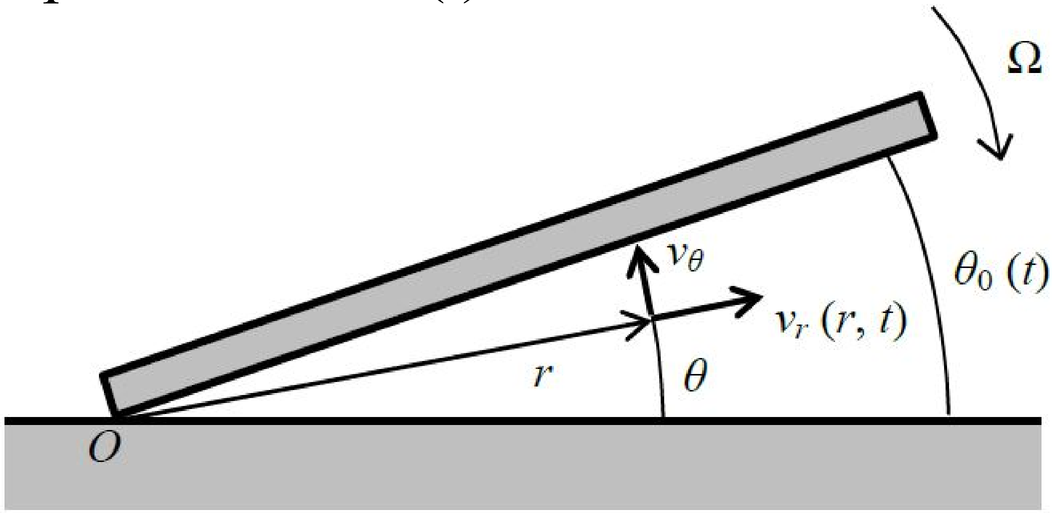
PME-3330

Exercício 1 – 1ª PROVA – 2019

Equação da Continuidade

Uma placa plana está articulada no ponto O junto a uma superfície horizontal. A placa articulada forma em um dado instante um ângulo $\theta_o(t)$ e gira com velocidade angular Ω na direção horária, espremendo um fluido incompressível entre as duas superfícies. Supondo que o problema é bidimensional e que a velocidade radial não depende da posição angular, ou seja, $v_r(r, \theta, t) = v_r(r, t)$, encontre as componentes da velocidade v_r e v_θ para $0 \leq \theta \leq \theta_0(t)$.



A equação da continuidade é:

$$\nabla \vec{V} = 0$$

Usando um sistema cilíndrico de coordenadas:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r\,v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{r\,\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Para escoamento bidimensional:

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial (r\,v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{r\,\partial \theta} = 0}$$

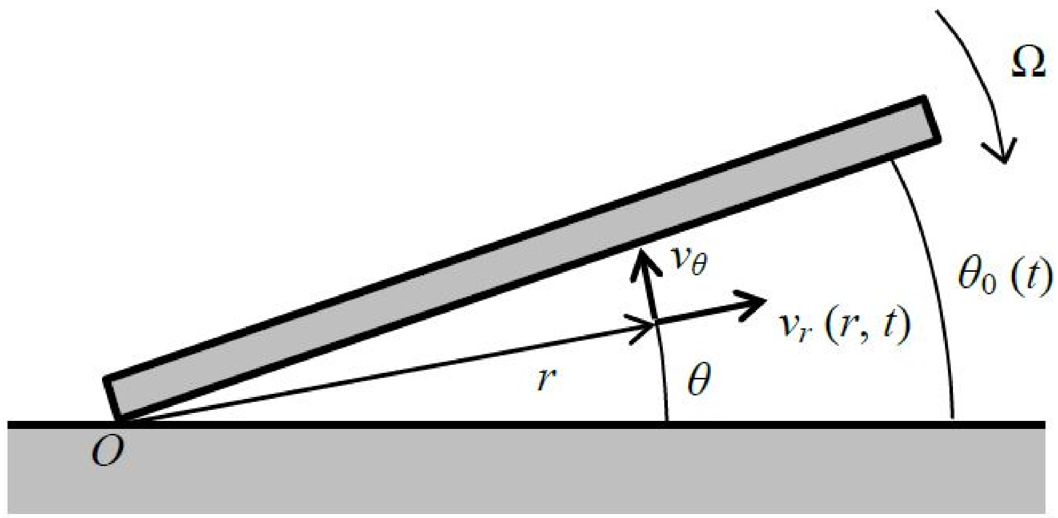
Isso resulta:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = -\frac{\partial (r\, v_r)}{\partial r}$$

Como v_r não depende de θ, podemos integrar:

$$v_\theta = -\frac{\partial (r\, v_r)}{\partial r}\theta + f(r,t)$$

$$v_\theta = -\frac{\partial(r\,v_r)}{\partial r}\theta + f(r,t)$$

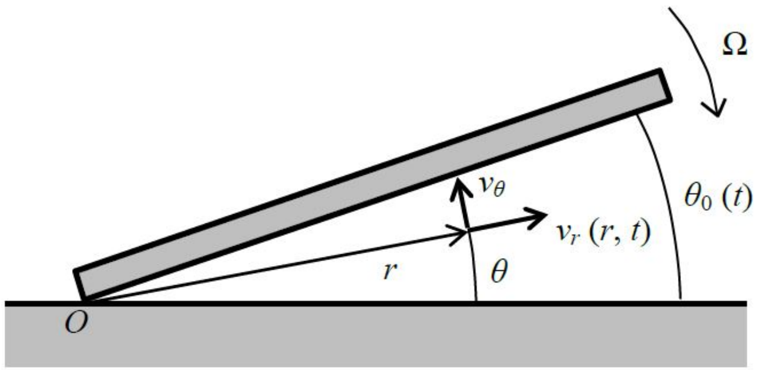


Note: $v_\theta = 0$ para $\theta = 0$ e qualquer instante t e raio r, pois nessa condição estamos sobre a superfície horizontal. Assim, $f(r, t) = 0$. Logo:

$$v_{\theta} = -\frac{\partial(r\,v_r)}{\partial r}\theta$$

Agora, para $\theta = \theta_0(t)$, se considerarmos Ω um valor positivo, teremos:

$$v_{\theta} = -\frac{\partial(r\,v_r)}{\partial r}\theta_0(t) = -\Omega r$$



Isso resulta:

$$\frac{\partial\left(r\,v_r\right)}{\partial\,r} = \frac{\Omega\,r}{\theta_0(t)}$$

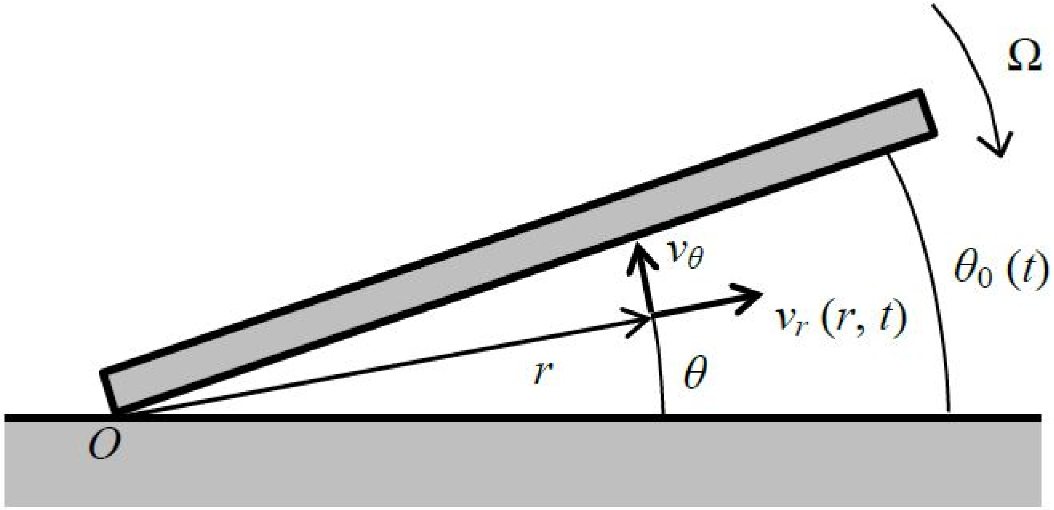
Integrando em *r*:

$$r\,v_r = \frac{\Omega}{\theta_0(t)}\frac{r^2}{2} + g\left(\theta,t\right)$$

Ou:

$$v_r = \frac{\Omega}{\theta_0(t)}\frac{r}{2} + \frac{g\left(\theta,t\right)}{r}$$

$$v_r = \frac{\Omega}{\theta_0(t)} \frac{r}{2} + \frac{g(\theta, t)}{r}$$



Ocorre que, para termos valor finito de v_r em $r = 0$, $g(\theta,t) = 0$. Além disso, em $r = 0$ temos que ter $v_r = 0$ (o fluido não pode penetrar na articulação e não pode formar um vazio). Assim:

$$\boxed{v_r = \frac{\Omega}{\theta_0(t)} \frac{r}{2}}$$

Lembrando agora que a velocidade v_θ é dada por:

$$v_\theta = -\frac{\partial(r\, v_r)}{\partial r} \theta$$

Temos:

$$\boxed{v_\theta = -\frac{\Omega}{\theta_0(t)} r\theta}$$