curvatura***, a marca registrada de que esse espaço ***não é Euclideano***.

MÉTRICA, VETORES E DERIVADA COVARIANTE

- Vamos agora nos lembrar da relação que obtivemos entre a ***métrica no referencial localmente inercial*** (y, no qual a métrica é a de Minkowski) e a ***métrica num referencial qualquer*** (x):

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} \quad , \quad \text{ou seja} \quad , \quad ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = \eta_{\alpha\beta}\, dy^\alpha\, dy^\beta$$

- De fato, em ***qualquer outro referencial*** x' temos:

$$ds^2 = g'_{\mu\nu}\, dx'^\mu\, dx'^\nu$$

- Isso significa que a ***métrica em dois referenciais diferentes*** (x e x') está relacionada por:

$$g'_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}$$

MÉTRICA, VETORES E DERIVADA COVARIANTE

- A relação entre ***dois referenciais quaisquer*** está embutida nas expressões acima:

$$\boxed{dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} dx^{\alpha}} \quad , \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$$

- Agora uma pergunta válida seria: suponha que calculamos o ***gradiente*** de um escalar qualquer ϕ, primeiro no referencial x:

$$A_{\mu} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}}$$

- Como esse gradiente se transforma? Pela relação acima, e usando que $\phi' = \phi$ é um escalar, temos que:

$$A'_{\mu} = \frac{\partial \phi}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\alpha}} \quad , \quad \Rightarrow \quad \boxed{A'_{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} A_{\alpha}}$$

MÉTRICA, VETORES E DERIVADA COVARIANTE

- O que acabamos de encontrar é algo muito importante: há apenas ***dois tipos de vetores fundamentais***,

Tipo 1: $dx'^{\mu} = \dfrac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} dx^{\alpha}$, e Tipo 2: $\dfrac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \dfrac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \dfrac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$

- Um vetor é dito <u>*covariante*</u> se ele se transforma como $\partial / \partial x^{\mu}$:

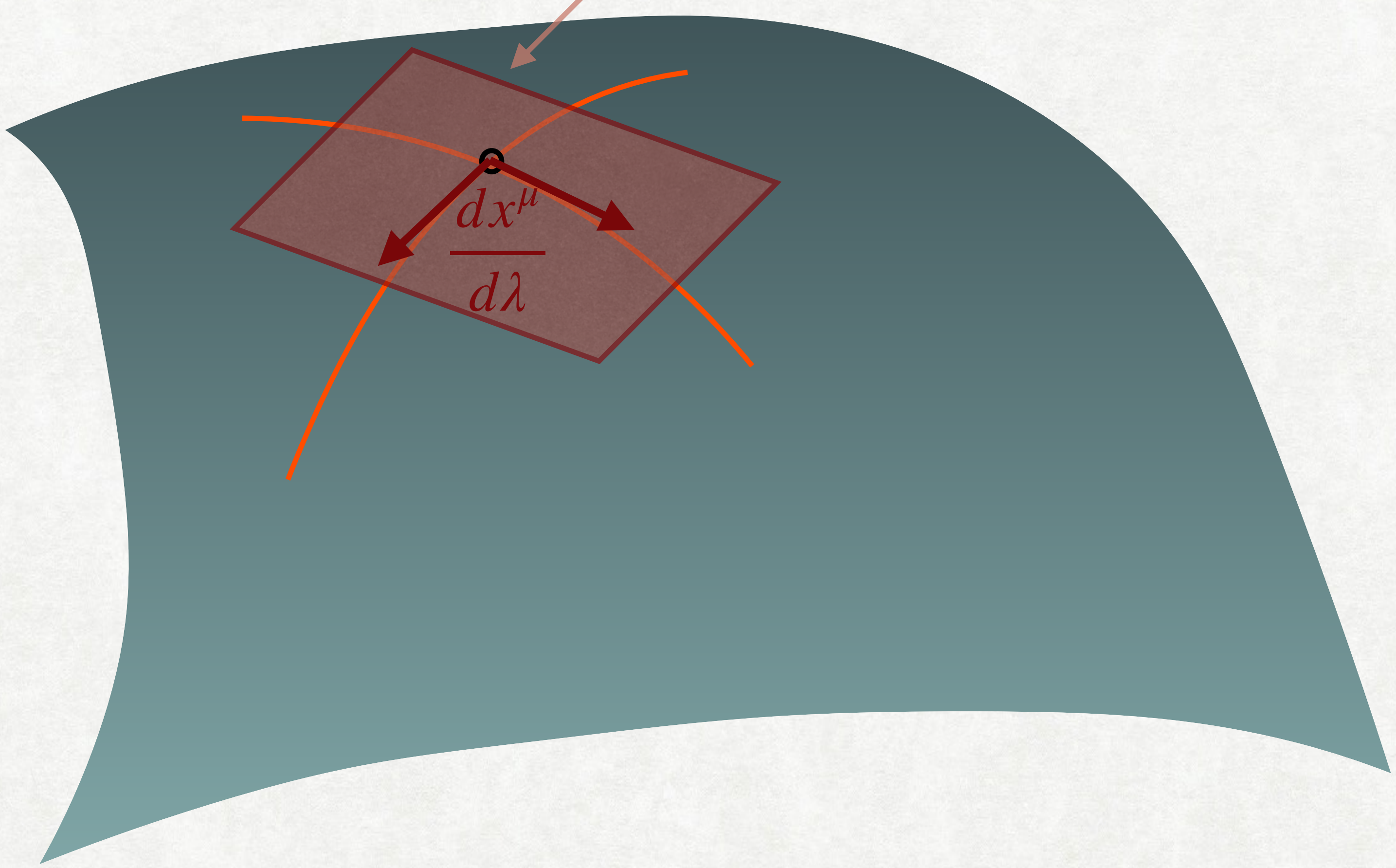
$A_{\mu} \rightarrow A'_{\mu} = \dfrac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} A_{\alpha}$ (O que chamávamos de "vetores duais")

- Um vetor é dito <u>*contra-variante*</u> se ele se transforma como dx^{μ}:

$V^{\mu} \rightarrow V'^{\mu} = \dfrac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} V^{\alpha}$ (O que chamávamos de "vetores normais")

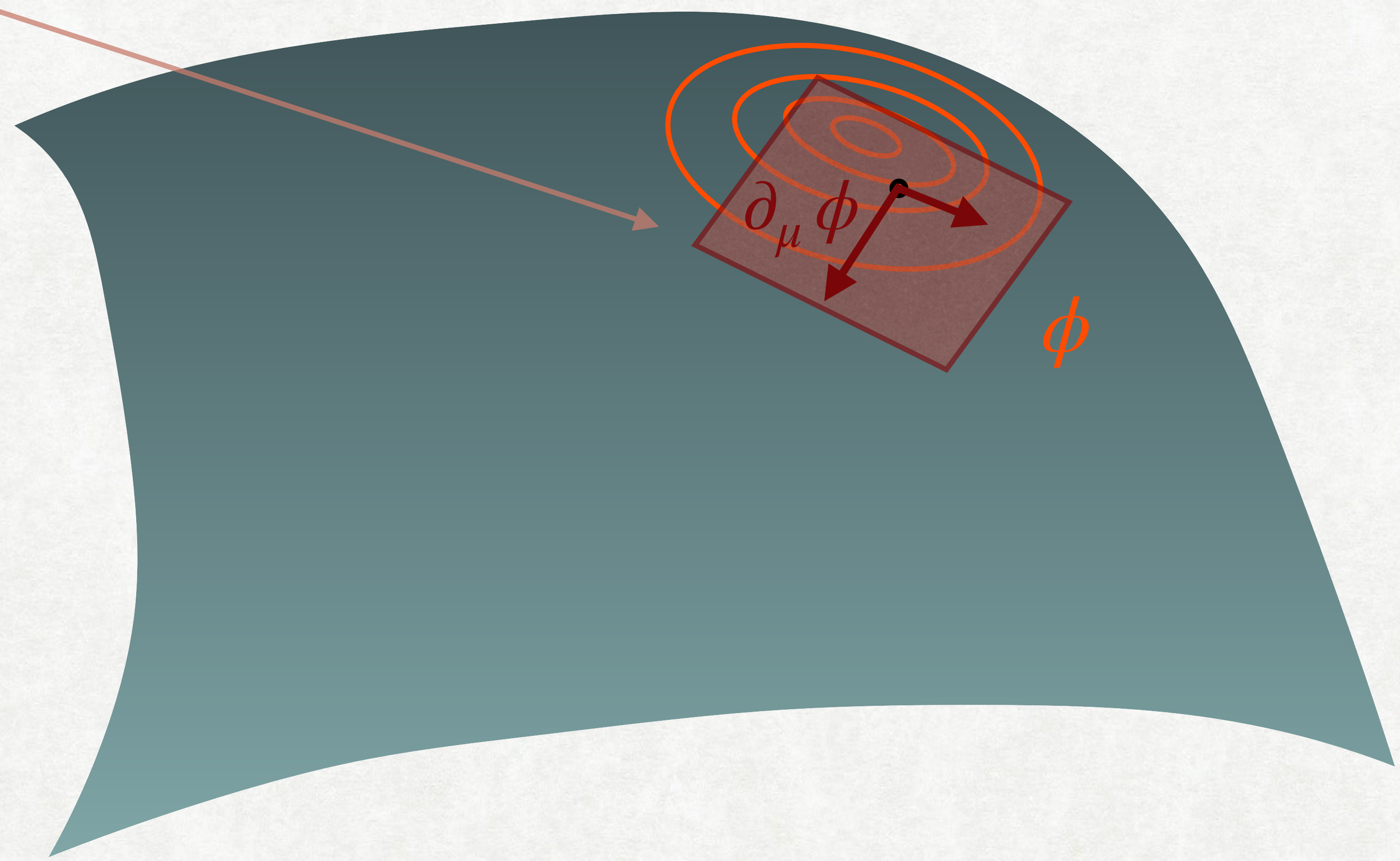
MÉTRICA, VETORES E DERIVADA COVARIANTE

- Os objetos acima vivem em dois espaços vetoriais distintos, que são ***duais*** entre si: o ***espaço tangente***, e o ***espaço cotangente***.



MÉTRICA, VETORES E DERIVADA COVARIANTE

- Os objetos acima vivem em dois espaços vetoriais distintos, que são duais entre si: o ***espaço tangente***, e o ***espaço cotangente***.



No espaço Euclideano (plano), esses dois espaços são idênticos.
Essa distinção, portanto, só faz diferença num espaço curvo!

A DERIVADA COVARIANTE

- Agora vamos um pouco além: o que ocorre quando tomamos ***derivadas de um vetor***, em vez de um escalar?

- Será que o objeto $Q_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$ também se transforma da maneira "certa" — ou seja, como, por exemplo, $S_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$?

- Sabemos como *cada parte* se transforma, portanto podemos escrever:

$$Q'_{\mu\nu} = \frac{\partial A'_\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}\frac{\partial A'_\mu}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}A_\beta\right)$$

$$= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}A_\beta$$

- O primeiro termo é o que esperamos, mas o segundo não! E agora?…

A DERIVADA COVARIANTE

- Para avançar, vamos lembrar que quando encontramos algo assim (*segunda derivada* de uma coordenada com relação a outra) foi justamente quando introduzimos a noção das *conexões*. Em termos das coordenadas no referencial localmente inercial (y), temos:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\beta}} \frac{\partial^2 y^{\beta}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}$$

- Mas agora cabe a pergunta: e num referencial x' ? Como Γ se transforma?

$$\Gamma'^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial y^{\beta}} \frac{\partial^2 y^{\beta}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}}$$

- Abrindo essa expressão e simplificando-a (exercício!), chegamos em:

$$\Gamma'^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\beta}_{\sigma\lambda} + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}\, \partial x'^{\nu}}$$

OK... AFINAL, Γ **<u>NÃO É</u>** UM TENSOR!

ERA ALGO ASSIM QUE TINHA "SOBRADO" NA EXPRESSÃO PARA $Q_{\mu\nu} = \partial_{\nu} A_{\mu}$!

A DERIVADA COVARIANTE

- Então agora podemos usar essa expressão para "compensar" o termo que sobrou de $Q_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu$. Note que:

δ^γ_β

$$\Gamma'^{\alpha}_{\mu\nu} A'_\alpha = \left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \Gamma^\beta_{\sigma\lambda} + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \right) \times \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} A_\gamma \right)$$

δ^γ_β

- Portanto, podemos escrever:

$$\Gamma'^{\alpha}_{\mu\nu} A'_\alpha = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \Gamma^\beta_{\sigma\lambda} A_\beta + \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} A_\beta$$

- Agora, lembre que:

$$\frac{\partial A'_\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} A_\beta$$

Podemos fazer esses dois termos cancelarem!

A DERIVADA COVARIANTE

- Explicitamente, temos:

$$\frac{\partial A'_\mu}{\partial x'^\nu} - \Gamma'^{\alpha}_{\mu\nu} A'_\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}\Gamma^\beta_{\sigma\lambda} A_\beta$$

- Redefinindo os índices acima, temos:

$$\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} A_\sigma\right)' = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} A_\lambda$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} A_\sigma\right)' = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} A_\lambda\right)$$

- Portanto, o objeto:

$D_\nu A_\mu \equiv \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} A_\sigma$ se transforma como $\left(D_\nu A_\mu\right)' = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}\dfrac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\left(D_\alpha A_\beta\right)$

A DERIVADA COVARIANTE

- Assim, encontramos o operador da ***derivada covariante***, que faz com que um objeto tal como:

$$\boxed{D_\nu A_\mu \equiv \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} A_\sigma}$$

seja um ***tensor*** (no caso, um *tensor covariante de rank 2*).

- Um cálculo totalmente análogo leva à definição da derivada covariante de um vetor contra-variante:

$$\boxed{D_\nu V^\mu \equiv \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} V^\sigma}$$

- ***Exercício:*** demonstre que $\left(D_\nu V^\mu\right)' = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}\dfrac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu}\left(D_\alpha V^\beta\right)$

A DERIVADA COVARIANTE

- *Obs 1*: Derivada covariante de um escalar:

  $D_\mu \phi = \partial_\mu \phi$ (ou seja: nesse caso temos a derivada normal)

- *Obs 2*: Derivada covariante de um tensor duplamente covariante:

  $$D_\alpha Q_{\mu\nu} \equiv \partial_\alpha Q_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\alpha\mu} Q_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\alpha\nu} Q_{\mu\sigma}$$

- *Obs 3*: Derivada de um tensor duplamente contravariante:

  $$D_\alpha Y^{\mu\nu} \equiv \partial_\alpha Y^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} Y^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\sigma} Y^{\mu\sigma}$$

- ***Exercício:*** demonstre que esses objetos são de fato tensores

A DERIVADA COVARIANTE

- ***Corolário***: derivada covariante da ***métrica***

$$D_\alpha g_{\mu\nu} \;=\; \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\alpha\mu} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\alpha\nu} g_{\mu\sigma}$$

- Mas veja as suas notas da Aula 10, pg. 15:

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\alpha\mu} g_{\sigma\nu} + \Gamma^\sigma_{\alpha\nu} g_{\mu\sigma}$$

- Portanto, obtemos que $D_\alpha g_{\mu\nu} = 0$, identicamente! Mas por que isso acontece???

- Ora, isso ***tem que ser verdade***: se um tensor *é zero num referencial*, ele tem que ser *zero em todos os referenciais.* E claramente temos ***um referencial "especial"***, onde não só ***a métrica é constante***, mas as ***conexões se anulam*** — certo?...

- Esse é justamente o ***referencial localmente inercial*** !!!

- Nele, $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$ e $\Gamma \to 0$. Portanto, nesse referencial temos que $\left(D_\alpha g_{\mu\nu}\right)_{RLI} \to 0$. Logo, em qualquer referencial temos que $D_\alpha g_{\mu\nu} = 0$!

O TRANSPORTE PARALELO REVISITADO

- Vamos agora voltar à expressão para a derivada covariante de um vetor “normal":

$$D_\nu V^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} V^\sigma$$

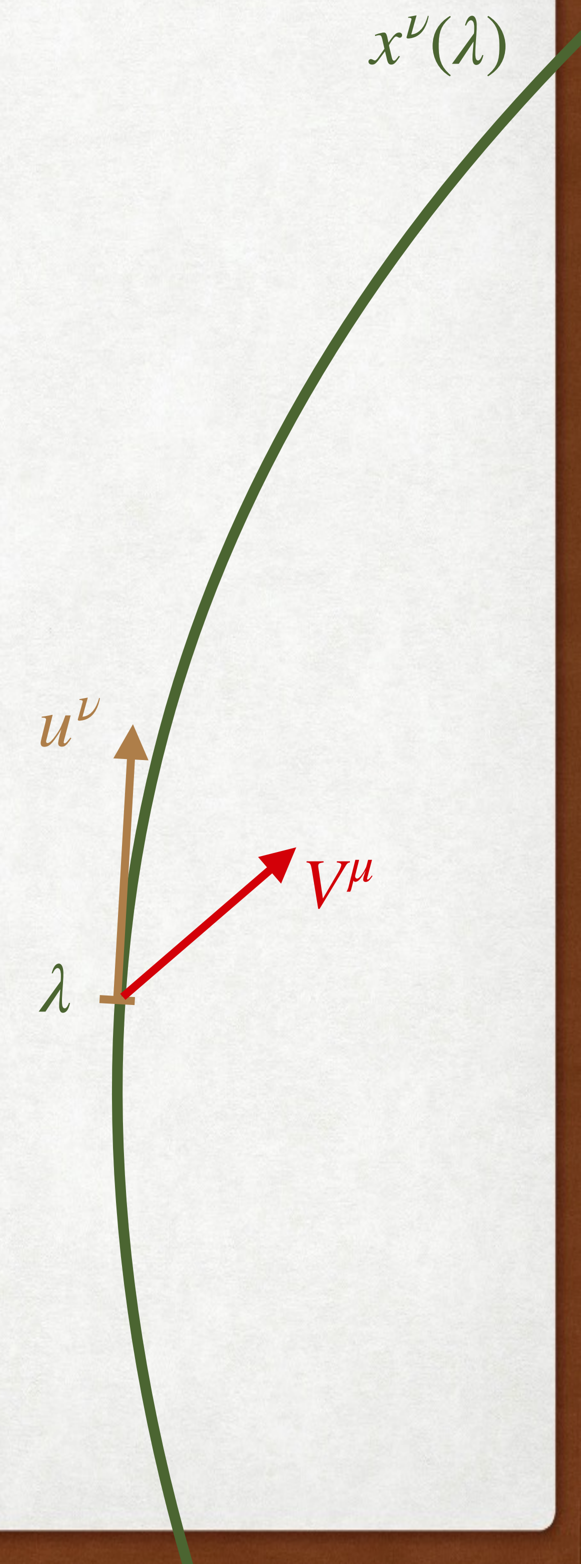
- Considere essa derivada projetada ao longo de uma trajetória x:

$$\frac{d x^\nu}{\partial \lambda} D_\nu V^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu}\frac{d x^\nu}{\partial \lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{d x^\nu}{\partial \lambda} V^\sigma$$

- Se quisermos exigirmos que o vetor não seja alterado ao longo da curva x, o que queremos é que:

$$\frac{D V^\mu}{d\lambda} = \frac{d x^\nu}{d\lambda} D_\nu V^\mu = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d V^\mu}{d \lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} u^\nu V^\sigma = 0$$ (Eq. do Transporte Paralelo!!)

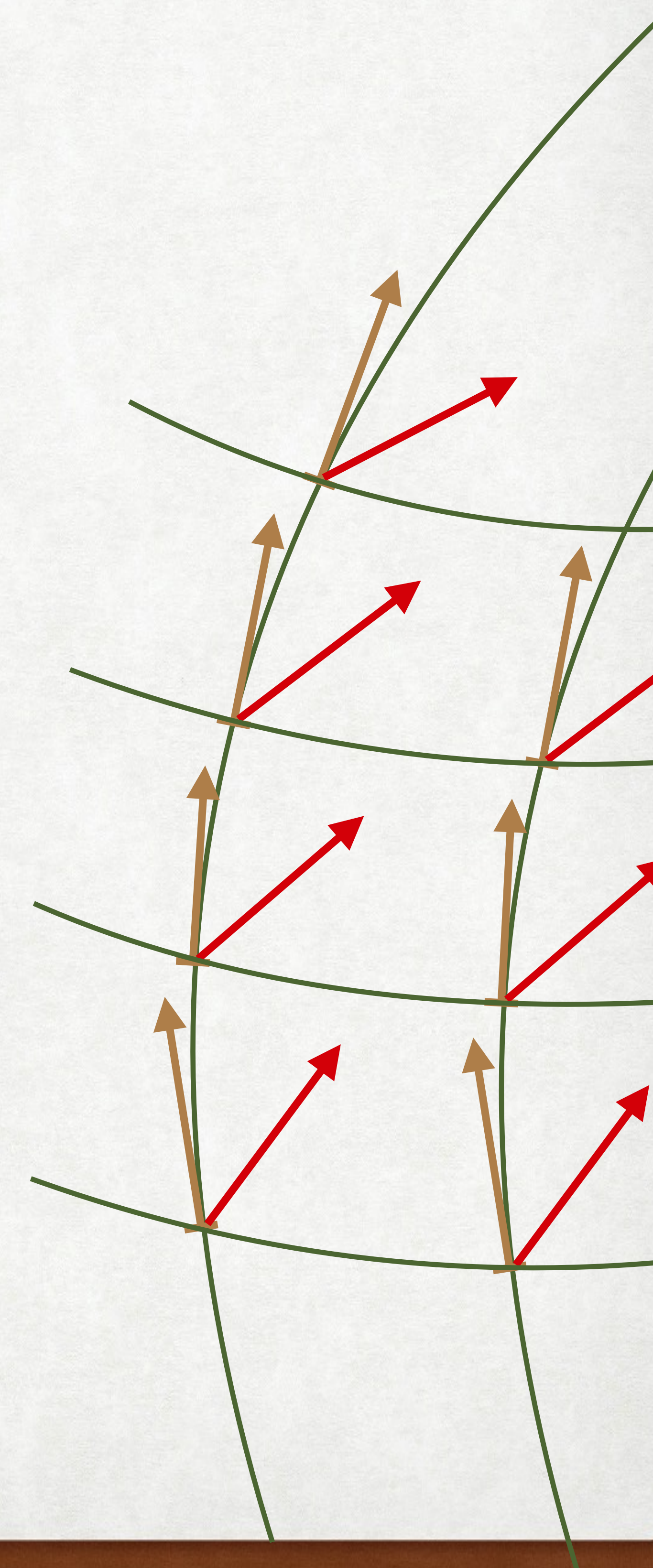


O TRANSPORTE PARALELO REVISITADO

- Ou seja, o transporte paralelo e a derivada covariante são no fundo a mesma coisa: ambos garantem que as normas de vetores, transportadas de um lugar para outro em cima de uma variedade (espaço curvo), devem ser preservadas:

$$\frac{D}{d\lambda}\left(g_{\mu\nu}u^\mu V^\nu\right) = \frac{D}{d\lambda}||uV|| = 0$$

- Em outras palavras, o transporte paralelo e a derivada covariante permitem ***conectar*** a geometria de um ponto para outro em um espaço curvo, transportando produtos escalares, ortogonalidades, etc.



PARA A AULA QUE VEM (15/4)

- Nova lista de exercícios em breve (hoje ou amanhã)
- Leitura: S. Carroll, Capítulo 3 (tudo que você conseguir!)