Função exponencial e logarítmica

- Estamos em um momento onde se fala muito em crescimento "exponencial". Encontramos também, nos texto sobre o coronavirus, gráficos na escala logarítmica. Este são apenas dois exemplos atuais que mostram a importância do estudo destas funções.

- Falaremos primeiro da função exponencial a^x e depois da função logarítmica $\log_a^x$.

Iremos sempre considerar $\underline{a>0}$ (por causa do domínio) e $\underline{a \neq 1}$ (caso trivial, não interesse).

Função exponencial:

- Na escola aprendemos primeiro o que é a^n, $n \in \mathbb{N}$, e depois $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ e $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$. Usando as regras de exponenciação

Faz sentido falarmos de a^q, $q \in \mathbb{Q}$.

Mas como definir 2^π ou $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$?

Para a definição ser "boa", ou seja, a função obtida posteriormente ser contínua, isso tem que ser feito com cuidado.

A função a^q, $q \in \mathbb{Q}$ teria um gráfico todo "esburacado".

Queremos preencher estes buracos de modo que a função final não tenha "quebras" ("saltos"), ou seja, que ela seja contínua.

Isso pode ser feito, por exemplo, usando o conceito de "limite de sequências", do qual não trataremos aqui.

Pode-se então mostrar o seguinte:

<u>Teorema</u>: Seja $a>0$ e $a \neq 1$ um número. Existe uma única função f definida e contínua em $\mathbb{R}$ tal que $f(r) = a^r \ \forall r \in \mathbb{Q}$.

<u>Definição</u>: A função f obtida no teorema anterior é chamada de <u>função exponencial de base</u> a e denotada por $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$.

<u>Obs</u>: Não confundir $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ e $g(x) = x^a$, $x \in \mathbb{R}$.

. <u>Propriedades</u>: Para $a>0$, $b>0$, $x,y \in \mathbb{R}$ temos:

(1) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

(2) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(3) $(a.b)^x = a^x . b^x$

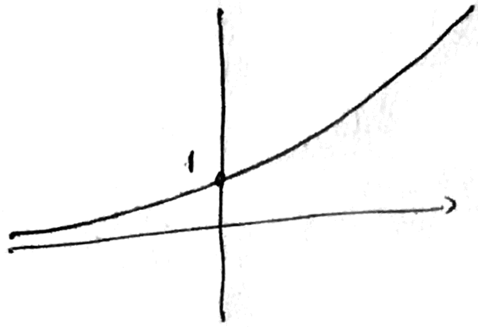
(4) Se $a>1$, $x<y \Rightarrow a^x < a^y$ (a função é crescente)

(5) Se $a<1$, $x<y \Rightarrow a^x > a^y$ (a função é decrescente)

. <u>Gráficos</u>:

$\text{Dom}(a^x) = \mathbb{R}$

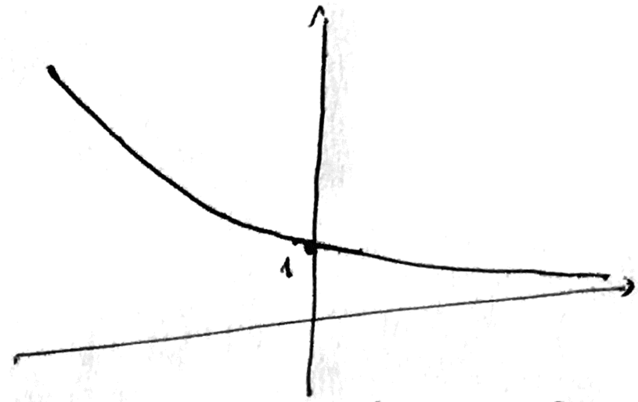
$\boxed{a>1}$



$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

$\boxed{0<a<1}$



$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$

<u>Obs</u>: Analisando o gráfico, percebemos que $Im(a^x) =]0,+\infty[$ (o que de fato pode ser provado).

Logo dado $y \in]0,+\infty[$ $\exists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = y$.

Além disso, como a^x é injetora, esse x é única.

Ou seja, a função

$$f: \mathbb{R} \to]0,+\infty[\qquad \text{é inversível.}$$
$$x \mapsto a^x$$

A inversa da função exponencial é a <u>função</u> <u>logarítmica</u>.

<u>Função logarítmica</u>

· Continuamos supondo $a>0$ e $a \neq 1$.

Definisão: A funsão logaritmica é a inversa da funsão exponencial, ou seja, é a funsão:

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a : \left]0,+\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad y = \log_a^x \iff a^y = x \end{array}}$$

Obs: O logaritmo foi inventado de maneira indipendente por John Neper (1550-1617) e Just Bürgi (1552-1632). Eles fizeram as "tabelas de logaritmo" e o objetivo era achar uma maneira mais simples de fazer as longas operasões de multiplicasão e divisão que estavam aparecendo com o desenvolvimento da navegasão e astronomia. Fizeram as tabelas usando a idéia (já conhecida) de que "soma de termos de uma p.a. correspondem a multiplicasão de termos de uma p.g." ($a^x \cdot a^y = a^{x+y}$)

Obs: Como a funsão logaritmica é a inversa da funsão exponencial, é imediato que:

a) $\log_a a^x = x$

b) $a^{\log_a^x} = x$

c) $\log_a^a = 1$

d) $\log_a^1 = 0$

Fato: $\log_a$ é uma funsão contínua.

Propriedades: $(a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1,\ \alpha>0,\ \beta>0)$

1) $\log_a(\alpha.\beta) = \log_a \alpha + \log_a \beta$

2) $\log_a \alpha^\beta = \beta \log_a \alpha$

3) $\log_a\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \log_a \alpha - \log_a \beta$

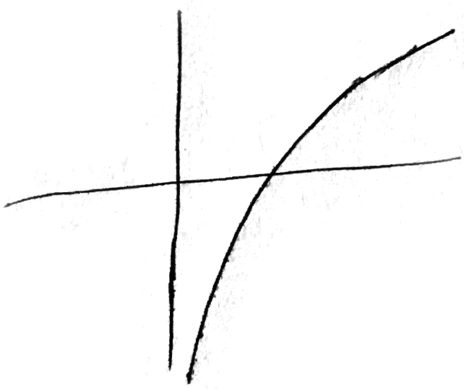
4) (Mudança de base) $\log_a \alpha = \dfrac{\log_b \alpha}{\log_b a}$

5) Se $a>1$, $\alpha<\beta \Rightarrow \log_a \alpha < \log_a \beta$ (função crescente)

6) Se $0<a<1$, $\alpha<\beta \Rightarrow \log_a \alpha > \log_a \beta$ (função decrescente)

Gráficos $D_f =]0,+\infty[$

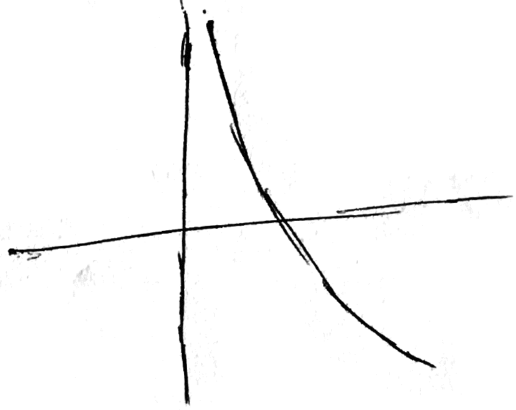
$\boxed{a>1}$



$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$

$\boxed{0<a<1}$



$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$

- Estamos interessão nas funções log e exp em uma base especial: $\underline{e}$