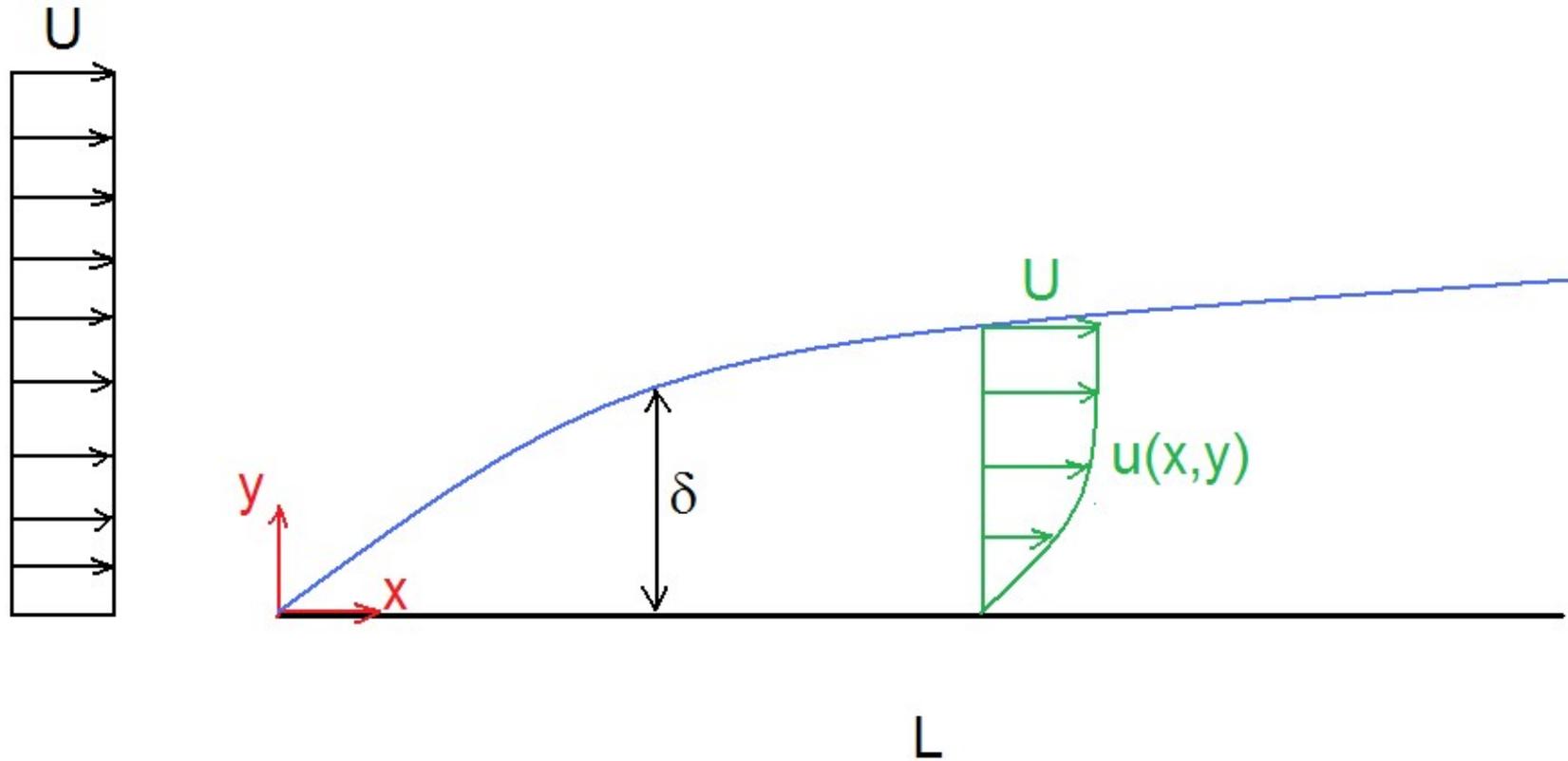


Camada Limite

# 1) Equações de Prandtl para a camada limite



A equação da continuidade e as equações de Navier-Stokes, para as direções  $x$  e  $y$ , considerando escoamento incompressível, bidimensional e permanente e ignorando a gravidade, são:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (1.3)$$

Essas equações são simplificadas usando uma análise de ordens de grandeza. A derivada  $\partial u/\partial x$  pode ser considerada como tendo uma ordem de grandeza  $U/L$ . A derivada  $\partial v/\partial y$  pode ser considerada como tendo ordem de grandeza  $v/\delta$ . Da equação da continuidade:

$$v \approx \frac{\delta}{L} U \quad (1.4)$$

Como a espessura da camada limite é bem menor que o comprimento da placa ( $\delta \ll L$ ) e a velocidade  $u$  tem ordem de grandeza próxima da velocidade do escoamento externo  $U$ , temos como conclusão que  $v \ll u$ .

Fazendo uma análise de ordem de grandeza da equação de Navier-Stokes na direção  $x$ :

$$\underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{U \cdot \frac{U}{L} = \frac{U^2}{L}} + \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial y}}_{\frac{\delta}{L} U \cdot \frac{U}{\delta} = \frac{U^2}{L}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\frac{U}{L^2}} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\frac{U}{\delta^2}} \right) \quad (1.5)$$

Se aproximarmos a ordem de grandeza de  $\partial^2 u / \partial x^2$  por  $U/L^2$  e  $\partial^2 u / \partial y^2$  por  $U/\delta^2$ , teremos que no termo viscoso da equação de Navier-Stokes na direção  $x$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \gg \gg \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.6)$$

Assim, a equação de Navier-Stokes na direção  $x$  fica:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.7)$$

Da equação de Navier-Stokes na direção  $y$ :

$$\underbrace{u \frac{\partial v}{\partial x}}_{U \cdot \frac{\delta U}{L L} = \frac{\delta U^2}{L L}} + \underbrace{v \frac{\partial v}{\partial y}}_{\frac{\delta}{L} U \cdot \frac{\delta U}{L \delta} = \frac{\delta U^2}{L L}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\frac{\delta U}{L L^2}} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{\frac{\delta U}{L \delta^2}} \right) \quad (1.8)$$

Como todos os termos são equivalentes aos termos da equação na direção x multiplicados por  $\delta/L$ , chegamos à conclusão que:

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx \frac{\delta}{L} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.9)$$

Como  $\delta \ll L$ , podemos então dizer da equação de Navier-Stokes na direção y:

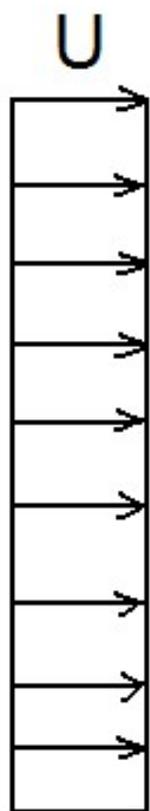
$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0 \quad (1.10)$$

Diz-se que o gradiente de pressão do escoamento externo é impresso na camada limite. Assim, em resumo, as equações de Prandtl da camada limite são:

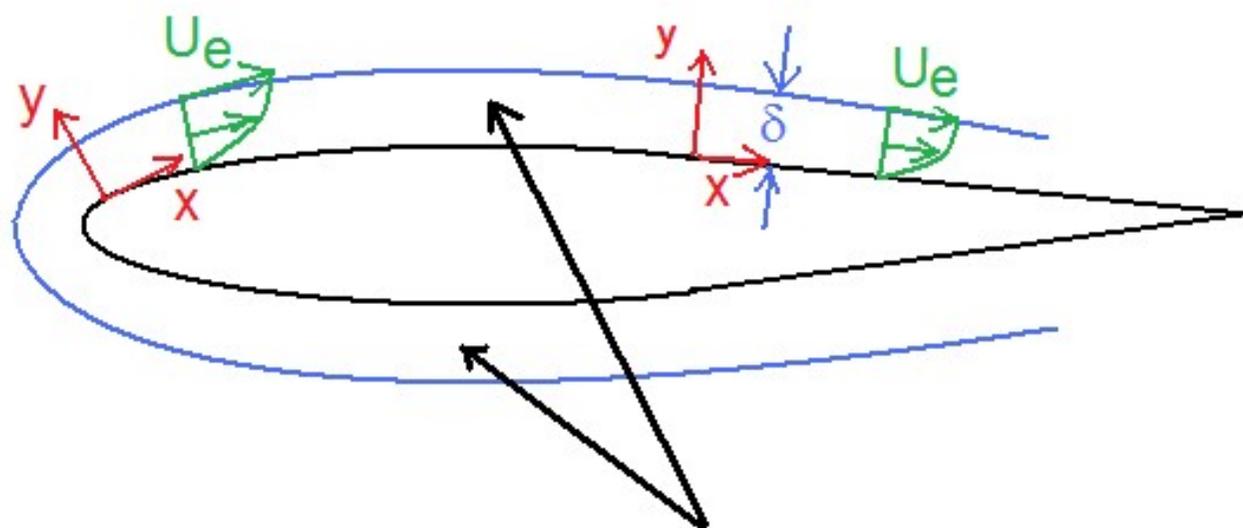
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.11)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0 \quad (1.13)$$



escoamento externo irrotacional  
(equação de Euler ou de Bernoulli)



camada limite viscosa, escoamento  
rotacional (equação de Navier-  
Stokes)

Para um corpo de forma arbitrária, a velocidade  $U_e$  do escoamento externo em geral será diferente da velocidade da corrente incidente  $U$ , variando ao longo do comprimento do corpo. Para um escoamento incompressível, essa velocidade pode ser relacionada com o gradiente de pressão através da equação de Bernoulli válida para o escoamento irrotacional externo:

$$\rho \frac{U_e^2}{2} + p = Const \quad (1.14)$$

Que fica:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} \quad (1.15)$$

Dado que  $U_e$  representa a velocidade no topo da camada limite e é função só de  $x$ , não variando com  $y$ , podemos usar o símbolo de derivada total. Assim, a equação (1.12) fica:

$$\underline{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \quad (1.16)$$

Essa equação tem como condições de contorno:

$$u=0 \text{ para } y=0$$

$$u=U_e \text{ para } y=\delta$$

**Exemplo:** O perfil de uma camada limite laminar pode ser aproximado por:

$$\frac{u}{U} = \left( 2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right); \quad v \cong 0$$

Obtenha o perfil de vorticidade e mostre que para  $y=\delta$  temos  $\omega=0$ .

Solução:

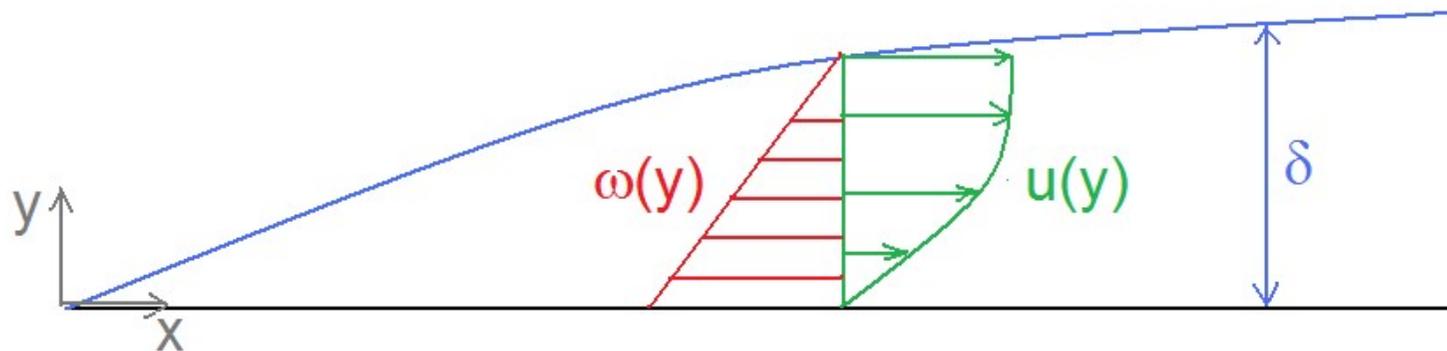
$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$ , logo para um escoamento bidimensional:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

No caso dado:

$$\omega = \frac{2U}{\delta} \left( \frac{y}{\delta} - 1 \right)$$

Isso resulta  $\omega = -\frac{2U}{\delta}$  para  $y=0$  e  $\omega=0$  para  $y=\delta$ .



## 2) Solução de Blasius para a Camada Limite Laminar sobre uma placa plana paralela à corrente

Para uma placa plana paralela à corrente não temos gradiente de pressão ao longo da placa:  $U_e=U$  em toda a borda da camada limite e  $\partial p/\partial x=0$ . Assim, a equação de Navier-Stokes fica:

$$\underline{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \quad (2.1)$$

Blasius demonstrou que o perfil adimensional  $u/U$  é função de uma única variável adimensional  $\eta$  dada por:

$$\underline{\eta = y \left( \frac{U}{\nu x} \right)^{1/2}} \quad (2.2)$$

O perfil de velocidades é dado por uma função  $f(\eta)$  de modo que:

$$\underline{\frac{u}{U} = f'} \quad (2.3)$$

Através da função  $f(\eta)$ , a equação (2.1) pode ser escrita:

$$\underline{f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0} \quad (2.4)$$

Essa equação foi resolvida por séries de potências com as condições de contorno:

$$f(\eta = 0) = f'(\eta = 0) = 0 \quad (2.5)$$

$$f'(\eta \rightarrow \infty) \rightarrow 1.0 \quad (2.6)$$

A solução é:

$\eta=y[U/(vx)]^{1/2}$	$f'=u/U$
0	0
0,2	0,06641
0,4	0,13277
0,6	0,19894
0,8	0,26471
1,0	0,32979
1,2	0,39378
1,4	0,45627
1,6	0,51676
1,8	0,57477
2,0	0,62977
2,2	0,68132
2,4	0,72899

$\eta=y[U/(vx)]^{1/2}$	$f'=u/U$
2,6	0,77246
2,8	0,81152
3,0	0,84605
3,2	0,87609
3,4	0,90177
3,6	0,92333
3,8	0,94112
4,0	0,95552
4,2	0,96696
4,4	0,97587
4,6	0,98269
4,8	0,98779
5,0	0,99155

Como a velocidade  $u$  vai tendendo assintoticamente a  $U$ , a espessura da camada limite foi definida como sendo a cota para a qual  $u=0,99U$ . Dos resultados de Blasius, se obteve:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (2.7)$$

Onde:

$$\text{Re}_x = \frac{U x}{\nu} \quad (2.8)$$

O coeficiente de atrito é dado por:

$$c_f = \frac{\tau_{parede}}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (2.9)$$

---

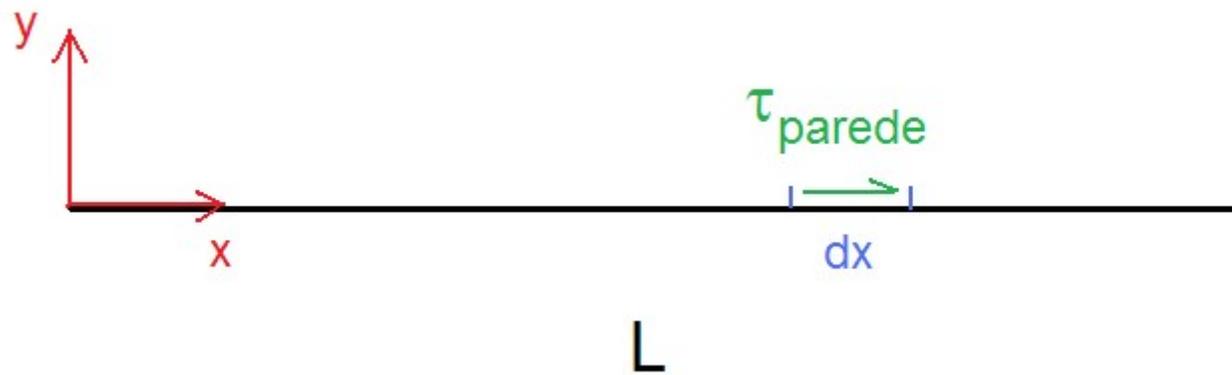
E, dos resultados de Blasius, resulta:

$$c_f = \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (2.10)$$

---

Se a placa tem largura  $b$ , a força de arrasto sobre um lado da placa pode ser definida como:

$$F_x = \int_0^L \tau_{parede} b dx \quad (2.11)$$



Adimensionalizando:

$$\frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho U^2 b L} = \frac{1}{b L} \int_0^L \frac{\tau_{parede}}{\frac{1}{2}\rho U^2} b dx \quad (2.12)$$

O termo da esquerda é o coeficiente de arrasto  $C_D$  relativo a um lado da placa:

$$C_D = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho U^2 b L} \quad (2.13)$$

---

A equação (2.12) resulta:

$$C_D = \frac{1}{L} \int_0^L c_f dx \quad (2.14)$$

---

Substituindo a eq. (2.10) do coeficiente de atrito na eq. (2.14) resulta:

$$\underline{C_D = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_L}}} \quad (2.15)$$

Nesta última expressão, o n° de Reynolds baseado no comprimento da placa é dado por:

$$\underline{\text{Re}_L = \frac{U L}{\nu}} \quad (2.16)$$

**Exemplo:** Ar ( $\rho=1,2 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu=1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ) escoia sobre uma placa plana paralela à corrente de comprimento  $L=1\text{m}$  e largura  $b=0,5\text{m}$ . A corrente incidente tem velocidade  $U=3\text{m/s}$ . Calcule:

- a) A espessura  $\delta$  da camada limite para  $x=0,5\text{m}$ ;
- b) A velocidade  $u$  para  $x=0,5\text{m}$ ,  $y=\delta/2$ ;
- c) A tensão na parede  $\tau_o$  para  $x=0,5\text{m}$ ;
- d) A força de arrasto sobre um lado da placa.

Solução:

a) A espessura da camada limite é dada por:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\text{Re}_x}}, \text{ com } \text{Re}_x = \frac{U x}{\nu} = \frac{3 \cdot 0,5}{1,5 \times 10^{-5}} = 10^5$$

$$\delta = \frac{5}{\sqrt{\text{Re}_x}} x = \frac{5}{\sqrt{10^5}} \cdot 0,5 \quad \delta = 0,008\text{m ou } 8 \text{ mm}$$

b) Na posição especificada podemos calcular  $\eta$ :

$$\eta = y \left( \frac{U}{\nu x} \right)^{1/2} = 0,004 \sqrt{\frac{3}{1,5 \times 10^{-5} \cdot 0,5}} \cong 2,5$$

Da tabela de resultados:  $f' = u/U \cong 0,75$

Logo:  $u = 0,75 \cdot 3 \quad u = 2,25\text{m/s}$

c) O coeficiente de atrito é dado por:

$$c_f = \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}}, \text{ logo } c_f = \frac{0,664}{\sqrt{10^5}} \quad c_f = 0,0021$$

$$\tau_o = c_f \frac{1}{2} \rho U^2 = 0,0021 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 3^2 \quad \tau_o = 0,011 \text{ N/m}^2$$

d) O coeficiente de arrasto é dado por:

$$C_D = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_L}} \quad \text{com } \text{Re}_L = \frac{UL}{\nu} = \frac{3,1}{1,5 \times 10^{-5}} = 2 \times 10^5$$

$$C_D=0,0030$$

$$F_x = C_D \frac{1}{2} \rho U^2 bL = 0,0030 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 3^2 \cdot 0,5 \cdot 1$$

$$F_x=0,008\text{N}$$

### 3) Espessuras de Deslocamento e Quantidade de Movimento

A Espessura de Deslocamento  $\delta^*$  (as vezes chamada na literatura  $\delta_1$ ) é uma medida do déficit de fluxo de massa da camada limite em relação ao escoamento irrotacional externo (também chamado escoamento potencial):

$$U_e \delta^* = \int_0^{\delta} U_e dy - \int_0^{\delta} u dy$$

Resulta:

$$\underline{\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy}$$

A Espessura de Quantidade de Movimento  $\theta$  (também chamada na literatura de  $\delta_2$ ) é uma medida do déficit de fluxo de Quantidade de Movimento da camada limite em relação ao escoamento externo irrotacional:

$$U_e \cdot \rho U_e \theta = \int_0^{\delta} U_e \rho u \, dy - \int_0^{\delta} u \rho u \, dy$$

Resulta:

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_e} \left( 1 - \frac{u}{U_e} \right) dy$$

---

#### 4) Equação Integral da Camada Limite de Von Kármán

A equação (1.16) da camada limite é dada por:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.1)$$

Essa equação pode ser re-escrita usando a equação da continuidade e considerando viscosidade uniforme:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + u \underbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_0 = U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.2)$$

Se chamarmos  $v \partial u / \partial y$  simplesmente de  $\tau / \rho$ , isso resulta:

$$\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{\partial \left( \frac{\tau}{\rho} \right)}{\partial y} \quad (4.3)$$

Podemos agora subtrair do lado esquerdo da equação a equação da continuidade multiplicada pela velocidade externa:

$$\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} - U_e \frac{dU_e}{dx} - U_e \underbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_0 = \frac{\partial \left( \frac{\tau}{\rho} \right)}{\partial y} \quad (4.4)$$

Integrando essa equação na camada limite:

$$\int_0^\delta \frac{\partial(u^2)}{\partial x} dy + \underbrace{\int_0^\delta \frac{\partial(uv)}{\partial y} dy}_{U_e v(\delta)} - \int_0^\delta U_e \frac{dU_e}{dx} dy - \int_0^\delta U_e \frac{\partial u}{\partial x} dy - \underbrace{\int_0^\delta U_e \frac{\partial v}{\partial y} dy}_{U_e v(\delta)} = \underbrace{\int_0^\delta \frac{\partial \left( \frac{\tau}{\rho} \right)}{\partial y} dy}_{-\tau_o / \rho} \quad (4.5)$$

Logo, a equação fica:

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial(u^2)}{\partial x} dy - \int_0^{\delta} U_e \frac{dU_e}{dx} dy - \int_0^{\delta} U_e \frac{\partial u}{\partial x} dy = -\frac{\tau_o}{\rho} \quad (4.6)$$

Se escrevermos, usando a regra da cadeia:

$$U_e \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(U_e u)}{\partial x} - u \frac{dU_e}{dx} \quad (4.7)$$

Substituindo na equação (4.6):

$$\int_0^\delta \left[ \frac{\partial(u^2)}{\partial x} - \frac{\partial(U_e u)}{\partial x} \right] dy + \int_0^\delta \left[ u \frac{dU_e}{dx} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right] dy = -\frac{\tau_o}{\rho} \quad (4.8)$$

Reorganizando os termos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta (u^2 - U_e u) dy + \frac{dU_e}{dx} \int_0^\delta (u - U_e) dy = -\frac{\tau_o}{\rho} \quad (4.9)$$

Isso resulta:

$$\frac{\tau_o}{\rho} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u(U_e - u) dy + \frac{dU_e}{dx} \int_0^\delta (U_e - u) dy \quad (4.10)$$

Que fica ainda:

$$\frac{\tau_o}{\rho} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ U_e^2 \int_0^{\delta} \frac{u}{U_e} \left( 1 - \frac{u}{U_e} \right) dy \right] + U_e \frac{dU_e}{dx} \int_0^{\delta} \left( 1 - \frac{u}{U_e} \right) dy \quad (4.11)$$

---

Essa é a chamada Equação Integral da Camada Limite de Von Kármán. Ela também é apresentada na literatura fazendo uso das espessuras de deslocamento e quantidade de movimento:

$$\frac{\tau_o}{\rho} = \frac{d}{dx} \left( U_e^2 \theta \right) + \delta^* U_e \frac{dU_e}{dx} \quad (4.12)$$

Após mais alguma álgebra, fica:

$$\underline{\frac{c_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{U_e} \frac{dU_e}{dx} (2 + H)} \quad \text{onde} \quad \underline{H = \frac{\delta^*}{\theta}} \quad (4.13)$$

O fator  $H$  é o chamado fator de forma da camada limite.

Para uma placa plana paralela à corrente, o gradiente de pressão ao longo da placa é nulo e portanto  $dU_e/dx=0$ , e a equação integral de Von Kármán fica simplesmente:

$$\underline{\frac{c_f}{2} = \frac{d\theta}{dx}} \quad (4.14)$$

Em casos para os quais temos corpos de forma arbitrária com distribuições de pressão ao longo de seu perfil, a equação integral tem que ser resolvida por métodos numéricos apropriados.

**Exemplo:** Se podemos aproximar o perfil de velocidades da camada limite laminar sobre uma placa plana paralela à corrente por:

$$\frac{u}{U} = \left( 2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right)$$

Calcule a espessura da camada limite, coeficiente de atrito e coeficiente de arrasto e compare com os resultados da solução de Blasius.

Solução:

Temos que  $\frac{c_f}{2} = \frac{d\theta}{dx}$ , logo:

Com o perfil dado, a espessura de quantidade de movimento fica:

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_e} \left( 1 - \frac{u}{U_e} \right) dy = \int_0^{\delta} \left\{ \left[ 2 \frac{y}{\delta} - \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \left[ 1 - 2 \frac{y}{\delta} + \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \right\} dy = \frac{2}{15} \delta$$

A tensão de atrito viscoso na parede fica:

$$\tau_o = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu \left( \frac{2U_e}{\delta} - 2U_e \frac{y}{\delta^2} \right) \Big|_{y=0} = 2\mu \frac{U}{\delta}$$

O coeficiente de atrito fica:

$$c_f = \frac{\tau_o}{\frac{1}{2}\rho U_e^2} = 4 \frac{\nu}{U_e \delta}$$

Substituindo esses resultados em  $\frac{c_f}{2} = \frac{d\theta}{dx}$ :

$$2 \frac{\nu}{U_e \delta} = \frac{2}{15} \frac{d\delta}{dx}$$

Isso resulta:

$$15 \frac{v}{U_e} dx = \delta d\delta$$

E temos:

$$\int 15 \frac{v}{U_e} dx = \int \delta d\delta$$

Como a velocidade  $U_e$  externa à camada limite é igual à velocidade da corrente livre  $U$  ao longo de toda a placa,  $U_e$  não varia com  $x$  e portanto a integração é trivial:

$$15 \frac{\nu}{U} x + C = \frac{\delta^2}{2}$$

Como  $\delta=0$  para  $x=0$ , a constante de integração  $C$  resulta  $C=0$ :

$$\frac{\delta^2}{x^2} = 30 \frac{\nu}{U x}$$

Que resulta:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5,48}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (\text{resultado de Blasius: } \frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\text{Re}_x}})$$

Substituindo esse resultado na expressão de  $c_f$ :

$$c_f = 4 \frac{\nu}{U \delta} = \frac{4}{\frac{5,48}{\sqrt{\text{Re}_x}} \frac{U x}{\nu}}$$

Isso resulta:

$$c_f = \frac{0,730}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (\text{resultado de Blasius: } c_f = \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}})$$

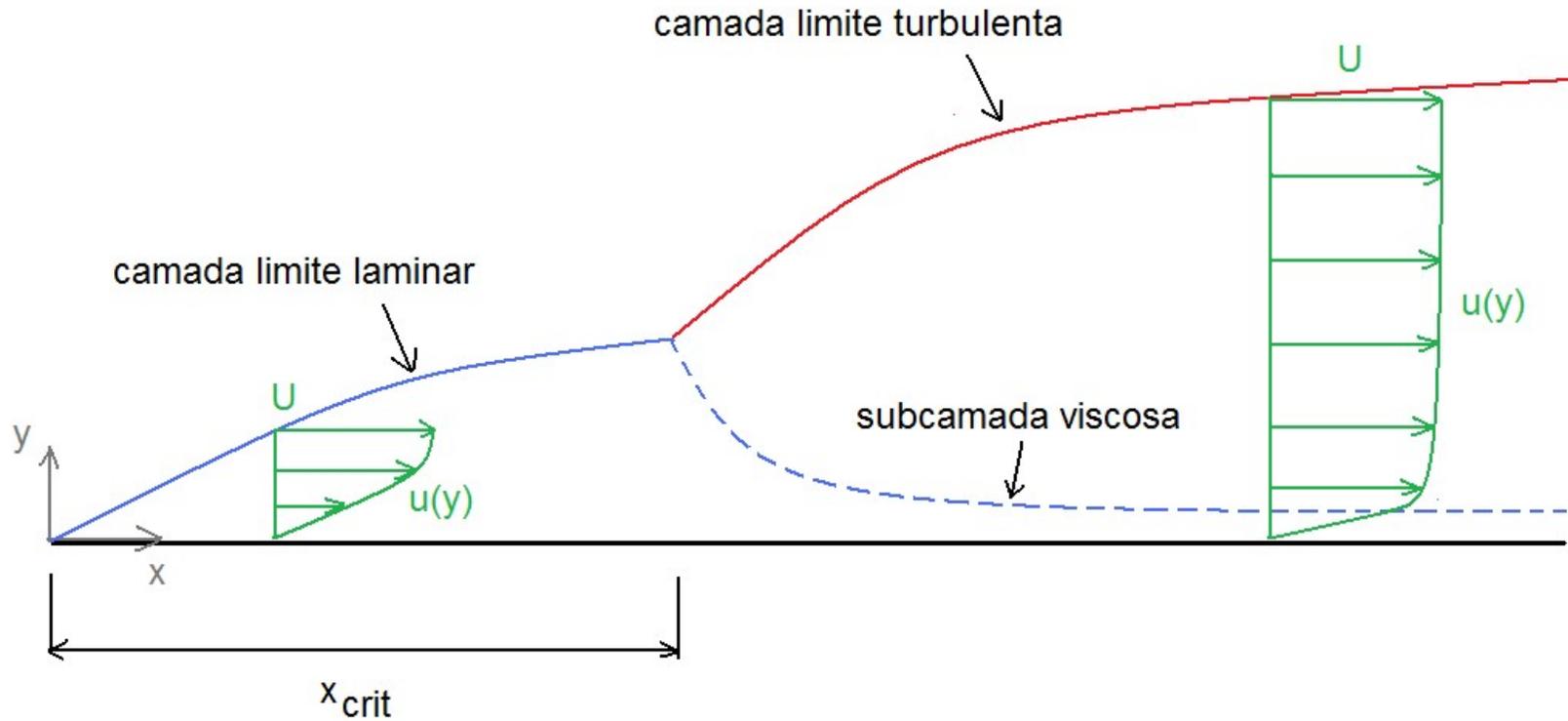
E, calculando o coeficiente de atrito por:

$$C_D = \frac{1}{L} \int_0^L c_f dx$$

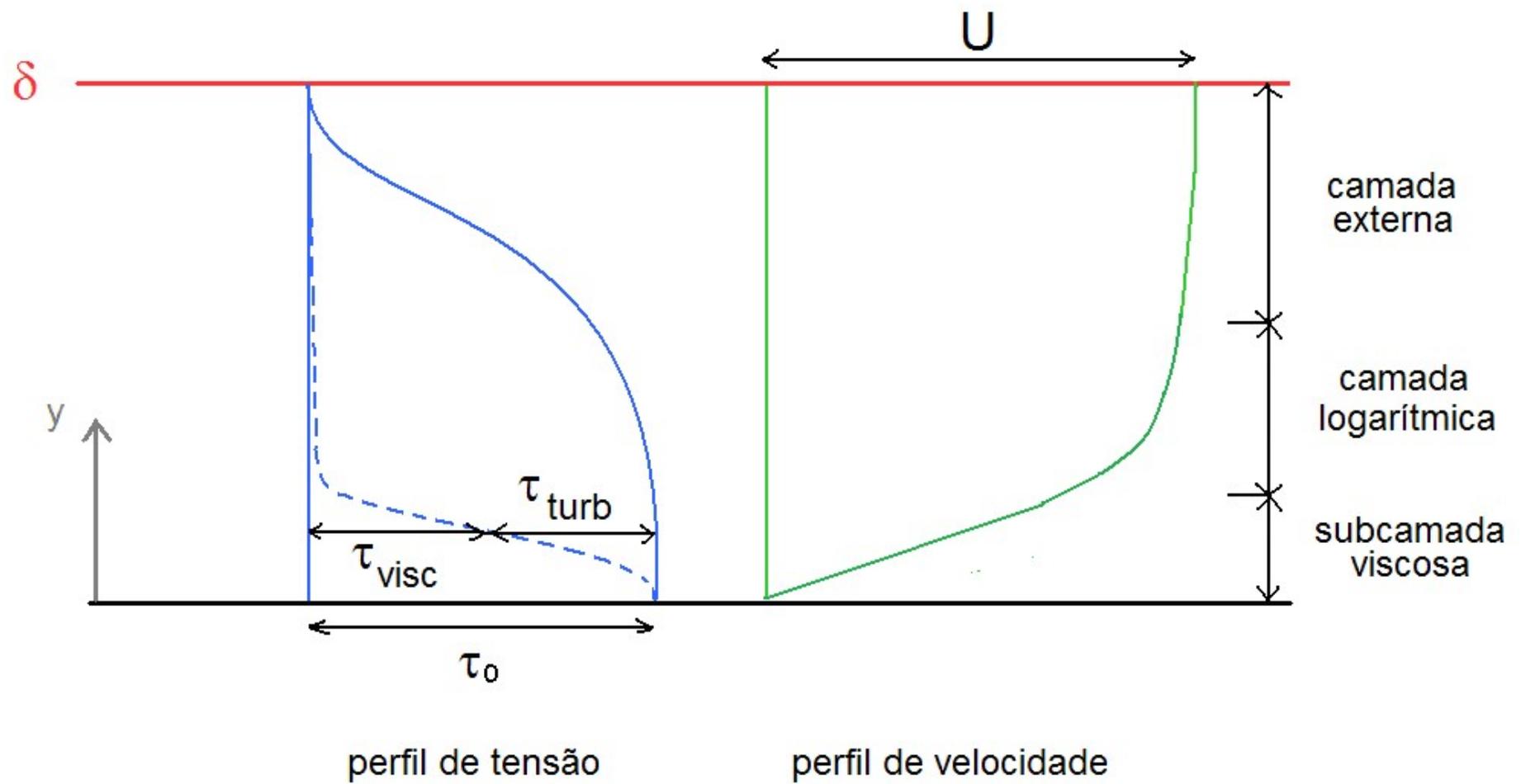
Obtemos:

$$C_D = \frac{1,46}{\sqrt{\text{Re}_L}} \quad (\text{resultado de Blasius: } C_D = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_L}})$$

## 5)A Camada Limite Turbulenta



$$Re_{x_{crit}} = \frac{U x_{crit}}{\nu} \approx 5 \times 10^5$$



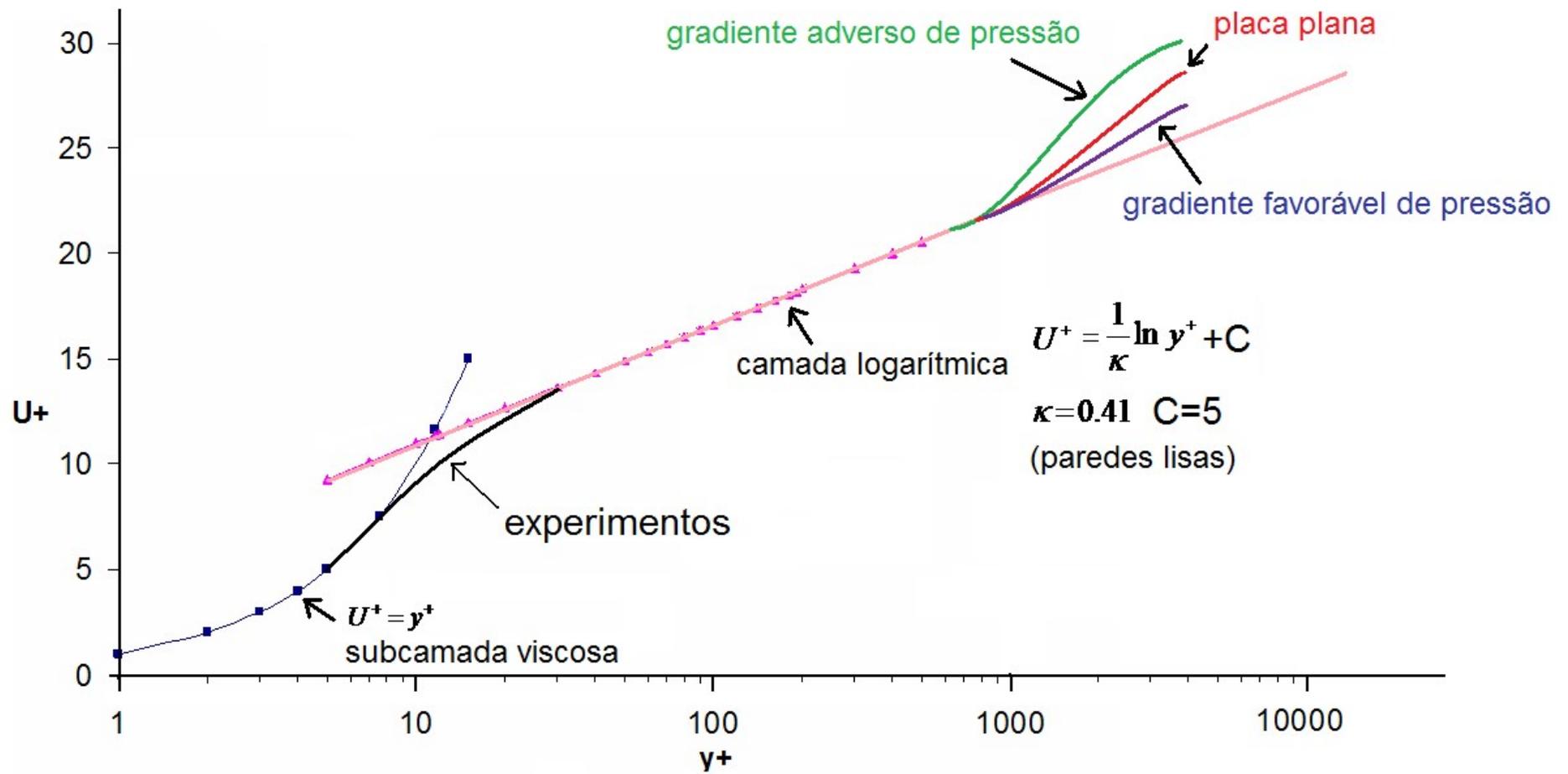
Subcamada Viscosa:  $y^+ \leq 5$   $u^+ = y^+$

Camada Logarítmica:  $y^+ \geq 30$   $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C$

Onde:  $\kappa=0,41$   $C=5$

$$y^+ = \frac{u^* y}{\nu} \quad u^+ = \frac{u}{u^*} \quad u^* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}$$

$u^*$  é a chamada velocidade de atrito ou velocidade de cisalhamento (friction velocity). Também recebe o símbolo  $u_\tau$  em parte da literatura.



**Exemplo** (extraído de White, “Mecânica dos Fluidos”): Ar ( $\rho=1,205 \text{ kg/m}^3$  ;  $\nu=1,51 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ) escoia por um tubo de 14 cm de diâmetro em condições de escoamento completamente desenvolvido. A velocidade no centro do tubo é  $u=5\text{m/s}$ . Calcule a tensão de cisalhamento  $\tau_o$  na parede, o gradiente de pressão do escoamento e a espessura da subcamada viscosa.

Solução:

Da camada logarítmica:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad \rightarrow \quad \frac{u}{u^*} = \frac{1}{0,41} \ln \frac{u^* y}{\nu} + 5$$

Substituindo os dados numéricos:

$$\frac{5}{u^*} = \frac{1}{0,41} \ln \frac{u^* \cdot 0,07}{1,51 \times 10^{-5}} + 5$$

Fazendo uma solução iterativa com solução inicial  $u^*=5\text{m/s}$ :

$u^*$	$u^*$ novo
5,0	0,169
0,169	0,235
0,235	0,227
0,227	0,228
0,228	0,228

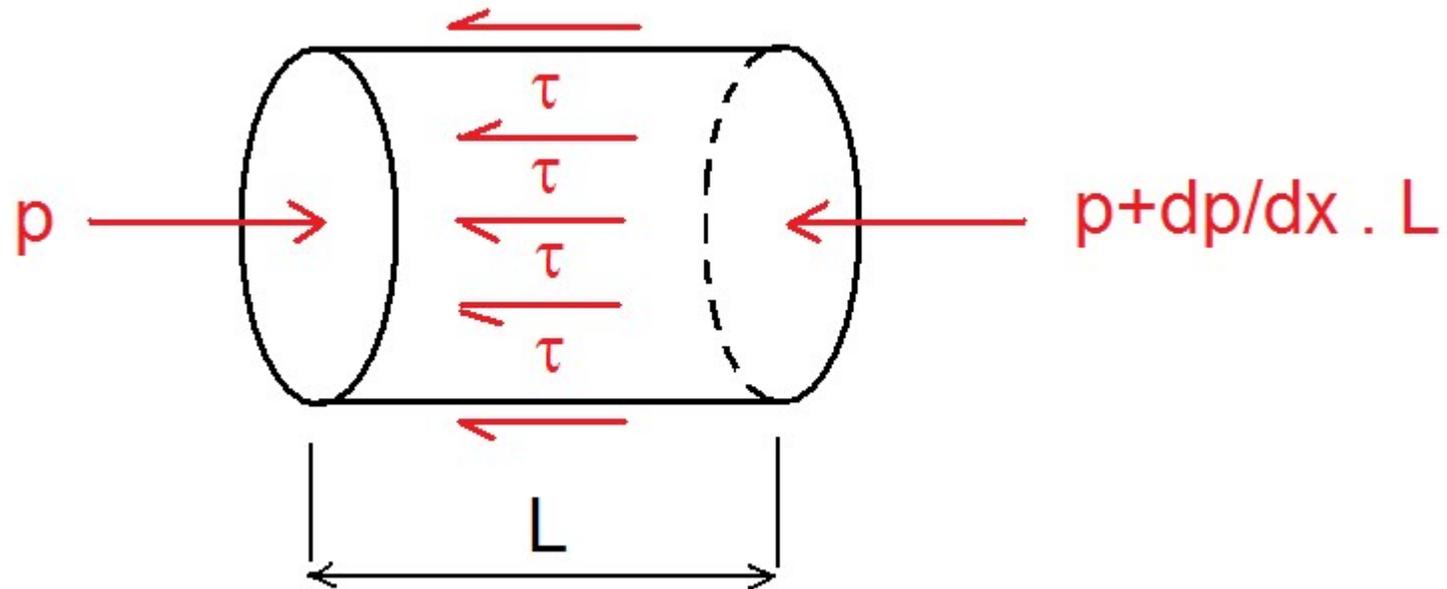
Logo,  $u^*=0,228\text{m/s}$ . Desse resultado:

$$\underline{\tau_o = \rho u^{*2} = 0,0626\text{N/m}^2}$$

A espessura da subcamada viscosa é dada por:

$$\frac{u^* y}{\nu} \leq 5 \Rightarrow y \leq \frac{5 \cdot 1,51 \times 10^{-5}}{0,228} \Rightarrow \underline{y \leq 0,000331\text{m}}$$

O gradiente de pressão é:



$$p \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \left( p + \frac{dp}{dx} L \right) \frac{\pi D^2}{4} + \tau_o \cdot \pi D \cdot L$$

$$-\frac{dp}{dx} L \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \tau_o \cdot \pi D \cdot L$$

Isso resulta:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{4\tau_o}{D}$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{4 \cdot 0,0626}{0,14} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{dp}{dx} = -1,8 \text{ Pa/m}}}$$

## 6) O Modelo de Comprimento de Mistura de Prandtl

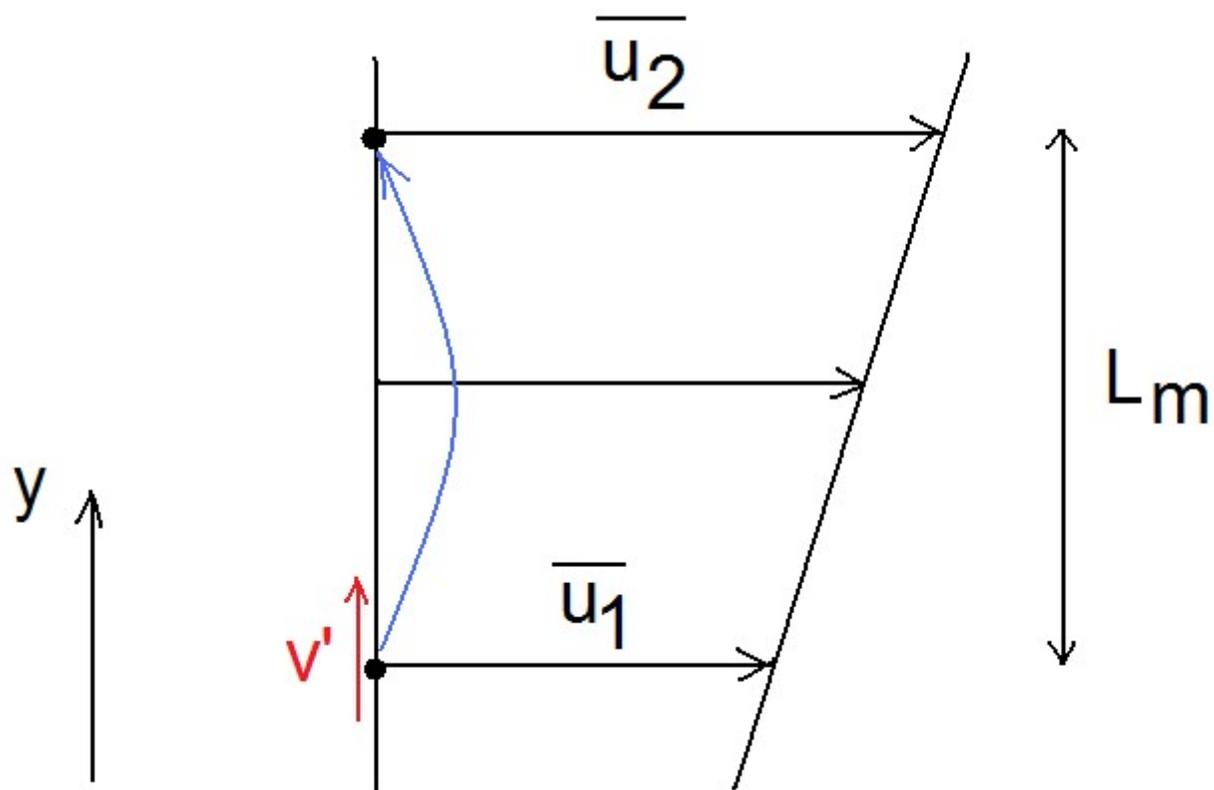
A equação de Navier-Stokes para um escoamento turbulento, usando a técnica de Média de Reynolds, é dada por:

$$\frac{\partial(\rho \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_j \bar{u}_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right) \quad (6.1)$$

É fácil ver que, para a camada limite, considerando escoamento incompressível, bidimensional e permanente, ela resulta:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} \right) \quad (6.2)$$

Prandtl foi o primeiro a propor um modelo de turbulência para obter a tensão de Reynolds na camada limite.



Suponha que uma flutuação de velocidade  $v'$  faça uma partícula pular de uma posição (1) para uma posição (2). A flutuação de velocidade sentida em (2) quando a partícula chegar nessa posição com sua velocidade original será:

$$u' = \bar{u}_1 - \bar{u}_2 = -L_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (6.3)$$

Se considerarmos que a flutuação de velocidade  $v'$  tem a mesma magnitude da flutuação  $u'$ :

$$v' = L_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (6.4)$$

Logo:

$$\overline{u'v'} = -L_m^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \quad (6.5)$$

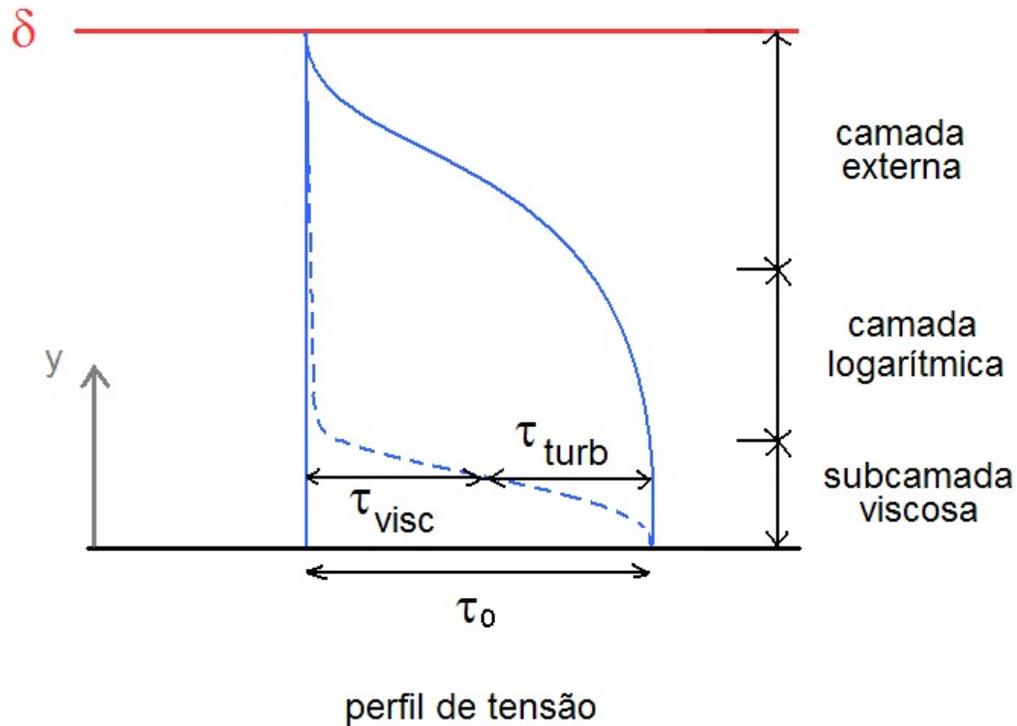
Da hipótese de Boussinesq:

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (6.6)$$

Resulta:

$$\nu_t = L_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (6.7)$$

Como estimar o comprimento de mistura  $L_m$ ?



Em boa parte da camada logarítmica,  $-\rho \overline{u'v'} \approx \tau_0$ , logo:

$$-\overline{u'v'} \approx u^{*2} \quad (6.8)$$

Por outro lado, do perfil logarítmico:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{u^*}{\kappa y} \quad (6.9)$$

Então, temos:

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = L_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = u^{*2} \quad (6.10)$$

Substituindo a expressão para a derivada da velocidade:

$$L_m^2 \frac{u^{*2}}{(\kappa y)^2} = u^{*2}$$

Resulta:

$$\underline{L_m = \kappa y}$$

E a viscosidade turbilhonar resulta:

$$\underline{v_t = u^* \kappa y}$$

**Exemplo:** Em um ponto do escoamento dentro da camada logarítmica a velocidade é de 0,2 m/s. A altura do ponto em relação à parede é de 6 mm. O fluido é água ( $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$  ;  $\nu=10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ). Calcule  $u^*$ ,  $y^+$ , a relação  $\nu_t/\nu$  e a espessura da subcamada viscosa.

Solução:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad \Rightarrow \quad \frac{0,2}{u^*} = \frac{1}{0,41} \ln \frac{u^* \cdot 0,006}{10^{-6}} + 5$$

Fazendo a solução iterativa:

$u^*$	$u^*$ novo
0,2	0,009
0,009	0,0136
0,0136	0,0127
0,0127	0,0128
0,0128	0,0128

Logo,  $u^*=0,0128$  m/s

Com esse resultado, calculamos  $y^+$ :

$$y^+ = \frac{u^* y}{\nu} = \frac{0,0128 \cdot 0,006}{10^{-6}} \quad \text{resulta } \underline{y^+=76,8}$$

A viscosidade turbilhonar resulta:

$$\nu_t = u^* \kappa y = 0,0128 \cdot 0,41 \cdot 0,006 = 0,0000315 \text{ ou } 31,5 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Logo:

$$\frac{\nu_t}{\nu} = 31,5$$

A altura da subcamada viscosa é dada por:

$$\frac{u^* y}{\nu} \leq 5 \Rightarrow y \leq \frac{5 \times 10^{-6}}{0,0128} \Rightarrow \underline{y \leq 0,39 \text{ mm}}$$

**Exemplo** (extraído de Potter e Wiggert, “Mecânica dos Fluidos”): As componentes da velocidade em um ponto de um escoamento turbulento são dadas na tabela. Encontre  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{v'^2}$  e  $\overline{u'v'}$  naquele ponto.

$t$ (s)	$u$ (m/s)	$v$ (m/s)
0	16,1	1,6
0,01	25,7	-5,4
0,02	10,6	-8,6
0,03	17,3	3,5
0,04	5,2	4,1
0,05	10,2	-6,0
0,06	17,1	-1,4
0,07	28,6	6,7
0,08	6,7	-5,2
0,09	19,2	-8,2
0,10	21,6	1,5

A velocidade média pode ser calculada por:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u dt = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N u_n \Delta t_n$$

Como os intervalos de tempo são todos iguais, temos:

$$T = N \cdot \Delta t$$

E a média resulta:

$$\bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_n \quad \text{e analogamente,} \quad \bar{v} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n$$

Calculando as médias:

$$\bar{u} = 16,2 \text{ m/s}$$

$$\bar{v} = -1,6 \text{ m/s}$$

As flutuações são calculadas por:

$$u' = u - \bar{u}$$

$$v' = v - \bar{v}$$

Podemos calcular a flutuação para cada instante:

$t$ (s)	$u'$ (m/s)	$v'$ (m/s)	$u'v'$ (m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
0	-0,1	3,2	-0,32
0,01	9,5	-3,8	-36,1
0,02	-5,6	-7	39,2
0,03	1,1	5,1	5,6
0,04	-11	5,7	-62,7
0,05	-6	-4,4	26,4
0,06	0,9	0,2	0,18
0,07	12,4	8,3	102,9
0,08	-9,5	-3,6	34,2
0,09	3	-6,6	-19,8
0,10	5,4	3,1	16,7

As tensões de Reynolds são calculadas por:

$$\overline{u'^2} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u'_n{}^2 = 51,2 m^2 / s^2$$

$$\overline{v'^2} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v'_n{}^2 = 26,1 m^2 / s^2$$

$$\overline{u'v'} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u'_n v'_n = 9,7 m^2 / s^2$$

## 7)Aplicação da Equação Integral de Von Kármán a camadas turbulentas

Observando resultados experimentais da tensão de atrito na parede, Prandtl sugeriu a seguinte expressão para o coeficiente de atrito:

$$c_f = 0,02 \text{Re}_\delta^{-1/6} \quad (7.1)$$

Onde:

$$\text{Re}_\delta = \frac{U_e \delta}{\nu} \quad (7.2)$$

Também sugeriu que o perfil de velocidades da camada limite turbulenta podia ser aproximado por:

$$\frac{u}{U_e} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \quad (7.3)$$

Como vimos, a equação integral para uma placa plana paralela à corrente é dada por:

$$\frac{c_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} \quad (7.4)$$

A espessura de quantidade de movimento é:

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_e} \left( 1 - \frac{u}{U_e} \right) dy = \int_0^{\delta} \left\{ \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \left[ 1 - \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \right] \right\} dy = \frac{7}{72} \delta \quad (7.5)$$

Logo, substituindo esses resultados na equação integral:

$$0,01 \left( \frac{U\delta}{\nu} \right)^{-1/6} = \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} \quad (7.6)$$

Que fica:

$$\frac{0,72}{7} \left( \frac{U}{\nu} \right)^{-1/6} dx = \delta^{1/6} d\delta \quad (7.7)$$

Integrando:

$$\frac{0,72}{7} \left( \frac{U}{\nu} \right)^{-1/6} x = \frac{6}{7} \delta^{7/6} + C \quad (7.8)$$

Se considerarmos a camada limite como turbulenta desde o início da placa, temos que  $C = 0$ , pois  $\delta = 0$  em  $x = 0$ . Assim, obtemos:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0,16}{\text{Re}_x^{1/7}} \quad (7.9)$$

Podemos obter o coeficiente de atrito como função do  $\text{Re}_x$  fazendo:

$$\frac{\text{Re}_\delta}{\text{Re}_x} = \frac{\delta}{x} \quad (7.10)$$

Com esse resultado, obtemos:

$$\underline{c_f = \frac{0,027}{\text{Re}_x^{1/7}}} \quad (7.11)$$

E podemos calcular o coeficiente de arrasto para um lado da placa:

$$C_D = \frac{1}{L} \int_0^L c_f \, dx \quad (7.12)$$

Isso resulta:

$$\underline{C_D = \frac{0,0315}{\text{Re}_L^{1/7}}} \quad (7.13)$$

## **Bibliografia:**

White, F.M., “Mecânica dos Fluidos”, 5º edição, Ed. McGraw Hill, 2010.

Potter, M.C.; Wiggert, D.C., “Mecânica dos Fluidos”, Ed. Thomson Learning, 2004.

Mase, G.T.; Mase, G.E., “Continuum Mechanics for Engineers”, third edition, CRC Press, 1999.

Munson, Young, Okiishi, “Fundamentos da Mecânica dos Fluidos, Ed. Edgard Blucher, 4ª edição, 1999.