ARL através de

Cadeia de Markov /

Esperança Condicional /

Distribuição Estacionária

Vamos determinar a medida de desempenho qdo as estatísticas não forem independentes - através de cadeias de Markov

Não independentes → a ação atual é função do passado.

Exemplo: Serviço do SAC

ligações são atendidas por uma central.

Uma ligação tem 50% de chance de completa.

$p_1 = 50\%$

Uma vez completada → 50% de funcionários estão ocioso $p_2 = 50\%$

Caso todos os funcionários estejam ocupados, o sistema pede p/ ligar mais tarde.

Eventos possíveis para cada discagem:

E1: dar sinal de ocupado

E2: completar a ligação e o funcionário está disponível

E3: completar a ligação e os funcionários indisponíveis

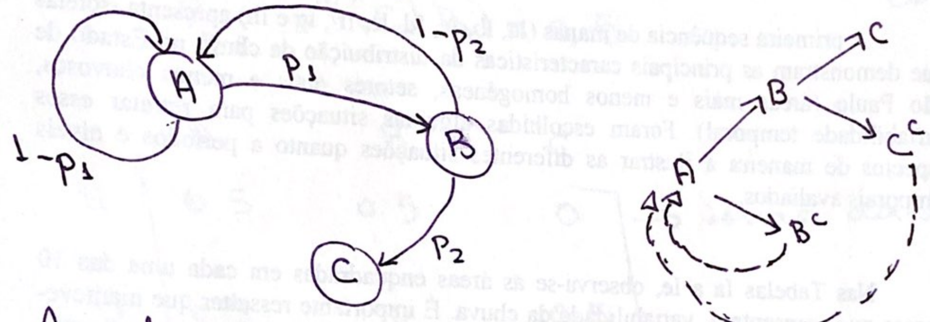
Vamos definir os estados deste problema:

(A) → discagem

(B) → ligação completada

(C) → funcionário atende o telefone

E os eventos representados através do diagrama



<u>Matriz de transição</u>

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & A & B & C \\
\hline
A & & & \\
B & & & \\
C & & &
\end{array}
\quad
\begin{bmatrix}
P_{AA} & P_{AB} & P_{AC} \\
P_{BA} & P_{BB} & P_{BC} \\
P_{CA} & P_{CB} & P_{CC}
\end{bmatrix}
$$

P_{ij} → representa a probabilidade de alcançar o estado j dado que estava em i

Para alcançar o estado C — ser atendido, as pessoas vão ficar ligando, certo?

Por exemplo:

P_{AB} → Prob de ligação completar dado que discou

$$P_{AB} = P(B|A) = 0.5$$

P_{BC} → Prob de ser atendido dado que a ligação completou

$$P_{BC} = P(C|B) = 0.5$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

→ soma da linha = 1

Matriz de Transição - Um passo.

Classificação dos estados:
- Transitório.
- Absorvente → alcançou este estado → não sai mais dele.

No problema: Transitórios - A, B

absorvente - C → foi atendido

Interessante saber em médias qtas vezes ~~es~~ (qtas ligações) são necessárias até ~~até~~ ser atendido, por exemplo

Em prob: número médio de visitas de alcançar o estado j a partir do estado i

Nomes: Matriz de Transição Completa - P

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \left[\begin{array}{cc:c} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

C → absorvente.

$$Q = \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}\begin{array}{cc} A & B \\ \left[\begin{array}{cc} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$ → excluindo linha e coluna do estado absorvente.

<u>Um resultado</u> <u>da</u> <u>cadeia de Markov.</u>

$I \rightarrow$ Matriz Identidade $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$I - Q = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

O número médio de visitas:

$$N = (I - Q)^{-1}$$

$$N = (I-Q)^{-1} = \frac{1}{(0.5 - 0.5^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Da matriz N, alguns resultados:

1) $n_{11} = 4 \rightarrow$ serão necessárias em média 4 discagens antes de ser atendido

2) $n_{21} = 2 \rightarrow$ mesmo tendo completado a ligação (B), serão necessárias em média 2 ligações p/ ser atendido.

$\boxed{\text{A matriz N}}$ $\rightarrow$ tem um papel importante na determinação do desempenho

$$ARL = N(I-Q)^{-1}\,\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Vetor de un's}}}{1}$$

$$ARL = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \to ARL_0 //$$

<u>Outro jeito de calcular o ARL</u>

Nas ~~colocar~~ atribuir probabilidade 1 para o estado absorvente, mas como seria a retroalimentação ao processo. Se atingir o estado C, começa de novo, vai para A ou B a nova chamada. Pensando deste jeito a matriz fixa

$$P^* = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0. & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Resultado em probabilidade → descobrir qual a distribuição estacionária de P^*.

Ou seja, qual ser a probabilidade quando $t \to \infty$ ou seja $P^{*\infty}$. Ou seja, se multiplicar P muitas vezes, obtemos qual a probabilidade de cada estado num gde de vezes. Isto equivale ao sistema de equações:

$\boxed{\pi = \pi P^*}$ onde $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3 \ldots, \pi_k)$

tal que $\sum \pi_i = 1$.

$$[\pi_1\ \pi_2\ \pi_3] = [\pi_1\ \pi_2\ \pi_3] \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\pi_1 = 0.5(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) = 0.5$$

$$\pi_2 = 0.5(\pi_1 + \pi_3) = 0.5(1 - \pi_2)$$

$$= 0.5 - 0.5\pi_2$$

$$1.5\pi_2 = 0.5$$

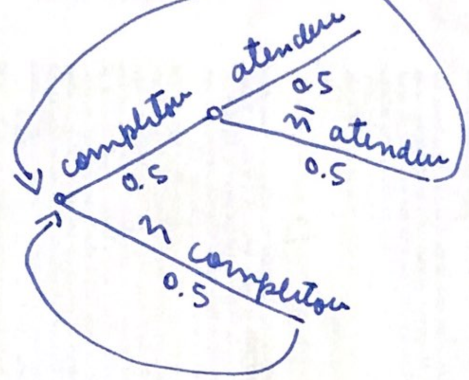
$$\pi_2 = \frac{0.5}{1.5} = \frac{1}{3}$$

$$\pi_3 = 0.5\pi_2 \Rightarrow 0.5 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\vec{\pi} = \left[\frac{3}{6} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{1}{6} \right]$$

$\frac{1}{6} \longrightarrow$ ARL = 6 //

Através da esperança condicional



X = # vezes que precisa ligar p/ ser atendido.

$$E(X) = E(X \mid Y = \text{completou e atendeu}) \overbrace{P(\text{completou e atendeu})}^{0.25} +$$

$$E(X \mid Y = \text{completou e ñ atendeu}) \underbrace{P(\text{completou e ñ atendeu})}_{0.25} +$$

$$E(X \mid Y = \text{ñ completou}) \underbrace{P(\text{completou})}_{0.5}.$$

Porém $E(X \mid Y = \text{completou e atendeu}) = 1$

$$E(X \mid Y = \text{completou e ñ atendeu}) = 1 + E(X)$$

$$E(X \mid Y = \text{ñ completou}) = 2 + E(X)$$

$$E(X) = 0.25 + 0.25(1 + E(X)) + 0.5(2 + E(X))$$

$$E(X) = 0.25 + 0.25 + 0.25E(X) + 1 + 0.5E(X) =$$

$$0.25E(X) = 1.5 \Rightarrow \boxed{E(X) = \frac{1.5}{0.25} = 6}$$