Vamos voltar aos gráficos de controle $\overline{X}$

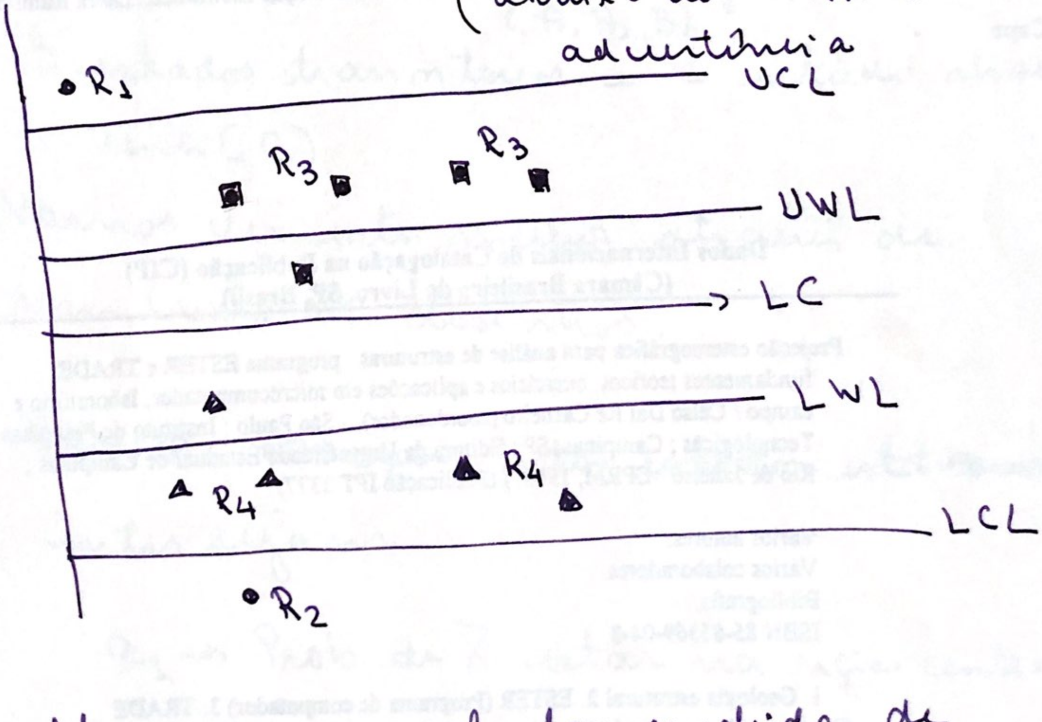
Regras tradicionais de ação: $R_1 \to \overline{X} > UCL$

$R_2 \to \overline{X} < LCL$

Novas regras incorporadas:

R_3: ao menos dois dos 3 últimos valores de $\overline{X}$ acima dos limites de advertência

R_4: ao menos dois dos 3 últimos valores de $\overline{X}$ abaixo dos limites de advertência



Problema, como calcular medida de desempenho com este tipo de regra de decisão? Qual o poder?

agora que vocês já viram o que

ARL → # médio de amostras até a sinalização

↓

medida de desempenho

Como determinar se considerar as R_1, R_2, R_3 e R_4

Sob H_0, qdo $\mu = \mu_0$, o ARL_0 para regra R_1 será igual a R_2. Idem para R_3 com R_4

Vamos considerar então as regras R_1 e R_3 ou R_2 ou R_4

Para isto, ~~é~~ é necessário definir os estados:

3 estados transitórios (A, A_1, B) e 1 estado absorvente (C)

Vamos ver isto melhor através de um (vários) desenhos.

~~Vamos começar pelo estado estacionário~~

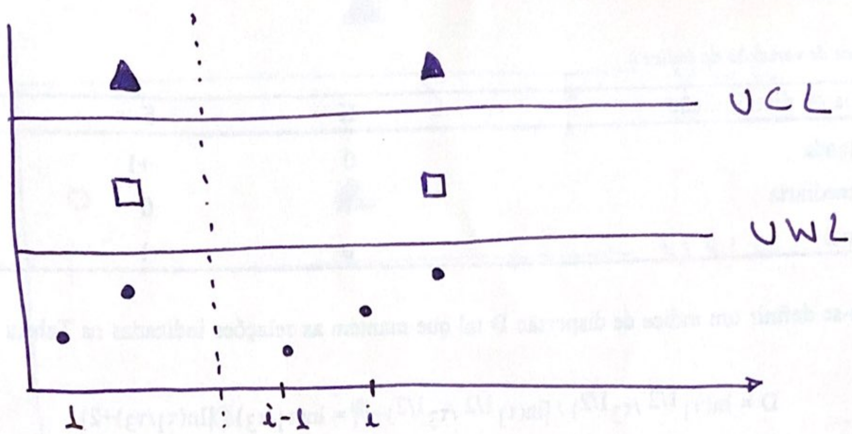
Antes sejam:

a_1 → Prob de $\bar{X}$ estar na região central

a_2 → Prob de $\bar{X}$ estar na região de advertência

$1 - a_1 - a_2$ → Prob de $\bar{X}$ acima dos limites de controle

Estado A



$\bar{X}$ está na região central → na próxima

pode migrar para
- ficar na região central
- ir p/ região de advertência
- ou ir ser > UCL

ou então i-1, i, ~~as~~ 2 $\bar{X}$ na área central

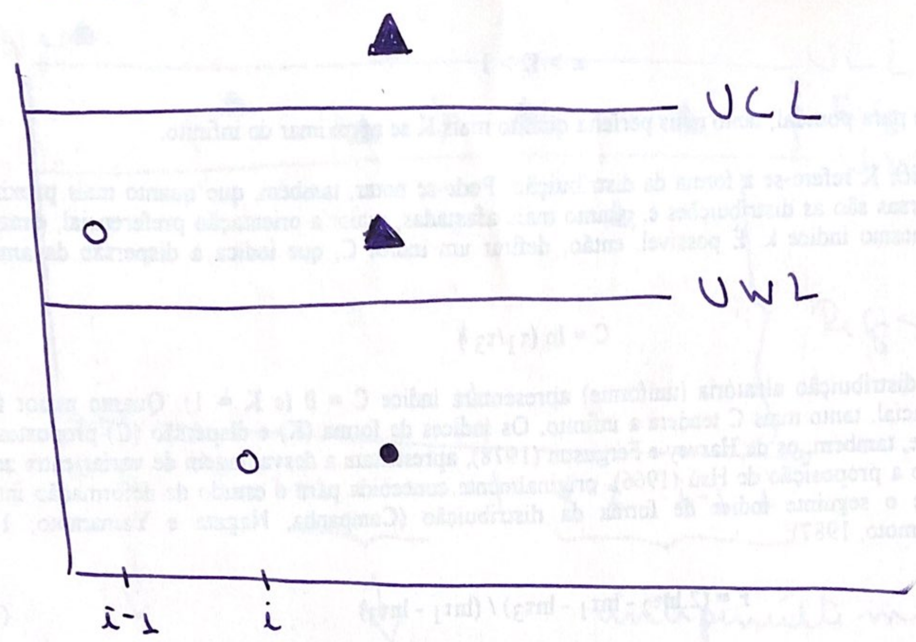
e na próxima
- ficar na área central ou
- na região de advertência
- ou região de ação.

▲ → alcançou estado absorvente

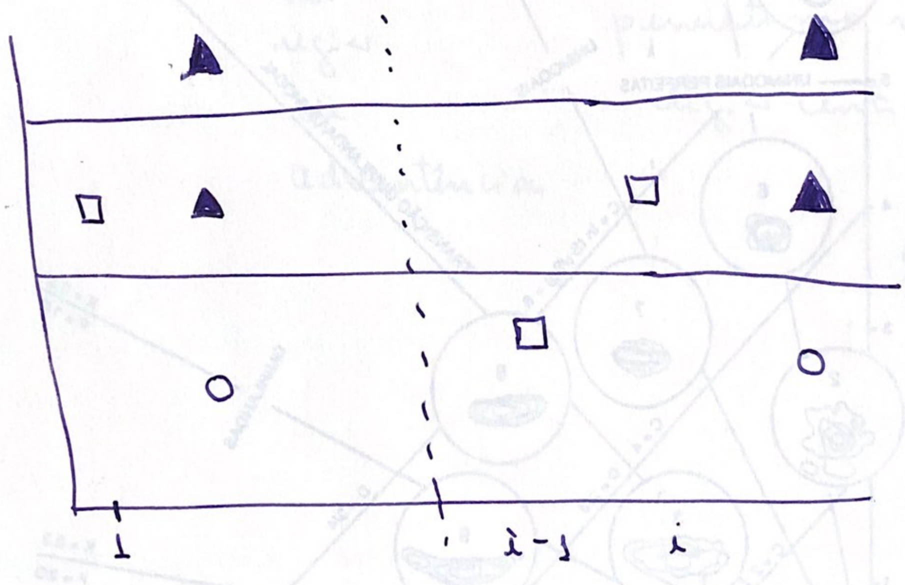
↓

executar ação

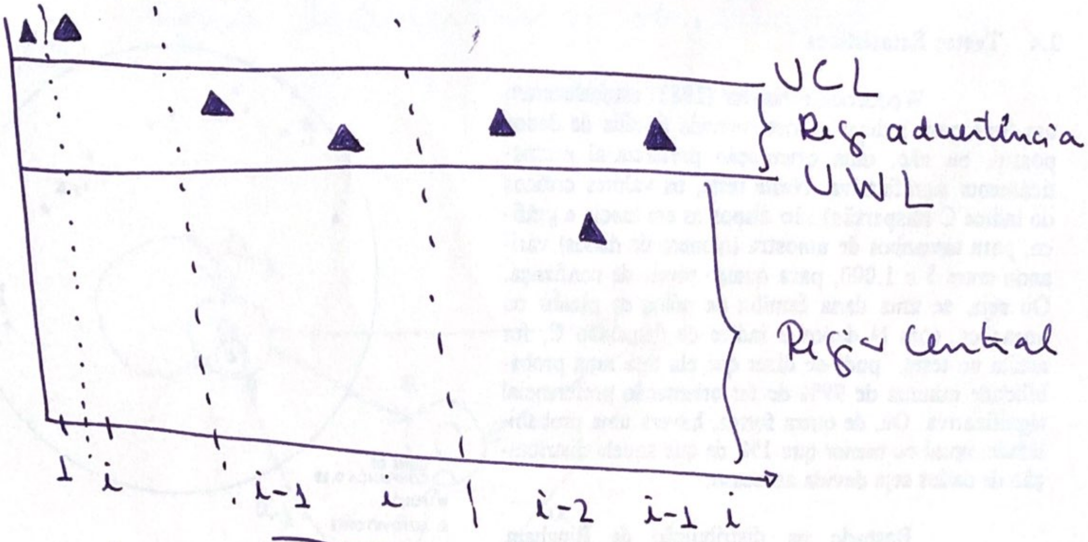
Estado A1



Estado B



$\boxed{\text{Estado C}}$

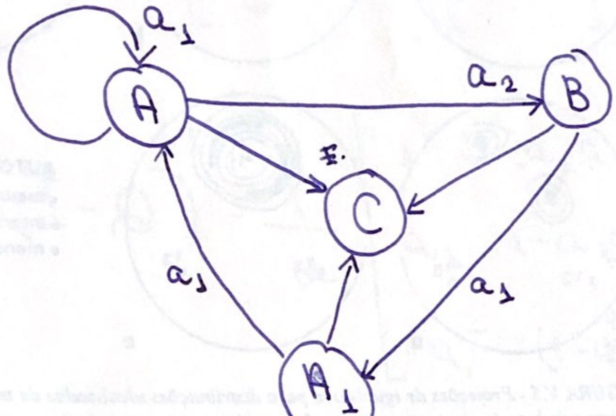


> UCL

2 último pontos na região de adventência

antepenúltimo e o último na região de adventência e o penúltimo na região central

Como transitam os estados



isto

A { A → ir região central dado que estava na região

B → ir p/ região adjacência

C → ir p/ região da ação

Matriz de transição P

$$P = \begin{array}{c|cccc} & A & A_1 & B & C \\ \hline A & a_1 & 0 & a_2 & 1-a_1-a_2 \\ A_1 & a_1 & 0 & 0 & (1-a_1) \\ B & 0 & a_1 & 0 & (1-a_1) \\ C & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$I - Q = \begin{bmatrix} 1-a_1 & 0 & -a_2 \\ -a_1 & 1 & 0 \\ 0 & -a_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = (I-Q)^{-1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} 1 & a_1 a_2 & a_2 \\ a_1 & 1-a_1 & a_1 a_2 \\ a_1^2 & (1-a_1)a_1 & 1-a_1 \end{bmatrix}$$

$$d = 1 - a_1 - a_1^2 a_2$$

Por exemplo, se o estado inicial da cadeia estiver no estado A, vai demorar em média $\frac{1}{d}$ visitas/"passadas" até ~~est~~ alcançar o estado absorvente.

O número médio de amostra até o sinal - ARL

$$ARL = (I - Q)^{-1} \mathbf{1}$$

$\mathbf{1}$: Vetores de um's.

Fazendo as contas

$$ARL = \begin{bmatrix} \dfrac{1 + a_1 a_2 + a_2}{1 - a_1 - a_1^2 a_2} \\[2ex] \dfrac{1 - a_1 a_2}{1 - a_1 - a_1^2 a_2} \\[2ex] \dfrac{1}{1 - a_1 - a_1^2 a_2} \end{bmatrix}$$

Como você supõe que começa o estado A $\Rightarrow ARL = \dfrac{1 + a_1 a_2 + a_2}{1 - a_1 - a_1^2 a_2}$

$ARL_0 \to$ qdo a_1 e a_2 são calculados

sob H_0

$ARL_1 \to$ qdo a_1 e a_2 são calcula-

dos sob H_1.

<u>atenção</u>: a determinação dos

UCL | UWL $\to$ não é única.

No caso fizemos para as regras

R_1 e R_3.

Sob $H_0 \to R_2$ e $R_4 \to$ são simétricos.

Pode-se utilizar no caso

$$ARL_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{1 + a_1 a_2 + a_2}{1 - a_1 - a_1^2 a_2}\right]$$

com a_1 e a_2 determinados

sob H_0.

Sob $H_1 \to \mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$

~~ARL~~

Só regras $\to R_1$ e R_3

$$ARL_{(\delta)} = \cancel{\frac{1 + a_1 q_2 + q_2}{1 - a_1 - q}}$$

E só regras $\to R_2$ e R_4, por simetria

$ARL(-\delta)$

$$ARL_1 = \left[\frac{1}{ARL(\delta)} + \frac{1}{ARL(-\delta)} \right]^{-1}$$

dá prob

dá prob

Resolvendo de outro jeito - através da distribuição estacionária

$$P^{*} = \begin{array}{c|cccc} & A & A_1 & B & C \\ \hline A & a_1 & 0 & a_2 & 1-a_1-a_2 \\ A_1 & a_1 & 0 & 0 & 1-a_1 \\ B & 0 & a_1 & 0 & 1-a_1 \\ C & a_1 & 0 & a_2 & 1-a_1-a_2 \end{array}$$

C → chegando em C → volta p/o estado A.

As equações ficam:

$$\pi_1 = a_1(\pi_1 + \pi_2 + \pi_4) \quad (1)$$

$$\pi_2 = a_1 \pi_3 \quad (2)$$

$$\pi_3 = a_2(\pi_1 + \pi_4) \quad (3)$$

$$\pi_4 = (1-a_1-a_2)(\pi_1+\pi_4) + (1-a_1)(\pi_2+\pi_3) \quad (4)$$

Escrevendo (1) como

$$\pi_1 = a_1\pi_2 + a_1(\pi_1 + \pi_4)$$

Usando (3), fica

$$\pi_1 = a_1\pi_2 + a_1\frac{\pi_3}{a_2}$$

Usando (2)

$$\pi_1 = a_1 a_1 \pi_3 + \frac{a_1}{a_2}\pi_3 \Rightarrow \boxed{\pi_1 = \left(a_1^2 + \frac{a_1}{a_2}\right)\pi_3} \quad (5)$$

Reescrevendo (1) como

$\pi_1 = a_1(1-\pi_3)$ e igualando com (5)

$$\left(a_1^2 + \frac{a_1}{a_2}\right)\pi_3 = a_1(1-\pi_3) \Rightarrow$$

$$\boxed{\pi_3 = \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1 + a_2}}$$

Daí $\boxed{\pi_2 = \frac{a_1 a_2}{a_1 a_2 + 1 + a_2}}$

e $\pi_1 = \dfrac{a_1(a_1 a_2 + 1)}{a_1 a_2 + 1 + a_2}$ e

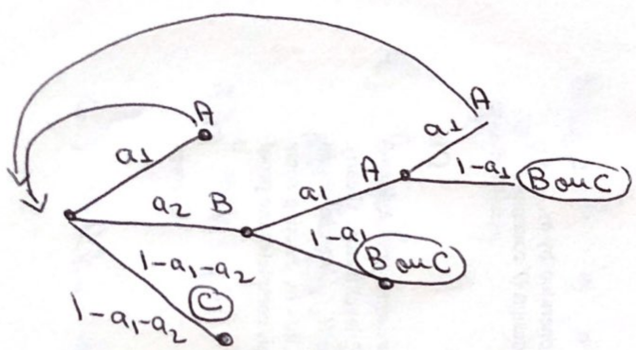
Finalmente $\pi_4 = 1 - \pi_1 - \pi_2 - \pi_3$

$$= \frac{1 - a_1^2 a_2 - a_1}{1 + a_2 + a_1 a_2}$$

$$\pi = [\pi_1 \; \pi_2 \; \pi_3 \; \underbrace{\pi_4}_{\Rightarrow \text{ estado absorvente}}]$$

$$\boxed{ARL = \frac{1 + a_2 + a_1 a_2}{1 - a_1^2 a_2 - a_1}}$$

Fazendo pela esperança condicional



$$E(X) = \sum E(X|Y)\,P(Y)$$

$$(1-a_1-a_2) + 2a_2(1-a_1) + 3a_2a_1(1-a_1) + a_1^2a_2(3+E(X)) + a_1(1+E(X)) =$$

$$E(X) = 1-\cancel{a_1}-a_2+2a_2-2a_1a_2+3a_1a_2-\cancel{3a_1^2a_2}+\cancel{3a_1^2a_2}+a_1^2a_2E(X)+\cancel{a_1}+a_1E(X)$$

$$E(X)\left[1-a_1-a_1^2a_2\right] = 1+a_2+a_1a_2.$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1+a_2+a_1a_2}{1-a_1-a_1^2a_2}}$$