

Carmen Lys Ribeiro Braga

Notas de **FÍSICA**
MATEMÁTICA

*Equações Diferenciais,
Funções de Green
e Distribuições*



“Estas notas de aula apresentam um texto adequado a um curso básico de Física-Matemática. O texto visa aplicações mais voltadas, por exemplo, à Eletrodinâmica Clássica, à Óptica ou à Teoria do Calor. O tratamento de numerosas aplicações da teoria é uma característica marcante destas notas de aula. O núcleo central do presente livro é composto dos dois capítulos finais, dedicados às funções de Green e à Teoria das Distribuições, ambos dotados de qualidades raramente encontradas na literatura. É nossa expectativa que a publicação desse curso contribua à perpetuação da sua memória e à preservação de uma cultura educacional legítima”

Os editores

Notas de Física-Matemática

Equações Diferenciais, Funções de Green e Distribuições

Notas de Física-Matemática

Equações Diferenciais, Funções de Green e Distribuições

Carmen Lys Ribeiro Braga

Instituto de Física da USP

Departamento de Física Matemática

Editora Livraria da Física — São Paulo

Copyright © 2006 Editora Livraria da Física

1a. Edição

Editor: JOSÉ ROBERTO MARINHO

Diagramação: ROBERTO MALUHY JR & MIKA MITSUI

Capa: Arte Ativa

Impressão: Gráfica Paym

Dados Internacionais de Catalogação e Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

BRAGA, Carmen Lys Ribeiro
Notas de física-matemática: equações diferenciais, funções de
Green e distribuições / Carmen Lys Ribeiro Braga. -1.ed.-
São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

1. Equações diferenciais 2. Física matemática 3. Funções
de Green 4. Teoria das distribuições (Análise funcional)

I. Título.

06-2321

CDD-530.15

Índice para catálogo sistemático:

1. Física matemática 530.15

Impresso no Brasil

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte deste livro poderá
ser reproduzida, por qualquer processo, sem a permissão expressa
do editor. É proibida a reprodução por xerox.



Editora Livraria da Física

Telefone 55 11 3816 7599 / Fax 55 11 3815 8688

www.livrariadafisica.com.br

Prefácio

A Profa. Carmen Lys Ribeiro Braga (1923–1989), foi uma das mais notáveis docentes do nosso instituto. A palavra *docente* é aqui entendida no sentido do vernáculo: “que ensina”. Ministrou durante muitos anos os cursos de Física-Matemática e de Métodos de Física Teórica, contribuindo para a formação de várias gerações de estudantes de Física e Matemática. Suas notas de aula, aqui editadas, atestam o alto nível das disciplinas por ela ministradas. Com sua edição acreditamos apresentar um texto adequado a um curso básico de Física-Matemática, voltado ao que se poderia denominar “Física-Matemática clássica” (para uma referência complementar, vide página vii).

Alguns aspectos de um curso de Física-Matemática poderiam modernamente ser ministrados sob outro ponto de vista mais avançado: toda a teoria das funções especiais adquire outro significado se vista sob o prisma da Teoria de Grupos (para uma referência, vide página vii). Esse ponto de vista não nos parece, entretanto, adequado a um primeiro contacto, que deveria visar aplicações mais básicas, como por exemplo, à Eletrodinâmica, à Óptica, ou à Teoria do Calor. Era essa também a visão da Profa. Carmen e, como o leitor poderá constatar, uma boa parte das aplicações à Eletrodinâmica Clássica, usualmente tratadas em cursos de pós-graduação será encontrada aqui. Sua abordagem, porém, contrasta com o tratamento conceitualmente inadequado, consistindo de um “amontoado de receitas”, presente até mesmo em diversas referências clássicas.

Aliás, o tratamento de numerosas aplicações da teoria sempre foi uma característica marcante das aulas da Profa. Carmen, sem dúvida em parte por influência do seu grande mestre, o Prof. Laurent Schwartz (1915–2002). Essa característica domina todo o texto, em particular, os notáveis capítulos sobre funções de Green e sobre a teoria elementar de distribuições, excepcionalmente ricos em importantes aplicações não-triviais (para uma referência, vide página vii).

A menção à docência, feita acima, não significa que a Profa. Carmen não tenha exercido atividades de pesquisa, também em alto nível. De fato, ela publicou pouco, em parte devido a seu caráter tímido e a uma forte auto-crítica. Entretanto, o seu trabalho “Transformation de Fourier des Distributions Invariantes” (Rev. Bras. Fis. **11**, 67–120 (1981)) é notável e, na opinião de seu mestre Laurent Schwartz, irá permanecer. Sua tese de doutoramento intitulou-se “Sobre os Funcionais de Jaffe”, IFUSP (1971). Um de nós (W. F. W.) presenciou quando o Prof. Jorge André Swieca (1936–1980), presidente de sua banca de doutorado e, de hábito, muito econômico em elogios, afir-

mou que o seu trabalho era muito mais claro e transparente que o de Jaffe. Acrescenta-se ainda um bonito trabalho sobre séries formais e distribuições, com M. Schönberg (“Formal Series and Distributions”, C. L. R. Braga e M. Schönberg. An. Acad. Bras. Cie. **31**, n. 3, 333-360 (1959)). O alto nível do curso por ela ministrado refletia, assim, como não poderia deixar de ser, grande maturidade científica.

O material aqui apresentado procede de notas de aula da Profa. Carmen, distribuídas a seus estudantes em diversos cursos, notas essas que elaborou ao longo de vários anos com apoio de colegas. O processo de transcrição envolveu algumas poucas correções menores e a inclusão de algumas notas explicativas, preservando a vivacidade pedagógica dos textos originais – dedicados primordialmente à leitura e estudo de seus alunos – sem carregar esses textos com a precisão própria a tratados sistemáticos. O núcleo central do presente livro são os dois capítulos finais, dedicados às funções de Green e à Teoria das Distribuições, ambos dotados de qualidades raramente encontradas na literatura.

Nos últimos anos de sua vida, acometida de doença grave, a Profa. Carmen foi assistida, com amizade e nobreza, por alguns colegas e ex-alunos que a admiravam. É nossa expectativa que a publicação desse curso contribua à perpetuação da sua memória e à preservação de uma cultura educacional legítima – em um país em que as contribuições mais importantes são rapidamente esquecidas.

Esperamos que o presente texto seja útil a docentes e estudantes! Tendo-a conhecido bem, podemos afirmar que é a essa última qualidade que ela teria atribuído o maior valor.

Agradecemos, por fim, à Profa. Ana Regina Blak, por gentilmente auxiliarnos na coleta dos textos originais, e à Sra. Silvana Maria Ramos de Oliveira e ao Sr. Pedro Tavares Paes Lopes, por auxiliarnos na digitação de uma parte do material.

São Paulo, março de 2006
Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Walter Felipe Wreszinski
José Fernando Perez
Domingos Humberto Urbano Marchetti
João Carlos Alves Barata
Editores

Conteúdo e Leituras Complementares

O corpo central do texto versa sobre soluções de equações diferenciais de interesse em problemas físicos. Os dois primeiros capítulos abordam a função gama e a solução de equações diferenciais ordinárias pelo método de Frobenius, sendo portanto preparatórios para os capítulos seguintes. O terceiro capítulo contém uma abordagem introdutória à teoria das equações diferenciais parciais, apresentando uma classificação de equações de segunda ordem e o método de separação de variáveis.

Os dois capítulos seguintes, os capítulos quatro e cinco, tratam da equação de Laplace em coordenadas esféricas e cilíndricas, respectivamente. São introduzidas as funções de Legendre, as funções de Legendre associadas, os harmônicos esféricos, as funções de Bessel e de Neumann e são estudadas suas propriedades básicas. Aplicações à Eletrodinâmica e à propagação de calor são discutidas.

Vários exercícios envolvendo um conjunto maior de aplicações são propostos no final de cada capítulo ou em meio ao texto.

Os dois últimos capítulos, mais elaborados, tratam do método da função de Green para a resolução de diversos problemas da Física-Matemática e da teoria das distribuições. O sexto capítulo aborda inicialmente o problema de Sturm-Liouville, passando em seguida a problemas em mais que uma dimensão, com domínios limitados e ilimitados. Usos de transformadas de Fourier no cálculo de funções de Green são também explorados com a finalidade de discutir funções de Green causais em problemas de propagação de ondas. Esse capítulo serve também de motivação para o desenvolvimento da teoria de distribuições, apresentada no capítulo seguinte.

O capítulo sete contém uma excelente introdução elementar à teoria das distribuições. Inicialmente são apresentados algumas noções e exemplos. Discute-se a extensão da noção de derivação a distribuições e seu uso na solução de equações diferenciais, fazendo referência ao capítulo seis. Em seguida a noção de convergência é estendida a distribuições. É introduzida a noção transformada de Fourier de distribuições e são estudadas suas propriedades.

Concluimos esta apresentação com uma pequena lista de sugestões de leitura complementar. Outras sugestões, mais específicas, são apresentadas no final de cada capítulo.

Como texto complementar, voltado à teoria das séries e transformadas de Fourier e suas aplicações, mencionamos “Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais”, do Prof. Djairo Guedes de Figueiredo (Projeto Euclides,

IMPA, 1977).

Para um tratamento de funções especiais do ponto de vista de teoria de grupos, veja N. Ya. Vilenkin, *Representations of Lie Groups and Special Functions*, Kluwer 1993.

Como estímulo àqueles estudantes que venham se interessar por aplicações mais avançadas (por exemplo, aos estados coerentes em Mecânica Quântica), recomendamos A. M. Perelomov, *Generalized Coherent States and their Applications*, Springer Verlag, 1986. Para aplicações à teoria das representações do grupo de Lorentz, vide I. M. Gelfand, R. Ya. Minlos e Z. Y. Shapiro, *Representations of the Lorentz Group and their Applications*.

Para um tratamento recente da Eletrodinâmica Clássica e da Óptica que incorpora o tratamento natural da teoria de distribuições, nesse espírito, sugerimos G. Scharf, *From Electrostatics to Optics – a Concise Electrodynamics Course*, Springer Verlag, 1994.

Os editores.

Sumário

1	Funções Gama, Beta e Psi	1
1.1	A Função $\Gamma(z)$	1
1.2	Outras Definições	3
1.3	Função Beta	5
1.4	A Função ψ	9
1.5	Exercícios	11
2	O Método de Frobenius	15
2.1	Pontos Singulares de uma Equação Diferencial	15
2.2	Método de Frobenius	16
2.3	Exercícios	22
3	Equações a Derivadas Parciais	25
3.1	Classificação	25
3.2	O Método de Separação de Variáveis	30
4	Laplaciano em Coordenadas Esféricas	39
4.1	Equação de Laplace em Coordenadas Esféricas	39
4.2	Polinômios de Legendre	42
4.3	Funções Associadas de Legendre	54
4.4	Harmônicos Esféricos	57
4.5	Exercícios	66
5	Funções de Bessel	71
5.1	Equação de Laplace em Coordenadas Cilíndricas	71
5.2	Funções de Bessel de Primeira Espécie	72
5.3	Funções de Neumann (Bessel de 2ª Espécie)	78
5.4	Séries de Fourier-Bessel	82

5.5	Funções de Bessel Esféricas	85
5.6	Aplicações a Problemas de Contorno e Auto-Valores	89
6	Funções de Green	97
6.1	Introdução	97
6.2	Função de Green na Teoria de Sturm-Liouville	101
6.3	Funções de Green em Várias Variáveis. Domínios Limitados	109
6.4	Domínio Ilimitado. Condição de Radiação	116
6.5	Função de Green da Equação do Calor. Autofunções	121
6.6	Funções de Green e a Transformação de Fourier	122
6.7	Exercícios	139
7	Teoria Elementar das Distribuições	143
7.1	Noção de Distribuição. Exemplos	143
7.2	Derivação de Distribuições	149
7.3	Multiplicação e Divisão de Distribuições	157
7.4	Equações Diferenciais	160
7.5	Convergência de Distribuições	162
7.6	Distribuições de Suporte Compacto	166
7.7	Transformação de Fourier de Distribuições Temperadas. O Espaço \mathcal{S}	167
7.8	A Convolução	174
	Índice Remissivo	182

Capítulo 1

Funções Gama, Beta e Psi

1.1 A Função $\Gamma(z)$

A função $\Gamma(z)$, $z = x + iy$, embora raramente admita uma interpretação física, aparece com frequência em problemas físicos, relacionada com outras funções com sentido físico direto. É muito usada para exprimir resultados numéricos de cálculos.

A função $\Gamma(z)$, quando $\operatorname{Re}(z) > 0$, pode ser definida pela integral de Euler:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (1.1.1)$$

que converge uniformemente para $\operatorname{Re}(z) > 0$, como se pode ver facilmente: se $0 < \alpha \leq x \leq \beta < \infty$, então

$$|t^{z-1}| = t^{x-1} \leq \begin{cases} t^{\alpha-1}, & 0 \leq t \leq 1, \\ t^{\beta-1}, & t \geq 1, \end{cases}$$

logo,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |e^{-t} t^{z-1}| dt &\leq \int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} dt \\ &\leq \int_0^1 t^{\alpha-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} dt. \end{aligned}$$

A segunda integral converge para qualquer valor de β enquanto que a primeira converge só se $\alpha > 0$. Assim, $\Gamma(z)$ fica definida por (1.1.1) no semiplano $\operatorname{Re}(z) > 0$. Mais ainda, e^{-t} é uma função contínua de t e t^{z-1} é uma função analítica. Conseqüentemente, $\Gamma(z)$ é uma função analítica no semiplano $\operatorname{Re}(z) > 0$ e suas derivadas podem ser obtidas por derivação sob o sinal de integração

$$\Gamma'(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \ln(t) dt \quad (1.1.2)$$

(derivando formalmente a integral converge uniformemente em $0 < \alpha \leq x \leq \beta < \infty$).

Da definição (1.1.1) tira-se imediatamente $\Gamma(1) = 1$ e prova-se por integração por partes e indução finita que $\Gamma(n+1) = n!$ para n inteiro ≥ 0 . Para ver isso, vamos integrar $\Gamma(z+1)$ por partes:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = -e^{-t} t^z \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt ,$$

de modo que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) . \quad (1.1.3)$$

Em particular, isso implica

$$\Gamma(n+1) = n!$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Assim $\Gamma(z)$ é uma generalização do fatorial¹.

Usando a relação (1.1.3) n vezes, obtemos

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2) \cdots z\Gamma(z) ,$$

ou seja,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)(z+n-2) \cdots z} . \quad (1.1.4)$$

Como $\Gamma(z+n)$ está definida para $\text{Re}(z+n) > 0$, $\Gamma(z)$ fica definida pela fórmula (1.1.4) para $\text{Re}(z) > -n$. Como n é arbitrário, a fórmula (1.1.3) prolonga analiticamente $\Gamma(z)$, exceto a $z = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) que são pólos simples de $\Gamma(z)$. O resíduo de $\Gamma(z)$ no pólo $z = -n$ é dado por

$$\lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!} .$$

Assim $\Gamma(z)$ é uma função analítica no plano complexo infinito exceto a $z = 0, -1, -2, \dots$, que são pólos simples (diz-se que $\Gamma(z)$ é uma função meromorfa).

Pela mudança da variável $t = u^2$ a integral (1.1.1) converte em

$$\Gamma(z) = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2z-1} du , \quad (1.1.5)$$

¹Um célebre teorema, devido a H. Bohr e J. P. Møllerup, garante que a função gama é a única função cujo logaritmo é convexo que satisfaz (1.1.3) e $\Gamma(1) = 1$. Vide, e.g., R. Courant and F. John, "Introduction to Calculus and Analysis", Vol. II, Springer Verlag, Berlin, 2000. [NdEs]

donde se tira

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

Usando (1.1.3) com $z = \frac{1}{2}$, obtemos $\Gamma(z)$ para z semi-inteiro:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi},$$

onde foi usada a notação (fatorial duplo):

$$(2n-1)!! := 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1),$$

$$(2n)!! := 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n).$$

1.2 Outras Definições

Há outras definições de $\Gamma(z)$ úteis na obtenção de algumas de suas propriedades. A primeira é como limite infinito (Euler)

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}. \quad (1.2.1)$$

Para mostrar que (1.1.1) e (1.2.1) são equivalentes lembremos que

$$e^{-t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n,$$

portanto

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt.$$

A integral $\Gamma_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt$ pode ser calculada por partes:

$$\begin{aligned} \Gamma_n(z) &= \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{t^z}{z} \Big|_0^n + \frac{n}{nz} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} t^z dt \\ &= \frac{1}{z} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} t^z dt. \end{aligned}$$

Após n integrações obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma_n(z) &= \frac{n!}{n^n z(z+1)\cdots(z+n-1)} \int_0^n t^{z+n-1} dt \\ &= \frac{n! n^{z+n}}{n^n z(z+1)\cdots(z+n)} = \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \quad (1.2.2)\end{aligned}$$

e, comparando a (1.2.1), vemos que provou-se o que se queria provar.

A segunda definição (devida a Weierstrass) é sob a forma de produto infinito uniformemente convergente

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}, \quad (1.2.3)$$

onde γ é o limite da seqüência

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

quando $n \rightarrow \infty$. A constante γ vale $0,577215665\dots$ e é chamada constante de Euler-Mascheroni.

Invertendo a fórmula (1.2.2) temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma_n(z)} &= \frac{n^{-z}}{n!} z(z+1)\cdots(z+n) = ze^{-z \ln(n)} (1+z) \left(1 + \frac{z}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{z}{n}\right) \\ &= ze^{z(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n))} \prod_{s=1}^n \left(1 + \frac{z}{s}\right) e^{\frac{z}{s}}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma_n(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{s}\right) e^{-\frac{z}{s}},$$

provando (1.2.3).

Pela definição (1.2.3) vê-se que $\frac{1}{\Gamma(z)}$ é uma função inteira, isto é: que $\Gamma(z)$ não tem zeros. Nota-se também que $\Gamma(z^*) = (\Gamma(z))^*$.

A definição (1.1.1) não pode ser usada quando $\operatorname{Re}(z) \leq 0$. Uma representação integral de $\Gamma(z)$, válida para todo z e que coincide com a de Euler quando $\operatorname{Re}(z) > 0$ é a de Hankel:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2i \operatorname{sen}(\pi z)} \int_c e^{-t} (e^{-i\pi t})^{(z-1)} dt,$$

onde C é um caminho aberto com extremos $\infty \pm i\sigma$ que envolve a origem numa vez. C' é um caminho C deformado. Vide Fig. 1.1.

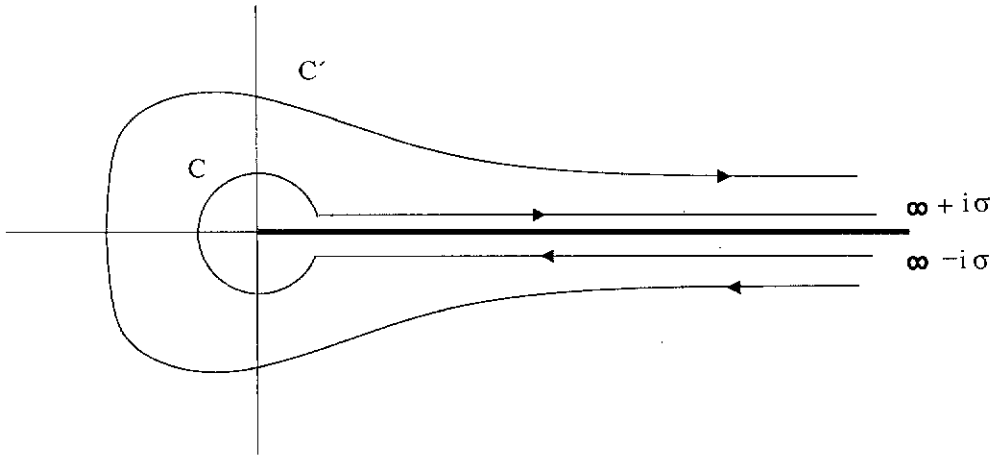


Figura 1.1. Os caminhos de integração C e C' .

1.3 Função Beta

A função $B(p, q)$ é definida pela integral

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, \quad \operatorname{Re}(p) > 0; \quad \operatorname{Re}(q) > 0. \quad (1.3.1)$$

Por mudança de variável, obtém-se representações integrais equivalentes a (1.3.1):

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2p-1} (\sin \theta)^{2q-1} d\theta, \quad t = \cos^2 \theta, \quad (1.3.2)$$

$$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} du, \quad t = \frac{u}{1+u}. \quad (1.3.3)$$

As funções beta e gama são ligadas pela fórmula

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (1.3.4)$$

que, para $\operatorname{Re}(p) > 0$, $\operatorname{Re}(q) > 0$ assim se prova:

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2p-1} du \int_0^\infty e^{-v^2} v^{2q-1} dv \\ &= 4 \iint_{u \geq 0, v \geq 0} e^{-(u^2+v^2)} u^{2p-1} v^{2q-1} dudv.\end{aligned}$$

Usando coordenadas polares $u = r \cos \theta$ $v = r \operatorname{sen} \theta$ obtemos

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p, q).$$

A fórmula (1.3.4) prolonga $B(p, q)$ para a região $\operatorname{Re}(p) < 0$, $\operatorname{Re}(q) < 0$ desde que p e q não sejam inteiros negativos ou zero.

Podemos usar (1.3.4) para estabelecer a chamada fórmula dos complementos para a função gama:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}, \quad (1.3.5)$$

válida para z não-inteiro, que pode ser escrita em forma mais simétrica pela substituição $z \rightarrow z + 1/2$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)} \quad \text{com } z \neq \text{semi-inteiro}.$$

Usando (1.3.4) e (1.3.3) temos:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = B(z, 1-z) = \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{1+u} du.$$

Esta integral (para $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$) se calcula pelo método dos resíduos. A função $\frac{u^{z-1}}{1+u}$ para z fixo, é uma função multiforme tendo $u = 0$ e $u = \infty$ como pontos de ramificações e $u = -1$ como pólo simples. Consideramos o caminho fechado C cujas porções (1) e (2) (vide Fig. 1.2) são infinitamente vizinhas do eixo real positivo. Na região delimitada por C o integrando compõe-se de uma infinidade de ramos uniformes distintos, já que por definição, $u^{z-1} = e^{(z-1)\log(u)} = e^{(z-1)[\ln|u|+i\theta+2ik\pi]}$ onde θ é o argumento principal: $0 \leq \theta < 2\pi$.

Escolhemos o ramo principal, isto é, aquele em que $\log(u)$ toma sobre (1) valor real. Assim, sobre (1)

$$u^{z-1} = e^{(z-1)\ln|u|} = |u|^{z-1}$$

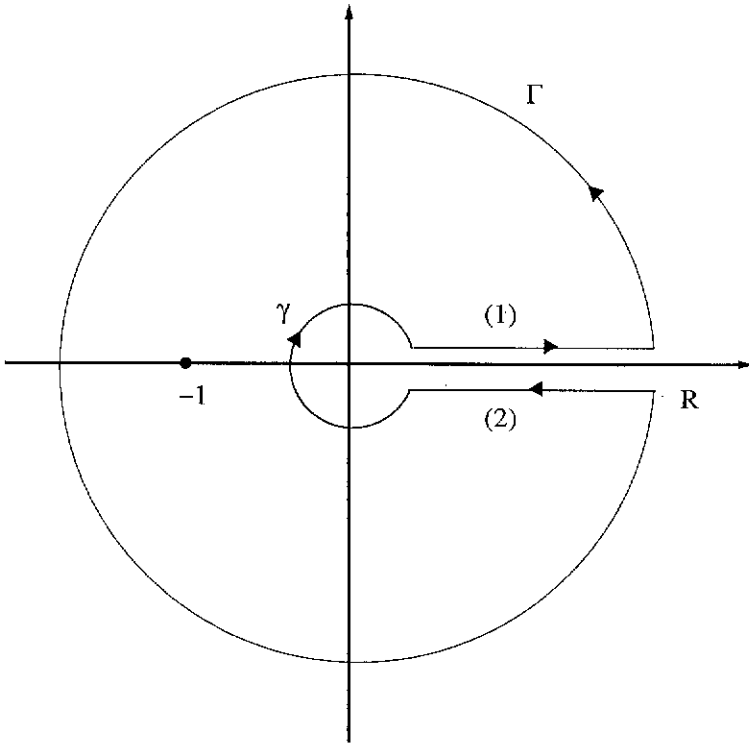


Figura 1.2. Os segmentos de integração γ , Γ , (1) e (2).

e sobre (2)

$$u^{z-1} = e^{(z-1)[\ln |u| + 2i\pi]} = |u|^{z-1} e^{(z-1)2i\pi}.$$

Pelo teorema dos resíduos²,

$$\begin{aligned} \int_C \frac{u^{z-1} du}{1+u} &= 2\pi i e^{i(z-1)\pi} \\ &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left[\int_{\gamma} \frac{u^{z-1} du}{1+u} + \int_{\Gamma} \frac{u^{z-1} du}{1+u} + \int_{\epsilon}^R \frac{u^{z-1} du}{1+u} e^{2i\pi(z-1)} \right]. \end{aligned}$$

A primeira e a segunda integrais tendem para zero nos limites $\epsilon \rightarrow 0$,

²Vide e.g., V. Churchill, "Variáveis complexas e suas aplicações". McGraw-Hill do Brasil, (1975).

$R \rightarrow \infty$, quando $0 < x < 1$, já que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{u^{z-1}}{1+u} du \right| \leq \frac{2\pi\epsilon^x e^{2\pi|y|}}{1-\epsilon} \approx C\epsilon^x,$$

$$\left| \int_{\Gamma} \frac{u^{z-1}}{1+u} du \right| \leq \frac{2\pi R^x e^{2\pi|y|}}{R-1} \approx CR^{x-1}.$$

As integrais sobre (1) e (2) contribuem nos limites $\epsilon \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ para o resultado:

$$\int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{1+u} du = \frac{2\pi i e^{i\pi(z-1)}}{1 - e^{2i\pi(z-1)}} = \frac{2\pi i}{e^{-i\pi(z-1)} - e^{i\pi(z-1)}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}.$$

para $0 < x < 1$. Temos, pois

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \quad \text{para } 0 < \operatorname{Re}(z) < 1.$$

Lembremos que $\Gamma(z)\Gamma(z-1)$ é uma função analítica no plano complexo finito, exceto para z inteiro. A função $\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$ também é analítica nessa região. Como as funções coincidem na faixa $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$, podemos concluir que elas coincidem na região comum de analiticidade. Portanto, a fórmula (1.3.5) é válida para todo z finito não inteiro.

Outra fórmula bastante útil é a fórmula de duplicação de Legendre:

$$\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \Gamma(2z). \quad (1.3.6)$$

Esse resultado pode ser estabelecido com o auxílio da função beta:

$$B(z, z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1} dt.$$

Efetuada a mudança $t = \frac{1+s}{2}$, temos

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = \frac{1}{2^{2z-1}} \int_{-1}^{+1} (1-s^2)^{z-1} ds = \frac{2}{2^{2z-1}} \int_0^1 (1-s^2)^{z-1} ds.$$

Fazendo $s^2 = u$ tem-se

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = \frac{1}{2^{2z-1}} \int_0^1 (1-u)^{z-1} u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{B\left(z, \frac{1}{2}\right)}{2^{2z-1}}.$$

de onde se deduz

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2^{2z-1}\Gamma(z+\frac{1}{2})},$$

ou seja,

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}.$$

Por um argumento similar, poder-se obter uma generalização (devida a Gauss) da fórmula de Legendre:

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-nz} \Gamma(nz), \quad (1.3.7)$$

para $n = 2, 3, 4, \dots$

1.4 A Função ψ

A função $\psi(z)$ é definida por

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \quad (1.4.1)$$

Tomando o logaritmo da fórmula (1.2.3) e diferenciando, obtemos

$$\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(z+n)}, \quad (1.4.2)$$

de onde se conclui que $\psi(1) = -\gamma$ (conseqüentemente $\Gamma'(1) = -\gamma$) e que $\psi(z)$ é meromorfa com pólos simples a $z = 0, -1, -2, \dots$

Diferenciando (1.1.3) obtem-se a seguinte equação para $\psi(z)$:

$$\psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z),$$

de onde se deduz

$$\psi(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma,$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni introduzida acima, de modo que $\psi(n) \sim \ln(n)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Generalizando a definição (1.1.1) da função gama, definimos as funções gama incompletas:

$$\begin{aligned}\gamma(z, a) &:= \int_0^a e^{-t} t^{z-1} dt, \\ \Gamma(z, a) &:= \int_a^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \end{aligned} \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \quad a > 0,$$

de modo que $\gamma(z, a) + \Gamma(z, a) = \Gamma(z)$.

Muitas integrais podem ser expressas em termos das funções gama incompletas.

Complemento. Este capítulo pode ser complementado com a teoria do método de ponto de sela aplicado à função gama, originando o desenvolvimento assintótico que generaliza a fórmula de Stirling. Veja a seção 3.6 do livro J. Mathews e R. L. Walker “Mathematical Methods of Physics”, W. A. Benjamin, Inc. (1965). [NdEs]

1.5 Exercícios

1. Expresse o coeficiente do n -ésimo termo do desenvolvimento de $(1+x)^{1/2}$ em série de Taylor **a.** em termo de fatoriais; **b.** em termo de funções gama; **c.** em termos de duplos fatoriais.

2. Usando a função gama mostre que

$$\int_0^1 x^k \ln x \, dx = \frac{1}{(k+1)^2}, \quad k > -1.$$

3. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} \, dx = \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)2^{2n}a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad n \geq 0, \quad a > 0.$$

4. Mostre que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = (-1)^n \pi, \quad n \text{ inteiro}.$$

5. Mostre que para y real, $y \neq 0$,

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sinh(\pi y)}, \quad |\Gamma(1+iy)|^2 = \frac{\pi y}{\sinh(\pi y)}$$

e que

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \right|^2 = \frac{\pi}{\cosh(\pi y)}.$$

6. A função de onda de uma partícula espalhada por um potencial de Coulomb puro é $\psi(r, \theta)$. Na origem, a função é

$$\psi(0) = e^{-\pi a/2} \Gamma(i+ia)$$

onde $a > 0$. Mostre que

$$|\psi(0)|^2 = \frac{2\pi a}{e^{2\pi a} - 1}.$$

7. Mostre que

$$-\gamma = \Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t) \, dt = \int_0^1 \ln\left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right) \, dt,$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni.

8. Demonstre a validade das seguintes identidades:

$$\text{a.} \quad \int_{-1}^1 (1-x^2)^{1/2} x^{2n} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n = 0, \\ \pi \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}, & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$\text{b.} \quad \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = 2^{2n+1} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = 2 \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{c.} \quad \int_{-1}^1 (1+x)^\alpha (1-x)^\beta dx = 2^{\alpha+\beta+1} B(\alpha+1, \beta+1).$$

$$\text{d.} \quad \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^{p-1} (\beta-x)^{q-1} dx = (\beta-\alpha)^{p+q-1} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

$$\text{e.} \quad \int_0^{\infty} \frac{u^\alpha}{(1+u^2)^\beta} du = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2}) \Gamma(\beta - \frac{\alpha+1}{2})}{\Gamma(\beta)}.$$

Sugestão no caso e.: substituição $t = u^2/(1+u^2)$.

9. Mostre com o auxílio da função beta que

$$\int_t^z \frac{dx}{(z-x)^{1-\alpha}(x-t)^\alpha} = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi\alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

10. Mostre que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^n d\theta &= \int_0^{\pi/2} (\text{sen} \theta)^n d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \\ &= \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ ímpar}, \\ \frac{\pi (n-1)!!}{2 n!!}, & n \text{ par}. \end{cases} \end{aligned}$$

11. Mostre que

$$\int_{-1}^1 x^{2s-1} (1-x^2)^{-1/2} dx = \frac{(2s)!!}{(2s+1)!!}, \quad s \text{ inteiro } > 0.$$

12. Mostre que para todo inteiro $k > 0$

$$\psi(k+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k},$$

onde $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ e γ é a constante de Euler-Mascheroni.

13. Mostre que

$$\Gamma'(p) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} \ln(t) dt = (p-1)! \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1} - \gamma \right),$$

p inteiro > 1 .

14. Escreva os dois primeiros termos da série de Laurent de $\Gamma(z)$ na vizinhança de $z = -n$, onde n é um inteiro ≥ 0 .

15. O símbolo de Pochhammer $(a)_n$ é definido como

$$(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1), \quad (a)_0 = 1, \quad \text{com } n \text{ inteiro } \geq 0.$$

a. Expresse $(a)_n$ em termos da função gama.

b. Expresse $\frac{d}{da}(a)_n$ em termos da função psi.

16. Mostre que para a integral de Dirichlet vale

$$\iint_{\Delta} x^p y^q dA = \frac{B(p+1, q+1)}{p+q+2},$$

onde a área de integração Δ é o triângulo formado pelos eixos Ox , Oy e pela linha $x+y=1$.

Capítulo 2

O Método de Frobenius

2.1 Pontos Singulares de uma Equação Diferencial

Grande número de equações da Física-Matemática conduzem a equações diferenciais do tipo:

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0, \quad (2.1.1)$$

onde A , B e C são funções de x para $a \leq x \leq b$.

O problema da construção de soluções para a equação (2.1.1) foi parcialmente resolvido por Frobenius. Embora a teoria geral seja complicada, apresentaremos uma versão simplificada deste método admitindo que as funções $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$, supostas sem fator comum, sejam analíticas na vizinhança de um ponto $x_0 \in [a, b]$, isto é, que sejam desenvolvíveis em séries de Taylor em torno de x_0 , com raios de convergência não-nulos.

Se $A(x_0) \neq 0$, x_0 é dito ponto ordinário da equação (2.1.1). Neste caso, as funções $p(x) = \frac{B(x)}{A(x)}$ e $q(x) = \frac{C(x)}{A(x)}$ também podem ser desenvolvidas em séries de Taylor em torno de x_0 , com raios de convergência não-nulos.

Se $A(x_0) = 0$, diz-se que x_0 é ponto singular da equação. Neste caso $p(x)$ e $q(x)$ tornam-se infinitos quando $x \rightarrow x_0$. Há dois tipos de pontos singulares:

1. Se $p(x)$ e $q(x)$ divergem para $x \rightarrow x_0$ mas $(x - x_0)p(x)$ e $(x - x_0)^2q(x)$ permanecem finitos, diz-se que x_0 é ponto singular regular ou ponto singular não-essencial (P.S.R.).
2. Se $(x - x_0)p(x)$ ou $(x - x_0)^2q(x)$ não permanecem finitos quando $x \rightarrow x_0$, diz-se que x_0 é um ponto singular irregular ou ponto singular essencial (P.S.E).

A análise do caso $x \rightarrow \infty$ é feita substituindo-se x por $\frac{1}{t}$ na equação

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2.1.2)$$

e estudando-se o caso $t = 0$. Se $t = 0$ for um ponto ordinário, singular regular ou singular essencial para a equação

$$t^4 \frac{d^2y}{dt^2} + \left[2t^3 - t^2 p \left(\frac{1}{t} \right) \right] \frac{dy}{dt} + q \left(\frac{1}{t} \right) y = 0 \quad (2.1.3)$$

então $x = \infty$ será dito, respectivamente, um ponto ordinário, singular regular ou singular essencial para a Eq. (2.1.2).

O quadro a seguir apresenta as equações diferenciais mais comuns da Física-Matemática e os seus pontos singulares:

Nome	Expressão	P.S.R.	P.S.E.
Osc. har. sim.	$y'' + \omega^2 y = 0$	-	∞
Legendre	$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l + 1)y = 0$	$-1, 1, \infty$	-
Bessel	$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$	0	∞
Hermite	$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$	-	∞
Laguerre	$xy'' + (1 - x)y' + \alpha y = 0$	0	∞
Chebyshev	$(1 - x^2)y'' - xy' - n^2 y = 0$	$-1, 1, \infty$	-
Hipergeom.	$x(x - 1)y'' + [(1 + a + b)x - c]y' + aby = 0$	$-1, 1, \infty$	-

2.2 Método de Frobenius

O método de Frobenius consiste em admitir a existência, na vizinhança de um ponto ordinário ou singular regular, de uma solução em forma de série

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+s}, \quad (2.2.1)$$

onde os coeficientes a_n e o índice s são incógnitas a serem determinadas pela equação¹.

Se x_0 é um P.S.R., muitas vezes convém multiplicar todos os termos da Eq. (2.1.2) por $(x - x_0)^2$ (sem perda de generalidade podemos supor que $x_0 = 0$):

$$x^2 y'' + xp(x) \cdot xy' + x^2 q(x)y = 0. \quad (2.2.2)$$

¹É possível demonstrar por primeiros princípios que em uma vizinhança de um ponto ordinário todas as soluções são analíticas, ou seja, da forma (2.2.1) com $s = 0$ e que em uma vizinhança de um ponto singular regular sempre existe ao menos uma solução da forma (2.2.1). Nesse caso, pode haver também, eventualmente, uma segunda solução com uma singularidade logarítmica adicional, como encontraremos adiante. Vide J. Sotomayor, "Lições de equações diferenciais ordinárias". Projeto Euclides, IMPA. (1979). [NdEs]

Como $x = 0$ é um P.S.R., temos que $xp(x)$ e $x^2q(x)$ são desenvolvíveis em séries de Taylor em torno de $x_0 = 0$:

$$xp(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m x^m, \quad x^2q(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m x^m.$$

Temos ainda

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}, \\ xy' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s) x^{n+s}, \\ x^2y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)(n+s-1) x^{n+s}. \end{aligned}$$

Substituindo todas essas séries na Eq. (2.2.2), multiplicando as séries termo a termo e reunindo os coeficientes de cada potência de x , obtemos uma equação da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s) x^{n+s} = 0. \quad (2.2.3)$$

Como a Eq. (2.2.3) deve ser satisfeita identicamente, numa vizinhança de $x = 0$, os coeficientes $A_n(s)$ devem ser nulos. O coeficiente de x^s é

$$A_0(s) = a_0[s(s-1) + \alpha_0s + \beta_0].$$

Supondo $a_0 \neq 0$ obtemos da imposição $A_0(s) = 0$ a equação dita equação indicial

$$s(s-1) + \alpha_0s + \beta_0 = 0. \quad (2.2.4)$$

que tem, em geral, duas raízes (denominadas índices) denotadas por s_1 e s_2 . Se $x = 0$ for um ponto ordinário, então $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ e as raízes serão $s_1 = 1$ e $s_2 = 0$.

Se $x = 0$ é um ponto ordinário ou um P.S.R. devemos ter $A_n(s) = 0$ para $n > 0$ e $s = s_1$ ou s_2 (somente para estes valores espera-se achar soluções da forma (2.2.3)). Daí obtém-se fórmulas que dão, em geral, a_n em termos dos coeficientes precedentes a_0, a_1, \dots, a_{n-1} (fórmulas de recorrência). Fixando arbitrariamente a_0 determinamos sucessivamente a_1, a_2, \dots, a_{n-1} , enfim, determinamos pelo menos, uma solução

$$y_1(x) = x^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s_1) x^n.$$

Exemplo 1. Seja a equação de Bessel de ordem ν onde ν é um parâmetro real:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad (2.2.5)$$

para a qual $x = 0$ é um P.S.R. Tentando a solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$$

a equação se converte em

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n [(n+s)^2 - \nu^2] x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s+2} = 0. \quad (2.2.6)$$

A potência mais baixa neste desenvolvimento é x^s . A equação indicial é, pois,

$$s^2 - \nu^2 = 0 \quad \therefore \quad s_1 = \nu \quad \text{e} \quad s_2 = -\nu.$$

A potência mais baixa seguinte é x^{s+1} cujo coeficiente é:

$$a_1 [(1+s)^2 - \nu^2] = 0.$$

Como $s = \pm \nu$ devemos ter $a_1 = 0$ (a menos que $s = -\frac{1}{2}$, caso em que podemos ter $a_1 = 0$).

A última somatória em (2.2.6) também se escreve, trocando-se n por $n-2$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+s}.$$

Juntado esta série com a primeira em (2.2.6) e igualando a zero os coeficientes da série resultante, obtemos as relações de recorrência

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+s)^2 - \nu^2} = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2s)}, \quad n \geq 2, \quad (2.2.7)$$

de onde resulta

$$a_1 = a_3 = \dots = a_n = 0, \quad \text{para } n \text{ ímpar},$$

$$a_{2r} = \frac{(-1)^r a_0}{2^{2r} r! (r+s)(r+s-1) \dots (1+s)}, \quad \text{para } n \text{ par} = 2r. \quad (2.2.8)$$

Escolhendo a raiz $s = \nu$, obtemos uma solução

$$y_1(x) = x^\nu \sum_{r=0}^{\infty} a_{2r} x^{2r},$$

com

$$a_{2r} = \frac{(-1)^r a_0}{2^{2r} r! (r + \nu)(r + \nu - 1) \dots (1 + \nu)}.$$

A segunda raiz $s = -\nu$ também fornece uma solução

$$y_2(x) = x^{-\nu} \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r} x^{2r},$$

nem sempre distinta de $y_1(x)$.

Devemos enfatizar o seguinte: a solução em série obtida pelo método de Frobenius deve convergir na região de interesse. Podemos determinar o intervalo de convergência pela aplicação de testes de convergência, por exemplo, os testes de D'Alembert, de Gauss, da raiz etc².

A questão da existência da solução foi parcialmente resolvida pelo teorema de Fuchs:

Teorema de Fuchs. Se $x = 0$ é um ponto singular para a equação (2.2.2) e se s_1 e s_2 , as soluções da equação indicial (2.2.4) com $s_1 \geq s_2$, forem reais, e se $\rho := \min(\rho_1, \rho_2)$ for o menor dos raios de convergência das séries de $xp(x)$ e $x^2q(x)$, então num dos intervalos $-\rho < x < 0$ ou $0 < x < \rho$ existe uma solução do tipo:

$$y_1(x) = |x|^{s_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s_1) x^n \right]. \quad (2.2.9)$$

A segunda solução será dada por:

a) Se $s_1 - s_2$ não for inteiro, nem nulo, então

$$y_2(x) = |x|^{s_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s_2) x^n \right]. \quad (2.2.10)$$

b) Se $s_1 = s_2$, então

$$y_2(x) = y_1(x) \ln |x| + |x|^{s_2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(s_1) x^n. \quad (2.2.11)$$

²Em verdade, sob as hipóteses aqui tratadas, pode-se mostrar, de primeiros princípios, a convergência das séries sem recorrer a tais testes. Vide J. Sotomayor, "Lições de equações diferenciais ordinárias". Projeto Euclides, IMPA. (1979). [NdEs]

c) Se $s_1 - s_2 = N$, um inteiro positivo, então

$$y_2(x) = ay_1(x) \ln|x| + |x|^{s_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(s_2) x^n \right]. \quad (2.2.12)$$

Os coeficientes $a_n(s_1)$, $a_n(s_2)$, $b_n(s_1)$ e $c_n(s_2)$ e a constante a podem ser obtidos substituindo a série na equação (2.2.2). A constante a pode vir a ser zero. Cada uma das séries dos itens a), b) e c) converge pelo menos para $|x| < \rho$ e define uma função que é analítica em $x = 0^3$.

Outra forma de se obter a segunda solução, conhecida a primeira, é tentar uma solução do tipo: $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ e determinar $u(x)$ substituindo $y_2(x)$ na equação diferencial⁴. Esta substituição reduz a ordem da equação diferencial e nos dá:

$$u(x) = \int \frac{\exp[-\int^x p(x') dx']}{[y_1(x)]^2} dx. \quad (2.2.13)$$

Exemplo 2. Vamos procurar a segunda solução da equação de Bessel (2.2.5) no caso em que $\nu = 0$ (equação de Bessel de ordem zero):

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0.$$

A primeira solução é dada por:

$$y_1(x) = J_0(x) := \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{2^{2r} (r!)^2} x^{2r}, \quad (2.2.14)$$

conforme o Exemplo 1.

Neste caso a equação indicial nos dá duas raízes iguais $s_1 = s_2 = 0$.

A segunda solução, de acordo com o teorema de Fuchs, será dada por:

$$y_2(x) = J_0(x) \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n. \quad (2.2.15)$$

Derivando y_2 duas vezes e lembrando que $J_0(x)$ também é solução da equação, obtemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2} + 2xJ'_0(x) = 0.$$

³A demonstração deste teorema pode ser encontrada nos parágrafos (4.5) e (4.6) do livro: W. E. Boyce e R. C. Di Prima: "Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems". J. Wiley (1976).

⁴Esse método é conhecido como método de redução de D'Alembert. [NdEs]

Substituindo $J_0(x)$ pelo seu valor dado por (2.2.14), obteremos

$$b_1 x + 2^2 b_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (n^2 b_n + b_{n-2}) x^n = -2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r 2^r x^{2r}}{2^{2r} (r!)^2}.$$

Do lado direito só aparecem termos pares e, portanto, do lado esquerdo teremos $b_1 = b_3 = b_5 = \dots = 0$.

Teremos também $b_2 = \frac{1}{2^2}$ e

$$(2r)^2 b_{2r} + b_{2r-2} = \frac{2(-1)^{r+1} (2r)}{2^{2r} (r!)^2}, \quad r = 2, 3, 4 \dots$$

Podemos extrair daí que:

$$b_4 = \frac{-1}{2^2 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad b_6 = \frac{1}{2^2 4^2 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

e por indução finita é fácil mostrar que o termo genérico b_{2n} será dado por:

$$b_{2n} = \frac{(-1)^{n+1} H_n}{2^{2n} (n!)^2},$$

onde $H_n := \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$.

Substituindo b_{2n} em y_2 obtemos a segunda solução para a equação de Bessel de ordem zero.

$$y_2(x) = J_0(x) \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}, \quad x > 0.$$

Geralmente se usa como segunda solução da equação de Bessel uma combinação linear de y_2 e J_0 , ou melhor,

$$N_0(x) := \frac{2}{\pi} \left[y_2(x) + (\gamma - \ln 2) J_0(x) \right],$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni e vale

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln(n)) = 0,5772\dots$$

A solução geral da equação de Bessel de ordem zero para $x > 0$ é

$$y(x) = c_1 J_0(x) + c_2 N_0(x),$$

sendo c_1 e c_2 constantes.

Complemento. Uma boa referência complementar para esse capítulo é o capítulo Linear Differential Equations de E. T. Whittaker e G. N. Watson "A Course of Modern Analysis", Cambridge University Press, (1965). Veja também o capítulo V de J. Sotomayor "Lições de Equações Diferenciais Ordinárias", Projeto Euclides, IMPA, (1979). [NdEs]

2.3 Exercícios

1. Resolva a equação de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda + 1)y = 0, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

pelo método de Frobenius em torno de $x = 0$, obtendo duas soluções em série, uma para cada raiz da equação indicial (e tomando $a_1 = 0$). Mostre que ambas as séries divergem para $x = \pm 1$, a menos que λ seja um inteiro > 0 , caso em que uma das séries converte em um polinômio.

2. Resolva a equação diferencial de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

pelo método de Frobenius em torno de $x = 0$ e selecione α convenientemente de modo a converter uma das séries em polinômios.

3. Ache uma solução para a equação diferencial de Laguerre

$$xy'' + (1 - x)y' + \alpha y = 0, \quad x \geq 0,$$

e escolha α de modo que a série se converta em um polinômio.

4. Resolva a equação diferencial

$$x^2y'' + x^2y' - 2y = 0$$

pelo método de Frobenius. Mostre que uma das séries é finita. Ache uma fórmula para a segunda solução.

5. Considere a equação diferencial

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \lambda y = 0.$$

a. Quais são os pontos singulares dessa equação?

b. Resolva a equação pelo método de Frobenius (em torno de $z = 0$) e ache os valores de λ tais que uma das soluções seja analítica nos pontos singulares. Mostre que essa solução é um polinômio.

6. Uma boa aproximação para a interação entre dois nucleons é o potencial mesônico

$$V = A \frac{e^{-\alpha x}}{x}, \quad (A < 0).$$

Construa uma solução para a equação de Schrödinger unidimensional

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi + (E - V)\psi = 0$$

usando a maior raiz da equação indicial. Calcule somente os três primeiros coeficientes não-nulos.

7. Usando o teorema de Fuchs determine a solução da equação de Bessel de ordem 1 (ou seja, para $\nu = 1$). Calcule somente os três primeiros termos não-nulos.

Capítulo 3

Equações a Derivadas Parciais

3.1 Classificação

Um grande número de problemas físicos, quando formulados em termos matemáticos, conduzem a equações diferenciais parciais, freqüentemente lineares e de segunda ordem. Damos a seguir uma pequena lista das equações mais importantes da Física-Matemática:

a) $\nabla^2\psi = 0$ (equação de Laplace),

b) $\nabla^2\psi = g(x, y, z)$ (equação de Poisson),

c) $\nabla^2\psi + \lambda\psi = 0$ (equação de Helmholtz),

d) $\nabla^2\psi = \frac{1}{K} \frac{\partial\psi}{\partial t}$ (equação da difusão ou da condução do calor),

e) $\nabla^2\psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ (equação de ondas livres),

f) $\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x, y, z))\psi = 0$ (equação de Schrödinger independente do tempo),

g) $\square\psi + k^2\psi$ (equação de Klein-Gordon),

onde o operador \square , chamado *D'Alembertiano*, é definido como

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

e ∇^2 é o operador *Laplaciano* que, em coordenadas cartesianas retangulares, tem a forma

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

As funções $g(x, y, z)$ e $V(x, y, z)$ são, em geral, conhecidas. As soluções das equações diferenciais parciais devem satisfazer certas exigências chamadas condições de contorno (ou condições de fronteira). Observemos que, nos

casos das equações de Helmholtz (c) e de Schrödinger (f) só existem soluções satisfazendo as condições de fronteira se as constantes λ e E tomarem valores especiais chamados autovalores (as soluções correspondentes chamam-se autofunções).

As equações diferenciais parciais apresentadas, no caso de duas variáveis independentes, são casos especiais da equação linear homogênea de segunda ordem geral:

$$A \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2E \frac{\partial \psi}{\partial x} + 2F \frac{\partial \psi}{\partial y} + G\psi = 0, \quad (3.1.1)$$

cuja forma se parece com a da equação geral de uma cônica

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ex + 2Fy + G = 0.$$

Essa equação representa uma hipérbole, parábola ou elipse quando $B^2 - AC > 0$, $= 0$, < 0 , respectivamente. Usa-se uma classificação semelhante para a equação diferencial (3.1.1) e diz-se que ela é

- uma equação hiperbólica se $B^2 - AC > 0$,
- uma equação parabólica se $B^2 - AC = 0$,
- uma equação elíptica se $B^2 - AC < 0$.

Por exemplo, a equação de Laplace-Poisson (em duas variáveis) é do tipo elíptico, a equação das ondas é do tipo hiperbólico, a equação do calor e do tipo parabólico. As equações em que os coeficientes A , B e C são variáveis podem ser de tipos diferentes quando se passa de uma região para outra.

Uma classificação análoga, porém mais complicada, pode ser feita no caso de três ou mais variáveis independentes. Conserva-se a terminologia bidimensional e verifica-se que a equação das ondas é hiperbólica em qualquer número de variáveis, da mesma forma que a equação de Laplace é elíptica e a equação do calor é parabólica.

Para cada tipo de equação existe um problema de contorno bem-posto, isto é, o problema de determinar a solução (única e estável) de uma equação

$$D\psi = g,$$

onde D indica o operador diferencial

$$A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2E \frac{\partial}{\partial x} + 2F \frac{\partial}{\partial y} + G$$

(vide (3.1.1)), satisfazendo a condições de fronteira dadas.

As condições de fronteira mais encontradas nas aplicações físicas são:

1. *Condição de Dirichlet:* é dado o valor $\psi|_{\Sigma}$ da solução sobre a fronteira Σ de uma região limitada Ω .
2. *Condição de Neumann:* é dado o valor $\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{\Sigma}$ da derivada normal da solução sobre a fronteira Σ de uma região limitada Ω .
3. *Condição intermediária:* é dado o valor $\left[\psi + h(x, y, z) \frac{\partial \psi}{\partial n} \right]_{\Sigma}$ sobre a fronteira Σ .

As condições de Dirichlet e de Neumann são as mais indicadas para acompanhar uma equação elíptica. Se a região Ω for ilimitada (a fronteira Σ é aberta), qualquer dessas condições é insuficiente, havendo necessidade de uma condição de comportamento no infinito.

4. *Condições de Cauchy:* é dado o valor de ψ e de $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ sobre a fronteira (aberta) de uma região ilimitada. As condições de Cauchy são as mais convenientes para as equações hiperbólicas.

Para as equações parabólicas podemos dar uma condição de Dirichlet ou uma condição intermediária sobre a fronteira aberta de uma região ilimitada.

Para a resolução de um problema de contorno homogêneo (isto é, equação homogênea com condições de contorno homogêneas) e muito usado o método de separação de variáveis, que consiste em admitir soluções da equação que são produtos de funções dependendo cada uma de uma variável independente e supor que a solução do problema pode ser obtida por superposição dessas soluções.

Como ilustração, consideremos o seguinte exemplo. Vamos obter a solução da equação da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad -\infty < t < \infty, \quad (3.1.2)$$

cujas extremidades são fixas

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (3.1.3)$$

e que satisfaz às condições de Cauchy (condições iniciais)

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x). \quad (3.1.4)$$

Tentemos satisfazer a equação com soluções do tipo $u(x, t) = X(x)T(t)$. Obtemos

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{v^2} \frac{T''}{T} \quad (3.1.5)$$

Notando que primeiro membro dessa equação é independente de t e que o segundo membro é independente de x , igualamos ambos os membros a uma constante arbitrária Λ (denominada constante de separação). Deduzimos de (3.1.5) duas equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes

$$X'' - \Lambda X = 0 \quad (3.1.6)$$

$$T'' - \Lambda v^2 T = 0 \quad (3.1.7)$$

que sabemos resolver. Precisamos, porém, garantir que a solução $u(x, t) = X(x)T(t)$ satisfaz a condições de contorno homogêneas

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0$$

$$u(L, t) = X(L)T(t) = 0$$

para todo t . Tomando $T(t) \neq 0$ devemos ter

$$X(0) = X(L) = 0. \quad (3.1.8)$$

Apresentam-se agora três casos possíveis: $\Lambda > 0$, $\Lambda < 0$ e $\Lambda = 0$.

1. $\Lambda = 0$ dá

$$X(x) = Ax + B,$$

donde, usando (3.1.8), encontramos $A = B = 0$, o que resulta na solução trivial $u(x, t) = 0$.

2. $\Lambda > 0$ ($\Lambda = \omega^2$). A solução de (3.1.6) é

$$X(x) = A \operatorname{senh}(\omega x) + B \operatorname{cosh}(\omega x).$$

As condições (3.1.8) acarretam de novo $A = B = 0$, portanto, a solução trivial.

3. $\Lambda < 0$ ($\Lambda = -\omega^2$) A solução é

$$X(x) = A \operatorname{sen}(\omega x) + B \operatorname{cos}(\omega x).$$

A condição $X(0) = 0$ acarreta $B = 0$; a condição $X(L) = 0$ implica $\operatorname{sen}(\omega L) = 0$ ou seja, $\omega = n\pi/L$, n inteiro. A solução é, pois, $X(x) = A \operatorname{sen}(n\pi x/L)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ (excluimos $n = 0$, que resultaria na solução trivial e $n < 0$, que dá origem às mesmas soluções já obtidas).

A constante Λ está, pois, restrita aos valores $-\frac{n^2\pi^2}{L}$ e as soluções admissíveis são

$$u_n(x, t) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(C_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) + D_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) \right),$$

com $n = 1, 2, 3, \dots$. Cada solução $u_n(x, t)$ representa um movimento possível da corda. Esses tipos de movimento chamam-se modos normais de vibração.

Nenhuma dessas soluções satisfaz, em geral, as condições iniciais escolhidas arbitrariamente. Como a equação (3.1.2) é linear, a combinação linear

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(C_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) + D_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) \right) \quad (3.1.9)$$

também é uma solução e as constantes C_n e D_n podem ser escolhidas de modo que sejam satisfeitas as condições iniciais

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left(\frac{n\pi v}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

As constantes C_n e D_n são determinadas como coeficientes das séries de senos das funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, respectivamente, no intervalo $0 \leq x \leq L$:

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (3.1.10)$$

$$D_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^L \psi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Como se sabe, estas fórmulas resultam das relações de ortogonalidade e normalização do conjunto de funções $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{L}{2}, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (3.1.11)$$

A solução do problema proposto é, portanto, dada pela série (3.1.9), onde C_n e D_n são dados por (3.1.10). Evidentemente, a série (3.1.9) deve convergir e ser duas vezes continuamente diferenciável, termo a termo, em relação a x e

a t . Isto impõe severas restrições às funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$. Contudo, costuma-se supor a validade do método e justificá-lo *a posteriori*.

O método de separação de variáveis não é sempre aplicável. A separabilidade de uma equação não depende só de sua forma, mas está também ligada ao sistema de coordenadas usado.

Sabe-se que a equação de Helmholtz

$$\nabla^2 \psi + \lambda \psi = 0, \quad \lambda \text{ constante,}$$

é separável em 11 dos 14 sistemas de coordenadas mais comumente usados.

O sistema de coordenadas cartesianas retangulares é particularmente conveniente para regiões do espaço com simetria retangular. Já para regiões com simetria esférica e cilíndrica são mais indicadas as coordenadas polares esféricas e cilíndricas, respectivamente.

Quando as coordenadas esféricas são usadas, a separação de variáveis de ∇^2 dá origem à chamada equação de Legendre associada

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0 \quad (3.1.12)$$

e se as coordenadas cilíndricas são usadas é a equação de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0 \quad (3.1.13)$$

que aparece.

Ocasionalmente, aparece em problemas físicos a equação de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0 \quad (3.1.14)$$

ou a equação de Laguerre associada

$$xy'' + (1+k-x)y' + \alpha y = 0. \quad (3.1.15)$$

O método de separação de variáveis freqüentemente leva a equações diferenciais ordinárias, com coeficientes variáveis que, acompanhadas de condições de contorno convenientes, geram conjuntos de funções ortogonais.

3.2 O Método de Separação de Variáveis

O método de Frobenius discutido no capítulo anterior se aplica para as equações diferenciais unidimensionais. Para se obter soluções de equações diferenciais

lineares a derivadas parciais utiliza-se do método de separação de variáveis, quando isto for possível. Este método permite transformar a equação diferencial a derivadas parciais num conjunto de equações diferenciais lineares ordinárias de segunda ordem.

Se a equação diferencial é n -dimensional, o método permite escrever n equações diferenciais ordinárias com a introdução de $n - 1$ constantes adicionais, determinadas conforme as condições de contorno impostas às soluções.

As condições de contorno e o tipo de simetria apresentado são fundamentais para a escolha das variáveis independentes para a aplicação do método. Por exemplo, a equação de Schrödinger com um potencial Coulombiano, portanto apresentando uma simetria esférica, é solúvel por separação de variável quando as variáveis independentes são as coordenadas polares esféricas e não o é quando se usam coordenadas retangulares.

Para o caso de uma partícula livre a equação de Schrödinger é solúvel tanto em coordenadas retangulares como em coordenadas polares. O que determina a escolha das variáveis neste caso são as condições de contorno impostas ao problema.

Consideremos a equação de Helmholtz bidimensional.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) + k^2 f(x, y) = 0, \quad (3.2.1)$$

onde k é uma constante real e positiva. Essa equação diferencial é solúvel pelo método de separação de variável tanto em coordenadas retangulares como em coordenadas polares no plano. Vamos supor que queiramos obter soluções cujas condições de contorno estejam definidas sobre os lados de um retângulo no plano xy . Neste caso usamos as variáveis retangulares.

Escolhemos uma solução na forma

$$f(x, y) = g(x)h(y). \quad (3.2.2)$$

Introduzindo na equação (3.2.1), obtemos

$$h(y) \frac{d^2}{dx^2} g(x) + g(x) \frac{d^2}{dy^2} h(y) + k^2 g(x)h(y) = 0. \quad (3.2.3)$$

Dividindo-se por $g(x)h(y)$ e rearranjando os termos, obtemos

$$\frac{1}{h(y)} \frac{d^2}{dy^2} h(y) = -k^2 - \frac{1}{g(x)} \frac{d^2}{dx^2} g(x). \quad (3.2.4)$$

Como funções não constantes de variáveis independentes podemos igualar ambos os membros a uma constante

$$\frac{1}{h(y)} \frac{d^2}{dy^2} h(y) = \lambda, \quad -k^2 - \frac{1}{g(x)} \frac{d^2}{dx^2} g(x) = \lambda$$

e obtemos duas equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d^2}{dy^2} h(y) - \lambda h(y) = 0, \quad \frac{d^2}{dx^2} g(x) + (k^2 + \lambda)g(x) = 0$$

e as soluções dependem das condições de contorno impostas ao problema.

Se as condições de contorno são impostas sobre um círculo de raio r , introduzem-se coordenadas polares no plano (vide Fig. 3.1)

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \operatorname{sen}(\theta)$$

e transforma-se a equação diferencial, numa equação diferencial nessas variáveis. Um simples cálculo nos permite escrever

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

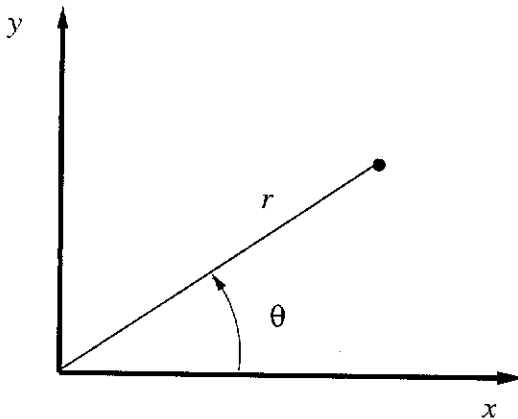


Figura 3.1. Coordenadas polares no plano.

A equação diferencial se transforma em

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} f(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f(r, \theta) + k^2 f(r, \theta) = 0$$

e o procedimento a seguir para obter as soluções é o mesmo do caso anterior.

A expressão diferencial $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \nabla^2$ é o Laplaciano bidimensional. Em três dimensões:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

Em um sistema de coordenadas curvilíneas (q_1, q_2, q_3) pode-se escrever:

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3) .$$

Um sistema de coordenadas é dito ser um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais se o quadrado da distância entre dois pontos vizinhos for dado por

$$(ds)^2 = (h_1)^2(dq_1)^2 + (h_2)^2(dq_2)^2 + (h_3)^2(dq_3)^2 .$$

Como veremos em exemplos, muitos sistemas de coordenadas usados na prática são ortogonais. Em um sistema de coordenadas ortogonais os fatores da escala h_1, h_2 e h_3 são dados por:

$$(h_i)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2, \quad i = 1, 2, 3 .$$

Pode-se mostrar que o operador Laplaciano em um sistema de coordenadas ortogonais é dado por

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_3 h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \right] .$$

Como dissemos, a equação de Helmholtz tridimensional pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis em vários sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonais. No que segue apresentamos alguns exemplos em sistemas de coordenadas ortogonais de interesse.

• Coordenadas polares esféricas

As coordenadas polares esféricas são definidas por

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \quad z = r \cos \theta ,$$

com $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Vide Fig. 3.2.

Tentemos uma solução para a equação de Helmholtz que seja da forma

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) .$$

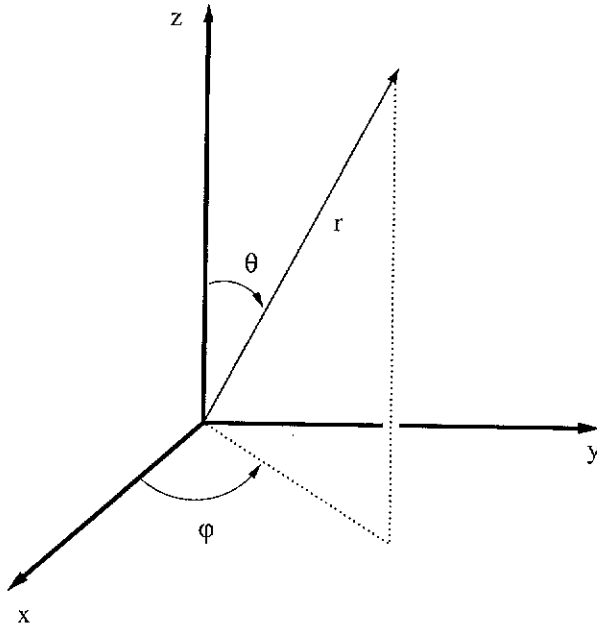


Figura 3.2. Coordenadas polares esféricas.

A equação de Helmholtz $\nabla^2\psi = -k^2\psi$ fica

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) \Theta \Phi + \left(\frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) R \Phi + \left(\frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} \right) R \Theta = -k^2 R \Theta \Phi,$$

ou seja,

$$\frac{\sin^2\theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin\theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -k^2 r^2 \sin^2\theta.$$

Reordenando esta expressão, ficamos com

$$\frac{\sin^2\theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin\theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + k^2 r^2 \sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}.$$

O primeiro membro é função de r e θ e o segundo só de φ . Portanto, pode-se escrever $-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = m^2$, com m constante. A solução desta equação é

$$\Phi(\varphi) = a \sin(m\varphi) + b \cos(m\varphi),$$

com a e b constantes arbitrárias. Espera-se que a solução seja periódica em φ de período 2π .

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$$

e, portanto, m deve ser um número inteiro.

Introduzindo esta constante de separação e rearranjando a equação obtém-se

$$\text{sen}^2\theta \left[\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 \right] + \frac{\text{sen}\theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\text{sen}\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - m^2 = 0,$$

ou seja,

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 = - \frac{1}{\Theta \text{sen}\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\text{sen}\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\text{sen}^2\theta}.$$

Novamente, as variáveis podem ser separadas

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 &= Q, \\ - \frac{1}{\Theta \text{sen}\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\text{sen}\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\text{sen}^2\theta} &= Q. \end{aligned}$$

Obtendo-se assim três equações diferenciais ordinárias para cada grupo de constantes de separação m^2 e Q .

A solução mais geral seria da forma:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{Q, m} R_Q(r) \Theta_{Qm}(\theta) \Phi_m(\varphi),$$

onde a soma se dá para m 's inteiros e sobre conjunto de valores admissíveis de Q .

• Coordenadas cilíndricas circulares

As coordenadas cilíndricas circulares são definidas por

$$x = \rho \cos(\varphi), \quad y = \rho \text{sen}(\varphi), \quad z = z,$$

com $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Vide Fig. 3.3.

Nesse caso, tem-se

$$h_1 = h_\rho = 1, \quad h_2 = h_\varphi = \rho, \quad h_3 = h_z = 1$$

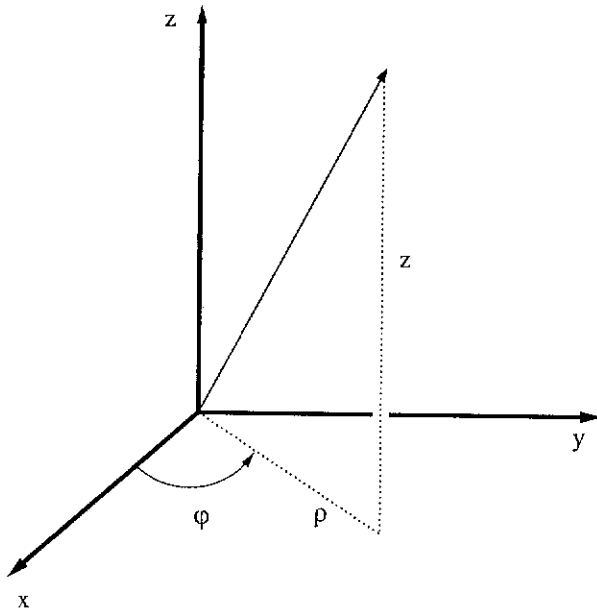


Figura 3.3. Coordenadas cilíndricas circulares.

e a equação de Helmholtz fica

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -k^2 \psi.$$

O Ansatz $\psi = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$ levarias às equações:

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \alpha,$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2,$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left(\alpha + k^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0,$$

onde α e m^2 são constantes de separação. Novamente, m deve ser um número inteiro. A equação em ρ é uma equação de Bessel.

• Coordenadas parabólicas

As coordenadas parabólicas em três dimensões são definidas por

$$x = \eta\xi \cos(\varphi), \quad y = \eta\xi \sin(\varphi), \quad z = \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2).$$

As superfícies $\xi = \text{constante}$ são parabolóides de rotação em torno do eixo Oz positivo. As superfícies $\eta = \text{constante}$ são parabolóides de rotação em torno do eixo Oz negativo. As superfícies $\varphi = \text{constante}$ são semi-planos passando por Oz. Vide Fig. 3.4

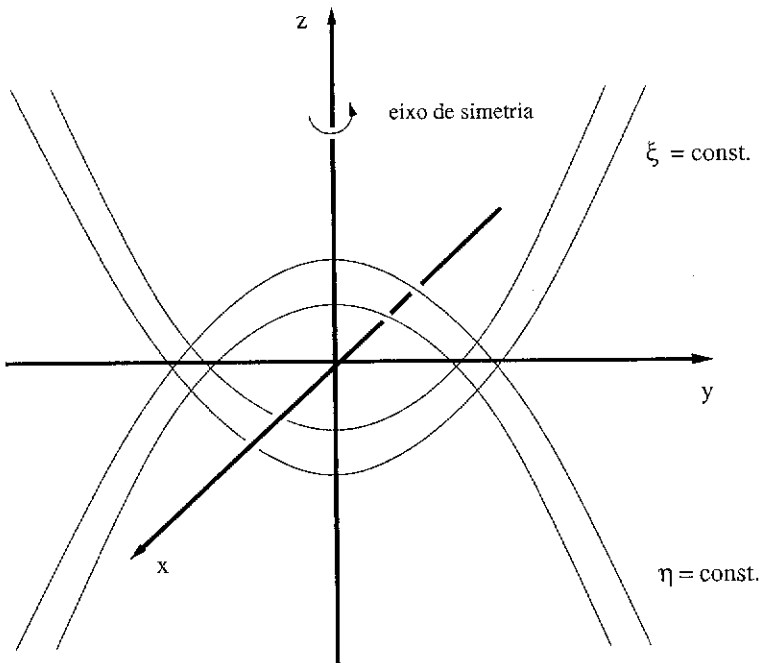


Figura 3.4. Coordenadas parabólicas.

Nesse caso, tem-se

$$h_1 = h_\xi = (\eta^2 + \xi^2)^{1/2}, \quad h_2 = h_\eta = (\eta^2 + \xi^2)^{1/2}, \quad h_3 = h_\varphi = \eta\xi.$$

O movimento relativo elétron-próton do átomo de hidrogênio é descrito pela equação do Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + V(r)\psi = E\psi,$$

onde $V(r) = \frac{Ze^2}{r}$ é o potencial Coulombiano e μ á a massa reduzida.

Esta equação á separável quando escrita em coordenadas polares esféricas ou em coordenadas parabólicas.

Em coordenadas parabólicas, escrevendo $\psi = f(\xi)g(\eta)\Phi(\varphi)$ obtem-se equações da forma:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2, \quad m \text{ inteiro},$$

$$\frac{1}{f} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{df}{d\xi} \right) - \frac{m^2}{\xi^2} + \frac{2\mu E}{\hbar^2} \xi^2 + C_1 = 0,$$

$$\frac{1}{g} \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{dg}{d\eta} \right) - \frac{m^2}{\eta^2} + \frac{2\mu E}{\hbar^2} \eta^2 + C_2 = 0,$$

onde $C_1 + C_2 = \frac{4\mu}{\hbar^2} E e^2$.

As duas últimas equações são iguais a menos das constantes C_1 e C_2 e podem ser resolvidas diretamente. As constantes C_1 e C_2 são determinadas levando em conta as condições de contorno (convergência da função de onda no infinito).

A resolução deste problema nos leva à condição

$$-E = \frac{\mu Z^2 e^4}{2\hbar^2 p^2},$$

onde p e um número inteiro positivo, denominado número quântico principal. Os valores de E para diferentes p corresponderiam a diferentes níveis de excitação do átomo de hidrogênio.

Complemento. Uma complementação importante deste capítulo é uma introdução elementar ao método das características. Veja a seção 8.2 do livro J. Mathews e R. L. Walker "Mathematical Methods of Physics", W. A. Benjamin, Inc. (1965). Veja também a discussão mais precisa da unicidade do problema de valores inicial e de fronteira (e, em conseqüência, de seu caráter bem-posto) para as equações de calor, das ondas e de Laplace em "Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais", de Djairo Guides de Figueiredo, Projeto Euclides, IMPA (1977). [NdEs]

Capítulo 4

Laplaciano em Coordenadas Esféricas

Estamos interessados em resolver a equação

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \quad (4.1)$$

pelo método de separação de variáveis. Esta equação é bem mais geral do que parece pois, se

- $k^2 = 0$, a eq. (4.1) é a equação de Laplace,
- $k^2 > 0$, a eq. (4.1) é a equação de Helmholtz (ou equação das ondas estacionárias),
- $k^2 < 0$, a eq. (4.1) é a equação de difusão (parte espacial).

Existem onze sistemas de coordenadas em que a equação (4.1) é separável. O sistema de coordenadas polares esféricas e o de coordenadas polares cilíndricas são os que encontram maiores aplicações em Física.

4.1 Equação de Laplace em Coordenadas Esféricas

Vamos escrever a equação (4.1) em coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right] + k^2\psi = 0, \quad (4.1.1)$$

onde $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Tentemos soluções da forma

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi).$$

Temos

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) Y + \frac{1}{r^2} R \Omega Y + k^2 R Y = 0, \quad (4.1.2)$$

onde Ω denota o operador diferencial parcial:

$$\Omega Y = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}.$$

Dividindo a eq. (4.1.2) por RY e multiplicando por r^2 , obtemos

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{Y} \Omega Y + k^2 r^2 = 0,$$

ou seja

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 = \frac{-1}{Y} \Omega Y = \lambda(\lambda + 1),$$

com λ uma constante, de onde resultam as equações

$$\Omega Y + \lambda(\lambda + 1) = 0, \quad (4.1.3)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 - \lambda(\lambda + 1) = 0. \quad (4.1.4)$$

Se $k^2 = 0$, a equação (4.1.4) tem por solução geral

$$R(r) = Ar^\lambda + B \frac{1}{r^{\lambda+1}}.$$

O caso $k^2 \neq 0$ será considerado mais tarde.

Para resolver (4.1.3) usamos, de novo, a separação de variáveis, com

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta) \Phi(\varphi).$$

Obtemos, após divisão por $\Theta\Phi$ e multiplicação por $\operatorname{sen}^2\theta$,

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\operatorname{sen}\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \lambda(\lambda + 1) \operatorname{sen}^2\theta = \frac{-1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = m^2,$$

com m uma constante, de onde vêm as equações

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0, \quad (4.1.5)$$

$$\operatorname{sen}\theta \frac{d}{d\theta} \left(\operatorname{sen}\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + [\lambda(\lambda + 1) \operatorname{sen}^2\theta - m^2] \Theta = 0. \quad (4.1.6)$$

A equação (4.1.5) tem por solução geral

$$\Phi_0(\varphi) = A_0\varphi + B_0$$

se $m = 0$ e

$$\Phi_m(\varphi) = A_m e^{im\varphi} + B_m e^{-im\varphi}$$

ou

$$\Phi_m(\varphi) = C_m \cos(m\varphi) + D_m \sin(m\varphi),$$

se $m \neq 0$.

A interpretação de $\psi(r, \theta, \varphi)$ como potencial nos leva a impor a periodicidade da função $\Phi(\varphi)$ (com período 2π). Para isso devemos ter $A_0 = 0$ e m inteiro (podemos nos restringir a m inteiro ≥ 0).

Para resolver a equação (4.1.6) fazemos a mudança de variável $x = \cos \theta$, pela qual $\Theta(\theta(x)) = y(x)$ obedece à equação

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + \left[\lambda(\lambda + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] y = 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (4.1.7)$$

que é chamada "equação de Legendre associada". Note que (4.1.7) envolve duas constantes, uma totalmente arbitrária λ e a outra restrita aos valores inteiros m .

É possível que o problema considerado apresente simetria azimutal, isto é, que $\psi(r, \theta, \varphi) = \psi(r, \theta)$.

Neste caso $\Phi(\varphi)$ deve se reduzir a uma constante, isto é, m deve ser zero. Para $m = 0$, a equação (4.1.7) se converte na equação de Legendre

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + \lambda(\lambda + 1)y = 0, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (4.1.8)$$

Podemos construir soluções da equação de Legendre, na vizinhança de $x = 0$ (ponto ordinário), quer pelo método de Frobenius (Capítulo 2, página 15), quer pela representação de y por uma série de Taylor:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (4.1.9)$$

As fórmulas de recorrência¹ são

$$a_{n+2} = \frac{(n - \lambda)(n + \lambda + 1)}{(n + 1)(n + 2)} a_n, \quad n \geq 0. \quad (4.1.10)$$

A solução geral de (4.1.8) será dada por

$$y(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{2r} x^{2r} + \sum_{r=0}^{\infty} a_{2r+1} x^{2r+1}.$$

¹Obtidas pela substituição de (4.1.9) na equação (4.1.8). [NdEs]

A série de potências pares envolve a constante arbitrária a_0 e a série de potências ímpares envolve a_1 . Para qualquer λ as séries convergem para $|x| < 1$, mas divergem para $|x| = 1$.

A interpretação física de $\psi(r, \theta, \varphi)$ nos leva a procurar para a eq. (4.1.8) soluções limitadas no intervalo $-1 \leq x \leq 1$. Podemos ter uma solução limitada (mas não duas) somente no caso em que λ é um inteiro $l \geq 0$ (a escolha $\lambda = -l - 1$ dá origem à mesma solução). Se l for par (ímpar) toma-se $a_1 = 0$ ($a_0 = 0$) solução se reduzirá a um polinômio de grau l . A constante arbitrária restante pode ser determinada impondo-se a condição $y(1) = 1$. O polinômio de grau l assim determinado chama-se polinômio de Legendre e indica-se por $P_l(x)$.

4.2 Polinômios de Legendre

Das fórmulas de recorrência (4.1.10) e da escolha

$$a_0 = \frac{(-1)^{l/2} l!}{2^l ((l/2)!)^2} \quad \text{e} \quad a_1 = \frac{(-1)^{(l-1)/2} (l+1)!}{2^l ((l-1)/2)! ((l+1)/2)!},$$

resulta

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{n=0}^l \frac{(-1)^{(n+l)/2}}{n!} \frac{(l+n)!}{((l+n)/2)! ((l-n)/2)!} x^n, \quad l \geq 0,$$

e, pela substituição $n = l - 2r$, $r = 0, 1, \dots, [l/2]$, onde

$$\left[\frac{l}{2} \right] = \begin{cases} l/2 & \text{se } l \text{ é par,} \\ (l-1)/2 & \text{se } l \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

vem

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{r=0}^{[l/2]} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{(2l-2r)!}{(l-2r)! (l-r)!} x^{l-2r}, \quad (4.2.1)$$

de onde resulta a fórmula de Rodrigues

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.2.2)$$

que é muitas vezes usada como definição de $P_l(x)$. Da fórmula (4.2.2) resulta, com auxílio da fórmula de Leibnitz

$$\frac{d^l}{dx^l} (u \cdot v) = \sum_{r=0}^l \frac{l!}{r!(l-r)!} \frac{d^r u}{dx^r} \cdot \frac{d^{l-r} v}{dx^{l-r}}, \quad (4.2.3)$$

onde u, v são funções deriváveis arbitrárias, os valores² $P_l(\pm 1) = (\pm 1)^l$.

• Polinômios de Legendre de grau mais baixo

Os primeiros polinômios de Legendre são:

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

• Paridade dos polinômios de Legendre

Para todo x e todo l vale

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x).$$

• Ortogonalidade e normalização do sistema $\{P_l(x), l = 0, 1, \dots\}$

Usaremos a fórmula de Rodrigues para calcular as integrais

$$I_{nl} = \int_{-1}^1 P_n(x) P_l(x) dx, \quad \forall n, l \geq 0,$$

primeiramente para $n \neq l$ e depois para o caso $n = l$.

1. Seja $n \neq l$, ou melhor, $n < l$. Integremos

$$I_{nl} = \frac{1}{2^{n+l} n! l!} \int_{-1}^1 D^n (x^2 - 1)^n D^l (x^2 - 1)^l dx$$

por partes n vezes ($D \equiv d/dx$). Obtemos

$$I_{nl} = \frac{1}{2^{n+l} n! l!} \int_{-1}^1 D^{2n} (x^2 - 1)^n D^{l-n} (x^2 - 1)^l dx.$$

²Esses valores de $P_l(x)$ nos pontos $x = \pm 1$ podem também ser provados, por indução, usando as relações de recorrência dos polinômios de Legendre, apresentadas mais adiante (página 46). [NdEs]

Sabendo que

$$D^{2n} (x^2 - 1)^n = (2n)!,$$

e que

$$D^{l-n-1} (x^2 - 1)^l = 0,$$

para $x = \pm 1$, conclui-se que $I_{nl} = 0$ para $n < l$. (Se $n > l$, chega-se a $I_{nl} = 0$ trocando-se n e l). Assim, os polinômios de Legendre são, dois a dois, ortogonais no intervalo $[-1, 1]$, o que era de se esperar visto serem os $P_l(x)$ autofunções da equação de Legendre, sujeita às condições $P_l(\pm 1)$ finitos³.

2. Seja $l = n$. Após n integrações por partes, obtemos

$$I_{nl} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx,$$

que vale⁴

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} B(n+1, 1/2) = \frac{(2n)!}{2^{2n}} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}.$$

Conseqüentemente, para todos n, l ,

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nl}. \quad (4.2.4)$$

Essas são as relações de ortogonalidade dos polinômios de Legendre.

• Função geratriz dos polinômios de Legendre

A função $g(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$ quando desenvolvida em potências de t , para $|t| < 1$, tem por coeficientes os polinômios de Legendre

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n. \quad (4.2.5)$$

Prova. Para $|y| < 1$, $y = 2xt - t^2$, tem-se

$$\frac{1}{\sqrt{1 - y}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} y^n$$

³Esta propriedade segue da Teoria de Sturm-Liouville para operadores diferenciais auto-adjuntos a qual inclui a equação de Legendre com as condições de fronteira indicadas. [NdEs]

⁴Aqui, $B(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha + \beta)$ é a função beta de argumento α e β . [NdEs]

com

$$y^n = (2xt - t^2)^n = \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r n!}{r!(n-r)!} (2x)^{n-r} t^{n+r}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{n+r} n!} \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r n!}{r!(n-r)!} (2x)^{n-r} t^{n+r}.$$

Com a mudança $n = r + m \implies m = n - r$, vem

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^m} \sum_{r=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{(2m-2r)!}{(m-2r)!(m-r)!} x^{m-2r} \right\} t^m.$$

A expressão entre colchetes se identifica com $P_m(x)$ através de (4.2.1). \square

Veremos adiante que $|P_n(x)| \leq 1$ para $|x| \leq 1$. Portanto, a série (4.2.5) é absolutamente convergente para $|t| < 1$.

Se $|t| > 1$, então $|1/t| < 1$, logo⁵

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{1}{t^{n+1}}. \quad (4.2.6)$$

• Interpretação da função geratriz dos polinômios de Legendre

O potencial eletrostático ψ no ponto P de coordenadas (x, y, z) , de uma carga pontual q localizada no eixo Oz (vide Fig. 4.1) é

$$\psi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1}.$$

Em coordenadas polares (com θ o ângulo entre o vetor P e o eixo Oz)

$$\psi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}}.$$

Para $r < a$, têm-se, através de (4.2.5):

$$\psi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{r}{a}\right)^n. \quad (4.2.7)$$

⁵Observe que $(1-2xt+t^2)^{-1/2} = t^{-1} (1-2x/t+1/t^2)^{-1/2}$. [NdEs]

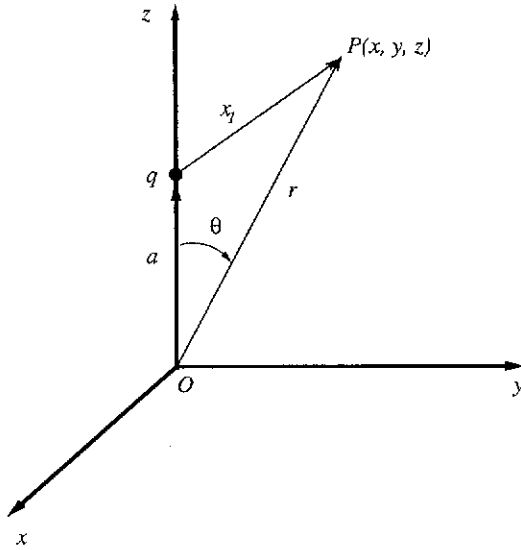


Figura 4.1. O ponto $P(x, y, z)$, o ângulo θ e as distâncias a , x_1 e r . A posição da carga tem coordenadas $(0, 0, a)$ e a distância Euclidiana desta ao ponto P é denotada por r_1 .

Para $r > a$, têm-se, usando (4.2.6):

$$\psi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^n. \quad (4.2.8)$$

Com o auxílio da expansão (4.2.5) encontramos os valores

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(0) &= 0, & P'_{2n+1}(0) &= (-1)^n \frac{(2n+1)!}{2^{2n} (n!)^2}, \\ P_{2n}(0) &= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}, & P'_{2n}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

• Relações de recorrência dos polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre satisfazem as seguintes relações, ditas relações de recorrência, por permitirem calcular recursivamente os polinômios P_n . Essas relações podem ser provadas, por exemplo, através da fórmula de Rodrigues

ou com uso da função geratriz, como indicado adiante.

$$P'_{n+1} + P'_{n-1} - 2xP'_n - P_n = 0, \quad n \geq 1, \quad (4.2.10)$$

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0, \quad n \geq 1, \quad (4.2.11)$$

$$nP_n - xP'_n + P'_{n-1} = 0, \quad n \geq 1, \quad (4.2.12)$$

$$P'_{n+1} - xP'_n - (n+1)P_n = 0, \quad n \geq 0, \quad (4.2.13)$$

$$P'_{n+1} - P'_{n-1} - (2n+1)P_n = 0, \quad n \geq 1, \quad (4.2.14)$$

$$(1-x^2)P'_n - nP_{n-1} - nxP_n = 0, \quad n \geq 1. \quad (4.2.15)$$

A primeira destas relações decorre da função geratriz, através da derivação em relação a x :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = tg^3 \implies \frac{1}{g^2} \frac{\partial g}{\partial x} = tg.$$

Substituindo $\frac{1}{g^2}$ por $1-2xt+t^2$ e g por $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$ e igualando os coeficientes de t^n . A segunda relação vem da derivação de g em relação a t :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = (x-t)g^3.$$

A terceira vem de⁶

$$t \frac{\partial g}{\partial t} = (x-t) \frac{\partial g}{\partial x}.$$

As demais relações são obtidas por derivação, substituição *etc.*

O conjunto $\{P_n(x), n = 0, 1, \dots\}$ forma um conjunto ortogonal completo. Funções arbitrárias $f(x)$, de quadrado integrável no intervalo $[-1, 1]$, podem ser desenvolvidas em série de polinômios de Legendre:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(x), \quad (4.2.16)$$

com

$$a_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx.$$

⁶Combinado as duas equações anteriores. [NdEs]

No cálculo de a_l podem ser usados, quer a fórmula de Rodrigues, quer as fórmulas (4.2.12).

• Aplicações

1. Potencial eletrostático no interior da esfera de raio R (onde não existem cargas), quando o potencial na superfície esférica é $\psi(R, \theta, \varphi) = f(\theta)$.

O potencial obedece à equação

$$\nabla^2 \psi = 0$$

na região $0 \leq r < R$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ e satisfaz a condição de contorno

$$\psi(R, \theta, \varphi) = f(\theta).$$

As soluções fisicamente aceitáveis são

$$A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad \text{ou} \quad B_l r^{-l-1} P_l(\cos \theta).$$

mas r^{-l-1} diverge na origem, portanto, devemos ter $B_l = 0$. Então, ψ é da forma

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta).$$

Como $\psi(R, \theta) = f(\theta)$, temos

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta).$$

Pela substituição $x = \cos \theta$, $f(\theta(x)) = g(x)$, temos a série de polinômios de Legendre

$$g(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(x),$$

com

$$a_l = A_l R^l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx. \quad (4.2.17)$$

A solução do problema é, pois,

$$\psi_{<}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \left(\frac{r}{R}\right)^l P_l(\cos \theta),$$

com a_l dado por (4.2.17).

Analogamente, o potencial no exterior da esfera (não existindo cargas livres) será dado por

$$\psi_{>}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} P_l(\cos \theta).$$

Determinemos o potencial interno e externo no caso

$$f(\theta) = \begin{cases} V & \text{se } 0 \leq \theta < \pi/2, \\ -V & \text{se } \pi/2 < \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Sendo $f(x)$ uma função ímpar, os coeficientes a_l se anularão para l par (pois o integrando será uma função ímpar) e para l ímpar teremos

$$\begin{aligned} a_l &= (2l + 1) \int_0^1 f(x) P_l(x) dx \\ &= (2l + 1)V \int_0^1 P_l(x) dx. \end{aligned}$$

A integral pode ser calculada usando a fórmula de Rodrigues ou então a relação de recorrência (4.2.14). Usando esta última forma, vem

$$a_l = V \left(P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x) \right) \Big|_0^1.$$

Usando o fato que $P_l(1) = 1$ para todo l e devido à (4.2.9), vem então

$$a_{2l} = V (P_{2l-1}(0) - P_{2l+1}(0)) = 0$$

e

$$\begin{aligned} a_{2l+1} &= V (P_{2l}(0) - P_{2l+2}(0)) \\ &= V \left((-1)^l \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} - (-1)^{l+1} \frac{(2l+2)!}{2^{2l+2} ((l+1)!)^2} \right), \end{aligned}$$

que pode ser transformado em (prove!):⁷

$$a_{2l-1} = (-1)^l (4l + 3) \frac{(2l-1)!!}{(2l+2)!!} V.$$

⁷Aqui $n!! = n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$ se n ímpar e $n!! = n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2$ se n par. [NdEs]

O potencial interno ($r < R$) será dado por:

$$\begin{aligned}\psi_{<}(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l+1} \left(\frac{r}{R}\right)^{2l+1} P_{2l+1}(\cos \theta) \\ &= V \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (4l+3) \frac{(2l-1)!!}{(2l+2)!!} \left(\frac{r}{R}\right)^{2l+1} P_{2l+1}(\cos \theta) \\ &= V \left\{ \frac{3}{2} \frac{r}{R} P_1(\cos \theta) - \frac{7}{8} \frac{r^3}{R^3} P_3(\cos \theta) + \frac{11}{16} \frac{r^5}{R^5} P_5(\cos \theta) \right\} + \dots\end{aligned}$$

O potencial externo ($r > R$) será dado por:

$$\begin{aligned}\psi_{>}(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+2} P_{2l+1}(\cos \theta) \\ &= V \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (4l+3) \frac{(2l-1)!!}{(2l+2)!!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+2} P_{2l+1}(\cos \theta) \\ &= V \left\{ \frac{3}{2} \frac{R^2}{r^2} P_1(\cos \theta) - \frac{7}{8} \frac{R^4}{r^4} P_3(\cos \theta) + \frac{11}{16} \frac{R^6}{r^6} P_5(\cos \theta) \right\} + \dots\end{aligned}$$

2. Determinar o potencial eletrostático devido a um anel de raio a uniformemente carregado com uma carga q . Vide Fig.4.2.

Fora do anel o potencial deve satisfazer à equação de Laplace

$$\nabla^2 \psi(r, \theta) = 0,$$

pois não há cargas nesta região. A solução desta equação, como vimos no exemplo anterior, é dada por

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-l-1} \right) P_l(\cos \theta).$$

Para $r > a$ os coeficientes A_l devem se anular pois $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi_{>}(r, \theta) = 0$. Neste caso

$$\psi_{>}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-l-1} P_l(\cos \theta).$$

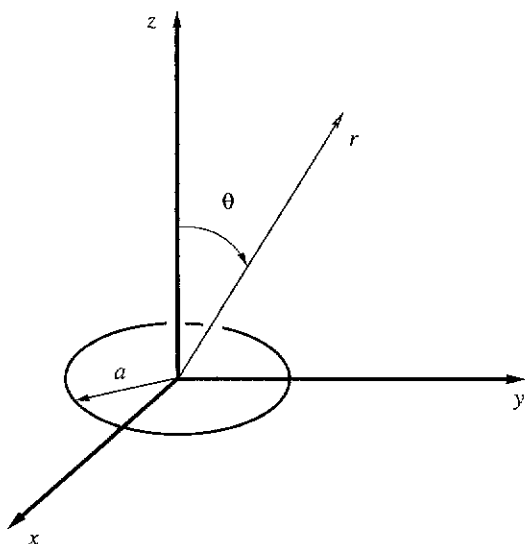


Figura 4.2. Anel de raio a uniformemente carregado no plano xy centrado na origem. O ângulo θ e o raio r .

Para determinar os coeficientes B_l podemos calcular $\psi(r, \theta)$ sobre o eixo z , ou seja $r = z$ e $\theta = 0$, e compará-lo com o valor dado pela lei de Coulomb

$$\begin{aligned} \psi(z, 0) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z} \frac{1}{\sqrt{1 + a^2/z^2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^l P_l(0) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l z^{-l-1} P_l(1) . \end{aligned}$$

Temos, portanto,

$$B_l = \frac{q a^l P_l(0)}{4\pi\epsilon_0 P_l(1)} .$$

Como, por definição $P_l(1) = 1$ e devido à (4.2.9), temos

$$B_{2s+1} = 0 , \quad B_{2s} = \frac{q a^{2s}}{4\pi\epsilon_0} (-1)^s \frac{(2s)!}{2^{2s} (s!)^2} .$$

Portanto, o potencial para $r > a$ será dado por

$$\psi_{>}(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(2s)!}{2^{2s} (s!)^2} \left(\frac{a}{r}\right)^{2s} P_{2s}(\cos \theta) .$$

• Representação integral dos polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre estão definidos para todo número complexo z pela fórmula de Rodrigues

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n ,$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ Usando a fórmula integral de Cauchy

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt$$

para $f(t) = (t^2 - 1)^n$, obtemos a seguinte representação integral

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(t^2 - 1)^n}{2^n (t-z)^{n+1}} dt , \quad (4.2.18)$$

onde C é qualquer caminho fechado em torno do ponto z , orientado no sentido positivo (anti-horário). Essa é a chamada representação de Schläfli dos polinômios de Legendre.

Podemos deduzir de (4.2.18) outra representação integral. Seja C a circunferência de centro z e raio $|(z^2 - 1)^{1/2}|$. Fazendo a mudança de variável

$$t = z + \sqrt{z^2 - 1} e^{i\varphi} ,$$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$, obtemos

$$t^2 - 1 = 2(t-z) \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi \right) ,$$

$$dt = i(t-z) d\varphi .$$

Portanto, substituindo em (4.2.18) obtemos

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi \right)^n d\varphi . \quad (4.2.19)$$

Esta é a representação de Laplace para os polinômios de Legendre.

Podemos deduzir de (4.2.19) um interessante resultado. Seja $z = x$, $|x| \leq 1$. Tomando o módulo de $P_n(x)$, temos

$$|P_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| x + i\sqrt{1-x^2} \cos \varphi \right|^n d\varphi .$$

Como

$$\left| x + i\sqrt{1-x^2} \cos \varphi \right| = \sqrt{x^2 + (1-x^2) \cos^2 \varphi} \leq 1,$$

obtemos a majoração

$$|P_n(x)| \leq 1.$$

Esta majoração que garante a convergência absoluta da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

para $|t| < 1$.

• A segunda solução da equação de Legendre

Quando se resolve a equação de Legendre de ordem n pelo método de Frobenius (Capítulo 2, página 15), obtém-se uma solução polinomial, a saber, $P_n(x)$, e uma segunda solução em forma de uma série divergente para $|x| \geq 1$.

Muitas vezes é conveniente obter uma segunda solução em forma fechada. Para isso, tenta-se resolver a equação

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

com uma função $y(x) = P_n(x)v(x)$. Substituindo na equação, obtemos para v a seguinte equação

$$(1-x^2)P_n v'' + [2(1-x^2)P_n' - 2xP_n]v' = 0$$

cujas solução geral é⁸

$$v(x) = C_1 \int_{x_0}^x \frac{1}{(1-t^2)(P_n(t))^2} dt + C_2$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. Escolhendo $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ e $x_0 = \infty$, obtemos uma segunda solução $Q_n(x)$ chamada de *função de Legendre de segunda espécie*, cuja definição é

$$Q_n(z) = P_n(z) \int_z^{\infty} \frac{1}{(t^2-1)(P_n(t))^2} dt.$$

Nota-se que, para $|z| \rightarrow \infty$, $Q_n(z) = O(z^{-n-1})$. Para $n = 0$ e 1 , temos

$$Q_0(z) = \int_z^{\infty} \frac{1}{(t^2-1)} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1},$$

⁸Note que esta equação também pode ser escrita como $[(1-x^2)P_n^2 v']' = 0$. [NdEs]

$$Q_1(z) = z \int_z^{\infty} \frac{1}{t^2(t^2-1)} dt = \frac{z}{2} \ln \frac{z+1}{z-1} - 1$$

e assim por diante.

Observa-se que as funções $Q_n(z)$ apresentam singularidades logarítmicas nos pontos $z = \pm 1$.

4.3 Funções Associadas de Legendre

Consideremos a equação associada de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0. \quad (4.3.1)$$

Observemos que, se u for uma solução da equação de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0, \quad (4.3.2)$$

a função $v = \frac{d^m u}{dx^m}$ obedece à equação

$$(1-x^2)v'' - 2x(m+1)v' + (l-m)(l+m+1)v = 0. \quad (4.3.3)$$

Isto se obtém derivando a equação (4.3.2) m -vezes com o auxílio da fórmula de Leibnitz (4.2.3), página 42.

Seja $y = (1-x^2)^{m/2} v$. Substituindo $v = (1-x^2)^{-m/2} y$ na equação (4.3.3) e cancelando o fator $(1-x^2)^{-m/2}$, achamos que $y(x)$ satisfaz a equação (4.3.1).

Escolhendo $u(x) = P_l(x)$, obtemos uma solução regular para a equação associada de Legendre

$$y(x) \equiv P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l}{dx^m}(x), \quad (4.3.4)$$

$m \geq 0$, chamada função associada de Legendre. Se exprimirmos $P_l(x)$ pela fórmula de Rodrigues, temos outra forma para $P_l^m(x)$:

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l. \quad (4.3.5)$$

Podemos definir, para $m > 0$,

$$P_l^{-m}(x) = (1-x^2)^{-m/2} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2-1)^l. \quad (4.3.6)$$

Vê-se, através de (4.3.4) ou (4.3.5) e (4.3.6) que $P_l^m(x) = 0$ e $P_l^{-m}(x) = 0$ se $m > l$. Então, podemos ter $P_l^m(x)$ não identicamente nulo para $-l \leq m \leq l$.

É claro que P_l^m e P_l^{-m} obedecem a mesma equação diferencial e que P_l^{-m} também é uma solução regular de (4.3.1). Temos pois,

$$P_l^{-m}(x) = A P_l^m(x) + B Q_l^m(x),$$

onde Q_l^m indica uma segunda solução de (4.3.1) independente de P_l^m . Ora, o Wronskiano $W(u, v; x)$ de duas soluções da equação (4.3.1) é da forma $W(u, v; x) = C/(1-x^2)$.⁹

Se u e v são linearmente independentes ($C \neq 0$), u e v não podem ser ambas regulares nos pontos $x = \pm 1$. Portanto Q_l^m (qualquer que seja) não é regular para $x = \pm 1$. Assim,

$$P_l^{-m}(x) = A P_l^m(x). \quad (4.3.7)$$

A constante de proporcionalidade A é obtida com o auxílio da fórmula de Leibnitz aplicada a ambos os membros de (4.3.7), tomando-se $x = 0$:

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x). \quad (4.3.8)$$

• Função geratriz dos polinômios de Legendre associados

Existe uma função geratriz $g(x, t)$ para P_l^m , a saber,

$$\frac{(2m)!}{2^m m!} \frac{(1-x^2)^{m/2}}{(1-2xt+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{k+m}^m(x) t^k,$$

⁹Escrevendo a equação (4.3.1) na forma auto adjunta

$$[(1-x^2)y']' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0,$$

temos, para duas soluções u e v ,

$$\begin{aligned} 0 &= u [(1-x^2)v']' - v [(1-x^2)u']' \\ &= [u(1-x^2)v' - v(1-x^2)u']', \end{aligned}$$

isto é, $u(1-x^2)v' - v(1-x^2)u' = C$. De onde se conclui

$$W(u, v; x) = uv' - u'v = \frac{C}{1-x^2}.$$

a qual, por não ter um sentido físico, raramente é usada.

• Relações de recorrência dos polinômios de Legendre associados

Existe para os polinômios de Legendre associados uma grande variedade de fórmulas de recorrência, entre as quais a seguinte:

$$\begin{aligned} (2n+1)(1-x^2)^{1/2} P_n^m & \\ &= (n+m)(n+m+1) P_{n-1}^{m-1} - (n-m+1)(n+m+2) P_{n+1}^{m-1}. \end{aligned}$$

Também relevante é a propriedade de paridade dos polinômios de Legendre associados

$$P_n^m(-x) = (-1)^{n+m} P_n^m(x),$$

assim como seus valores nos pontos ± 1 : $P_n^m(\pm 1) = 0$ se $m \neq 0$ e $P_n^0(\pm 1) = (\pm 1)^n$ (em virtude da definição).

• Ortogonalidade dos polinômios de Legendre associados

Usando a fórmula de Rodrigues e a fórmula (4.3.8), calculemos

$$\begin{aligned} I_{nl}^m &= \int_{-1}^1 P_n^m(x) P_l^m(x) dx \\ &= \frac{1}{A} \int_{-1}^1 P_n^m(x) P_l^{-m}(x) dx \\ &= \frac{1}{A} \frac{1}{2^n n!} \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2-1)^l dx \\ &= \frac{(-1)^m}{A} \frac{1}{2^n n!} \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l dx \end{aligned}$$

(após m -integrações por partes). Continuando, obtemos

$$I_{nl}^m = \frac{(-1)^m}{A} \int_{-1}^1 P_n(x) P_l(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{nl}. \quad (4.3.9)$$

Essas são as relações de ortogonalidade dos polinômios de Legendre associados.

Em coordenadas esféricas, (4.3.9) se escreve

$$\int_0^\pi P_n^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{nl}. \quad (4.3.10)$$

Uma função arbitrária $f(x)$, de quadrado integrável em $[-1, 1]$, pode ser desenvolvida em série de $P_n^m(x)$: para cada m pode-se escrever

$$f(x) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n^m P_n^m(x),$$

onde

$$a_n^m = \frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-1}^1 f(x) P_n^m(x) dx.$$

4.4 Harmônicos Esféricos

Na separação de variáveis da equação de Laplace em coordenadas esféricas aparecem as funções $Y(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$.

Chamam-se harmônicos esféricos às funções esféricas

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

$l = 0, 1, 2, \dots, m = -l, \dots, 0, \dots, l$.

É fácil verificar que o sistema $Y_l^m(\theta, \varphi)$ é ortonormal na superfície da esfera, isto é, que valem as relações de ortogonalidade dos harmônicos esféricos

$$I_{l'l'}^{m m'} = \int Y_l^m(\theta, \varphi) \overline{Y_{l'}^{m'}(\theta, \varphi)} d\Omega = \delta_{l'l'} \delta_{m m'}, \quad (4.4.1)$$

onde $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$.

O fator de fase $(-1)^m$ incluído na definição de Y_l^m chama-se fase de Condon-Shortley. Esse fator é dispensável, mas torna-se particularmente conveniente em certos cálculos da Mecânica Quântica (por exemplo, na teoria do momento angular).

• Exemplos de harmônicos esféricos

$$Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

$$Y_1^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta,$$

$$Y_1^1(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen} \theta e^{i\varphi},$$

$$Y_1^{-1}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen} \theta e^{-i\varphi},$$

$$Y_2^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \text{ etc.}$$

• Série de Laplace

Parte da importância dos harmônicos esféricos reside na propriedade de se poder desenvolver qualquer função $f(\theta, \varphi)$, de quadrado integrável na superfície da esfera, em uma série de harmônicos esféricos $Y_l^m(\theta, \varphi)$ (série de Laplace):

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (4.4.2)$$

com

$$c_{lm} = \int f(\theta, \varphi) \overline{Y_l^m(\theta, \varphi)} d\Omega.$$

Por vezes é útil o desenvolvimento de $f(\theta, \varphi)$ em séries de harmônicos esféricos pares e ímpares (não-normalizados):

$$Y_{l,+}^m(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos \theta) \cos(m\varphi), \quad l \geq 0, m = 0, 1, \dots, l,$$

$$Y_{l,-}^m(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos \theta) \operatorname{sen}(m\varphi), \quad l \geq 0, m = 1, 2, \dots, l$$

e

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \frac{A_{l0}}{2} Y_{l,+}^0(\theta, \varphi) + \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_{lm} Y_{l,+}^m(\theta, \varphi) + B_{lm} Y_{l,-}^m(\theta, \varphi) \right) \right\}, \quad (4.4.3)$$

onde

$$A_{lm} = \frac{2l+1}{2\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int f(\theta, \varphi) Y_{l,+}^m(\theta, \varphi) d\Omega, \quad (4.4.4)$$

para $m = 0, 1, \dots, l$, e

$$B_{lm} = \frac{2l+1}{2\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int f(\theta, \varphi) Y_{l,-}^m(\theta, \varphi) d\Omega, \quad (4.4.5)$$

para $m = 1, 2, \dots, l$.

Voltemos ao problema de resolver a equação de Laplace

$$\nabla^2 \psi(r, \theta, \varphi) = 0,$$

na esfera $r < R$, com condição de contorno

$$\psi(R, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi).$$

A solução é dada, quer por uma série de harmônicos esféricos

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} \left(\frac{r}{R}\right)^l Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (4.4.6)$$

com

$$c_{lm} = \int f(\theta, \varphi) \overline{Y_l^m(\theta, \varphi)} d\Omega,$$

quer, por uma série de harmônicos esféricos pares e ímpares,

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^l \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} A_{lm} Y_{l,+}^m(\theta, \varphi) + \sum_{m=1}^{\infty} B_{lm} Y_{l,-}^m(\theta, \varphi) \right\},$$

com A_{lm} e B_{lm} dados por (4.4.4) e (4.4.5).

• O teorema de adição de harmônicos esféricos

Sejam $N(\alpha, \beta)$ e $M(\theta, \varphi)$ dois pontos sobre a superfície da esfera (unitária) e γ o ângulo entre as direções que eles definem. Existe a seguinte relação entre os ângulos $\gamma, \alpha, \beta, \theta$ e φ :

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \theta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \beta),$$

a qual pode ser obtida tomando-se o produto escalar entre os vetores $N(\alpha, \beta)$ e $M(\theta, \varphi)$.

Considerada como função de θ e φ , a função $P_l(\cos \gamma)$ pode ser desenvolvida em série de harmônicos esféricos

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{nm}(\alpha, \beta) Y_n^m(\theta, \varphi) .$$

Contudo, por razões que daremos adiante, só figuram nesta série termos com $n = l$:

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m=-l}^l c_{lm}(\alpha, \beta) Y_l^m(\theta, \varphi) , \quad (4.4.7)$$

com

$$c_{lm} = \int P_l(\cos \gamma) \overline{Y_l^m(\theta, \varphi)} d\Omega .$$

Em particular,

$$c_{l0} = \int P_l(\cos \gamma) \overline{Y_l^0(\theta, \varphi)} d\Omega .$$

Consideremos o sistema (x', y', z') em que $0z'$ coincide com a direção definida por $N(\alpha, \beta)$. O ponto P tem, no novo sistema, as coordenadas θ', φ' , com $\theta' = \gamma$. $Y_l^m(\theta, \varphi)$ se exprime como combinação linear de $Y_l^q(\theta', \varphi')$:

$$\overline{Y_l^m(\theta, \varphi)} = \sum_{q=-l}^l a_{lq}^m \overline{Y_l^q(\theta', \varphi')} . \quad (4.4.8)$$

Então,

$$c_{lm} = \sum_{q=-l}^l \overline{a_{lq}^m} \int P_l(\cos \theta') \overline{Y_l^q(\theta', \varphi')} d\Omega' .$$

Usando a definição

$$Y_l^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$$

e as relações (4.4.1), obtemos

$$c_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \overline{a_{l0}^m} . \quad (4.4.9)$$

Suponhamos agora que M tenda para N , isto é, que γ tenda para 0. Então,

$$\overline{Y_l^m(\alpha, \beta)} = \sum_{q=-l}^l \overline{a_{lq}^m} \overline{Y_l^q(0, \varphi')} .$$

Mas

$$\overline{Y_l^q(0, \varphi')} = (-1)^q \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-q)!}{(l+q)!}} P_l^q(1) e^{-iq\varphi'}.$$

Como $P_l^q(1) = 0$ para $q \neq 0$ e $P_l^0(1) = 1$, obtemos $\overline{Y_l^m(\alpha, \beta)} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \overline{a_{l0}^m}$ e, portanto,

$$\overline{a_{l0}^m} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \overline{Y_l^m(\alpha, \beta)}. \quad (4.4.10)$$

Levando (4.4.10) a (4.4.9), temos

$$c_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1} \overline{Y_l^m(\alpha, \beta)},$$

de onde vem, finalmente,

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l \overline{Y_l^m(\alpha, \beta)} Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (4.4.11)$$

Esta é a chamada fórmula, ou teorema, de adição dos harmônicos esféricos.

Outras formas do mesmo teorema são:

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m=-l}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \alpha) P_l^m(\cos \theta) e^{im(\varphi-\beta)}, \quad (4.4.12)$$

$$P_l(\cos \gamma) = P_l(\cos \alpha) P_l(\cos \theta) +$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \alpha) P_l^m(\cos \theta) \cos m(\varphi - \beta). \quad (4.4.13)$$

O teorema da adição é particularmente útil para se exprimir o potencial no ponto $P = (r, \theta, \varphi)$, de uma carga elétrica q situada no ponto $Q = (a, \alpha, \beta)$:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^l \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l \overline{Y_l^m(\alpha, \beta)} Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (4.4.14)$$

para $r > a$, e expressão análoga para $r < a$.

Daremos agora uma justificativa para (4.4.7). Observemos, antes de tudo, que um harmônico esférico Y_l^m é a solução da equação

$$\nabla^2 Y_l^m + \frac{l(l+1)}{r^2} Y_l^m = 0.$$

Em particular, isso é verdade para $P_l^0(\cos \theta)$. Em relação ao sistema de eixos (x', y', z') em que $0z'$ coincide com $0N$, γ é o ângulo polar, logo

$$\nabla'^2 P_l(\cos \gamma) + \frac{l(l+1)}{r'^2} P_l(\cos \gamma) = 0.$$

Passando dos eixos (x', y', z') para os eixos (x, y, z) por meio de uma rotação no espaço em torno da origem, $P_l(\cos \gamma)$ sofre a transformação

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{nm} Y_n^m(\theta, \varphi) \equiv f(\theta, \varphi),$$

enquanto que o Laplaciano ∇'^2 e a distância r'^2 ficam invariantes

$$\nabla^2 f + \frac{l(l+1)}{r^2} f = 0.$$

A equação acima só é satisfeita se em $f(\theta, \varphi)$ só aparecerem termos com $n = l$. Assim fica justificada a combinação linear (4.4.7).

• Exemplos de aplicação da fórmula de adição

1. É dada uma distribuição de carga:

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} A r e^{-\alpha r} \sin^2 \theta \cos 2\varphi, & 0 \leq r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases}$$

onde A e α são constantes. Ache o potencial eletrostático em um ponto interior à distribuição de carga.

Sabemos que o potencial eletrostático é dado por

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}} \rho(r', \theta', \varphi') r'^2 dr' d\Omega' \quad (4.4.15)$$

com

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}} = \frac{1}{r_{>}} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^l P_l(\cos \gamma),$$

onde $r_{<} = \min(r, r')$ e $r_{>} = \max(r, r')$. Pelo teorema da adição (4.4.11)

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l \overline{Y_l^m(\theta', \varphi')} Y_l^m(\theta, \varphi).$$

Devemos decompor a parte radial da integral (4.4.15) em duas partes:

$$\int_0^R dr' \dots = \int_0^r dr' \dots + \int_r^R dr' \dots .$$

Para $r' < r$, temos

$$\begin{aligned} \Phi_1(r, \theta, \varphi) &= \frac{A}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \varphi) \int_0^r dr' r'^{l+3} e^{-\alpha r'} \\ &\quad \times \int d\Omega' \overline{Y_l^m(\theta', \varphi')} \sin^2 \theta' \cos 2\varphi' . \end{aligned}$$

Inicialmente, resolvemos a parte angular. Como

$$Y_2^2 = \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \sin^2 \theta e^{2i\varphi} \quad \text{e} \quad Y_2^{-2} = \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \sin^2 \theta e^{-2i\varphi} ,$$

temos

$$\begin{aligned} &\int d\Omega' \overline{Y_l^m(\theta', \varphi')} \sin^2 \theta' \cos 2\varphi' \\ &= \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \int d\Omega' \overline{Y_l^m(\theta', \varphi')} \left(Y_2^2(\theta', \varphi') + Y_2^{-2}(\theta', \varphi') \right) \\ &= \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \left(\delta_{l,2} \delta_{m,2} + \delta_{l,2} \delta_{m,-2} \right) , \end{aligned}$$

A parte radial fica (com $l = 2$)

$$\begin{aligned} I(r) &= \int_0^r dr' r'^5 e^{-\alpha r'} \\ &= -e^{-\alpha r'} \left(\frac{r'^5}{\alpha} + \frac{5 r'^4}{\alpha^2} + \frac{20 r'^3}{\alpha^3} + \frac{60 r'^2}{\alpha^4} + \frac{120 r'}{\alpha^5} + \frac{120}{\alpha^6} \right) \Bigg|_0^r , \end{aligned}$$

integrando sucessivamente por partes. Então,

$$\begin{aligned} \Phi_1(r, \theta, \varphi) &= \frac{A}{5\epsilon_0} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \frac{I(r)}{r^3} (Y_2^2(\theta, \varphi) + Y_2^{-2}(\theta, \varphi)) \\ &= \frac{A}{5\epsilon_0} \frac{I(r)}{r^3} \sin^2 \theta \cos 2\varphi . \end{aligned}$$

Para $r' > r$, temos

$$\begin{aligned} \Phi_2(r, \theta, \varphi) = & \frac{A}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} r^l \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \varphi) \int_0^r dr' r'^{-l+2} e^{-\alpha r'} \\ & \times \int d\Omega' \overline{Y_l^m(\theta', \varphi')} \sin^2\theta' \cos 2\varphi'. \end{aligned}$$

A parte angular se resolve como no caso anterior. A parte radial fica

$$\int_r^R dr' e^{-\alpha r'} = \left. \frac{-1}{\alpha} e^{-\alpha r'} \right|_r^R = \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha r} - e^{-\alpha R}).$$

Portanto,

$$\Phi_2(r, \theta, \varphi) = \frac{A}{5\epsilon_0} \frac{r^2}{\alpha} (e^{-\alpha r} - e^{-\alpha R}) \sin^2\theta \cos 2\varphi.$$

Finalmente,

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2.$$

2. Potencial devido a uma carga total q uniformemente distribuída ao longo de um anel de raio a , perpendicular ao eixo $0z$, com centro no ponto $z = b$. Vide Fig. 4.3.

O potencial no ponto P sobre o eixo $0z$ ($z = r$) é dado por

$$\psi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2 - 2rc \cos \alpha}},$$

onde $c^2 = a^2 + b^2$. Expandindo a raiz no denominador, temos

$$\psi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{c}{r}\right)^l P_l(\cos \alpha),$$

para $r > c$, e

$$\psi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^l P_l(\cos \alpha),$$

para $r < c$.

O potencial em um ponto $Q = (r, \theta, \varphi)$ fora do eixo $0z$ é calculado assim¹⁰

$$\psi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\beta \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2 - 2rc \cos \gamma}}$$

¹⁰Aqui, γ é o ângulo formado entre os dois vetores $0Q$ e $0N$, onde $N = (c, \alpha, \beta)$ é um ponto sobre o anel carregado. [NdEs]

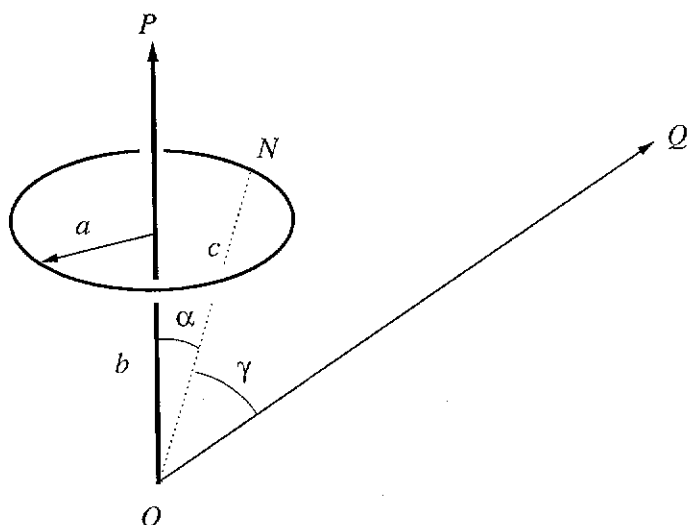


Figura 4.3. O anel uniformemente carregado de raio a , os pontos P , Q e N , os ângulos α e γ e as distâncias b e c .

(devido à simetria da carga, ψ não depende do ângulo φ). Se expandirmos a raiz no denominador, para $r > c$,

$$\psi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{c}{r}\right)^l \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\beta P_l(\cos \gamma)$$

e usarmos o teorema da adição (4.4.13), obtemos

$$\psi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{c}{r}\right)^l P_l(\cos \alpha) P_l(\cos \theta),$$

já que a integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\beta \cos(m(\varphi - \beta)) = \delta_{m,0}.$$

Analogamente,

$$\psi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^l P_l(\cos \alpha) P_l(\cos \theta),$$

para $r < c$.

4.5 Exercícios

1. Demonstre por indução finita a fórmula de Leibnitz

$$\frac{d^l}{dx^l}(uv) = \sum_{r=0}^l \frac{l!}{r!(l-r)!} \left(\frac{d^r}{dx^r} u \right) \left(\frac{d^{l-r}}{dx^{l-r}} v \right).$$

Mostre a equivalência da fórmula de Rodrigues (4.2.2) com a definição (4.2.1) dos polinômios de Legendre.

2. Mostre que

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2 - 1)^n = (2n)!,$$

e que

$$\frac{d^r}{dx^r}(x^2 - 1)^l = 0$$

para todo $r < l$ em $x = \pm 1$.

3. Prove as relações de recorrência (4.2.10)-(4.2.15) da página 47.

4. Demonstre com auxílio do Teorema de Rolle que o polinômio de Legendre de grau l tem precisamente l zeros entre -1 e 1 .

5. Mostre que

$$\int_{-1}^1 x(1-x^2)P'_n(x)P'_m(x) dx = 0$$

a menos que $m = n \pm 1$.

6. Determine o potencial elétrico do sistema indicado na Figura 4.4 (quadrupólo linear).

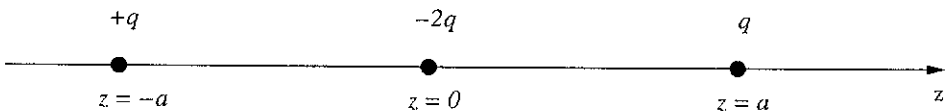


Figura 4.4. Quadrupólo linear.

7. A amplitude de uma onda espalhada em Mecânica Quântica é dada por

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)e^{i\delta_l} \text{sen}(\delta_l) P_l(\cos \theta),$$

onde θ é o ângulo de espalhamento, l é o momento angular e δ_l é o deslocamento de fase produzido por um potencial central. A seção de choque total é

$$\sigma_{tot} = 2\pi \int_0^\pi |f(\theta)|^2 \sin\theta \, d\theta.$$

Mostre que

$$\sigma_{tot} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (\sin(\delta_l))^2.$$

8. Um sólido esférico de raio a tem a superfície mantida à temperatura $T_0(\cos\theta)^2$. Determine a temperatura no interior do sólido.

9. Um sólido hemisférico tem a parte esférica de sua superfície mantida à temperatura T_0 , enquanto que sua superfície plana está à temperatura zero. Determine a temperatura no interior do sólido.

10. Considere um disco condutor de raio a eletricamente carregado com carga total q . A distribuição de carga sobre cada face da superfície do disco é

$$\sigma(\rho) = \frac{q}{4\pi a \sqrt{a^2 - \rho^2}},$$

com $\rho^2 = x^2 + y^2$. Mostre que o potencial produzido pelo disco no espaço na região $r > a$ é

$$\psi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\theta).$$

11. Calcule o potencial eletrostático $V(r, \theta)$ devido a uma esfera condutora neutra de raio a colocada num campo elétrico uniforme $\vec{E} = E_0 \vec{k}$. Como condições de contorno use que o potencial na esfera deve ser constante (podemos escolher essa constante = 0) e que o potencial no infinito ($r \rightarrow \infty$) é igual ao valor não-perturbado pela esfera, isto é,

$$V(r, \theta) \stackrel{r \rightarrow \infty}{=} -E_0 r \cos\theta.$$

Calcule também a densidade superficial de carga induzida na superfície da esfera:

$$\sigma = \epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=a}.$$

12. Duas esferas concêntricas de raios $2a$ e a , respectivamente, estão divididas em dois hemisférios pelo mesmo plano. O hemisfério superior da esfera interna e o hemisfério inferior da esfera externa são mantidos a um potencial V , constante, enquanto que os outros dois hemisférios são mantidos a um potencial $-V$. Determine o potencial na região definida por $a < r < 2a$.

13. Uma esfera oca de raio interno a tem o potencial na superfície especificado: $\phi = V(\theta, \varphi)$. Prove a equivalência das duas formas de solução para o potencial interno à esfera:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi} \int \frac{V(\theta', \varphi')}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos(\gamma))^{3/2}} d\Omega',$$

onde $d\Omega' = \sin\theta' d\theta' d\varphi'$, e $\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi')$, e

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_l^m(\theta, \varphi),$$

onde $A_{lm} = \int Y_l^{m*}(\theta', \varphi') V(\theta', \varphi') d\Omega'$.

14. Temos que $Y_1^0(\theta, \varphi) \propto \cos\theta$. Mostre que

$$Y_1^0(\theta, \varphi) Y_{l_1}^{m_1}(\theta, \varphi) = A Y_{l_1+1}^{m_1}(\theta, \varphi) + B Y_{l_1-1}^{m_1}(\theta, \varphi), \quad (4.5.1)$$

onde A e B são coeficientes independentes de θ e φ . *Sugestão: calcule o comutador $[\cos\theta, D^m]$, onde $D = \frac{d}{d\cos\theta}$ e use uma das relações de recorrência para os polinômios de Legendre.*

Usando (4.5.1), mostre que

$$\int \overline{Y_{l_2}^{m_2}(\theta, \varphi)} Y_1^0(\theta, \varphi) Y_{l_1}^{m_1}(\theta, \varphi) d\Omega = 0$$

a não ser que $l_2 = l_1 \pm 1$, $m_2 = m_1$ (regras de seleção). Acima, $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$.

15. Os chamados polinômios de Laguerre são definidos por

$$L_n^m(z) = {}_1F_1(-[n-m], m+1, z),$$

onde ${}_1F_1(\alpha, \gamma, z)$ é a função hipergeométrica confluyente, solução regular de

$$zu'' + (\gamma - z)u' - \alpha u = 0.$$

Mostre que as autofunções (não-normalizadas) do átomo de hidrogênio (potencial de Coulomb $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, $\alpha > 0$, e massa do elétron m_0) podem ser escritas em coordenadas esféricas como

$$u_{nlm}(r, \theta, \varphi) = \rho^l e^{-\rho/2} L_{n+l}^{2l+1}(\rho) Y_l^m(\theta, \varphi),$$

sendo que $\rho = \beta r/n$, onde $\beta = \frac{2m_0\alpha}{\hbar^2}$. Qual é o intervalo de variação de cada um dos números quânticos n , l e m ? Qual é a degenerescência de cada nível n ?

Capítulo 5

Funções de Bessel

5.1 Equação de Laplace em Coordenadas Cilíndricas

• A equação de Bessel

A equação de Laplace em coordenadas cilíndricas é $\nabla^2\psi(r, \theta, z) = 0$, ou seja,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi(r, \theta, z) = 0.$$

Podemos resolvê-la por separação de variáveis $\psi(r, \theta, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$ e obtemos as equações

$$Z'' \pm \lambda^2 Z = 0, \quad (\lambda \text{ real}), \quad (5.1.1)$$

$$\Phi'' + m^2 \Phi = 0, \quad (5.1.2)$$

$$r^2 R'' + rR' + (\mp \lambda^2 r^2 - m^2)R = 0, \quad (5.1.3)$$

Se escolhermos $-\lambda^2$ em (5.1.1) as soluções são

$$Z(z) = Ae^{+\lambda z} + Be^{-\lambda z} = a \sinh(\lambda z) + b \cosh(\lambda z),$$

$$\Phi(\varphi) = C \cos(m\varphi) + D \sin(m\varphi).$$

Substituindo $\lambda r = x$ em (5.1.3) se obtem tomando $y(x) = R(x/\lambda)$

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0,$$

que é a equação de Bessel de ordem m .

Se escolhermos $+\lambda^2$ em (5.1.1) as soluções são

$$Z(z) = A \cos(\lambda z) + B \sin(\lambda z),$$

$$\Phi(\varphi) = C \cos(m\varphi) + D \sin(m\varphi),$$

e a terceira equação fica

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + m^2)y = 0, \quad (5.1.4)$$

que é a equação de Bessel modificada de ordem m . A escolha de λ e de m é imposta pelas condições de contorno dadas pelo problema.

5.2 Funções de Bessel de Primeira Espécie

Seja a equação de Bessel de ordem ν (ν real ou complexo) dada por

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$x(xy')' + (x^2 - \nu^2)y = 0. \quad (5.2.1)$$

Uma solução em termos de séries de potências pode ser obtida tomando-se (método de Frobenius, vide Capítulo 2, página 15)

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n}.$$

Substituindo-se y por esta série na equação de Bessel obtemos a seguinte equação indicial:

$$s^2 - \nu^2 = 0 \quad \text{ou} \quad s = \pm \nu.$$

O coeficiente $a_1 = 0$ e todos os coeficientes de índices ímpares são nulos. Os coeficientes de índices pares são obtidos pela relação

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+s)^2 - \nu^2}, \quad n \geq 2,$$

e todo coeficiente de índice par pode ser obtido em termos de a_0 . Lembrando que $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, os coeficientes podem ser escritos, para $s = \nu$:

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0 \Gamma(1+\nu)}{1! 2^2 \Gamma(2+\nu)}, & a_4 &= +\frac{a_0 \Gamma(1+\nu)}{2! 2^4 \Gamma(3+\nu)}, \\ a_6 &= -\frac{a_0 \Gamma(1+\nu)}{3! 2^6 \Gamma(4+\nu)}, & a_{2n} &= (-1)^n \frac{a_0 \Gamma(1+\nu)}{n! 2^{2n} \Gamma(n+1+\nu)}. \end{aligned}$$

E a série solução é da forma

$$y = a_0 x^\nu \Gamma(1+\nu) \left[\frac{1}{\Gamma(1+\nu)} - \frac{1}{\Gamma(2+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots \right],$$

ou ainda

$$y = a_0 2^\nu \left(\frac{x^\nu}{2^\nu}\right) \Gamma(1+\nu) \left[\frac{1}{\Gamma(1)\Gamma(1+\nu)} - \frac{1}{\Gamma(2)\Gamma(2+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots \right],$$

pois $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Se tomarmos

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1 + \nu)},$$

a série solução da equação de Bessel de ordem ν assume a forma

$$y = \frac{1}{\Gamma(1)\Gamma(1 + \nu)} \left(\frac{x^\nu}{2^\nu}\right) - \frac{1}{\Gamma(2)\Gamma(2 + \nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2} + \frac{1}{\Gamma(3)\Gamma(3 + \nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+4} \dots$$

e se denomina *função de Bessel de primeira espécie de ordem ν* e é indicada por $J_\nu(x)$, isto é,

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}. \quad (5.2.2)$$

Esta série converge para todo intervalo finito (absoluta e uniformemente). Assim, a função $J_\nu(x)$ está definida para todo valor de x , real ou complexo.

Quando ν é não-inteiro, a segunda solução da equação de Bessel pode ser obtida pelo método de Frobenius tomando-se $s = -\nu$. A série solução será então

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n - \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}.$$

Quando ν é não-inteiro J_ν e $J_{-\nu}$ são duas soluções linearmente independentes da equação de Bessel¹.

Exercício. Calcule o Wronskiano $W(u, v)$ das duas soluções J_ν e $J_{-\nu}$ da equação de Bessel e mostre que

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = -2 \frac{\text{sen}(\nu\pi)}{\pi x}. \quad (5.2.3)$$

Isso demonstra que para ν não-inteiro J_ν e $J_{-\nu}$ são linearmente independentes.

Porém, quando ν é um inteiro $\nu = m$, J_ν e $J_{-\nu}$ são linearmente dependentes e

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x). \quad (5.2.4)$$

Vide (5.2.9), adiante.

A solução da equação modificada de Bessel de ordem ν , ou seja, $x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0$ (vide eq. (5.1.4)) pode ser obtida de modo análogo. Assim,

$$I_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \quad (5.2.5)$$

¹Quando ν é não-inteiro ambas as funções possuem na origem uma singularidade tipo ponto de ramificação. Se $\nu > 0$, então, além disso, $J_{-\nu}$ diverge na origem. [NdEs]

é definida como a função de Bessel modificada de ordem ν .

Exercício. Verifique as seguintes relações:

a)

$$I_\nu(x) = e^{-i\nu\pi/2} J_\nu(ix). \quad (5.2.6)$$

b) Quando $\nu = m$, inteiro,

$$I_{-m}(x) = I_m(x).$$

c) $W(I_\nu, I_{-\nu}) = -2 \frac{\text{sen}(\nu\pi)}{\pi x}$, o que pode ser obtido diretamente de (5.2.3) e de (5.2.6).

• A função geratriz da função de Bessel

A função $g(x, t) = e^{(x/2)(t-1/t)}$ desenvolvida em série de Laurent na variável t definirá as funções de Bessel de ordem inteira na variável x . De fato,

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n, \quad (5.2.7)$$

$$e^{xt/2} e^{-x/2t} = \left(\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^r \frac{t^r}{r!} \right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{2} \right)^s \frac{t^{-s}}{s!} \right). \quad (5.2.8)$$

Assim, para um dado s obtemos um t^n com $n \geq 0$ de:

$$\left(\frac{x}{2} \right)^{n+s} \frac{t^{n+s}}{(n+s)!} (-1)^s \left(\frac{x}{2} \right)^s \frac{t^{-s}}{s!}$$

e o coeficiente de t^n será

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! (s+n)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2s+n} = J_n(x).$$

Para $n < 0$,

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! (s-n)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2s-n} = J_{-n}(x).$$

Como n é inteiro, $(s-n)! \rightarrow \infty$ para $s = 0, 1, \dots, n-1$ e a série em $J_{-n}(x)$ começa efetivamente em $s = n$. Assim, fazendo a substituição $s \rightarrow s+n$

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+n}}{s! (s+n)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2s+n} = (-1)^n J_n(x). \quad (5.2.9)$$

Observações: 1) As expressões J_n e J_{-n} podem ser ampliadas para n não-inteiro. 2) A função geratriz para $I_n(x)$ é

$$e^{\frac{x}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)t^n. \quad (5.2.10)$$

• Relações de recorrência das funções de Bessel

Derivando $g(x, t)$ parcialmente em relação a t obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}g(x, t) = \frac{1}{2}x \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) e^{(x/2)(t-1/t)}.$$

Então,

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x), \quad (5.2.11)$$

que se obtém de (5.2.11), de $g(x, t)$ e da equalização dos coeficientes das potências iguais de t .

Diferenciando $g(x, t)$ parcialmente em relação a x obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x, t) = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) e^{(x/2)(t-1/t)},$$

mas

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J'_n(x)t^n \quad \text{e} \quad e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n.$$

Logo, por equalização dos coeficientes das potências iguais de t segue que a segunda relação de recorrência:

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x), \quad (5.2.12)$$

Exercício. Verifique diretamente da definição que

$$J'_0(x) + J_1(x) = 0.$$

Somando as relações de recorrência (5.2.11) e (5.2.12) e dividindo o resultado por dois, tem-se

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x}J_n(x) + J'_n(x). \quad (5.2.13)$$

Multiplicando (5.2.13) por x^n , temos:

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x). \quad (5.2.14)$$

Subtraindo (5.2.12) de (5.2.11) e dividindo o resto por dois

$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J'_n(x). \quad (5.2.15)$$

Multiplicando (5.2.15) por x^{-n} temos

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x). \quad (5.2.16)$$

Exercício. Verifique as seguintes relações de recorrência para as funções modificadas de Bessel $I_\nu(x)$;

$$\begin{aligned} I'_\nu(x) &= I_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} I_\nu(x), \\ I'_\nu(x) &= I_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} I_\nu(x), \\ I_{\nu+1}(x) + I_{\nu-1}(x) &= 2I'_\nu(x), \\ I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) &= 2\frac{\nu}{x} I_\nu(x). \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

Exercício. Todo conjunto de funções $Z_\nu(x)$, com ν não necessariamente inteiro, que satisfaça as relações de recorrência (5.2.11) e (5.2.12) é de funções de Bessel. Verifique! Sugestão: use a relação (5.2.13) e diferencie-a em relação a x .

• Representação integral da função de Bessel

Se na função geratriz $g(x, t) = e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$ substituirmos $t = e^{i\theta}$ obtemos

$$\begin{aligned} e^{ix \operatorname{sen} \theta} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta} = J_0(x) + 2 \left[J_2(x) \cos(2\theta) + J_4(x) \cos(4\theta) + \dots \right] \\ &\quad + 2i \left[J_1(x) \operatorname{sen}(\theta) + J_3(x) \operatorname{sen}(3\theta) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

Separando-se a parte real da imaginária de $e^{ix \operatorname{sen} \theta}$ segue:

$$\cos(x \operatorname{sen} \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos(2n\theta),$$

$$\operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \operatorname{sen}((2n-1)\theta).$$

As funções sen e \cos são ortogonais. Assim:

$$\int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} \delta_{m,n}, \quad \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(n\theta) \operatorname{sen}(m\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} \delta_{m,n}$$

para m e n inteiros positivos e o zero excluído. Introduzindo-se as propriedades de ortogonalidade do seno e do co-seno na parte imaginária obtida da separação de $e^{ix \operatorname{sen} \theta}$, podemos verificar que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen} \theta) \cos(n\theta) d\theta = \begin{cases} J_n(x), & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ ímpar} \end{cases}, \quad (5.2.19)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen}(n\theta) d\theta = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ J_n(x), & n \text{ ímpar} \end{cases}. \quad (5.2.20)$$

Somando-se (5.2.19) e (5.2.20), obtemos

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(x \operatorname{sen} \theta) \cos(n\theta) + \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen}(n\theta)] d\theta = J_n(x),$$

isto é,

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - x \operatorname{sen}(\theta)) d\theta, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.2.21)$$

Exercício. As representações da função modificada de Bessel $I_m(x)$ são obtidas de modo semelhante ao utilizado para obter a representação integral da função de Bessel $J_n(x)$. Verifique que

$$I_{2n}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh(x \cos(\theta)) \cos(2n\theta) d\theta, \quad (5.2.22)$$

$$I_{2n+1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{senh}(x \cos(\theta)) \operatorname{sen}((2n+1)\theta) d\theta. \quad (5.2.23)$$

5.3 Funções de Neumann (Bessel de 2ª Espécie)

Sabemos que para ν não-inteiro $J_{-\nu}$ é uma segunda solução da equação de Bessel de ordem ν . Para $\nu = n$ (inteiro), a segunda solução que indicamos pelo método de Frobenius apresentava uma divergência na origem.

Consideremos, para exemplificar o que afirmamos, uma equação de Bessel de ordem zero:

$$xu'' + u' + xu = 0. \quad (5.3.1)$$

Uma solução desta equação é certamente $v = J_0(x)$. Então,

$$xv'' + v' + xv = 0. \quad (5.3.2)$$

Multiplicando (5.3.1) por v e (5.3.2) por u e subtraindo as equações, obtem-se $x(u''v - v''u) + u'v - v'u = 0$, ou seja,

$$\frac{d}{dx}[x(u'v - v'u)] = 0, \quad \text{o que implica } x(u'v - v'u) = B \text{ (constante).}$$

Assim,

$$\frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{B}{xv^2}, \quad \text{ou seja } \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{B}{xv^2}.$$

Logo,

$$\frac{u}{v} = A + B \int \frac{dx}{xv^2},$$

onde A é também constante. Como $v = J_0$, tem-se

$$u(x) = AJ_0(x) + BJ_0(x) \int \frac{dx}{x(J_0(x))^2},$$

A e B sendo constantes arbitrárias. Mas,

$$\frac{1}{x(J_0(x))^2} = \frac{1}{x} + \frac{x}{2} + \frac{5x^3}{32} + \dots,$$

e, então,

$$J_0(x) \int \frac{dx}{x(J_0(x))^2} = J_0(x) \left(\ln x + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \dots \right)$$

e u valerá, então,

$$u(x) = AJ_0(x) + BJ_0(x) \left(\ln x + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \dots \right)$$

que define uma segunda solução da equação de Bessel para $\nu = 0$.

Consideremos a função N_ν definida por

$$N_\nu = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\text{sen}(\nu\pi)} \quad (5.3.3)$$

que é, obviamente, solução da equação de Bessel de ordem ν (para ν não-inteiro), pois é uma combinação linear das soluções. A expressão do lado direito de (5.3.3) é indeterminada quando $\nu = n$ (inteiro). Se calcularmos o $\lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu(x)$ obteremos, aplicando a regra de L'Hospital,

$$N_n(x) := \lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}. \quad (5.3.4)$$

As funções $N_\nu(x)$ e $N_n(x)$ são denominadas *funções de Bessel de segunda espécie*, ou *funções de Neumann*.

A função $N_n(x)$ obtida como $\lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu(x)$ é solução da equação de Bessel de ordem n . De fato, se $L(\nu)$ é um operador diferencial definido como

$$L(\nu) = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + (x^2 - \nu^2), \quad (5.3.5)$$

$$L(n) = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + (x^2 - n^2). \quad (5.3.6)$$

Como

$$L(\nu) = L(n) + (n^2 - \nu^2)$$

e $L(\nu)J_{\pm\nu}(x) = 0$, tem-se, portanto,

$$L(n)J_{\pm\nu}(x) + (n^2 - \nu^2)J_{\pm\nu}(x) = 0. \quad (5.3.7)$$

Diferenciando-se esta expressão em relação a ν , obtemos

$$L(n) \frac{\partial J_{\pm\nu}(x)}{\partial \nu}(x) = 2\nu J_{\pm\nu}(x) + (\nu^2 - n^2) \frac{\partial J_{\pm\nu}(x)}{\partial \nu}(x). \quad (5.3.8)$$

Mas,

$$L(n)N_n(x) = \frac{1}{\pi} L(n) \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}$$

e, usando (5.3.8), tem-se

$$\begin{aligned} L(n)N_n(x) = & 2\nu \left[J_\nu(x) - (-1)^n J_{-\nu}(x) \right]_{\nu=n} \\ & + (\nu^2 - n^2) \left\{ \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right\}_{\nu=n}. \end{aligned}$$

Para $\nu = n$ o primeiro termo se anula, pois $J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x)$. Para $\nu = n$ o segundo termo se anula devido ao fator $(\nu^2 - n^2)$. Logo $L(n)N_n(x) = 0$. Este fato comprova ser N_n solução da equação de Bessel de ordem n . Assim, a solução mais geral para qualquer ν (inteiro ou não) pode ser escrita como

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BN_\nu(x).$$

As funções J_ν e N_ν são linearmente independentes, inclusive para $\nu = n$. Para comprovar esse fato calcule o Wronskiano $W(J_n, N_n)$ e obtenha

$$W(J_n, N_n) = \frac{2}{\pi x}. \quad (5.3.9)$$

Verifique também que $N_{-n}(x) = (-1)^n N_n(x)$. Assim, toda solução de (5.2.1) para $\nu = n$ é da forma

$$AJ_n(x) + BN_n(x). \quad (5.3.10)$$

• A função de Bessel modificada de segunda espécie

A equação

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0, \quad (5.3.11)$$

para ν não inteiro, tem duas soluções linearmente independentes $I_\nu(x)$ e $I_{-\nu}(x)$. Quando $\nu = n$, inteiro, $I_n(x)$, obtida pelo Método de Frobenius, fornece uma solução. A outra solução pode ser obtida pela função $K_n(x)$ definida pelo limite quando $\nu \rightarrow n$ (inteiro) da função $K_\nu(x)$, dada pela relação

$$K_\nu(x) := \frac{\pi}{2 \operatorname{sen}(\nu\pi)} [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]. \quad (5.3.12)$$

Assim,

$$K_n(x) := \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(x) = \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{\partial I_{-\nu}(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial I_\nu(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}.$$

Exercícios. 1) Demonstrar que o Wronskiano de I_ν e K_ν é $W(I_\nu, K_\nu) = 1/x$, qualquer que seja o valor de ν (real, inteiro ou não).

2) Demonstre que $K_{-\nu} = K_\nu$ ($\forall \nu$).

Sendo I_ν e K_ν linearmente independentes para qualquer ν , a solução geral de (5.3.11) será

$$y(x) = AI_\nu(x) + BK_\nu(x). \quad (5.3.13)$$

Observação: Para todo ν real, N_ν é singular na origem. Se $\nu = n$ (inteiro), N_0 tem singularidade logarítmica na origem e $N_n(x)$ para $n \geq 0$ tem uma

singularidade $x^n \ln x$ e, adicionalmente, uma singularidade como x^{-n} próximo à origem (vide eqs. (5.3.14) e (5.3.15), adiante).

Partindo-se de

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ J_\nu(x) - (-1)^n J_{-\nu}(x) \right\}_{\nu=n}$$

podemos obter o desenvolvimento em série de $N_n(x)$. Para $n = 0$

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \ln \left(\frac{x}{2} \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \psi(m+1) \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m}, \quad (5.3.14)$$

onde a função ψ foi definida na Seção 1.4, página 9, e tem-se

$$\psi(m+1) := \frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+1)} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} - \gamma,$$

onde

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) \approx 0,577215$$

é a chamada *constante de Euler-Mascheroni*. Para $n > 0$

$$N_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln \left(\frac{x}{2} \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m+1)!}{m!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m-n} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} [\psi(m+1) + \psi(m+n+1)] \left(\frac{x}{2} \right)^{2m+n}. \quad (5.3.15)$$

Exercícios. 1) Resolva a equação de Bessel

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0$$

para $\nu = 1/2$ e verifique que a solução geral é

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (A \operatorname{sen} x + B \operatorname{cos} x).$$

2) Para $\nu = n + 1/2$ determine $J_{n+1/2}(x)$ e $J_{-n-1/2}(x)$:

$$J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+1/2} \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \quad e$$

$$J_{-n-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+1/2} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{\operatorname{cos} x}{x} \right).$$

5.4 Séries de Fourier-Bessel

Seja a seguinte equação de Bessel

$$z^2 y''(z) + zy'(z) + (z^2 - p^2)y(z) = 0. \quad (5.4.1)$$

Uma solução é dada por $y(z) = J_p(z)$. Consideremos a seguinte mudança de variável

$$z = ax, \quad z \frac{dy}{dz} \rightarrow ax \left[\frac{dy}{d(ax)} \right] = x \frac{dy}{dx}$$

e a equação (5.4.1) ficará $x^2 y''(x) + xy'(x) + (a^2 x^2 - p^2)y(x) = 0$, ou

$$x(xy'(x))' + (a^2 x^2 - p^2)y(x) = 0 \quad (5.4.2)$$

e a solução será dada por $J_p(ax) =: u(x)$. Assim,

$$x(xu'(x))' + (a^2 x^2 - p^2)u(x) = 0. \quad (5.4.3)$$

Consideremos ainda a seguinte equação de Bessel

$$x(xy'(x))' + (b^2 x^2 - p^2)y(x) = 0 \quad (5.4.4)$$

cuja solução é $J_p(bx) =: v(x)$, isto é,

$$x(xv'(x))' + (b^2 x^2 - p^2)v(x) = 0. \quad (5.4.5)$$

Multiplicando (5.4.3) por v e (5.4.5) por u e efetuando a subtração (5.4.3) - (5.4.5) obtemos

$$\frac{d}{dx}(vxu' - uxv') + (a^2 - b^2)xuv = 0. \quad (5.4.6)$$

Integrando esse resultado entre 0 e 1 temos

$$(vxu' - uxv') \Big|_0^1 + (a^2 - b^2) \int_0^1 xuv \, dx = 0. \quad (5.4.7)$$

Em $x = 0$ vale $vxu' - uxv' = 0$. Em $x = 1$ segue que

$$\begin{cases} u = J_p(ax) \Big|_{x=1} = J_p(a) \quad \therefore J_p(a) = 0 \\ v = J_p(bx) \Big|_{x=1} = J_p(b) \quad \therefore J_p(b) = 0 \end{cases}$$

se e somente se a e b forem zeros de J_p .

Se a e b forem zeros de J_p restará de (5.4.7)

$$(a^2 - b^2) \int_0^1 xuv \, dx = 0$$

e se $a \neq b$ segue disso que

$$\int_0^1 x J_p(ax) J_p(bx) \, dx = 0, \quad (5.4.8)$$

ou seja, as funções $J_p(ax)$ e $J_p(bx)$ são ortogonais no intervalo $[0, 1]$ com respeito à função peso x , caso a e b sejam zeros distintos da função $J_p(x)$.

De um modo geral, se k_1, k_2, \dots, k_n são raízes distintas, positivas, da equação $J_\nu(ka) = 0$, isto é $J_\nu(k_n a) = 0$ para $n = 1, 2, \dots, n$, as funções $y_n(x) = J_\nu(k_n x)$ são ortogonais no intervalo $[0, a]$ com respeito à função peso x . Com efeito,

$$\begin{aligned} (k^2 - k_m^2) \int_0^a J_\nu(kx) J_\nu(k_m x) x \, dx \\ = x \left[J_\nu(kx) \frac{d}{dx} J_\nu(k_m x) - J_\nu(k_m x) \frac{d}{dx} J_\nu(kx) \right] \Big|_0^a \end{aligned}$$

e como $J_\nu(k_m a) = 0$, segue

$$(k^2 - k_m^2) \int_0^a J_\nu(kx) J_\nu(k_m x) x \, dx = k_m a J_\nu(ka) J'_\nu(k_m a). \quad (5.4.9)$$

Fazendo $k = k_n$ com $k_n \neq k_m$ segue

$$\int_0^a J_\nu(kx) J_\nu(k_m x) x \, dx = 0 \quad \text{para } n \neq m \text{ desde que } J_\nu(k_n a) = 0.$$

Diferenciando (5.4.9) com respeito a k tem-se

$$\begin{aligned} 2k \int_0^a J_\nu(kx) J_\nu(k_m x) x \, dx + (k^2 - k_m^2) \int_0^a J'_\nu(kx) J_\nu(k_m x) x^2 \, dx \\ = k_m a^2 J'_\nu(ka) J'_\nu(k_m a). \end{aligned}$$

Para $k = k_m$, segue

$$\int_0^a (J_\nu(k_m x))^2 x \, dx = \frac{a^2 [J'_\nu(k_m a)]^2}{2}. \quad (5.4.10)$$

Este resultado, e a ortogonalidade, podem ser sumariados na seguinte expressão:

$$\int_0^a J_\nu(k_n x) J_\nu(k_m x) x dx = \frac{a^2 [J'_\nu(k_m a)]^2}{2} \delta_{m,n}. \quad (5.4.11)$$

Essas são as relações de ortogonalidade das funções de Bessel.

• Zeros de funções de Bessel e Neumann

Os seguintes resultados relativos às raízes da equação $Z_\nu(\zeta) = 0$ com $Z_\nu(\zeta) = AJ_\nu(\zeta) + BN_\nu(\zeta)$ podem ser provados.

- $Z_\nu(\zeta) = 0$ só pode ter raízes simples exceto, caso $\nu > 0$, para $\zeta = 0$.
- Se ν é real, $J_\nu(\zeta)$ tem uma infinidade de zeros reais.
- Se $\nu > -1$, $J_\nu(\zeta)$ não tem zeros imaginários (e $I_\nu(\zeta)$ não tem zeros reais).
- Se $\nu > -1$, entre duas raízes consecutivas de $J_\nu(\zeta) = 0$ existe uma e somente uma raiz de $Z_{\nu+1}(\zeta) = 0$.
- $Z_\nu(\zeta) = 0$, bem como $N_\nu(\zeta) = 0$, tem uma infinidade de zeros reais.

• Série de Bessel

Seja f uma função arbitrária, integrável no intervalo $[0, a]$. A série

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} J_m\left(\frac{\alpha_{m,n} r}{a}\right) \quad (5.4.12)$$

é o desenvolvimento de $f(r)$ em série de Bessel de ordem m , sendo $J_m(\alpha_{m,n}) = 0$ e sendo $a_{m,n}$ os coeficientes de Bessel de ordem m , dados por

$$a_{m,n} = \frac{2}{a^2 [J'_m(\alpha_{m,n})]^2} \int_0^a r J_m\left(\frac{\alpha_{m,n} r}{a}\right) f(r) dr. \quad (5.4.13)$$

• Funções de Bessel de terceira espécie

Defina-se

$$H_\nu^{(1)} := J_\nu + iN_\nu \quad \text{e} \quad H_\nu^{(2)} := J_\nu - iN_\nu \quad (5.4.14)$$

como as *funções de Bessel de terceira espécie*, ou *funções de Hankel*. Demonstra-se que

$$J_{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x, \quad J_{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \quad N_{1/2} = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

e, por (5.4.14)

$$H_{1/2}^{(1)} = -i\sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{ix}, \quad H_{1/2}^{(2)} = i\sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-ix}.$$

• **Comportamento assintótico para $x \rightarrow \infty$**

O comportamento assintótico para $x \rightarrow \infty$ das funções de Bessel de primeiro, segundo e terceiro tipo, normais ou modificadas, resume-se ao seguinte:

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{2\nu + 1}{4} \pi \right),$$

$$N_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} \left(x - \frac{2\nu + 1}{4} \pi \right),$$

$$H_\nu^{(1)(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left(\pm i \left[x - \frac{2\nu + 1}{4} \pi \right] \right),$$

$$I_\nu(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x,$$

$$K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}.$$

5.5 Funções de Bessel Esféricas

A equação de Helmholtz escalar em coordenadas esféricas é

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 (\operatorname{sen} \theta)^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \lambda \psi = 0, \quad (5.5.1)$$

onde (r, θ, φ) são as coordenadas esféricas. Se $\lambda = 0$ a equação se reduz à de Laplace. Sendo $\lambda \neq 0$, admitamos que a solução possa ser colocada na forma $\psi = R(r)Y(\theta, \varphi)$. Com tal substituição resultam as seguintes equações:

$$(r^2 R')' + (\lambda r^2 - \mu)T = 0, \quad (5.5.2)$$

$$\Omega Y + \mu Y = 0, \quad (5.5.3)$$

onde μ é uma constante de separação e onde o operador Ω é dado por

$$\Omega := \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{(\sin\theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Se fizermos $\omega(r) = \sqrt{r}R(r)$ em (5.5.2) obteremos a seguinte equação

$$r^2\omega'' + r\omega' + \left(\lambda r^2 - \mu - \frac{1}{4} \right) \omega = 0 \quad (5.5.4)$$

e fazendo em (5.5.4) $s = \sqrt{\lambda}r$

$$s^2 \frac{d^2\omega}{ds^2} + s \frac{d\omega}{ds} + \left(s^2 - \mu - \frac{1}{4} \right) \omega = 0. \quad (5.5.5)$$

A equação (5.5.5) pode ser reconhecida como a equação de Bessel de ordem $\nu^2 = \mu + \frac{1}{4}$, cuja solução geral é dada por $\omega = AJ_\nu(s) + BN_\nu(s)$ e assim, voltando às coordenadas originais,

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \left[AJ_\nu(\sqrt{\lambda}r) + BN_\nu(\sqrt{\lambda}r) \right],$$

com $\nu = (\mu + \frac{1}{4})^{1/2}$ e onde A e B são constantes arbitrárias. Escrevendo $\mu = l(l+1)$ tem-se $\nu^2 = (l+1/2)^2$ e a equação (5.5.3) fica

$$\Omega Y + l(l+1)Y = 0,$$

cujas soluções são os harmônicos esféricos.

A solução geral da equação de Helmholtz será então

$$\begin{aligned} \psi_{l,\lambda,m} &= \frac{1}{\sqrt{r}} \left[AJ_{l+1/2}(\sqrt{\lambda}r) + BN_{l+1/2}(\sqrt{\lambda}r) \right] \times \\ &\times \left[CP_l^m(\cos\theta) + DQ_l^m(\cos\theta) \right] \left[E \cos(m\varphi) + F \sin(m\varphi) \right], \quad (5.5.6) \end{aligned}$$

com $\lambda \neq 0$, A , B , C , D , E e F sendo constantes.

As condições de contorno poderão eliminar parte das constantes. Por exemplo B será igual a zero se ψ for regular na origem etc.

As funções de Bessel esféricas são definidas a partir de $N_{l+1/2}$ e $J_{l+1/2}$ como soluções da equação de Bessel

$$x^2 y'' + 2xy' + [x^2 - l(l+1)]y = 0$$

sendo dadas por

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x), \tag{5.5.7}$$

$$n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+1/2}(x) = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-l-1/2}(x). \tag{5.5.8}$$

Com auxílio de (5.5.7) e (5.5.8) obtemos

$$j_0(x) = \frac{\text{sen } x}{x}, \tag{5.5.9}$$

$$j_l(x) = x^l \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\text{sen } x}{x}, \tag{5.5.10}$$

$$n_l(x) = -x^l \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\cos x}{x}. \tag{5.5.11}$$

Em analogia com o que ocorre com as funções de Bessel, as funções de Bessel esféricas satisfazem relações de ortogonalidade. Se λ_{lm} satisfazem $j_l(\lambda_{lm}) = 0$ então as funções $j_l(\lambda_{lm}r)$ satisfazem

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^2 j_l(\lambda_{lm}r) j_l(\lambda_{ln}r) dr &= \frac{1}{2} [j'_l(\lambda_{ln})]^2 \delta_{m,n} = \frac{\pi}{4\lambda_{ln}} [J'_{l+1/2}(\lambda_{ln})]^2 \delta_{m,n} \\ &= \frac{1}{2} [j'_{l+1}(\lambda_{ln})]^2 \delta_{m,n}. \end{aligned} \tag{5.5.12}$$

Essas são as relações de ortogonalidade das funções de Bessel esféricas.

Como aplicação de (5.5.12) procuremos as autofunções normalizadas do Laplaciano na esfera $r \leq a$, sujeitas à condição de se anularem na superfície esférica $r = a$. Estas vão ser

$$\psi_{l,\lambda,m}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{1}{j'_l(\lambda_{lm})} j_l \left(\lambda_{lm} \frac{r}{a} \right) Y_l^m(\theta, \varphi) \tag{5.5.13}$$

e os respectivos autovalores serão λ_{lm}^2/a^2 .

Com auxílio destas autofunções podemos construir a função de Green $G(\vec{r}, \vec{r}')$ do problema

$$\nabla^2 f + k^2 f = g$$

na esfera $r \leq a$, com a condição $f(a, \theta, \varphi) = h(\theta, \varphi)$ (para a definição da noção de função de Green, vide Capítulo 6, página 97). A função de Green $G(\vec{r}, \vec{r}')$ satisfaz a equação

$$\nabla^2 G + k^2 G = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

e a condição $G(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ quando $|\vec{r}| = a$ pode ser escrita como uma série nas autofunções $\psi_{l, \lambda, m}$ dadas em (5.5.13) (vide (6.3.2)):

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{2}{a^3} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_l\left(\frac{\lambda_{ln} r'}{a}\right) j_l\left(\frac{\lambda_{ln} r}{a}\right) \overline{Y_l^m(\theta', \varphi')} Y_l^m(\theta, \varphi)}{(j_{l+1}(\lambda_{ln}))^2 \left(k^2 - \frac{\lambda_{ln}^2}{a^2}\right)}. \quad (5.5.14)$$

• Funções de Hankel esféricas

Define-se

$$h_n^{(1)}(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+1/2}^{(1)}(x) = j_n(x) + in_n(x),$$

$$h_n^{(2)}(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+1/2}^{(2)}(x) = j_n(x) - in_n(x).$$

Para estas funções, temos as fórmulas

$$h_n^{(1)}(x) := -ix^n \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{e^{ix}}{x}\right),$$

$$h_n^{(2)}(x) := ix^n \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{e^{-ix}}{x}\right).$$

As funções de Bessel esféricas modificadas são definidas por

$$i_n(x) := i^{-n} j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} I_{n+1/2}(x), \quad (5.5.15)$$

$$k_n(x) := -i^n h_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} K_{n+1/2}(x). \quad (5.5.16)$$

5.6 Aplicações a Problemas de Contorno e Auto-Valores

Exemplo 1 - Potencial no interior de um cilindro.

Achar o potencial $\psi(r, \theta, \zeta)$ no interior de um cilindro finito $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \zeta \leq h$, sabendo que, na superfície do mesmo, o potencial é dado por

$$\psi(a, \varphi, \zeta) = f(\varphi, \zeta), \quad \psi(r, \varphi, 0) = g(\varphi, r), \quad \text{e} \quad \psi(r, \varphi, h) = l(\varphi, r).$$

O problema pode ser dividido em dois problemas mais simples. Seja $\psi = u + v$ com

$$\nabla^2 u = 0 \qquad \qquad \qquad \nabla^2 v = 0$$

$$(a) \quad \begin{cases} u(a, \varphi, \zeta) = 0 \\ u(r, \varphi, 0) = g(r, \varphi) \\ u(r, \varphi, h) = l(r, \varphi) \end{cases}, \quad (b) \quad \begin{cases} v(a, \varphi, \zeta) = f(\varphi, \zeta) \\ v(r, \varphi, 0) = 0 \\ v(r, \varphi, h) = 0 \end{cases}.$$

As soluções separadas de cada problema são $R(r)\Phi(\varphi)Z(\lambda\zeta)$. A constante de separação λ^2 pode ser > 0 ou < 0 . O primeiro sinal ($\lambda^2 > 0$) dá origem à equação de Bessel e o outro ($\lambda^2 < 0$) dá origem à equação de Bessel modificada.

Para o problema (a) as soluções limitadas e univalentes são ($\lambda^2 > 0$)

$$u_{m,n}(r, \varphi, \zeta) = J_m(\lambda_{m,n}r) [A \cos(m\varphi) + B \sin(m\varphi)] [C \sinh(\lambda_{m,n}(\zeta - \delta))],$$

pois somente as funções de Bessel possuem zeros reais com $\lambda_{m,n} = \alpha_{m,n}/a$, sendo $\alpha_{m,n}$ o n -ésimo zero de $J_m(x)$ para $x > 0$ (ou seja, $\alpha_{m,n}$ são as raízes de $J_m(x) = 0$ para $x > 0$).

A solução geral será, pois, da forma

$$u(r, \varphi, \zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} J_m(\lambda_{m,n}r) \sinh(\lambda_{m,n}(\zeta - d_{m,n})) \cos(m\varphi) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{m,n} J_m(\lambda_{m,n}r) \sinh(\lambda_{m,n}(\zeta - f_{m,n})) \sin(m\varphi),$$

ou também, equivalentemente, da forma

$$u(r, \varphi, \zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{m,n} r) [\overline{C}_{m,n} \sinh(\lambda_{m,n} \zeta) + \overline{D}_{m,n} \cosh(\lambda_{m,n} \zeta)] \cos(m\varphi) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{m,n} r) [\overline{E}_{m,n} \sinh(\lambda_{m,n} \zeta) + \overline{F}_{m,n} \cosh(\lambda_{m,n} \zeta)] \sin(m\varphi).$$

Temos duas condições de contorno para determinar as constantes $\overline{C}_{m,n}$, $\overline{D}_{m,n}$, $\overline{E}_{m,n}$ e $\overline{F}_{m,n}$. As condições para $\zeta = 0$ fornecem

$$g(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(r) \cos(m\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m(r) \sin(m\varphi), \quad (5.6.1)$$

$$k(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} A'_m(r) \cos(m\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty} B'_m(r) \sin(m\varphi). \quad (5.6.2)$$

As funções $A_m(r)$, $B_m(r)$, $A'_m(r)$ e $B'_m(r)$ são determinadas como coeficientes da série de Fourier. Por outro lado,

$$A_m(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{D}_{m,n} J_m(\lambda_{m,n} r),$$

$$B_m(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{F}_{m,n} J_m(\lambda_{m,n} r),$$

$$A'_m(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\overline{C}_{m,n} \sinh(\lambda_{m,n} r) + \overline{D}_{m,n} \cosh(\lambda_{m,n} r) \right) J_m(\lambda_{m,n} r),$$

$$B'_m(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\overline{E}_{m,n} \sinh(\lambda_{m,n} r) + \overline{F}_{m,n} \cosh(\lambda_{m,n} r) \right) J_m(\lambda_{m,n} r).$$

Estes coeficientes podem ser calculados. Primeiramente determinamos $\overline{D}_{m,n}$ e $\overline{F}_{m,n}$ e depois $\overline{C}_{m,n}$ e $\overline{E}_{m,n}$. Assim, fica determinada a solução. As séries (5.6.1) e (5.6.2) chamam-se séries de Fourier-Bessel.

Para o problema (b) as condições homogêneas nos impõe a escolha de $\lambda^2 < 0$. Assim, $R(\lambda r) = I_m(\lambda r)$ e $Z(\lambda \zeta) = \text{sen}\left(\frac{n\pi\zeta}{h}\right)$ e uma solução particular para o problema será

$$v_{m,n}(r, \varphi, \zeta) = I_m\left(\frac{n\pi r}{h}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi\zeta}{h}\right) [A_{m,n} \cos(m\varphi) + B_{m,n} \cos(m\varphi)].$$

A solução do problema é

$$v(r, \varphi, \zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_m\left(\frac{n\pi r}{h}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi\zeta}{h}\right) [A_{m,n} \cos(m\varphi) + B_{m,n} \cos(m\varphi)].$$

A condição $v(a, \varphi, \zeta) = f(\varphi, \zeta)$ determina os coeficientes $A_{m,n}$ e $B_{m,n}$ pois

$$f(\varphi, \zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(\zeta) \cos(m\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m(\zeta) \text{sen}(m\varphi)$$

com

$$A_m(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} I_m\left(\frac{n\pi a}{h}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi\zeta}{h}\right),$$

$$B_m(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n} I_m\left(\frac{n\pi a}{h}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi\zeta}{h}\right),$$

de onde vem

$$A_{m,n} = \frac{2}{h I_m\left(\frac{n\pi a}{h}\right)} \int_0^h A_m(\zeta) \text{sen}\left(\frac{n\pi\zeta}{h}\right) d\zeta,$$

$$B_{m,n} = \frac{2}{h I_m\left(\frac{n\pi a}{h}\right)} \int_0^h B_m(\zeta) \text{sen}\left(\frac{n\pi\zeta}{h}\right) d\zeta.$$

Exemplo 2 - Resfriamento de um cilindro infinito de seção circular a .

Achar a temperatura $u(\vec{r}, t)$ de um cilindro infinito, de seção circular de raio a , primitivamente mantido à temperatura $f(r)$ e cuja superfície é mantida à temperatura u_0 (sendo $f(r) > u_0$ para $0 \leq r \leq a$).

A temperatura u será solução da equação do calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \nabla^2 u$, onde $\kappa = \frac{k}{\rho c}$, sendo k a condutividade térmica, ρ a densidade e c o calor específico do material.

Aqui, a equação se reduz a

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (5.6.3)$$

pois $u(\vec{r}, t)$ é independente de φ e ζ . Portanto, $u = u(r, t)$ e as condições de contorno são $u(r, 0) = f(r)$ e $u(a, t) = u_0$ para todo $t \geq 0$.

As condições para $u(\vec{r}, t)$ não são homogêneas, mas $v(r, t) = u(r, t) - u_0$ é solução da equação (5.6.3) e satisfaz as condições $v(r, 0) = f(r) - u_0 =: g(r)$ e $v(a, t) = 0$ para todo $t \geq 0$.

Procurando uma solução da forma $v(r, t) = R(r)T(t)$ obtemos duas equações

$$T' - \lambda \kappa T = 0, \quad \therefore \quad T(t) = C e^{\lambda \kappa t}$$

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) - \lambda R(r) = 0,$$

onde λ e C são constantes arbitrárias. Como devemos esperar, por razões físicas, que $v \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, devemos ter $\lambda = -\mu^2 < 0$. Assim,

$$T(t) = C e^{-\mu^2 \kappa t} \quad \text{e} \quad R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) + \mu^2 R(r) = 0$$

e, portanto, $R(r) = A J_0(\mu r)$. Aplicando as condições de contorno, as soluções particulares são da forma

$$v_n(r, t) = A_n J_0(\mu_n r) e^{-\mu_n^2 \kappa t},$$

com $\mu_n = \alpha_{0n}/a$, pois $J_0(\mu_n a)$ deve ser nulo (α_{0n} é o n -ésimo zero de $J_0(x)$ para $x > 0$). Assim, obtemos a solução geral

$$v(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r) e^{-\mu_n^2 \kappa t},$$

onde os A_n são determinados pela condição

$$v(r, 0) = g(r) = f(r) - u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r)$$

e, portanto, pelas relações de ortogonalidade de J_0 ,

$$A_n = \frac{2}{a^2 [J_0'(\alpha_{0n})]^2} \int_0^a [f(r) - u_0] J_0(\mu_n r) r dr.$$

A solução $u(r, t)$ é, pois,

$$u(r, t) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r) e^{-\mu_n^2 \kappa t}.$$

Exemplo 3 – Vibrações transversais na membrana circular.

Sabe-se que os pequenos movimentos transversais de uma membrana fina, flexível e plana sujeita somente a forças de tensão, obedecem à equação de ondas

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \psi,$$

onde $\psi(r, \varphi, t)$ é o deslocamento transversal do ponto $P(r, \varphi)$ no instante t . Se a membrana tiver a forma circular e for fixa pela borda, então ψ satisfaz a condição de contorno $\psi(a, \varphi, t) = 0$. Um movimento particular da membrana será determinado pelas condições iniciais $\psi(r, \varphi, 0) = f(r, \varphi)$ e $\frac{\partial \psi}{\partial t}(r, \varphi, 0) = g(r, \varphi)$. Seja $\psi(r, \varphi, t) = u(r, \varphi)T(t)$. Levando isso à equação de ondas obtemos duas equações

$$T''(t) + (\lambda v)^2 T(t) = 0, \quad \therefore T(t) = A \cos(\lambda v t) + B \sen(\lambda v t),$$

$$\nabla^2 u + \lambda^2 u = 0, \quad \text{com } u(a, \varphi) = 0.$$

Resolvendo a última com $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, obtemos

$$R(r) = J_m(\lambda r),$$

$$\Phi(\varphi) = A' \cos(m\varphi) + B' \sen(m\varphi), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Como $u(a, \varphi) = 0$ tem-se $J_m(\lambda a) = 0$ e, portanto, $\lambda \equiv \lambda_{mn} = \alpha_{mn}/a$, sendo α_{mn} o n -ésimo zero de $J_m(x)$ na semi-reta $x > 0$. Cada λ_{mn} corresponde a um modo normal de vibração:

$$\begin{aligned} \psi_{mn}(r, \varphi, t) = J_m(\lambda_{mn} r) & \left[A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sen(m\varphi) \right] \times \\ & \times \left[C_{mn} \cos(\lambda_{mn} v t) + D_{mn} \sen(\lambda_{mn} v t) \right]. \end{aligned}$$

Cada modo normal tem a frequência

$$f_{mn} = \frac{\lambda_{mn} v}{2\pi} = \frac{\alpha_{mn} v}{2\pi a}.$$

A solução geral será

$$\psi(r, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn}(r, \varphi, t).$$

Agrupando as diversas constantes, teremos

$$f(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{mn} J_m(\lambda_{mn} r) \cos(m\varphi) + B_{mn} J_m(\lambda_{mn} r) \operatorname{sen}(m\varphi) \right],$$

$$g(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(D_{mn} \lambda_{mn} v) J_m(\lambda_{mn} r) \cos(m\varphi) \right. \\ \left. + (E_{mn} \lambda_{mn} v) J_m(\lambda_{mn} r) \operatorname{sen}(m\varphi) \right].$$

Caímos novamente em séries de Fourier-Bessel, cujos coeficientes podem ser determinados como no Exemplo 1.

Os valores de λ^2 para os quais o problema tem solução não trivial ($u \neq 0$) chamam-se autovalores do operador Laplaciano ∇^2 com a condição de Dirichlet $u(a, \varphi) = 0$. As soluções correspondentes chamam-se autofunções.

Exemplo 4 – Autofunções do Laplaciano no círculo.

Determinar as autofunções do Laplaciano no círculo de raio a que se anulam na circunferência do mesmo, isto é, que resolvam $\nabla^2 f + \lambda^2 f = 0$ com $f(a, \varphi) = 0$. As autofunções são

$$f_{mn} = J_m(\lambda_{mn} r) \begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \operatorname{sen}(m\varphi) \end{cases} \text{ para } \begin{matrix} m \geq 0 \\ m > 0 \end{matrix}.$$

Os seus autovalores são $\lambda_{mn}^2 = \alpha_{mn}^2/a^2$. Observe-se que estas funções são ortogonais no círculo. Podemos normalizá-las. As autofunções normalizadas são

$$\frac{1}{a\sqrt{\pi}} \frac{J_0(\lambda_{0n} r)}{J_0'(\alpha_{0n})} \text{ e } \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{\pi}} \frac{J_m(\lambda_{mn} r)}{J_m'(\alpha_{mn})} \begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \operatorname{sen}(m\varphi) \end{cases} \text{ para } m \geq 0.$$

Exemplo 5 – Autofunções do Laplaciano no setor circular $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq \gamma$.

As autofunções normalizadas do operador Laplaciano ∇^2 no setor e nulas nos bordos são

$$\frac{2}{a\sqrt{\gamma}} \frac{J_{\nu_n}(\lambda_{\nu_n, m} r)}{J_{\nu_n}'(\alpha_{\nu_n, m})} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{\gamma} \varphi \right),$$

$n \in \mathbb{N}$, onde $\nu_n = n\pi/\gamma$, $\lambda_{\nu_n, m} = \alpha_{\nu_n, m}/a$ e onde $\alpha_{\nu_n, m}$ é o m -ésimo zero de $J_{\nu_n}(x)$ na semi-reta $x > 0$.

Exemplo 6 – Autofunções do Laplaciano no cilindro $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \zeta \leq h$.

As autofunções de ∇^2 no cilindro e nulas na superfície total do mesmo são as soluções da equação $\nabla^2 u + \lambda^2 u = 0$ em $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \zeta \leq h$ com as condições $u(a, \varphi, \zeta) = u(r, \varphi, 0) = u(r, \varphi, h) = 0$. Procurando soluções na forma $u(r, \varphi, \zeta) = R(r)\Phi(\varphi)Z(\zeta)$ teremos

$$r^2 R'' + rR' + [(\lambda^2 - \mu^2)r^2 - m^2]R = 0,$$

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0,$$

$$Z'' + \mu^2 Z = 0,$$

onde $-\mu^2$ e $-m^2$ são constantes de separação de variáveis. As soluções possíveis são

$$R(r) = AJ_m(\sigma r), \quad \Phi(\varphi) = C \cos(m\varphi) + D \sin(m\varphi),$$

$$Z(\zeta) = a \sin(\mu\zeta) + b \cos(\mu\zeta),$$

$m \in \mathbb{N}$, onde $\sigma^2 = \lambda^2 - \mu^2$. Pela imposição das condições de contorno devemos ter $\sigma \equiv \sigma_{m,n} = \alpha_{m,n}/a$, $b = 0$ e $\mu \equiv \mu_l = l\pi/h$, $l \in \mathbb{N}$, onde $\alpha_{m,n}$ é o n -ésimo zero de $J_m(x)$ para $x > 0$. As autofunções são, pois,

$$J_m(\sigma_{m,n} r) \sin\left(\frac{l\pi}{h}\zeta\right) \begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{cases} \text{ para } \begin{matrix} m \geq 0 \\ m > 0 \end{matrix}.$$

Os autovalores são

$$\lambda_{mn}^2 = \frac{\alpha_{mn}^2}{a^2} + \frac{l^2 \pi^2}{h^2}.$$

Exemplo 7 – Autofunções do Laplaciano na esfera de raio a.

Pesquisemos as autofunções do Laplaciano na esfera de raio a e centro O que se anulam na superfície da mesma, isto é, as soluções de $\nabla^2 \psi(r, \theta, \varphi) + \lambda^2 \psi(r, \theta, \varphi) = 0$ com $\psi(a, \theta, \varphi) = 0$. Escrevendo $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$ obtemos duas equações

$$r^2 R'' + 2rR' + [\lambda^2 r - l(l+1)]R = 0,$$

$$\left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + l(l+1) \right] Y_l = 0,$$

onde Y_l é qualquer dos harmônicos esféricos $Y_l^m(\theta, \varphi)$ com $|m| \leq l$. Com a substituição $R(r) = f(r)/\sqrt{r}$ temos a equação de Bessel de ordem $l+1/2$, com solução

$$R(r) = \frac{A}{\sqrt{r}} J_{l+1/2}(\lambda r) + \frac{B}{\sqrt{r}} N_{l+1/2}(\lambda r).$$

Excluindo $N_{l+1/2}$ por ser divergente em $r = 0$, as autofunções procuradas são

$$\psi_{l,m,n}(r, \theta, \varphi) = \frac{J_{l+1/2}(\lambda_{l,n} r)}{\sqrt{r}} Y_l^m(\theta, \varphi),$$

com $\lambda_{l,n} = \alpha_{l,n}$, sendo $\alpha_{l,n}$ o n -ésimo zero positivo de $J_{l+1/2}(x)$. As autofunções $\psi_{l,m,n}(r, \theta, \varphi)$ são ortogonais na esfera:

$$\begin{aligned} \int_{r \leq a} \psi_{l,m,n} \overline{\psi_{l',m',n'}} dv &= \\ \left(\int_0^a r J_{l+1/2}(\lambda_{l,n} r) J_{l'+1/2}(\lambda_{l',n'} r) dr \right) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_l^m(\theta, \varphi) \overline{Y_{l'}^{m'}(\theta, \varphi)} \sin(\theta) d\theta d\varphi &= \\ &= \frac{a^2 [J'_{l+1/2}(\alpha_{l,n})]^2}{2} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{nn'}. \end{aligned}$$

Capítulo 6

Funções de Green

6.1 Introdução

Sabe-se da Eletrostática que, na presença de cargas distribuídas com densidade $\rho(\vec{r})$ sobre uma região Ω do espaço, o potencial satisfaz à equação de Poisson

$$\nabla^2\psi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}), \quad (6.1.1)$$

(em unidades MKS) e é dado por

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'. \quad (6.1.2)$$

Sabe-se também que, no caso de uma carga pontual q_1 , localizada no ponto \vec{r}_1 , o potencial é

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \quad (6.1.3)$$

Este resultado pode ser generalizado para N cargas pontuais q_i :

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \quad (6.1.4)$$

A substituição de cargas pontuais discretas por cargas distribuídas com densidade $\rho(\vec{r})$, conduz à integral (6.1.2).

Uma dedução formal deste resultado é facilitada pelo uso da “função” $\delta(x - x')$ de Dirac, cuja definição usual é

$$\begin{aligned} \delta(x - x') &= 0 & \text{se } x &\neq x' \\ \delta(x - x') &= \infty & \text{se } x &= x' \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') f(x) dx = f(x'), \quad (6.1.5)$$

para toda função $f(x)$ contínua a $x = x'$. Tal função não existe no sentido usual de função, mas pode ser interpretada corretamente como distribuição (vide Capítulo 7, página 143). Esta definição se estende ao espaço tridimensional \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned}\delta(\vec{r} - \vec{r}') &= 0 & \text{se } \vec{r} \neq \vec{r}' \\ \delta(\vec{r} - \vec{r}') &= \infty & \text{se } \vec{r} = \vec{r}'\end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\vec{r} - \vec{r}') f(\vec{r}) d\tau = f(\vec{r}').$$

Convém notar que $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ é função par do argumento, isto é, que $\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(\vec{r}' - \vec{r})$.

Interpreta-se fisicamente $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ como a densidade de uma distribuição de cargas constituída de uma carga pontual unitária localizada no ponto \vec{r}' . A carga pontual $q = -\epsilon_0$ no ponto \vec{r}' é descrita por $-\epsilon_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ e dá origem ao potencial $\psi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$. Por conseguinte, a função $G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ satisfaz à equação

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (6.1.6)$$

Ora, uma solução da equação de Poisson pode ser obtida com o auxílio dessa função $G(\vec{r}, \vec{r}')$

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') d\vec{r}'. \quad (6.1.7)$$

Com efeito, aplicando-se ∇^2 a ambos os membros de (6.1.7), tem-se

$$\begin{aligned}\nabla^2 \psi &= -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') d\vec{r}' \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') d\vec{r}' = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}').\end{aligned}$$

Assim, a função $\psi(\vec{r})$ definida por (6.1.7), é uma solução da Eq. (6.1.1). Diz-se que a função $G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ é uma função de Green para a equação de Poisson.

O método da função de Green pode ser estendido a operadores diferenciais parciais bem mais gerais.

Seja D o operador diferencial parcial linear

$$D \equiv \sum a_m(x) \frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}, \quad (6.1.8)$$

com $x \equiv (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, $|m| = m_1 + \dots + m_n$, onde $a_m(x)$ são funções diferenciáveis.

A equação diferencial parcial linear não-homogênea

$$Df(x) = g(x), \quad (6.1.9)$$

onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções definidas sobre um aberto Ω de \mathbb{R}^n , pode ser resolvida com o auxílio de uma função de Green, isto é, de uma função $G(x, x')$ de dois pontos $x, x' \in \Omega$, verificando a equação

$$D_x G(x, x') = \delta(x - x'), \quad (6.1.10)$$

onde D_x indica que D opera sobre a função de x ficando o ponto x' fixo. Com efeito, qualquer solução particular da Eq. (6.1.9) se escreve formalmente

$$f(x) = \int_{\Omega} G(x, x') g(x') dx', \quad (6.1.11)$$

porquanto

$$Df(x) = \int_{\Omega} D_x G(x, x') g(x') dx' = g(x).$$

Diz-se, então, que $G(x, x')$ é uma possível função de Green para a equação (6.1.9) ou para o operador D . Assim, a pesquisa das soluções da Eq. (6.1.9) se reduz à pesquisa das funções de Green da mesma equação, ou seja, das soluções da Eq. (6.1.10). Duas funções de Green da mesma equação diferem por uma solução da equação homogênea associada $Dh = 0$

Freqüentemente, o que se quer não é uma solução qualquer da Eq. (6.1.9), mas a solução particular da equação verificando condições de contorno, dadas sobre a fronteira do domínio Ω , e que podem ser homogêneas ou não-homogêneas (entre as condições de contorno incluímos, como caso particular, as condições iniciais). Chama-se função de Green do problema a solução da Eq. (6.1.10) que verifica as condições de contorno homogêneas correspondentes. Em termos desta função de Green, a solução do problema se escreve

$$f(x) = \int_{\Omega} G(x, x') g(x') dx' + h(x), \quad (6.1.12)$$

onde $h(x)$ é a solução da equação homogênea $Dh = 0$ que satisfaz às condições não-homogêneas.

Nós nos limitaremos a considerar equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem. A forma geral de uma equação com n variáveis independentes, que é linear nas derivadas de segunda ordem é

$$\sum_{i, j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \Phi \left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right), \quad (6.1.13)$$

onde os A_{ij} são funções analíticas nas variáveis x_1, \dots, x_n . No caso de duas variáveis independentes a equação tem a forma

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Phi \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (6.1.14)$$

Uma tal equação se classifica em hiperbólica, parabólica ou elíptica em um dado ponto (x, y) conforme o discriminante $\Delta = B^2 - AC$ seja $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$, respectivamente, nesse ponto (vide página 26). Uma equação é dita hiperbólica, parabólica ou elíptica numa região Ω do plano, se for desse tipo em cada ponto de Ω . Exemplos típicos dessas equações são:

a) Equação da corda vibrante: $\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ (hiperbólica).

b) Equação do calor: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t}$ (parabólica).

c) Equação de Laplace: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (elíptica).

Para cada tipo de equação existe um tipo de problema de contorno bem-posto (isto é, com solução única e estável).

Os problemas apropriados para as equações elípticas, em domínios limitados, são o problema de Dirichlet e o de Neumann. O primeiro consiste em determinar a solução da equação $Df = g$, sob a condição $f = \varphi$ sobre a fronteira Σ da região Ω . O segundo consiste em achar solução da mesma equação, sob a condição $\frac{\partial f}{\partial n} = \psi$ sobre a fronteira Σ de Ω . Se a região de Ω for ilimitada, a condição de Dirichlet ou de Neumann é insuficiente, havendo necessidade de uma condição de comportamento no infinito.

Para as equações hiperbólicas o problema mais indicado é o problema de Cauchy, que consiste em dar duas condições, $f = \varphi$ e $\frac{\partial f}{\partial n} = \psi$ sobre a fronteira (aberta) de uma região ilimitada.

Para as equações parabólicas, basta dar uma condição de Dirichlet ou uma condição de Neumann sobre a fronteira aberta de uma região ilimitada.

Os métodos para obtenção da função de Green variam segundo o tipo de problema proposto. Em geral, a função de Green é contínua para uma equação elíptica mas é uma função generalizada (distribuição) para uma equação hiperbólica.

6.2 Função de Green na Teoria de Sturm-Liouville

Consideremos o operador diferencial de segunda ordem

$$L \equiv \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x), \quad (6.2.1)$$

onde $a \leq x \leq b$, as funções $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ são funções contínuas, reais e $p(x) \geq 0$.

Investigaremos as seguintes equações diferenciais envolvendo L :

$$Lu + \lambda \omega u = 0, \quad (6.2.2)$$

$$Lf + k\omega f = g, \quad (6.2.3)$$

$$LG + k\omega G = \delta(x - x'), \quad (6.2.4)$$

onde λ e k são constantes e $\omega(x)$ é uma função real contínua, positiva para $a < x < b$.

Nos chamados problemas regulares o intervalo (a, b) é finito e $p(x)$, $\omega(x)$ são > 0 para $a \leq x \leq b$. Um problema é dito singular se o intervalo (a, b) é infinito ou se uma das funções $p(x)$, $\omega(x)$ se anula para $x = a$ ou $x = b$.

Nos problemas regulares, cada uma das equações (6.2.1)-(6.2.2)-(6.2.3)-(6.2.4) é acompanhada de um par de condições de contorno homogêneas da forma

$$\begin{aligned} B_a(y) &\equiv \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ B_b(y) &\equiv \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

onde α_1 , α_2 , β_1 e β_2 são constantes reais e $|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$.

O problema de Sturm-Liouville consiste em resolver a Eq. (6.2.2) com as condições (6.2.5). Este problema só tem solução não-trivial para determinados valores de λ chamados autovalores. Para cada autovalor λ existe uma solução $u_\lambda(x)$ (determinada a menos de uma constante), chamada autofunção.

• Propriedades das autofunções e autovalores

Listemos as propriedades básicas das autofunções e autovalores de problemas de Sturm-Liouville regulares.

- 1) Os autovalores são reais.

- 2) As autofunções correspondentes a autovalores distintos são ortogonais, com peso $\omega(x)$, isto é,

$$\int_a^b \overline{u_\lambda(x)} u_\mu(x) \omega(x) dx = 0 \quad \text{se} \quad \lambda \neq \mu .$$

- 3) Existe uma infinidade numerável de autovalores reais λ_n e o único ponto de acumulação desses autovalores é $+\infty$ (o número de autovalores negativos é finito; quando $q(x) \geq 0$ e $\alpha_1 \alpha_2 \leq 0$, $\beta_1 \beta_2 \geq 0$ não há nenhum autovalor negativo).

- 4) O conjunto das autofunções do problema de Sturm-Liouville regular é completo, para a classe das funções $f(x)$ tais que

$$\int_a^b |f(x)|^2 \omega(x) dx < \infty , \quad (6.2.6)$$

onde a integral deve ser interpretada no sentido de Lebesgue.

Diz-se que uma autofunção está normalizada se

$$\int_a^b |u_n(x)|^2 \omega(x) dx = 1 .$$

Qualquer função $f(x)$ satisfazendo (6.2.6) pode ser desenvolvida em série

$$f(x) \sim \sum \alpha_n u_n(x)$$

com

$$a_n = \int_a^b f(x) \overline{u_n(x)} \omega(x) dx . \quad (6.2.7)$$

Admite-se que a função $\delta(x - x')$ tenha um desenvolvimento deste tipo, já que podemos dar um sentido à integral

$$\int_a^b \delta(x - x') \overline{u_n(x)} \omega(x) dx = \omega(x') u_n(x') .$$

Assim, tem-se

$$\delta(x - x') = \omega(x') \sum_n \overline{u_n(x')} u_n(x) . \quad (6.2.8)$$

No caso $\omega(x) \equiv 1$, esta fórmula (relação de completeza) fica

$$\delta(x - x') = \sum_n \overline{u_n(x')} u_n(x).$$

Consideremos a equação não-homogênea

$$Lf(x) + k\omega(x)f(x) = g(x), \quad (6.2.9)$$

acompanhada das condições de contorno

$$B_a(f) = 0, \quad B_b(f) = 0. \quad (6.2.10)$$

Se a constante k que figura na equação não for um dos autovalores do problema de Sturm-Liouville, a solução do problema (6.2.9) é única e é obtida através da função de Green do problema, isto é, de uma função contínua $G(x, x')$, que satisfaz à equação.

$$LG(x, x') + k\omega(x)G(x, x') = \delta(x - x'), \quad (6.2.11)$$

$x, x' \in (a, b)$, e às condições

$$B_a(G) = 0, \quad B_b(G) = 0.$$

Com efeito, a função definida por

$$f(x) = \int_a^b G(x, x')g(x')dx', \quad (6.2.12)$$

satisfaz obviamente às condições (6.2.10) e, além disso, tem-se

$$\begin{aligned} Lf(x) + k\omega(x)f(x) &= \int_a^b [LG(x, x') + k\omega(x)G(x, x')]g(x')dx' \\ &= \int_a^b \delta(x - x')g(x')dx' = g(x), \end{aligned}$$

de modo que $f(x)$ é a solução (única) do problema (6.2.9).

• Construção da função de Green do problema de Sturm-Liouville

Discutiremos agora dois métodos de construção de funções de Green em problemas de Sturm-Liouville unidimensionais: o método das autofunções e o método direto.

A - Método das autofunções

Seja u_n , $n \in I$, o sistema ortonormal completo das autofunções do problema de Sturm-Liouville, correspondentes aos autovalores λ_n . A função de Green $G(x, x')$ pode ser desenvolvida em uma série de tais funções:

$$G(x, x') = \sum_{n \in I} c_n(x') u_n(x).$$

Levando em conta a equação (6.2.11) e usando (6.2.8), obtemos

$$\begin{aligned} LG(x, x') + k\omega(x)G(x, x') &= \sum_{n \in I} c_n(x') [k - \lambda_n] \omega(x) u_n(x) \\ &= \omega(x') \sum_{n \in I} \overline{u_n(x')} u_n(x), \end{aligned}$$

ou seja, $\sum_{n \in I} c_n(x') [k - \lambda_n] u_n(x) = \frac{1}{\omega(x')} \delta(x - x')$. Comparando as séries no primeiro e no segundo membro vem

$$c_n(x') = \frac{\overline{u_n(x')}}{k - \lambda_n}.$$

Portanto, $G(x, x')$ admite o seguinte desenvolvimento bilinear

$$G(x, x') = \sum_{n \in I} \frac{\overline{u_n(x')} u_n(x)}{k - \lambda_n}. \quad (6.2.13)$$

Observa-se que $G(x, x')$ é indefinida se k for um dos autovalores λ_m . Nota-se também que $G(x, x')$, para k real, goza da propriedade de simetria

$$G(x, x') = \overline{G(x', x)}. \quad (6.2.14)$$

Exemplo 1. Função de Green da equação das oscilações forçadas

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = g, \quad 0 \leq x \leq L,$$

com as condições $f(0) = f(L) = 0$.

As autofunções normalizadas do problema

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda u = 0, \quad u(0) = u(L) = 0,$$

são $u_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ e os respectivos autovalores são $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $n = 1, 2, \dots$.

A função de Green do problema é, pois,

$$G(x, x') = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x'}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right)}{k^2 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}}. \quad (6.2.15)$$

B - Método direto

Retomemos à equação (6.2.9). Observamos que, se $x = x'$, a função de Green obedece à equação homogênea

$$LG(x, x') + k\omega(x)G(x, x') = 0, \quad x \neq x'. \quad (6.2.16)$$

Então, se f_1 e f_2 forem soluções linearmente independentes da Eq. (6.2.16), $G(x, x')$ se exprime, em cada um dos intervalos (a, x') , (x', b) , como combinação linear de f_1 e f_2 :

$$G(x_1, x_2) = \begin{cases} G_1(x, x') = C_1 f_1 + C_2 f_2, & a < x < x', \\ G_2(x, x') = D_1 f_1 + D_2 f_2, & x' < x < b, \end{cases}$$

sendo que G_1 e G_2 deverão satisfazer às condições

$$(1) B_a(G_1) = 0,$$

$$(2) B_b(G_2) = 0.$$

Seja u a solução (única) do problema

$$Lu + k\omega u = 0, \quad u(a) = -\alpha_2, \quad u'(a) = \alpha_1$$

e v a solução do problema

$$Lv + k\omega v = 0, \quad v(b) = -\beta_2; \quad v'(b) = \beta_1.$$

É claro que $B_a(u) = 0$ e $B_b(v) = 0$. Temos, pois,

$$G(x, x') = \begin{cases} G_1(x, x') = Au(x), & a < x < x' \\ G_2(x, x') = Bv(x), & x' < x < b \end{cases}$$

Imporemos a $G(x, x')$ duas condições adicionais:

(3) Continuidade de $G(x, x')$ no ponto x' :

$$G_1(x', x') = G_2(x', x').$$

(4) Descontinuidade de primeira espécie de $G'(x, x')$ no ponto x' , com salto $\sigma = \frac{1}{p(x')}$:

$$G'_2(x', x') - G'_1(x', x') = \frac{1}{p(x')}.$$

Acima, G' refere-se à derivada parcial de $G(x, x')$ em relação a x .

As condições (3) e (4) determinam as constantes A e B :

$$Au(x') = Bv(x') \quad \therefore \quad B = \frac{u(x')}{v(x')} A, \quad (6.2.17)$$

$$A [u(x')v'(x') - u'(x')v(x')] = \frac{v(x')}{p(x')}. \quad (6.2.18)$$

A expressão entre colchetes é o Wronskiano de u e v no ponto x' . Logo

$$A = \frac{v(x')}{p(x')W(u, v, x')}, \quad B = \frac{u(x')}{p(x')W(u, v, x')}. \quad (6.2.19)$$

Verifica-se facilmente que o produto $p(x)W(u, v, x)$ é uma constante: multiplica-se a equação $Lu + k\omega u = 0$ por v e a equação $Lv + k\omega v = 0$ por u e subtrai-se uma da outra. Obtém-se $(pW)' = 0$ ou seja $pW = C$. Se u e v forem dependentes, $C = 0$. Neste caso a função de Green é indefinida. Para $C \neq 0$ a expressão para a função de Green é

$$G(x, x') = \begin{cases} \frac{u(x)v(x')}{C}, & a \leq x \leq x' \\ \frac{u(x')v(x)}{C}, & x' \leq x \leq b \end{cases}. \quad (6.2.20)$$

Exemplo 2. Equação de Poisson unidimensional

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

com as condições: $\Phi(0) = 0$, $\Phi(1) = 0$. A função de Green do problema obedece à equação

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, x') = \delta(x - x'),$$

e às condições $G(0, x') = 0$, $G(1, x) = 0$, $0 < x' < 1$.

A solução geral da equação homogênea é $Ax + B$. Escolhamos $u(x) = x$ e $v(x) = (x - 1)$. O Wronskiano $W(u, v, x)$ é 1 e $p(x) \equiv 1$. Portanto,

$$G(x, x') = \begin{cases} x(x' - 1), & 0 \leq x \leq x' \\ x'(x - 1), & x' \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

A solução do problema é

$$\Phi(x) = -\frac{1}{\epsilon_0}(x - 1) \int_0^x x' \rho(x') dx' - \frac{1}{\epsilon_0} x \int_x^1 (x' - 1) \rho(x') dx'.$$

A expressão (6.2.20) para a função de Green ainda vale se o intervalo (a, b) é infinito ou semi-infinito ou se $p(x) = 0$ para $x = a$ ou para $x = b$.

Exemplo 3. Função de Green que obedece à equação

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dG}{dx} - \frac{\ell(\ell + 1)}{x^2} G = \delta(x - a),$$

com $a > 0$, ℓ inteiro e ≥ 0 , $0 < x < \infty$, e às condições, $G(0, x') = 0$, $G(\infty, x') = 0$.

A equação homogênea

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{df}{dx} - \frac{\ell(\ell + 1)}{x^2} f = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

tem por solução geral $f = Ax^\ell + Bx^{-\ell-1}$. Tem-se $u(x) \equiv x^\ell$ e $v(x) \equiv x^{-\ell-1}$ já que $u(0) = 0$ e $v(\infty) = 0$. Por outro lado, $p(x) = x^2$ e $W(u, v, x) = -(2\ell + 1)x^{-2}$. Portanto, a função de Green é

$$G(x, x') = -\frac{1}{2\ell + 1} \begin{cases} x^\ell x'^{-\ell-1}, & 0 < x \leq x', \\ x'^\ell x^{-\ell-1}, & x \geq x'. \end{cases}$$

O método direto também se aplica a outros tipos de condições, como por exemplo:

a) se $p(a) = p(b)$ e as condições de contorno são periódicas

$$G(a, x') = G(b, x'); \quad G'(a, x') = G'(b, x').$$

Neste caso, a expressão de G não é dada por (6.2.20) mas por

$$G(x, x') = \begin{cases} C_1 f_1 + C_2 f_2, & a \leq x \leq x' \\ D_1 f_1 + D_2 f_2, & x' \leq x \leq b \end{cases},$$

onde C_1 , C_2 , D_1 e D_2 são determinadas pelas condições de contorno e pelas condições (3) e (4).

b) Condições iniciais

$$G(a, x') = 0, \quad G'(a, x') = 0.$$

Neste caso, a função de Green é da forma

$$G(x, x') = \begin{cases} 0 & \text{se } a \leq x \leq x' \\ D_1 f_1 + D_2 f_2 & \text{se } x' \leq x \leq b \end{cases}$$

e não goza da propriedade de simetria.

Exemplo 4. Movimento de uma partícula ao longo de uma reta, sob a ação de uma força dirigida segundo a reta. A partícula parte do repouso, na origem. O deslocamento satisfaz a equação de Newton

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = f(x), \quad 0 \leq t < \infty,$$

e as condições iniciais $u(0), u'(0) = 0$.

A função de Green satisfaz

$$m \frac{d^2 G}{dt^2} = \delta(t - t'), \quad G(0, t') = G'(0, t') = 0.$$

Usando o método direto, obtém-se

$$G(t, t') = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t' \\ \frac{t - t'}{m}, & t' \leq t \end{cases}.$$

Portanto,

$$u(t) = \int_0^t \frac{t-t'}{m} f(t') dt' .$$

Observa-se que o deslocamento no instante t depende apenas da força agindo antes de t , como dever-se-ia esperar pelo princípio da causalidade (as causas devem preceder os efeitos).

6.3 Funções de Green em Várias Variáveis. Domínios Limitados

Se o operador diferencial D for auto-adjunto, a função de Green do problema

$$Df(x) + kf(x) = g(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (6.3.1)$$

com condições de contorno homogêneas, é dada pela expansão bilinear

$$G(x, x') = \sum_m \frac{\overline{u_m(x')} u_m(x)}{k - \lambda_m}, \quad (6.3.2)$$

com $m = m_1, m_2, \dots, m_n$ e onde $u_m(x)$ são as autofunções normalizadas em Ω de D , sujeitas às mesmas condições homogêneas; λ_m são os correspondentes autovalores.

Exemplo 1. Função de Green da equação de Helmholtz no disco $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, sujeita às condições $G(a, \theta, r', \theta') = 0$ e $G(r, \theta, r', \theta')$ limitada no disco.

As autofunções do problema

$$\nabla^2 u(r, \theta) + \lambda^2 u(r, \theta) = 0, \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$u(a, \theta) = 0$ com $u(r, \theta)$ limitada, são

$$u_{m,n}(r, \theta) = J_m(\lambda_{mn}r) \begin{Bmatrix} \cos(m\theta) \\ \sin(m\theta) \end{Bmatrix},$$

$m = 0, 1, 2, \dots$ e $n = 1, 2, 3, \dots$ e os autovalores são $\lambda_{mn}^2 = \alpha_{mn}^2/a^2$, onde α_{mn} é o n -ésimo zero da função de Bessel J_m no semi-eixo real positivo.

As autofunções normalizadas são

$$\frac{1}{a\sqrt{\pi}} \frac{J_0(\lambda_{0n}r)}{J'_0(\alpha_{0n})}, \quad \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{J_m(\lambda_{mn}r)}{J'_m(\alpha_{mn})} \begin{Bmatrix} \cos(m\theta) \\ \sin(m\theta) \end{Bmatrix}. \quad (6.3.3)$$

Portanto, a função de Green é dada por

$$G(r, \theta, r', \theta') = \frac{1}{a^2 \pi} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_m(\lambda_{mn} r) J_m(\lambda_{mn} r') \cos(m\theta) \cos(m\theta')}{[J'_m(\alpha_{mn})]^2 (k^2 - \lambda_{mn}^2)} + \frac{2}{a^2 \pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_m(\lambda_{mn} r) J_m(\lambda_{mn} r') \operatorname{sen}(m\theta) \operatorname{sen}(m\theta')}{[J'_m(\alpha_{mn})]^2 (k^2 - \lambda_{mn}^2)}, \quad (6.3.4)$$

onde,

$$\epsilon_m = \begin{cases} 2 & \text{se } m > 0 \\ 1 & \text{se } m = 0 \end{cases}$$

Exemplo 2. Função de Green da equação de Helmholtz na esfera $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, sujeita às condições de ser limitada para $0 \leq r \leq a$ e de se anular para $r = a$.

As autofunções normalizadas do Laplaciano na esfera são

$$u_{\ell, m, n}(r, \theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{a^3}} \frac{j_{\ell}(\lambda_{\ell n} r)}{j_{\ell+1}(\alpha_{\ell n})} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi), \quad (6.3.5)$$

onde Y_{ℓ}^m são os harmônicos esféricos normalizados e j_{ℓ} a função de Bessel esférica de ordem ℓ , com $\lambda_{\ell n} = \alpha_{\ell n}/a$, sendo que $\alpha_{\ell n}$ é o n -ésimo zero de j_{ℓ} no semi-eixo real positivo.

A função de Green é, portanto,

$$G(r, \theta, \varphi, r', \theta', \varphi') = \frac{2}{a^3} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_{\ell}(\lambda_{\ell n} r) j_{\ell}(\lambda_{\ell n} r') Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) \overline{Y_{\ell}^m(\theta', \varphi')}}{[j_{\ell+1}(\alpha_{\ell n})]^2 (k^2 - \lambda_{\ell n}^2)}. \quad (6.3.6)$$

• Função de Green na teoria do potencial

A equação de Poisson

$$\nabla^2 \psi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (6.3.7)$$

pode ser integrada com o auxílio da segunda identidade de Green, ou teorema de Green:

$$\int_{\Omega} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d\tau = \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds, \quad (6.3.8)$$

onde Ω é uma região do espaço limitada pela superfície regular fechada S ; $\frac{\partial u}{\partial n} = \vec{n} \cdot \operatorname{grad} u$; \vec{n} é a normal exterior e u e v são funções regulares definidas

em $\Omega + S$. Admitimos a validade deste teorema mesmo se uma das funções não é regular, mas a outra é.

Tomando $u \equiv \psi(\vec{r})$ (solução da Eq. (6.3.7)) e $v \equiv G(\vec{r}, \vec{r}')$, sendo esta uma possível função de Green da Eq. (6.3.7), isto é, uma solução particular da equação

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \tag{6.3.9}$$

obtemos, usando o teorema de Green,

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) = & - \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') d\vec{r}' + \\ & + \int_S \psi(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n'}(\vec{r}, \vec{r}') ds' - \int_S G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \psi}{\partial n'}(\vec{r}') ds', \end{aligned}$$

que é a solução geral da equação de Poisson em termos de uma função de Green arbitrária. Nota-se que se $\rho(\vec{r}) \equiv 0$, ψ se reduz a

$$\psi(\vec{r}) = \int_S \psi \frac{\partial G}{\partial n'} dS' - \int_S \frac{\partial \psi}{\partial n'} G dS', \tag{6.3.10}$$

que é a solução mais geral da equação de Laplace. Com relação a esta equação, colocam-se dois tipos de problemas:

- a) Problema de Dirichlet: Determinar a solução (limitada e univalente) da equação $\nabla^2 \psi = 0$ em Ω , conhecendo-se seu valor sobre S .
- b) Problema de Neumann: Determinar a solução (limitada e univalente) de $\nabla^2 \psi = 0$ em Ω , conhecendo-se o valor sobre S de $\partial \psi / \partial n$.

Usando-se a identidade

$$\text{div}(\phi \text{ grad } \phi) = \phi \nabla^2 \phi + (\text{grad } \phi)^2,$$

e o teorema de Gauss, obtemos

$$\int_{\Omega} (\text{grad } \phi)^2 d\tau = \int_S \frac{\partial \phi}{\partial n} ds,$$

de onde se conclui que $\phi = 0$ ou $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ sobre S acarreta $\phi = \text{constante}$ em Ω . Isso implica a unicidade do problema de Dirichlet, mas a solução do problema de Neumann é determinada a menos de uma constante aditiva.

Não se pode, pois, fixar arbitrariamente ψ e $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ ao mesmo tempo, sobre S . Devemos portanto, eliminar uma das integrais de superfície da expressão (6.3.10).

No problema de Dirichlet, basta impor que $G(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ para \vec{r} ou $\vec{r}' \in S$.

No problema de Neumann, a condição $\frac{\partial G}{\partial n} = 0$ sobre S é incompatível com a equação (6.3.10), da qual resulta, através do teorema de Gauss, a condição $\int \frac{\partial G}{\partial n} ds = 1$. Podemos escolher $\frac{\partial G}{\partial n} = K \therefore K = \frac{1}{|S|}$, onde $|S|$ é a área de S . Levando $\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{|S|}$ à equação (6.3.10), obtemos

$$\psi(\vec{r}) = \bar{\psi}_S - \int_S G \frac{\partial\psi}{\partial n'} ds', \quad (6.3.11)$$

onde $\bar{\psi}_S = \frac{1}{|S|} \int_S \psi(\vec{r}) ds$ é o valor médio de $\psi(\vec{r})$ sobre a superfície S .

• Problema de Dirichlet para a esfera pelo método das imagens

Seja S a superfície da esfera de raio a e centro O . A função de Green para o interior de S , que se anula quando \vec{r} ou \vec{r}' estiver sobre S é da forma

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + h(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (6.3.12)$$

com $\nabla^2 h(\vec{r}, \vec{r}') = 0$.

A primeira parte de (6.3.12) representa o potencial no ponto P , de coordenadas \vec{r} , criado pela carga $q = -\epsilon_0$, no ponto $Q(\vec{r}')$. Pelo método das imagens, $h(\vec{r}, \vec{r}')$ será interpretada como o potencial devido a carga q' (imagem) no ponto $Q'(\vec{r}'')$ exterior a S , sendo q' e Q' determinados de modo a satisfazer a condição

$$\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}''|} = 0 \quad \text{se } \vec{r} \in S.$$

Para maior simplicidade, escolhamos o ponto Q sobre o eixo Oz . As coordenadas esféricas de Q, Q' e P são respectivamente $(d, 0, 0), (d', \theta', \varphi')$ e (r, θ, φ) . A função de Green se escreve, então

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + d'^2 - 2rd \cos \gamma}} \right\}. \quad (6.3.13)$$

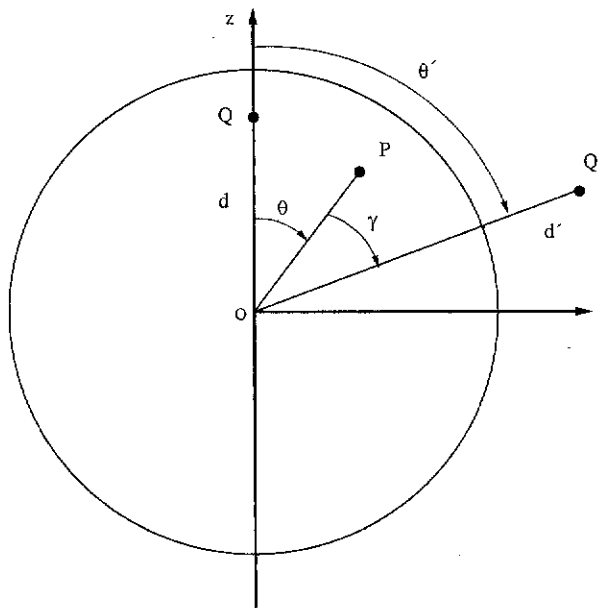


Figura 6.1. Função de Green. O método das imagens.

Para a definição de γ e das demais grandezas, vide Figura 6.1.

Para $r = a$ devemos ter,

$$\frac{q}{\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{a^2 + d'^2 - 2ad \cos \gamma}} = 0.$$

Usando a função geratriz podemos expandir cada uma destas funções em série de polinômios de Legendre:

$$q \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{d^\ell}{a^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta) + q' \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a^\ell}{d'^{\ell+1}} P_\ell(\cos \gamma) = 0. \quad (6.3.14)$$

Pelo teorema da adição temos

$$P_\ell(\cos \gamma) = P_\ell(\cos \theta') P_\ell(\cos \theta) + 2 \sum_{m=1}^{\ell} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_\ell^m(\cos \theta') P_\ell^m(\cos \theta) \cos(m(\varphi - \varphi')). \quad (6.3.15)$$

Levando (6.3.15) a (6.3.14) e igualando a zero os coeficientes correspondentes a $P_\ell^m(\cos \theta) \cos(m(\varphi - \varphi'))$, obtemos

$$q \frac{d^\ell}{a^{\ell+1}} + q' \frac{a^\ell}{d^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta') = 0, \quad (6.3.16)$$

$$q \frac{(l-m)!}{(l+m)!} q' \frac{a^\ell}{d^{\ell+1}} P_\ell^m(\cos \theta') = 0, \quad (6.3.17)$$

para $\ell = 0, 1, 2, \dots$ e $m = 1, \dots, \ell$. A expressão só se anula se $\cos(\theta') = \pm 1$, isto é para $\theta' = 0$ ou $\theta' = \pi$. Da expressão (6.3.16) se obtém, para $\cos(\theta') = 1$,

$$\frac{q}{a} + \frac{q'}{d'} = 0 \quad \therefore \quad q' = -\frac{d'}{a} q \quad (\ell = 0),$$

$$q \frac{d}{a^2} + q' \frac{a}{d'^2} = q \left(\frac{d}{a^2} - \frac{d'}{a} \frac{a}{d'^2} \right) = 0 \quad (\ell = 1),$$

de onde se tira

$$dd' = a^2 \quad \text{e} \quad q' = -\frac{a}{d} q. \quad (6.3.18)$$

Para $\cos(\theta') = -1$, obteríamos, de modo análogo

$$q' = -\frac{a}{d} q, \quad dd' = -a^2,$$

o que é um absurdo. Portanto Q' deve estar sobre a semi-reta OQ .

Com as substituições (6.3.18) e $q = -\epsilon_0$, a função de Green (6.3.13) fica

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} - \frac{a}{d} \frac{1}{\sqrt{r^2 + d'^2 - 2rd' \cos \theta}} \right). \quad (6.3.19)$$

Supondo o eixo OQ arbitrário, esta fórmula pode ser escrita

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{a}{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \right), \quad (6.3.20)$$

onde $|\vec{r}''| = r'' = \frac{a^2}{r'}$.

As posições das cargas real e virtual podem ser invertidas. Por conseguinte, a função de Green para o exterior da esfera tem a mesma forma (6.3.20).

A solução do problema de Dirichlet para o interior da esfera se escreve

$$\psi_0(\vec{r}) = \int_S \psi(\vec{r}') \left(\frac{\partial G}{\partial r'} \right)_{r=a} dS,$$

onde

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial G}{\partial r'} \right)_{r=a} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r'} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\alpha)}} \right. \\ &\quad \left. - a \frac{1}{r' \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\alpha)}} \right\}_{r'=a} \\ &= \frac{1}{4\pi a} \frac{a^2 - r^2}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos(\alpha))^{3/2}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\psi_0(\vec{r}) = \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi} \int \frac{f(\theta', \varphi')}{[r^2 + a^2 - 2ra \cos(\alpha)]^{3/2}} d\Omega', \quad (6.3.21)$$

onde \vec{r} é um ponto interior a esfera e $f(\theta', \varphi') = \psi(\vec{r})$ para $r' = a$.

A integral (6.3.21) chama-se integral de Poisson. A solução do problema de Dirichlet em questão, para o exterior da esfera se obtém do mesmo modo e se acha

$$\psi_0(\vec{r}) = \frac{a(r^2 - a^2)}{4\pi} \int \frac{f(\theta', \varphi')}{[r^2 + a^2 - 2ra \cos(\alpha)]^{3/2}} d\Omega'.$$

• Função de Green na equação de Helmholtz

A equação de Helmholtz não-homogênea

$$\nabla^2 f(\vec{r}) + k^2 f(\vec{r}) = g(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \Omega \quad (6.3.22)$$

pode ser integrada, com o auxílio do teorema de Green:

$$\int_{\Omega} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d\tau = \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

Usando esta fórmula com $u \equiv f(\vec{r}')$ e $v \equiv G(\vec{r}, \vec{r}')$, sendo esta uma função de Green arbitrária para a equação (6.3.22), obtemos para solução

geral de (6.3.22).

$$f(\vec{r}) = \int_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}') g(\vec{r}') d\tau' + \int_S f(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{r}, \vec{r}') ds' - \int_S G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial f}{\partial n'}(\vec{r}') ds'. \quad (6.3.23)$$

Para o problema de Dirichlet, a função de Green é a que se anula para $r = a$.

6.4 Domínio Ilimitado. Condição de Radiação

Consideremos a equação de Helmholtz no domínio ilimitado $a \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-\infty < z < \infty$ (exterior de um cilindro de raio a).

Lembremos que a solução da equação

$$\nabla^2 f + k^2 f = g, \quad (6.4.1)$$

é a amplitude das vibrações forçadas induzidas por uma força $F(\vec{r}, t)$ periódica no tempo, isto é, $F(\vec{r}, t) = g(\vec{r})e^{i\omega t}$. Essas vibrações obedecem à equação das ondas

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi = -g e^{i\omega t}.$$

A função $\psi(\vec{r}, t)$ pode não ser, no estágio inicial do processo, rigorosamente periódica mas no decurso do tempo toma a forma $\psi = f e^{i\omega t}$, onde f obedece à equação (6.4.1) com $k = \omega/c$. As fontes, representadas por F , podem gerar ondas cilíndricas que, a grandes distâncias, podem ser aproximadas por ondas planas cuja amplitude decresce com $\frac{1}{\sqrt{r}}$. As ondas divergentes, que se propagam das fontes (localizadas numa região finita do espaço) para o infinito são da forma $\frac{\varphi(r-ct)}{\sqrt{r}}$ e as ondas convergentes, da forma $\frac{\varphi(r+ct)}{\sqrt{r}}$.

Pode-se ver que as ondas divergentes são caracterizadas pela condição

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} - i k f \right) = 0, \quad (6.4.2)$$

que é a chamada condição de radiação de Helmholtz e Sommerfeld.

Para as ondas convergentes, a condição é

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} + i k f \right) = 0.$$

Exemplo 1. Função de Green da equação de Helmholtz no exterior do círculo de raio a , sujeita à condição de ser nula para $r = a$ e à condição de radiação.

Escrevendo a Eq. (6.4.1) em coordenadas polares

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} + k^2 G = \frac{\delta(r - r')}{r} \delta(\theta - \theta')$$

e desenvolvendo a função G em série de Fourier na variável θ ,

$$G(r, \theta, r', \theta') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m(r, r', \theta') e^{i m \theta},$$

obtemos

$$C_m(r, r', \theta') = e^{-i m \theta'} \begin{cases} A [J_m(kr) N_m(ka) - N_m(kr) J_m(ka)], & a \leq r < r' < \infty \\ B J_m(kr) + C N_m(kr), & a \leq r' < r < \infty \end{cases},$$

J_m sendo as funções de Bessel e N_m as funções de Neumann.

Impondo-se a condição de radiação somos levados a tomar $C = -iB$. Com efeito, para $r \rightarrow \infty$

$$J_m(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - (2m + 1)\pi/4\right),$$

$$N_m(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \operatorname{sen}\left(kr - (2m + 1)\pi/4\right),$$

$$H_m^{(2)}(kr) = J_m(kr) - i N_m(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i kr - i(2m+1)\pi/4}.$$

O termo e^{-ikr} multiplicado por e^{ikt} é responsável pelo fator $e^{ik(r-ct)}$ que caracteriza as ondas divergentes. Determinando A e B pelas condições usuais, obtemos a função de Green:

$$G(r, \theta, r', \theta') = -\frac{1}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i m (\theta - \theta')} \frac{H_m^{(2)}(kr)}{H_m^{(2)}(ka)} \left[J_m(kr') N_m(ka) - J_m(ka) N_m(kr') \right],$$

para $a < r' \leq r < \infty$ e expressão transposta para $a < r \leq r'$. Esta fórmula também pode ser escrita

$$G(r, \theta, r', \theta') = -\frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\theta-\theta')} H_m^{(2)}(kr) J_m(kr')$$

$$+ \frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\theta-\theta')} \frac{H_m^{(2)}(kr)}{H_m^{(2)}(ka)} J_m(ka) H_m^{(2)}(kr'). \quad (6.4.3)$$

Vamos tomar o limite $a \rightarrow 0$: a segunda série desaparece, devido à constante $H_m^{(2)}(ka)$ no denominador. Em seguida, fazamos $r' \rightarrow 0$. Ahamos

$$G(r) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr), \quad (6.4.4)$$

que é a função de Green para todo o espaço representando uma onda divergente no infinito.

Exemplo 2. Função de Green para a equação de Helmholtz no exterior da esfera de raio a .

Vamos construir a função de Green G para a equação

$$\nabla^2 f + k^2 f = g,$$

com a condição de se anular na superfície da esfera e mais ainda, de representar no infinito uma superposição de ondas divergentes. A função de Green $G(r, \theta, \varphi, r', \theta', \varphi')$ obedece à equação

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} + k^2 G$$

$$= \frac{\delta(r-r') \delta(\theta-\theta') \delta(\varphi-\varphi')}{r^2 \sin \theta}, \quad (6.4.5)$$

com $a \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Podemos desenvolver a função G , como função de θ e φ em série de harmônicos esféricos $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$:

$$G(r, \theta, \varphi, r', \theta', \varphi') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} C_{\ell m}(r, r', \theta', \varphi') Y_\ell^m(\theta, \varphi), \quad (6.4.6)$$

onde os coeficientes $C_{\ell m}$ obedecem à equação

$$C''_{\ell m} + \frac{2}{r} C'_{\ell m} + \left[k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] C_{\ell m} = \overline{Y_{\ell}^m(\theta', \varphi')} \frac{\delta(r-r')}{r^2}, \quad (6.4.7)$$

ou seja, à equação

$$r^2 C''_{\ell m} + 2r C'_{\ell m} + [k^2 r^2 - \ell(\ell+1)] C_{\ell m} = \overline{Y_{\ell}^m(\theta', \varphi')} \delta(\bar{r} - \bar{r}')$$

e às condições: $C_{\ell m} = 0$ para $r = a$ e $C_{\ell m} e^{i\omega t}$ contém um fator da forma $\frac{f(r-ct)}{r}$. Por conseguinte,

$$C_{\ell m} =$$

$$\overline{Y_{\ell}^m(\theta', \varphi')} \begin{cases} A [j_{\ell}(kr) n_{\ell}(ka) - j_{\ell}(ka) n_{\ell}(kr)], & a \leq r < r' < \infty, \\ B j_{\ell}(kr) + C n_{\ell}(kr), & a \leq r' < r < \infty, \end{cases} \quad (6.4.8)$$

j_{ℓ} e n_{ℓ} sendo as funções de Bessel esféricas e de Neumann esféricas, respectivamente.

Lembrando que

$$j_{\ell}(kr) \sim \frac{1}{kr} \operatorname{sen} \left(kr - \frac{\ell\pi}{2} \right), \quad n_{\ell}(kr) \sim -\frac{1}{kr} \cos \left(kr - \frac{\ell\pi}{2} \right),$$

para $r \rightarrow \infty$, vemos que, para termos ondas esféricas divergentes no infinito, que são caracterizadas pelo fator $\frac{e^{-ik(r-ct)}}{r}$, devemos ter $C = iB$. Portanto,

$$C_{\ell m} = \overline{Y_{\ell}^m(\theta', \varphi')} \begin{cases} A [j_{\ell}(kr) n_{\ell}(ka) - j_{\ell}(ka) n_{\ell}(kr)] \\ B h_{\ell}^{(1)}(kr) \end{cases},$$

o que também se escreve

$$C_{\ell m} = \overline{Y_{\ell}^m(\theta', \varphi')} \begin{cases} A [j_{\ell}(kr) h_{\ell}^{(1)}(ka) - j_{\ell}(ka) h_{\ell}^{(1)}(kr)] \\ B h_{\ell}^{(1)}(kr) \end{cases}. \quad (6.4.9)$$

Determinando A e B da maneira usual, obtemos

$$C_{\ell m} =$$

$$\frac{\overline{Y_{\ell}^m(\theta', \varphi')}}{i h_{\ell}^{(1)}(ka)} \begin{cases} \left[j_{\ell}(kr) h_{\ell}^{(1)}(ka) - j_{\ell}(ka) h_{\ell}^{(1)}(kr) \right] h_{\ell}^{(1)}(kr'), & a \leq r < r' < \infty \\ \left[j_{\ell}(kr') h_{\ell}^{(1)}(ka) - j_{\ell}(ka) h_{\ell}^{(1)}(kr') \right] h_{\ell}^{(1)}(kr), & a \leq r' < r < \infty \end{cases}$$

A função de Green, representando ondas esféricas divergentes no infinito, é, pois,

$$G(r, \theta, \varphi, r', \theta', \varphi') = -i \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} j_{\ell}(kr') h_{\ell}^{(1)}(kr) \overline{Y_{\ell}^m(\theta', \varphi')} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) + i \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{j_{\ell}(ka) h_{\ell}^{(1)}(kr') h_{\ell}^{(1)}(kr)}{h_{\ell}^{(1)}(ka)} \overline{Y_{\ell}^m(\theta', \varphi')} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) \quad (6.4.10)$$

para $a \leq r' \leq r < \infty$ e expressão transposta para $a \leq r < r' < \infty$.

Se passarmos ao limite $a \rightarrow 0$, a segunda série desaparece por causa dos $h_{\ell}^{(1)}(ka)$ no denominador e a função de Green para todo o espaço, representando ondas esféricas emergentes no infinito é

$$G(r, \theta, \varphi, r', \theta', \varphi') = -i \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} j_{\ell}(kr') h_{\ell}^{(1)}(kr) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) \overline{Y_{\ell}^m(\theta', \varphi')}, \quad (6.4.11)$$

para $0 \leq r' \leq r < \infty$.

Por fim, se localizarmos a singularidade na origem, isto é, se tomarmos $r' = 0$, obtemos a função de Green

$$G(r) = -\frac{i}{4\pi} h_{\ell}^{(1)}(kr), \quad (6.4.12)$$

que tem, para $r \rightarrow \infty$, o valor limite $-\frac{1}{4\pi r} e^{-ikr}$.

Mostraremos, na Seção 6.6, página 122, que, na verdade, a função

$$G(r) = -\frac{1}{4\pi r} e^{-ikr}, \quad (6.4.13)$$

é uma função de Green para a equação de Helmholtz representando uma onda esférica divergente no infinito.

6.5 Função de Green da Equação do Calor. Autofunções

Consideremos a equação do calor

$$\frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial t} - \nabla^2 f = 0 \quad \vec{r} \in S, \quad t > 0, \quad (6.5.1)$$

acompanhada da condição de contorno:

$$f(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{para} \quad \vec{r} \in S$$

e da condição inicial:

$$f(\vec{r}, 0) = \varphi(\vec{r}).$$

Sejam $u_p(\vec{r})$, $p = (\ell, m, n)$, as autofunções normalizadas de ∇^2 em Ω tais que $u_p(\vec{r}) = 0$ para $\vec{r} \in S$, e λ_p os respectivos autovalores.

Podemos expandir $f(\vec{r}, t)$ em série de tais autofunções

$$f(\vec{r}, t) = \sum_p c_p(t) u_p(\vec{r}), \quad (6.5.2)$$

em particular, para $t = 0$, temos

$$f(\vec{r}, 0) = \varphi(\vec{r}) = \sum_p c_p(0) u_p(\vec{r}),$$

onde

$$c_p(0) = \int_{\Omega} \varphi(\vec{r}) \overline{u_p(\vec{r})} dV. \quad (6.5.3)$$

Substituindo a série (6.5.2) na equação e levando em conta a equação $\nabla^2 u_p + \lambda_p u_p = 0$ obtemos

$$\frac{1}{k} \frac{\partial c_p}{\partial t}(t) + \lambda_p c_p(t) = 0 \quad \therefore \quad c_p(t) = c_p(0) e^{-\lambda_p k t}.$$

Substituindo esse valor de $c_p(t)$ em (6.5.2) obtemos

$$\begin{aligned} f(\vec{r}, t) &= \sum_p e^{-\lambda_p k t} c_p(0) u_p(\vec{r}) = \\ &= \int_{\Omega} \varphi(\vec{r}') \left\{ \sum_p e^{-\lambda_p k t} \overline{u_p(\vec{r}')} u_p(\vec{r}) \right\} dV'. \end{aligned}$$

Portanto, definiremos

$$G(\vec{r}, \vec{r}', t) = \sum_p e^{-\lambda_p kt} \overline{u_p(\vec{r}')} u_p(\vec{r}) H(t), \quad (6.5.4)$$

como a função de Green para a equação do calor. Aqui $H(t)$ (a função de Heaviside), definida por

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases},$$

foi inserida para indicar que $G(\vec{r}, \vec{r}', t) \equiv 0$ para $t < 0$.

Observa-se que G obedece à equação

$$\frac{1}{k} \frac{\partial G}{\partial t} - \nabla^2 G = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t). \quad (6.5.5)$$

$[\delta(t)]$ vem da derivação de $H(t)$: $H'(t) = \delta(t)$.

6.6 Funções de Green e a Transformação de Fourier

Seja D um operador diferencial parcial com coeficientes constantes e consideremos a equação

$$DG(x, x') = \delta(x - x') \quad x, x' \in \Omega \subset \mathbb{R}^n. \quad (6.6.1)$$

Duas funções de Green da mesma equação diferem por uma solução da equação homogênea $h(x, x')$, de modo que uma função de Green de um problema de contorno se decompõe em soma

$$G(x, x') = G_1(x, x') + h(x, x'), \quad (6.6.2)$$

de uma função de Green qualquer, que pode depender só das diferenças das variáveis x, x'^1 (portanto, podemos tomar $x' = 0$) e de uma solução da equação homogênea

$$Dh(x, x') = 0.$$

Uma solução particular da equação

$$DG_1(x) = \delta(x), \quad (6.6.3)$$

¹Isso é possível pois os coeficientes do operador D são constantes. [NdEs]

em todo o espaço \mathbb{R}^n pode ser obtida por transformação de Fourier, que converte a Eq. (6.6.3) em uma equação algébrica

$$P(\xi)\tilde{G}_1(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}, \quad (6.6.4)$$

onde $\tilde{G}_1(\xi)$ é a transformada de Fourier n -dimensional de $G_1(x)$:

$$\tilde{G}_1(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} G_1(x) dx = \mathcal{F}G_1(x),$$

onde $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $dx = dx_1 \cdots dx_n$, $\langle x, \xi \rangle = x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n$ e $P(\xi)$ é um polinômio nas variáveis ξ determinado pelo operador D .

A transformada de Fourier da função $\delta(x)$ é

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}.$$

Se $P(\xi)$ não tiver zeros reais, a solução da Eq. (6.6.4) será

$$\tilde{G}_1(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{P(\xi)},$$

e a função de Green $G_1(x)$ será obtida pela transformação de Fourier inversa de $\tilde{G}_1(\xi)$

$$G_1(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} \tilde{G}_1(\xi) d\xi. \quad (6.6.5)$$

Se $P(\xi)$ tiver zeros reais, então a integral (6.6.5) será divergente mas, em certos casos, um sentido poderá ser dado à mesma, de acordo com certas convenções.

Com o fim de facilitar a sua aplicação, daremos uma lista das principais propriedades da transformação de Fourier clássica para o caso $n = 1$.

Indica-se por $L^1(-\infty, \infty)$ a totalidade das funções $f(x)$ definidas sobre a reta \mathbb{R}^1 e com valores complexos, tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty, \quad (6.6.6)$$

isto é, tais que

$$\lim_{\substack{A \rightarrow \infty \\ B \rightarrow \infty}} \int_{-A}^B |f(x)| dx \text{ existe.}$$

Para toda $f(x) \in L^1(-\infty, \infty)$ define-se a sua transformada de Fourier $g = \mathcal{F}f$ pela fórmula

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx. \quad (6.6.7)$$

Igualmente define-se a transformada de Fourier conjugada $h = \overline{\mathcal{F}f}$ de f pela fórmula

$$h(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix\xi} dx. \quad (6.6.8)$$

• **Propriedades básicas da transformação de Fourier** $g(\xi) = \mathcal{F}f(x)$

As seguintes propriedades são satisfeitas pela transformação de Fourier:

- 1) $g(\xi)$ é uma função contínua, limitada e $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} g(\xi) = 0$,
- 2) $\mathcal{F}f^{(m)}(x) = i^m \xi^m g(\xi)$, m inteiro ≥ 0 ,
- 3) $\mathcal{F}[x^m f(x)] = i^m g^{(m)}(\xi)$, m inteiro ≥ 0 ,
- 4) $\mathcal{F}f(kx) = \frac{1}{|k|} g(\xi/k)$, k real $\neq 0$,
- 5) $\mathcal{F}f(-x) = \overline{\mathcal{F}f(x)} = g(-\xi)$,
- 6) $\mathcal{F}f(x-a) = e^{-ia\xi} g(\xi)$, a real,
- 7) $\mathcal{F}(e^{-iax} f(x)) = g(\xi + a)$,
- 8) $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$.

A última propriedade diz que a transformação de Fourier converte um produto de convolução em um produto de transformadas. Por produto de convolução de duas funções f e g entende-se a função $f * g$ definida por

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt. \quad (6.6.9)$$

A transformada de Fourier conjugada de uma função nem sempre corresponde a transformada de Fourier inversa, isto é, nem sempre acontece que se $g(\xi) = \mathcal{F}f(x)$ então $f(x) = \overline{\mathcal{F}g(\xi)}$. Primeiro, pode acontecer que não exista $(\overline{\mathcal{F}g})(x)$. Mesmo que esta exista pode não coincidir com $f(x)$ porquanto, se modificarmos o valor de $f(x)$ num número finito de pontos, o

valor de sua integral de Fourier não se modifica. Mas se $f(x)$ for contínua e $g(\xi) \in L^1(-\infty, \infty)$ tem-se

$$\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f.$$

Nesse caso a transformação de Fourier conjugada é a transformação de Fourier inversa.

Na prática, diz-se que $f(x)$ tem uma transformada de Fourier toda a vez que for possível atribuir um sentido, ainda que simbólico, à integral (6.6.7).

Em particular, pode a integral existir apenas no sentido de valor principal, isto é, pode não existir

$$\lim_{\substack{A \rightarrow \infty \\ B \rightarrow \infty}} \int_{-A}^B f(x)e^{-ix\xi} dx,$$

para A independente de B , mas existir

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-B}^B f(x)e^{-ix\xi} dx,$$

que é o chamado valor principal da integral, denotado por VP $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx$.

Em geral, pode-se usar uma transformação de Fourier generalizada baseada na teoria das distribuições, a qual goza das propriedades clássicas listadas à página 124, com exceção da primeira, e que verifica a fórmula $\overline{\mathcal{F}\mathcal{F}}f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f$. Essa transformação é aplicável a funções com crescimento polinomial no infinito e a funções singulares do tipo δ , δ' etc. Tem-se $\mathcal{F}\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

• Funções de Green obtidas por transformação de Fourier

Exemplo 1. Seja a equação não-homogênea

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - k^2 f = g, \quad -\infty < x < \infty \quad (k > 0). \quad (6.6.10)$$

Uma função de Green particular $G(x-x')$ é obtida resolvendo-se a equação

$$\frac{d^2 G}{dx^2} - k^2 G = \delta(x). \quad (6.6.11)$$

A transformada $\tilde{G}(\xi)$ de $G(x)$ obedece à equação

$$(-\xi^2 - k^2)\tilde{G}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

donde

$$\tilde{G}(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\xi^2 + k^2}.$$

Portanto,

$$G(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}}{\xi^2 + k^2} d\xi.$$

Essa integral pode ser calculada por resíduos e se obtém

$$G(x) = - \begin{cases} \frac{e^{-kx}}{2k}, & \text{se } x > 0 \\ \frac{e^{kx}}{2k}, & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

ou seja, $G(x) = -\frac{1}{2k} e^{-k|x|}$.

Assim uma função de Green é

$$G(x, x') = -\frac{1}{2k} e^{-k|x-x'|}, \quad (6.6.12)$$

e qualquer outra é da forma

$$G(x, x') = -\frac{1}{2k} e^{-k|x-x'|} + A(x')e^{-kx} + B(x')e^{kx}.$$

Exemplo 2. Função de Green para a equação de Helmholtz.

A equação é

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = g, \quad -\infty < x < \infty,$$

e a função de Green $G(x)$ obedece à equação

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + k^2 G = \delta(x). \quad (6.6.13)$$

A transformada de Fourier $\tilde{G}(\xi)$ verifica

$$(-\xi^2 + k^2)\tilde{G}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Portanto,

$$\tilde{G}(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\xi^2 - k^2}.$$

Precisamos dar um sentido à integral

$$G(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}}{\xi^2 - k^2} d\xi, \quad (6.6.14)$$

em que o integrando possui dois pólos reais $\pm k$. A integral em (6.6.14) é uma integral mal definida, mas podemos interpretá-la como valor principal:

$$G(x) = -\frac{1}{2\pi} \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}}{\xi^2 - k^2} d\xi.$$

Obtemos

$$G(x) = \frac{1}{2k} \begin{cases} +\text{sen}(kx), & x > 0 \\ -\text{sen}(kx), & x < 0 \end{cases},$$

ou seja

$$G(x) = \frac{1}{2k} \text{sen}(k|x|). \quad (6.6.15)$$

Assim, uma função de Green é

$$G(x - x') = \frac{1}{2k} \text{sen}(k|x - x'|),$$

e a função de Green mais geral é

$$G(x, x') = \frac{1}{2k} \text{sen}(k|x - x'|) + A(x')e^{ikx} + B(x')e^{-ikx}.$$

A integral (6.6.14) pode ter diferentes interpretações, cada interpretação correspondendo a uma função de Green. Pode-se assim obter a função de Green correspondente a certas condições assintóticas.

Para exemplificar, consideremos o espalhamento quântico unidimensional, de um feixe de partículas por uma barreira de potencial $V(x)$, nulo fora de uma região limitada (a, b) . A equação para este problema é a equação de Schrödinger independente do tempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi, \quad (6.6.16)$$

onde m é a massa da partícula, E é a energia (> 0), \hbar é a constante de Planck dividida por 2π . Com as substituições

$$q(x) = \frac{2m}{\hbar^2} V(x), \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2},$$

a equação fica

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = q(x)\psi. \quad (6.6.17)$$

Podemos representar o feixe incidente de partículas, dirigido da esquerda para a direita pela onda plana e^{ikx} enquanto que os feixes refletido e transmitido são representados, respectivamente, pelas ondas planas e^{-ikx} e e^{ikx} .

A solução de (6.6.17) será

$$\psi(x) = e^{ikx} + \int_a^b G(x, x')q(x')\psi(x') dx', \quad (6.6.18)$$

onde a integral representa o efeito do potencial de espalhamento. A função

$$\psi_{\text{esp}}(x) = \int_a^b G(x, x')q(x')\psi(x') dx'$$

obedece à equação (6.6.17), de modo que

$$\frac{d^2\psi_{\text{esp}}}{dx^2} + k^2\psi_{\text{esp}} = 0 \quad \text{para } x \notin [a, b],$$

isto é,

$$\psi_{\text{esp}} = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx} & \text{para } x > b \\ C e^{ikx} + B e^{-ikx} & \text{para } x < a \end{cases}$$

Como $\psi_{\text{esp}} = A e^{ikx}$ para $x > b$ e $\psi_{\text{esp}} = D e^{-ikx}$ para $x < a$, queremos que a função de Green satisfaça as condições

$$G(x, x') \rightarrow \begin{cases} \sim e^{-ikx} & \text{para } x \rightarrow -\infty \\ \sim e^{ikx} & \text{para } x \rightarrow +\infty \end{cases},$$

que devem ser levadas em conta quando for interpretada a integral (6.6.14).

Por exemplo, a integral pode ser tomada ao longo da curva descrita na Fig. 6.2, que será fechada por cima se $x > 0$ por baixo se $x < 0$.

Pelo método de resíduos obtemos

$$G(x) = -\frac{i}{2k} e^{ik|x|},$$

isto é,

$$G(x, x') = -\frac{i}{2k} e^{ik|x-x'|}, \quad (6.6.19)$$



Figura 6.2. Curva de integração a ser fechada por cima se $x > 0$ e por baixo se $x < 0$.

que satisfaz às condições exigidas. Se tivéssemos dado outra interpretação a (6.6.14), a saber, se escolhêssemos o caminho descrito na Fig. 6.3, teríamos obtido a função de Green

$$G(x) = \frac{i}{2k} e^{-ik|x|},$$

ou seja,

$$G(x, x') = \frac{i}{2k} e^{ik|x-x'|}, \quad (6.6.20)$$

que não satisfaz às condições exigidas.

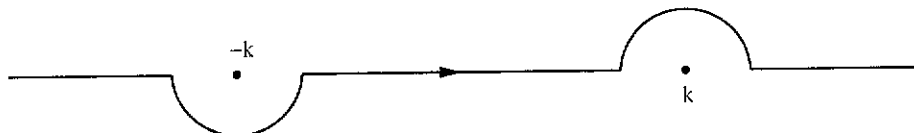


Figura 6.3. Curva de integração a ser fechada por cima se $x > 0$ e por baixo se $x < 0$.

Exemplo 3. Função de Green para a equação tridimensional de Helmholtz.

A equação para a função de Green é

$$\nabla^2 G(\vec{r}) + k^2 G(\vec{r}) = \delta(\vec{r}). \quad (6.6.21)$$

Por uma transformação de Fourier esta equação se transforma em

$$(-\rho^2 + k^2) \tilde{G}(\vec{\rho}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}, \quad \vec{\rho} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad (6.6.22)$$

cujas solução é $\tilde{G}(\vec{\rho}) = -\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \frac{1}{\rho^2 - k^2}$.

$G(\vec{r})$ será definida pela integral

$$G(\vec{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i(\vec{r}, \vec{\rho})}}{\rho^2 - k^2} d\xi d\eta d\zeta. \quad (6.6.23)$$

Diferentes sentidos podem ser dados à integral (6.6.23) cada um deles correspondendo a uma função de Green. Em qualquer caso temos

$$\begin{aligned} G(r) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty \frac{\rho^2}{\rho^2 - k^2} \left(\int_0^\pi e^{ir\rho \cos \theta} \text{sen}(\theta) d\theta \right) d\rho \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{\rho^2}{\rho^2 - k^2} \frac{e^{ir\rho} - e^{-ir\rho}}{ir\rho} d\rho \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{r} \int_0^\infty \frac{\rho \text{sen}(r\rho)}{\rho^2 - k^2} d\rho = \frac{i}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{\rho e^{ir\rho}}{\rho^2 - k^2} d\rho. \end{aligned}$$

Se quisermos uma função de Green que, associada ao fator $e^{-i\omega t}$, represente uma onda emergente no infinito, devemos calcular a integral acima ao longo do caminho ($r > 0$) descrito na Fig. 6.4. Obtemos,

$$G(r) = \frac{i}{4\pi^2 r} (2\pi i k) \frac{e^{irk}}{2k} = -\frac{1}{4\pi r} e^{irk}.$$

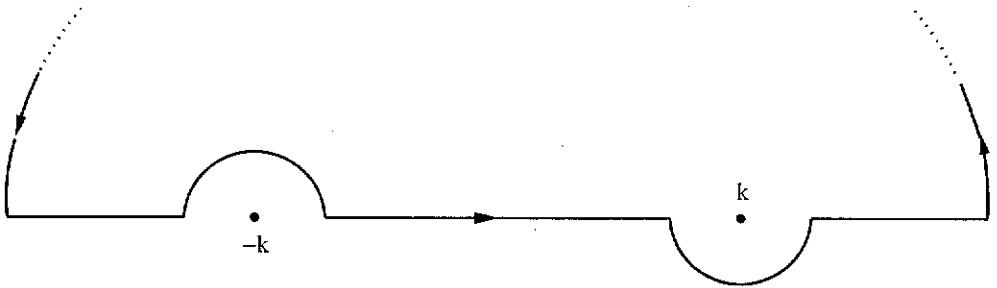


Figura 6.4. Caminho de integração para uma função de Green que represente uma onda emergente no infinito.

A função de Green desejada é, pois,

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (6.6.24)$$

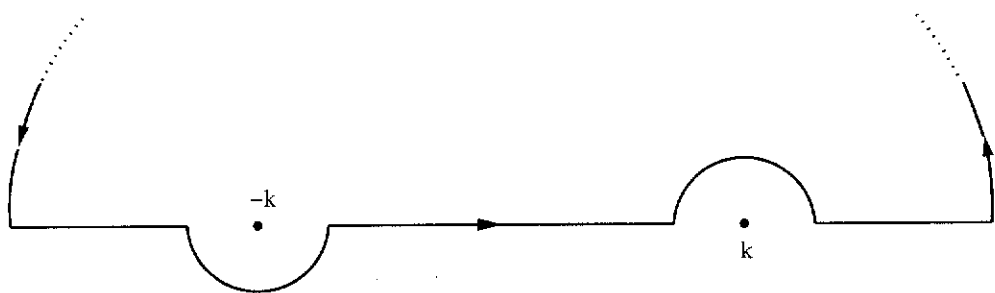


Figura 6.5. Caminho de integração para uma função de Green que represente uma onda convergente do infinito.

Outra função de Green pode ser obtida através do caminho ($r > 0$) descrito na Fig 6.5.

Assim, obtém-se

$$G(r) = -\frac{1}{4\pi r} e^{-ikr},$$

ou seja,

$$G(|\vec{r} - \vec{r}'|) = -\frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{-ik|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (6.6.25)$$

A semi-soma² de (6.6.24) e (6.6.25) ainda é uma função de Green:

$$G(|\vec{r} - \vec{r}'|) = -\frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \cos(k|\vec{r} - \vec{r}'|). \quad (6.6.26)$$

Exemplo 4. Função de Green para a equação de Laplace

$$\nabla^2 G(\vec{r}) = \delta(\vec{r}).$$

Por transformação de Fourier tridimensional obtemos

$$-\rho^2 \tilde{G}(\vec{\rho}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \quad \therefore \quad \tilde{G}(\rho) = -\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \frac{1}{\rho^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} G(r) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i(\vec{r}, \vec{\rho})}}{\rho^2} d\xi d\eta d\zeta \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{r} \int_0^\infty \frac{\text{sen}(r\rho)}{\rho} d\rho = -\frac{1}{4\pi r}, \end{aligned}$$

²A semi-soma de dois números a e b é $(a + b)/2$. [NdEs]

já que a integral definida $\int_0^\infty \frac{\text{sen}(r\rho)}{\rho}$ vale $\frac{\pi}{2}$. Assim, obtemos uma função de Green

$$G(|\vec{r} - \vec{r}'|) = -\frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (6.6.27)$$

Exemplo 5. Função de Green retardada para a equação da corda vibrante.

A equação para a função de Green é

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x)\delta(t).$$

A sua transformada de Fourier bidimensional $\tilde{G}(\xi, \tau)$ obedece à equação

$$(-\tau^2/V^2 + \xi^2) \tilde{G}(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi}.$$

Logo,

$$\tilde{G}(\xi, \tau) = -\frac{V^2}{2\pi} \frac{1}{\tau^2 - \xi^2 V^2}.$$

Conseqüentemente,

$$G(x, t) = -\frac{V^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\tau}}{\tau^2 - \xi^2 V^2} d\tau \right) d\xi.$$

Como queremos uma função de Green retardada, isto é, identicamente nula para $t < 0$, devemos escolher, para interpretar a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\tau}}{\tau^2 - \xi^2 V^2} d\tau,$$

o caminho C passando por baixo dos pólos $\pm \xi V$ e fechando-se no semi-plano superior para $t > 0$ e no semi-plano inferior para $t < 0$ (Fig. 6.6).

Obtemos assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\tau}}{\tau^2 - \xi^2 V^2} d\tau = 2\pi i \frac{e^{it\xi V} - e^{-it\xi V}}{2\xi V}.$$

Por conseguinte,

$$G(x, t) = -\frac{V^2}{(2\pi)^2} \frac{2i\pi}{2V} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi(x+Vt)} - e^{-i\xi(x-Vt)}}{\xi} d\xi.$$

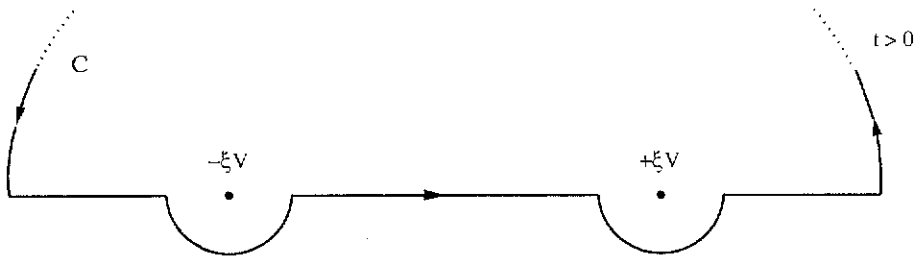


Figura 6.6. O caminho C passando por baixo dos pólos $\pm \xi V$ e fechando-se no semi-plano superior para $t > 0$ e no semi-plano inferior para $t < 0$.

Interpretando as integrais como “valor principal” obtemos

$$G(x, t) = \frac{V}{4} [\epsilon(x + Vt) - \epsilon(x - Vt)], \quad \text{onde} \quad \epsilon(u) = \begin{cases} +1, & u > 0 \\ -1, & u < 0 \end{cases}$$

Como $t > 0$, temos

$$G(x, t) = \frac{V}{4} \begin{cases} 1 - \epsilon(x - Vt), & \text{se } x > 0 \\ \epsilon(x + Vt) + 1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Como

$$H(u) + H(-u) = 1 \quad \text{e} \quad H(u) - H(-u) = \epsilon(u),$$

pois

$$H(u) = \begin{cases} 1, & u > 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad H(-u) = \begin{cases} 0, & u > 0 \\ 1, & u < 0 \end{cases},$$

obtemos

$$G(x, t) = \frac{V}{2} \begin{cases} H(Vt - x), & \text{se } x > 0 \\ H(Vt + x), & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

ou seja,

$$G(x, t) = \frac{V}{2} H(t) H(Vt - |x|).$$

Finalmente,

$$G_{\text{ret}}(x - x', t - t') = \frac{V}{2} H(t - t') H(V(t - t') - |x - x'|), \quad (6.6.28)$$

que representa o movimento elementar da corda no ponto x , no instante t , devido a uma pequena perturbação ocorrida no ponto x' e no instante t' anterior a t , de acordo, portanto, com o princípio de causalidade.

Pode-se também definir a função de Green avançada

$$G_{\text{av}}(x - x', t - t') = \frac{V}{2} H(t' - t) H(V(t' - t) - |x - x'|),$$

que não tem sentido físico³.

Exemplo 6. Função de Green para a equação de D'Alembert.

O potencial escalar $\phi(\vec{r}, t)$ da Eletrodinâmica obedece à equação de D'Alembert não-homogênea

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = \frac{1}{\epsilon_0} \rho.$$

A equação para a função de Green é

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(\vec{r}, t) - \nabla^2 G(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r}) \delta(t).$$

Sua transformada de Fourier quadridimensional $\tilde{G}(\vec{\rho}, \tau)$ obedece à equação algébrica

$$-(\tau^2/c^2 - \rho^2) \tilde{G}(\vec{\rho}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2}.$$

Portanto,

$$\tilde{G}(\rho, \tau) = -\frac{c^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{\tau^2 - c^2 \rho^2}.$$

Invertendo a transformação de Fourier temos

$$G(r, t) = -\frac{c^2}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\langle \vec{r}, \vec{\rho} \rangle} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\tau t}}{\tau^2 - \rho^2 c^2} d\tau \right) d\xi d\eta d\zeta.$$

O princípio da causalidade (isto é, efeito ocorrendo após a causa) nos leva a procurar uma função de Green retardada $G_{\text{ret}}(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$, que é identicamente nula para $t < t'$. Para que $G(r, t)$ seja identicamente nula para $t < 0$ vamos interpretar a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\tau t}}{\tau^2 - c^2 \rho^2} d\tau,$$

como sendo a integral complexa ao longo da curva descrita na Fig. 6.7, que se fecha no semi-plano superior se $t > 0$ e no semi-plano inferior se $t < 0$

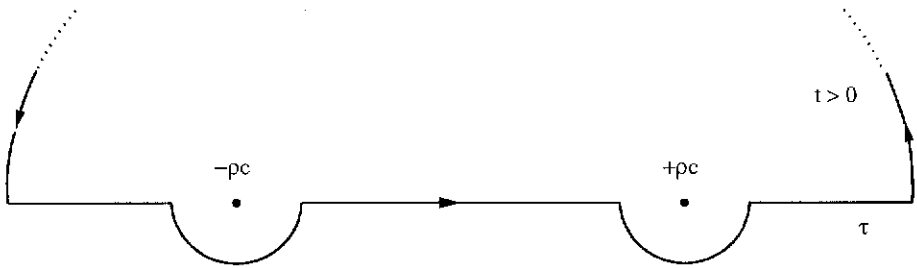


Figura 6.7. A curva se fecha no semi-plano superior se $t > 0$ e no semi-plano inferior se $t < 0$.

(neste caso a integral é identicamente nula, pois, o caminho de integração não contorna nenhum polo).

Para $t > 0$ obtém-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\tau}}{\tau^2 - c^2\rho^2} d\tau = 2\pi i \frac{e^{it\rho c} - e^{-it\rho c}}{2\rho c}.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} G_{ret}(r, t) &= -\frac{c^2}{(2\pi)^4} \frac{2\pi}{2c} \frac{2\pi i}{ir} \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{i\rho r} - e^{-i\rho r}}{\rho} \right) \left(\frac{e^{i\rho ct} - e^{-i\rho ct}}{\rho} \right) \rho^2 d\rho \\ &= -\frac{c}{8\pi^2 r} \left\{ \int_0^{\infty} e^{i\rho(r+ct)} d\rho + \int_0^{\infty} e^{-i\rho(r+ct)} d\rho \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\infty} e^{i\rho(r-ct)} d\rho - \int_0^{\infty} e^{-i\rho(r-ct)} d\rho \right\} \\ &= -\frac{c}{8\pi^2 r} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\rho(r+ct)} d\rho - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\rho(r-ct)} d\rho \right\}. \end{aligned}$$

Lembramos que $\delta(u) = \mathcal{F}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, logo

$$\delta(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\rho u} d\rho.$$

³Por violar o princípio de causalidade: ela representa o movimento elementar da corda no ponto x no instante t devido a uma pequena perturbação ocorrida no ponto x' e no instante t' posterior a t . [NdEs]

Assim,

$$G_{\text{ret}}(r, t) = -\frac{c}{4\pi r} \left\{ \delta(r + ct) - \delta(r - ct) \right\}.$$

Mas, como $t > 0$, $\delta(r + ct) = 0$, portanto

$$G_{\text{ret}}(r, t) = +\frac{c}{4\pi r} \delta(r - ct) = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

é a função de Green procurada. Ela pode ser interpretada como o potencial escalar devido à passagem de uma carga pontual $q = -\epsilon_0$ pela origem no instante $t = 0$. O efeito é retardado, isto é, só existe para $t > 0$.

Observa-se que $G_{\text{ret}}(r, t)$ não é uma função mas uma distribuição. Vê-se que essa distribuição é nula no exterior e no interior do “cone do futuro”⁴, definido por

$$c^2 t^2 - r^2 = 0, \quad t \geq 0.$$

Podemos também definir uma função de Green avançada

$$G_{\text{av}}(r, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t + \frac{r}{c}\right), \quad t < 0,$$

nula no exterior e no interior do “cone do passado” definido por

$$c^2 t^2 - r^2 = 0, \quad t \leq 0,$$

a qual não tem um sentido físico imediato.

A semi-soma $\bar{G} = \frac{G_{\text{ret}} + G_{\text{av}}}{2}$ também é uma função de Green sem sentido físico imediato.

O potencial escalar $\phi(\vec{r}, t)$ correspondente à função de Green retardada

$$G_{\text{ret}}(|\vec{r} - \vec{r}'|, t - t') = \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right), \quad (6.6.29)$$

é o potencial retardado:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}', \quad (6.6.30)$$

que é para $t < r/c$.

⁴Esse fato é por vezes denominado “princípio de Huygens”. [NdEs]

Exemplo 7. Função de Green para a equação do calor.

A temperatura $u(x, t)$ de uma barra ilimitada em que o calor só se transmite por condução, obedece à equação

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\sigma} \rho(x, t), \quad (6.6.31)$$

$-\infty < x < \infty, t > 0$, onde $k = \frac{\sigma}{c\lambda}$ é uma constante positiva [σ = condutibilidade térmica, c = calor específico, λ = densidade linear do material] e $\rho(x, t)$ é a densidade das fontes de calor.

A função de Green $G(x, t)$ obedece à equação

$$\frac{1}{k} \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x)\delta(t).$$

Procuramos uma função de Green $G(x, t)$ nula para $t < 0$. Seja $\tilde{G}(\xi, t)$ sua transformada de Fourier na variável x . \tilde{G} verifica a equação diferencial

$$\frac{d\tilde{G}}{dt} + \xi^2 k \tilde{G} = \frac{k \delta(t)}{\sqrt{2\pi}}. \quad (6.6.32)$$

Esta equação é homogênea para $t \neq 0$; mais ainda $\tilde{G}(\xi, t) \equiv 0$ para $t < 0$. Portanto,

$$\tilde{G}(\xi, t) = \begin{cases} A e^{-\xi^2 kt} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}.$$

A função $\tilde{G}(\xi, t)$ não pode ser contínua a $t = 0$ devido à presença de $\delta(t)$ no segundo membro. Na verdade $\tilde{G}(\xi, t)$ tem uma descontinuidade de primeira espécie na origem com salto $\sigma = \frac{k}{\sqrt{2\pi}}$. Com essa condição obtemos

$A = \frac{k}{\sqrt{2\pi}}$. Portanto,

$$\tilde{G}(\xi, t) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} H(t) e^{-\xi^2 kt}.$$

Invertendo a transformação de Fourier, devemos calcular a transformada de $e^{-\xi^2}$ e daí deduzirmos $\mathcal{F} e^{-\xi^2 kt}$ pela propriedade

$$\mathcal{F} f(k\xi) = \frac{1}{|k|} g(x/k).$$

Já $\mathcal{F}e^{-\xi^2}$ calcula-se com o auxílio do teorema de Cauchy:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}e^{-\xi^2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} e^{-ix\xi} d\xi \\ &= \frac{e^{-x^2/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(- \overbrace{\left(\xi^2 + ix\xi - \frac{x^2}{4} \right)}^{(\xi+ix/2)^2} \right) d\xi \\ &= \frac{e^{-x^2/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty-ix/2}^{\infty+ix/2} e^{-z^2} dz = \frac{e^{-x^2/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{e^{-x^2/4}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$G(x, t) = \frac{k}{2\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{kt}} e^{-x^2/4kt} \quad \text{para } t > 0,$$

ou seja,

$$G(x, t) = \sqrt{\frac{k}{4\pi t}} H(t) e^{-x^2/4kt}. \quad (6.6.33)$$

Interpreta-se $\frac{1}{\gamma} G(x, t) = \frac{1}{c\lambda} H(t) e^{-x^2/4kt}$ como a temperatura no ponto x e no instante t resultante da presença instantânea de uma fonte de calor unitária no ponto $x = 0$ e no instante $t = 0$.

Observa-se que, para cada $t > 0$, a temperatura é > 0 e é representada, como função de x , por uma curva de Gauss. O máximo é, para $x = 0$, igual a $\frac{1}{c\lambda} \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}$ ($t > 0$). A $t = 0$ a temperatura a $x = 0$ é ∞ , depois, para $t > 0$, decresce com $\frac{1}{\sqrt{t}}$.

Complemento. Um bom complemento para o problema de Sturm-Liouville é o capítulo IV de J. Sotomayor “Lições de Equações Diferenciais Ordinárias”, Projeto Euclides, IMPA (1979). [NdEs]

6.7 Exercícios

1. Construa a função de Green, como série formal, para os seguintes problemas:

- a) $\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = g$, com $0 \leq x \leq L$, sendo $f(0) = 0$ e $f(L) = 0$.
- b) $\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = g$, com $-L \leq x \leq L$, sendo $f(L) = f(-L)$ e $f'(L) = f'(-L)$.
- c) $r f'' + f' + \left(k^2 r + \frac{m^2}{r}\right) f = g$, com $0 \leq r \leq a$, sendo $f(0) = 0$ e $f(a)$ finito.
- d) $r^2 f'' + 2r f' + [k^2 r^2 - l(l+1)] f = g$, com $0 \leq r \leq a$, sendo $f(0)$ finito e $f(a) = 0$.

2. Construa a função de Green, em forma fechada, para os seguintes problemas:

- a) $\frac{d}{dx} \left(x \frac{df}{dx} \right) = g$, com $0 \leq x \leq 1$, sendo $f(0)$ finito e $f(1) = 0$.
- b) $\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{df}{dx} \right] = g$, com $0 \leq x \leq 1$, sendo $f(0) = 0$ e $f(1) = 0$.
- c) $\frac{d^2 f}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] f = g$, com $0 \leq r < \infty$, sendo $f(0) = 0$ e $f(r) \approx Ae^{ikr}$ para $r \rightarrow \infty$.

3. Construa a função de Green, em forma fechada, para a equação

$$r^2 \frac{d^2 G}{dr^2} + 2r \frac{dG}{dr} + [k^2 r^2 - l(l+1)] G = \delta(r-r')$$

no intervalo $0 \leq r \leq a$, sob as seguintes condições: $G(r, r')$ é finita na origem e $G(a, r') = 0$.

Resposta:

$$G(r, r') = -k \frac{j_l(kr)}{j_l(ka)} \left[j_l(kr') n_l(ka) - j_l(ka) n_l(kr') \right],$$

para $0 \leq r \leq r' \leq a$.

4. Mostre que a função de Green do problema **2a**, acima, pode ser representada por

$$G(r, r') = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\alpha_{0n} \frac{r'}{a}\right) J_0\left(\alpha_{0n} \frac{r}{a}\right)}{(\alpha_{0n})^2 (J_1(\alpha_{0n}))^2}$$

com $J_0(\alpha_{0m}) = 0$.

5. Mostre que a função de Green da equação de Helmholtz modificada

$$\nabla^2 f - k^2 f = g$$

no disco $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, que é finita na origem e nula em $r = a$ é

$$G(r, \theta, r', \theta') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\theta-\theta')} \frac{I_m(kr)}{I_m(ka)} \left[I_m(kr') K_m(ka) - I_m(ka) K_m(kr') \right],$$

para $r \leq r'$.

6. Mostre que a função de Green da equação de Helmholtz modificada, no exterior do disco de raio a , que se anula para $r = a$ e para $r \rightarrow \infty$, é

$$G(r, \theta, r', \theta') = \frac{-1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\theta-\theta')} \frac{K_m(kr')}{K_m(ka)} \left[I_m(kr) K_m(ka) - I_m(ka) K_m(kr) \right],$$

para $r \leq r'$. Tomando o limite para $a \rightarrow 0$, obtenha uma função de Green para todo plano.

7. Determine a função de Green para a equação de Helmholtz no anel circular $a \leq r \leq b$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, sujeita às condições $G(a, \theta, r', \theta') = G(b, \theta, r', \theta') = 0$.

Resposta:

$$G(r, \theta, r', \theta') = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\theta-\theta')} \frac{[J_m(kr)N_m(ka) - J_m(ka)N_m(kr)]}{[J_m(kr)N_m(kb) - J_m(kb)N_m(ka)]} \times \\ \times [J_m(kr')N_m(kb) - J_m(kb)N_m(kr')],$$

para $r \leq r'$.

8. Mostre que a função de Green $G(\vec{r}, \vec{r}')$ para a equação de Helmholtz

$$\nabla^2 G + k^2 G = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

no exterior da esfera de raio a , sob as condições: $G(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ para $\|\vec{r}\| = a$ e $G(\vec{r}, \vec{r}')$ satisfaz a condição de radiação no infinito, isto é, $G(\vec{r}, \vec{r}') \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} F \frac{e^{ikr}}{r}$ é dada por

$$G(r, \theta, \varphi, r', \theta', \varphi') = -ik \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{h_l^{(1)}(kr)}{h_l^{(1)}(ka)} \left[j_l(kr') h_l^{(1)}(ka) - j_l(ka) h_l^{(1)}(kr') \right] \overline{Y_l^m(\theta', \varphi')} Y_l^m(\theta, \varphi),$$

para $a \leq r' \leq r < \infty$. Se passarmos ao limite para $a \rightarrow 0$ (quando os termos com $j_l(ka)/h_l^{(1)}(ka)$ desaparecem para todo l) e depois tomarmos $r' = 0$, obtemos uma função de Green para todo o espaço:

$$G(r) = \frac{-ik}{4\pi} h_0^{(1)}(kr) = -\frac{1}{4\pi r} e^{ikr},$$

representando uma onda esférica emergente.

9. Construa a função de Green para a equação de Helmholtz modificada

$$\nabla^2 G + k^2 G = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

no exterior da esfera de raio a , sob as condições: $G = 0$ para $r = a$ e $G \rightarrow 0$ para $r \rightarrow \infty$. Conclua, de modo análogo ao do exercício 8, que uma possível função de Green para todo o espaço para essa equação é

$$G(r) = -\frac{1}{4\pi r} e^{-kr}.$$

10. Mostre que a função de Green para a equação de Helmholtz na esfera de raio a , sujeita à condição de Neumann $\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{r=a} = 0$, é dada por

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{-k}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\theta-\theta')} \frac{j_m(kr)}{j'_m(ka)} \left[j_m(kr') n'_m(ka) - j'_m(ka) n_m(kr') \right],$$

para $r \leq r'$.

11. Determine a função de Green para a equação $\nabla^2 f + kf = g$ na caixa retangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$, sob cada uma das seguintes condições:

- a. $G = 0$ em cada face da caixa (condição de Dirichlet homogênea).
- b. $\frac{\partial G}{\partial n} = 0$ em cada uma das faces da caixa (condição de Neumann homogênea – supõe-se $k \neq 0$).
- c. $G = 0$ nas faces $x = 0, y = 0, z = 0$ e $\frac{\partial G}{\partial n} = 0$ nas faces $x = a, y = b, z = c$ (condição intermediária).

12. Calcule por transformação de Fourier a função de Green para todo o espaço tridimensional da equação de Helmholtz modificada

$$\nabla^2 f - k^2 f = g.$$

Resposta:

$$G(r) = -\frac{1}{4\pi r} e^{-kr}.$$

13. Demonstre que a função de Green $G(x, t)$ (solução elementar) para o operador de Schrödinger $i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ é

$$G(x, t) = -\frac{i}{2\sqrt{\pi t}} e^{i\left(\frac{x^2}{4t} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Indicação: usar a fórmula $\int_0^\infty e^{iu^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4}$.

Capítulo 7

Teoria Elementar das Distribuições

7.1 Noção de Distribuição. Exemplos

Há muito que as chamadas “funções simbólicas” vêm tendo largo uso na Física, onde são tratadas ordinariamente como verdadeiras funções, embora não correspondem à noção clássica de função. Um exemplo é a função $\delta(x)$ de Dirac, que é assim definida:

a) $\delta(x) = 0$ para $x \neq 0$,

b) $\delta(x) = \infty$ para $x = 0$,

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0)$, para qualquer função $f(x)$ contínua na origem.

Devemos enfatizar que essas três propriedades, incompatíveis com a noção clássica de função e de integral, não definem $\delta(x)$ como uma função no sentido usual.

Costuma-se também interpretar $\delta(x)$ como o “limite” de seqüências de funções contínuas, com um pico bastante estreito e alto na origem, como por exemplo,

$$S_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$$

ou

$$W_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{\pi x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{ixt} dt .$$

Essas aproximações são bastante úteis do ponto de vista físico, mas pouco satisfatórias, do ponto de vista matemático, já que o limite usual de ambas as seqüências não existe.

Pode-se mostrar, no entanto, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) ,$$

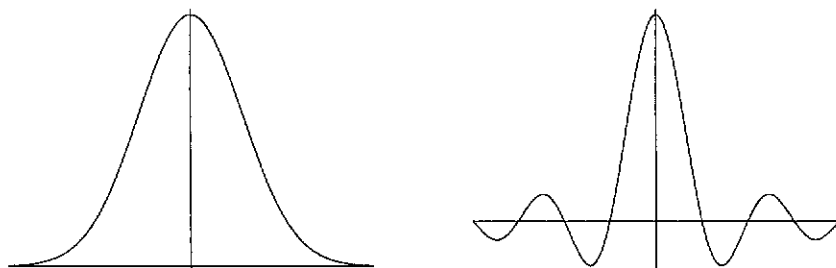


Figura 7.1. Gráficos de $S_n(x)$ (à esquerda) e $W_n(x)$ (à direita).

onde $\varphi(x)$ é qualquer função contínua na origem.

Viu-se mais tarde que as funções simbólicas como a função $\delta(x)$ podem ser corretamente interpretadas como *funcionais lineares*¹ ou *formas lineares*, definidas sobre espaços lineares de funções, convenientemente escolhidos.

• O espaço \mathcal{D}

Indica-se por \mathcal{D} , a totalidade das funções $\varphi(x)$ definidas sobre a reta e com valores complexos, tais que

- são infinitamente deriváveis (isto é, têm derivada contínua em qualquer ordem),
- são nulas fora de um conjunto limitado I , que depende de cada $\varphi(x)$.

As funções $\varphi(x)$ de \mathcal{D} chamam-se *funções de teste* e desempenham um papel acessório nas aplicações, sendo em geral meros auxiliares de cálculo.

Não é de todo evidente que existam funções de teste não-triviais. A seguinte função é um exemplo de tais funções:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right), & \text{para } |x| < 1 \\ 0, & \text{para } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (7.1.1)$$

¹Se V é um espaço vetorial para um corpo de escalares \mathbb{K} , então uma função ℓ definida em V assumindo valores em \mathbb{K} é dita ser um funcional linear se $\ell(\alpha u + \beta v) = \alpha \ell(u) + \beta \ell(v)$ para todos os vetores $u, v \in V$ e todos os escalares α, β de \mathbb{K} . Na maioria das aplicações \mathbb{K} é o conjunto \mathbb{R} dos números reais (caso em que V é dito ser um espaço vetorial real) ou é o conjunto \mathbb{C} dos números complexos (caso em que V é dito ser um espaço vetorial complexo).

[NdEs]

É fácil ver que \mathcal{D} constitui um espaço vetorial, pois a função $\varphi = 0$ está em \mathcal{D} e se φ_1 e φ_2 estão em \mathcal{D} , então a combinação linear $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2$ também está em \mathcal{D} , quaisquer que sejam os números complexos α e β .

Introduzimos uma noção de seqüência convergente em \mathcal{D} dizendo que $\varphi_n \in \mathcal{D}$ converge para 0 em \mathcal{D} quando $n \rightarrow \infty$ se:

- existe um conjunto limitado I , fora do qual todas as funções φ_n são nulas,
- para cada ordem de derivação, as derivadas $\varphi_n^{(p)}(x)$ convergem para 0 uniformemente, sobre todo intervalo limitado.

Como exemplo de seqüência convergente a zero em \mathcal{D} , temos

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{a^2}{a^2 - x^2}\right), & \text{para } |x| < a \\ 0, & \text{para } |x| \geq a \end{cases} \quad (7.1.2)$$

Chama-se suporte de uma função contínua ao menor conjunto fechado em cujo complementar (conjunto aberto) ela se anula.

Define-se, pois, o espaço \mathcal{D} como a totalidade das funções infinitamente deriváveis (de classe C^∞) sobre a reta e de suporte limitado (diz-se também suporte compacto, pois, todo conjunto fechado e limitado é compacto).

• Distribuições

Chama-se distribuição todo funcional linear e contínuo definido sobre \mathcal{D} , isto é, toda aplicação T definida sobre \mathcal{D} tomando valores complexos, que seja linear e contínua. Indica-se por $T(\varphi)$ ou por $\langle T, \varphi \rangle$ o valor de T para o elemento φ . A aplicação T é linear se

$$\langle T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha\langle T, \varphi_1 \rangle + \beta\langle T, \varphi_2 \rangle \quad (7.1.3)$$

q.q.s. $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$, α, β números complexos.

Diz-se que T é contínua sobre \mathcal{D} se, para toda seqüência $\{\varphi_n\}$ convergente para 0 em \mathcal{D} , a seqüência numérica $\langle T, \varphi_n \rangle$ converge para $\langle T, 0 \rangle = 0$.

• Exemplos

1) Distribuição de Dirac. Indica-se por δ_0 o funcional linear que a cada $\varphi \in \mathcal{D}$ associa o número $\varphi(0)$:

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (7.1.4)$$

Esse funcional é contínuo, pois, se φ_n tende para 0 em \mathcal{D} então $\varphi_n(x)$ tende para 0 uniformemente, logo $\varphi_n(0) \rightarrow 0$, isto é δ_0 é uma distribuição, que é chamada distribuição de Dirac na origem.

Do mesmo modo se define a distribuição de Dirac no ponto a , como o funcional

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

2) Para cada $p \geq 0$ o funcional

$$\langle T, \varphi \rangle = \varphi^{(p)}(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad (7.1.5)$$

é linear e contínuo, logo é uma distribuição. Veremos mais tarde que essa distribuição deve ser interpretada como $(-1)^p \delta^{(p)}$, onde $\delta^{(p)}$ é a derivada de ordem p da distribuição de Dirac.

3) Toda função $f(x)$ localmente integrável, isso é, tal que²

$$\int_I |f(x)| dx \quad (7.1.6)$$

existe para todo intervalo limitado I , define uma distribuição, indicada por f , através da fórmula

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad (7.1.7)$$

onde a integral converge sempre, em virtude de φ ter suporte limitado e ser contínua.

A linearidade da distribuição f é evidente; a continuidade se demonstra tomando-se uma seqüência φ_n convergente em \mathcal{D} para 0. Então,

$$|\langle f, \varphi_n \rangle| \leq \int_I |f(x)||\varphi_n(x)| dx$$

onde I é o conjunto limitado, fora do qual todas as funções se anulam. Seja

$$M_n = \max_{x \in I} |\varphi_n(x)|.$$

Como $\varphi_n(x)$ converge para 0 uniformemente, M_n tende para 0 quando $n \rightarrow \infty$. Então,

$$\int_I |f(x)||\varphi_n(x)| dx \leq M_n \int_I |f(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{para } n \rightarrow \infty.$$

²A integral em (7.1.6) e (7.1.7) é a de Lebesgue, que generaliza a de Riemann. Na maioria dos casos, podemos interpretá-la como integral de Riemann.

Conclui-se, pois, que

$$\langle f, \varphi_n \rangle \longrightarrow 0 \quad \text{para } n \rightarrow \infty ,$$

o que mostra a continuidade de f .

Duas funções f e g iguais quase sempre (i.e., iguais exceto num conjunto de medida nula) definem a mesma distribuição. Reciprocamente, se duas funções definem a mesma distribuição, são iguais quase sempre (teorema).

Assim, a função de Heaviside $H(x)$

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} , \quad (7.1.8)$$

define a distribuição de Heaviside, qualquer que seja o valor atribuído a $H(x)$ no ponto $x = 0$.

Qualquer constante C define uma distribuição, pela fórmula

$$\langle C, \varphi \rangle = C \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx . \quad (7.1.9)$$

As distribuições, definidas por funções localmente integráveis, através da integral (7.1.4), chamam-se distribuições regulares. Todas as outras, como δ_a , são ditas distribuições singulares.

• Distribuições em mais de uma variável

Uma distribuição sobre \mathbb{R}^n é um funcional linear e contínuo sobre o espaço $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ das funções infinitamente diferenciáveis sobre \mathbb{R}^n e de suporte compacto. Uma seqüência φ_m é convergente para 0 em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ se:

- a) todas as funções φ_m tem suporte contido no mesmo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$;
- b) as derivadas parciais $\frac{\partial^p \varphi_m}{\partial x_i^p}(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $p = 0, 1, 2, \dots$ convergem uniformemente para 0, sobre todo compacto de \mathbb{R}^n .

• Interpretação física de algumas distribuições

Algumas distribuições podem ser interpretadas como distribuições de massas ou de cargas. Vejamos alguns exemplos.

- 1) A distribuição δ_a representa uma distribuição linear de cargas, com uma única carga positiva, unitária, localizada no ponto a .

- 2) Um dipólo elétrico, de momento $+1$, sobre a reta, localizado na origem, será representado pelo funcional

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\varphi(\epsilon) - \varphi(0)] = \varphi'(0).$$

Representa-se, pois, o dipólo de momento $+1$ pela distribuição

$$\langle T, \varphi \rangle = \varphi'(0). \quad (7.1.10)$$

No espaço \mathbb{R}^n , o dipólo de momento m , orientado segundo a direção $\vec{\nu}$, é representado pela distribuição

$$\langle T, \varphi \rangle = m \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, \quad (7.1.11)$$

onde $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \vec{\nu} \cdot \text{grad} \varphi$ com $\|\vec{\nu}\| = 1$.

- 3) Uma distribuição de cargas sobre uma superfície orientável S , com densidade superficial de carga $f(x, y, z)$, é representada matematicamente por

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_S f(x, y, z) \varphi(x, y, z) dS, \quad (7.1.12)$$

onde $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \vec{n} \cdot \text{grad} \varphi$, o vetor unitário \vec{n} sendo normal a S em cada ponto.

Vamos indicar simbolicamente essa distribuição por $f\delta_{(S)}$. Notemos que $f\delta_{(S)}$ é uma distribuição singular, que não deve ser confundida com a distribuição regular definida por f :

$$\langle f, \varphi \rangle = \iiint f(x, y, z) \varphi(x, y, z) dx dy dz.$$

Por um abuso de linguagem, dizemos que distribuição regular é uma função. É claro que existem distribuições que não são funções. É com esse sentido que dizemos que o conceito de distribuição generaliza o de função.

- 4) Uma distribuição de dipólos sobre uma superfície S , com densidade de dipólos $f(x, y, z)$, orientados segundo a normal à superfície, é interpretada pela distribuição

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_S f(x, y, z) \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \quad (7.1.13)$$

• Operações com distribuições

A soma de distribuições e a multiplicação de uma distribuição por um escalar, são assim definidas:

$$\begin{aligned}\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle &= \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle \\ \langle \alpha T, \varphi \rangle &= \alpha \langle T, \varphi \rangle,\end{aligned}\tag{7.1.14}$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

A totalidade das distribuições constitui um espaço vetorial em que o elemento nulo é a distribuição

$$\langle T, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D},$$

que será indicada por 0. Costuma-se indicar esse espaço por \mathcal{D}' (o espaço dual de \mathcal{D}).

Diz-se que duas distribuições T e S são iguais se e só se

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

• Suporte de uma distribuição

Não tem interesse (e nem sempre tem um sentido) o valor de uma distribuição só num ponto. É muito importante, porém, a noção de valor de uma distribuição num conjunto aberto Ω .

Diz-se que uma distribuição T é nula num conjunto aberto Ω se $\langle T, \varphi \rangle = 0$ para toda função φ cujo suporte está contido em Ω .

Por analogia com o suporte de uma função contínua define-se o suporte de uma distribuição como o menor conjunto fechado em cujo complementar (aberto) ela é nula. Em outras palavras, K é o suporte de T se e só se $\langle T, \varphi \rangle = 0$ para toda φ cujo suporte está contido no complementar de K . Por exemplo, o suporte de x, x^2 etc, é a reta; o suporte de δ_a é o ponto a .

7.2 Derivação de Distribuições

Seja $f(x)$ uma função contínua, com derivada contínua $f'(x)$. Define-se a derivada da distribuição f de modo que ela coincida com a distribuição definida pela derivada usual $f'(x)$, isto é, impõe-se que

$$\langle f', \varphi \rangle = \langle \{f'\}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx, \tag{7.2.1}$$

onde o símbolo $\{f'\}$ denota a distribuição definida pela função f' , ao passo que f' indica a derivada distribucional de f .

Por uma integração por partes obtém-se

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle.$$

Define-se, então, para qualquer distribuição T , a sua derivada T' pela fórmula

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle \quad (7.2.2)$$

que tem um sentido, pois, $\varphi' \in \mathcal{D}$, $T \in \mathcal{D}'$. Logo, o segundo membro define um número associado à função φ . Verifica-se facilmente que T' é uma distribuição.

A operação (7.2.2) pode ser repetida qualquer número de vezes: *as distribuições são infinitamente deriváveis*.

No caso de mais de uma variável, define-se uma derivada parcial pela fórmula

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle. \quad (7.2.3)$$

Dessa fórmula resulta que é sempre possível inverter a ordem das derivações parciais. Por exemplo,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x}.$$

No que segue estudaremos alguns exemplos de derivação de distribuições em uma variável.

• Derivada funções com descontinuidade de primeira espécie

Seja $f(x)$ uma função formalmente integrável e continuamente diferenciável, exceto no ponto $x = a$ onde $f(x)$ tem uma descontinuidade de primeira espécie. Isso quer dizer que existem os limites à direita e à esquerda de $f(x)$ no ponto a :

$$f_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \quad f_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x),$$

com $f_+(a) \neq f_-(a)$, mas o salto da função no ponto a

$$\sigma_a = f_+(a) - f_-(a)$$

é finito.

Calculemos f' pela fórmula (7.2.2):

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx.$$

A integral pode ser calculada por partes, desde que o ponto a não faça parte do intervalo de integração.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x) dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-\infty}^{a-\epsilon} f(x)\varphi'(x) dx + \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\varphi'(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{a+\epsilon}^{\infty} f(x)\varphi'(x) dx \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[f(x)\varphi(x) \right]_{-\infty}^{a-\epsilon} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[f(x)\varphi(x) \right]_{a+\epsilon}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x) dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[f(a-\epsilon)\varphi(a) - f(a+\epsilon)\varphi(a) \right] - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x) dx \\ &= -\sigma_a\varphi(a) - \langle \{f'\}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Na segunda igualdade usamos integração por partes e o fato que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\varphi'(x) dx = 0.$$

Conclui-se, pois, que

$$\langle f', \varphi \rangle = \langle \{f'\}, \varphi \rangle + \sigma_a \langle \delta_a, \varphi \rangle.$$

ou seja

$$f' = \{f'\} + \sigma_a \delta_a. \quad (7.2.4)$$

A descontinuidade de f manifesta-se na derivada generalizada de f sob a forma de uma massa pontual igual ao salto.

Se $f(x)$ tiver uma infinidade discreta de pontos de descontinuidade a_i , com saltos σ_i , a fórmula (7.2.4) se escreve

$$f' = \{f'\} + \sum \sigma_i \delta_{a_i}.$$

Derivando (7.2.4) uma vez obtemos

$$f'' = \{f''\} + \sigma_a \delta_a' + s_a \delta_a, \quad (7.2.5)$$

onde s_a é o salto da função $f'(x)$. δ_a' é a derivada da distribuição de Dirac no ponto a :

$$\langle \delta_a', \varphi \rangle = -\varphi'(a).$$

Aplicações diretas das fórmulas (7.2.4) e (7.2.5) nos dão

$$\begin{aligned} H' &= \delta_0, & \check{H}' &= -\delta_0 \\ \epsilon'(x) &= 2\delta_0, & |x|'' &= 2\delta_0, \\ \frac{d^2}{dx^2} \text{sen}(k|x|) &= -k^2 \text{sen}(k|x|) + 2k\delta_0'. \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

Acima, $\epsilon(x)$ é o sinal de x , ou seja, vale -1 para $x < 0$ e $+1$ para $x > 0$. $\check{H}(x) = H(-x)$.

• A derivação de $\ln|x|$. Valor principal

A função $\ln|x|$ é uma função localmente integrável³, mas a descontinuidade a $x = 0$ não é de primeira espécie. A derivada usual de $\ln|x|$, que é $1/x$, não é uma função localmente integrável. No entanto $\ln|x|$, como distribuição, tem uma derivada que deve estar de algum modo associada a $1/x$. Calculemos essa derivada:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dx} \ln|x|, \varphi \right\rangle &= - \langle \ln|x|, \varphi' \rangle \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} \ln|x| \varphi'(x) dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \ln|x| \varphi'(x) dx \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \ln(\epsilon) \varphi(\epsilon) - \ln(\epsilon) \varphi(-\epsilon) + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\}. \end{aligned}$$

Temos

$$\ln(\epsilon) \varphi(\epsilon) = \ln(\epsilon) \varphi(0) + \frac{\varphi(\epsilon) - \varphi(0)}{\epsilon} \epsilon \ln(\epsilon).$$

Quando $\epsilon \rightarrow 0$ tem-se $\epsilon \ln \epsilon \rightarrow 0$. Logo

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dx} \ln|x|, \varphi \right\rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \varphi(0) \ln \epsilon - \varphi(0) \ln \epsilon + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\} \\ &= \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx. \quad (7.2.7) \end{aligned}$$

³Lembrar que para $a > 0$ tem-se $\int_0^a \ln x dx = a(\ln(a) - 1)$. [NdEs]

O símbolo VP diante da integral quer dizer valor principal de Cauchy, cuja significação é a seguinte:

Seja $f(x)$ uma função definida no intervalo $[a, b]$ e c um ponto desse intervalo. Suponhamos que $f(x)$ seja integrável nos intervalos $(a, c - \epsilon)$ e $(c + \epsilon, b)$ para todo $\epsilon > 0$. Diz-se que a integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

existe se cada uma das integrais

$$\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx, \quad \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx$$

tiver um limite para $\epsilon \rightarrow 0$, ou seja, se a soma

$$\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon'}^b f(x) dx$$

tiver um limite para $\epsilon \rightarrow 0$ e $\epsilon' \rightarrow 0$, com ϵ independente de ϵ' .

Se esse limite não existir para ϵ independente de ϵ' , mas existir para $\epsilon = \epsilon' \rightarrow 0$, então diz-se que a integral $\int_a^b f(x) dx$ existe no sentido de “valor principal” e se escreve

$$\text{VP} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right\}. \quad (7.2.8)$$

Observação. Como se vê por (7.2.7), embora $1/x$ não seja localmente integrável, existe uma distribuição associada a $1/x$ pelo processo do valor principal, já que o funcional

$$\varphi \longrightarrow \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad (7.2.9)$$

é linear e contínuo. De fato, seja φ_n uma seqüência convergente para 0 em \mathcal{D} , os suportes de cada φ_n estando contidos no intervalo $(-A, +A)$. Tem-se

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{x} dx = \varphi_n(0) \text{VP} \int_{-A}^A \frac{1}{x} dx + \text{VP} \int_{-A}^A \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(0)}{x} dx$$

O primeiro termo é nulo porque $1/x$ é ímpar e, pelo teorema dos acréscimos finitos,

$$\left| \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(0)}{x} \right| \leq \max |\varphi_n'(x)|,$$

de onde vem

$$\left| \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{x} dx \right| \leq 2A \max |\varphi_n'(x)|,$$

que tende para 0 quando $n \rightarrow \infty$.

Denota-se a distribuição (7.2.9) por $\text{VP} \left(\frac{1}{x} \right)$. Temos assim o resultado

$$\frac{d}{dx} \ln |x| = \text{VP} \left(\frac{1}{x} \right). \quad (7.2.10)$$

São muito usadas em Física as distribuições de Heisenberg, definidas por

$$\delta_{\pm} = \frac{1}{2} \delta_0 \mp \frac{1}{2\pi i} \text{VP} \left(\frac{1}{x} \right), \quad (7.2.11)$$

Tem-se

$$\delta_0 = \delta_+ + \delta_-, \quad \text{VP} \left(\frac{1}{x} \right) = -i\pi(\delta_+ - \delta_-).$$

• A derivação de $(\ln x)_+$

Seja

$$f(x) = (\ln x)_+ = \begin{cases} \ln x, & \text{para } x > 0 \\ 0, & \text{para } x < 0 \end{cases}.$$

Derivemos f pela fórmula (7.2.2)

$$\begin{aligned} \langle f', \varphi \rangle &= -\langle f, \varphi' \rangle = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} \ln(x) \varphi'(x) dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\varphi(0) \ln \epsilon + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right]. \end{aligned} \quad (7.2.12)$$

Observa-se que na expressão entre parênteses há um termo divergente, $\varphi(0) \ln \epsilon$, e uma integral divergente. No entanto, a expressão deve ter um limite finito para $\epsilon \rightarrow 0$, já que define o valor, para a função φ , da derivada de uma distribuição⁴.

É fácil ver que o limite em questão pode ser interpretado como a parte finita da integral divergente $\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$, noção que foi introduzida por Hadamard.

⁴A função $(\ln x)_+$ é localmente integrável e, portanto, define uma distribuição. Lembrar que para $a > 0$ tem-se $\int_0^a \ln x dx = a(\ln(a) - 1)$. [NdEs]

• **Parte finita de Hadamard**

Seja $f(x)$ uma função integrável no intervalo $[a + \epsilon, b]$ se $\epsilon > 0$, mas não integrável em $[a, b]$. A integral definida

$$F(\epsilon) = \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$$

não tem um limite finito para $\epsilon \rightarrow 0$, mas pode acontecer que seja a soma de termos que têm um limite finito para $\epsilon \rightarrow 0$ e de uma combinação linear $I(\epsilon)$ de termos divergentes da forma $e^\mu (\ln \epsilon)^\nu$, onde μ e ν são números complexos tais que $\text{Re}(\mu) \leq 0$ e $\text{Re}(\nu) \geq 0$, excluindo-se o caso $\mu = \nu = 0$. A expressão $I(\epsilon)$, que é única, constitui a “parte infinita” da integral divergente.

A parte finita da integral divergente $\int_a^b f(x) dx$, segundo Hadamard é o limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx - I(\epsilon) \right\} \quad (7.2.13)$$

que existe e é finito e que se representa por

$$\text{PF} \int_a^b f(x) dx .$$

Exemplo:

$$\text{PF} \int_0^b \frac{1}{x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_\epsilon^b \frac{1}{x} dx + \ln(\epsilon) \right\} = \ln b .$$

Assim, podemos ver que o limite (7.2.12) é a parte finita de $\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx$. Com efeito, procuremos a parte infinita de $F(\epsilon) = \int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx$. Esta só pode provir de uma contribuição do extremo inferior. Ora, na vizinhança de $x = 0$, $\varphi(x)$ tem o comportamento assintótico

$$\varphi(x) \sim \varphi(0) + \varphi'(0)x + \varphi''(0)\frac{x^2}{2} + \dots .$$

Integrando $\frac{\varphi(x)}{x}$ sobre um intervalo pequeno, digamos, sobre (ϵ, a) , a sendo pouco maior que ϵ , temos

$$F(\epsilon) = \varphi(0) \int_\epsilon^a \frac{1}{x} dx + \varphi'(0) \int_\epsilon^a dx + \dots + \int_a^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx .$$

Por aí vemos que o único termo divergente é $-\varphi(0) \ln \epsilon$, já que todos os demais ou são independentes de ϵ ou tendem para 0 quando $\epsilon \rightarrow 0$. Achamos pois, $I(\epsilon) = -\varphi(0) \ln \epsilon$, o que nos autoriza a identificar (7.2.12) com $\text{PF} \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx$.

A aplicação $\varphi \in \mathcal{D} \rightarrow \text{PF} \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx$ é uma distribuição que será designada por $\text{PF} \left(\frac{H(x)}{x} \right)$. Temos pois, o seguinte resultado

$$\frac{d}{dx} (\ln x)_+ = \text{PF} \left(\frac{H(x)}{x} \right). \quad (7.2.14)$$

De modo análogo acha-se

$$\frac{d}{dx} (\ln |x|)_- = \text{PF} \left(\frac{H(-x)}{x} \right), \quad (7.2.15)$$

onde

$$(\ln |x|)_- = \begin{cases} 0, & \text{para } x > 0 \\ \ln |x|, & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

e $\text{PF} \left(\frac{H(-x)}{x} \right)$ é a distribuição

$$\varphi \rightarrow \text{PF} \int_{-\infty}^0 \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Somando (7.2.14) e (7.2.15) tem-se

$$\frac{d}{dx} \ln |x| = \text{PF} \left(\frac{H(x)}{x} \right) + \text{PF} \left(\frac{H(-x)}{x} \right) = \text{PF} \left(\frac{1}{x} \right).$$

Observa-se que $\text{PF} \left(\frac{1}{x} \right)$ e $\text{VP} \left(\frac{1}{x} \right)$ são a mesma distribuição (vide (7.2.10)).

Se derivarmos $(\ln x)_+$ mais uma vez obteremos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \langle (\ln x)_+'' , \varphi \rangle &= - \left\langle \text{PF} \left(\frac{H(x)}{x} \right), \varphi' \right\rangle \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left\{ \int_\epsilon^\infty \frac{\varphi'(x)}{x} dx + \varphi'(0) \ln \epsilon \right\} \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left\{ -\frac{\varphi(\epsilon)}{\epsilon} + \varphi'(0) \ln \epsilon + \int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \right\} \end{aligned}$$

Quando $\epsilon \rightarrow 0$ tem-se $\frac{\varphi(\epsilon)}{\epsilon} \sim \varphi'(0) + \frac{\varphi(0)}{\epsilon}$. A parte infinita de $\int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x^2} dx$ é $I(\epsilon) = \frac{\varphi(0)}{\epsilon}$. Vê-se que a expressão entre colchetes contém, além da parte infinita, um termo independente de ϵ , a saber $-\varphi'(0)$. Assim

$$\left\langle \frac{d}{dx} \text{PF} \left(\frac{H(x)}{x} \right), \varphi \right\rangle = -\text{PF} \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x^2} dx + \varphi'(0)$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}$, ou seja,

$$\frac{d}{dx} \text{PF} \left(\frac{H(x)}{x} \right) = -\text{PF} \left(\frac{H(x)}{x^2} \right) - \delta_0' . \quad (7.2.16)$$

Procedendo do mesmo modo com $\text{PF} \left(\frac{H(-x)}{x^2} \right)$ achamos

$$\frac{d}{dx} \text{PF} \left(\frac{H(-x)}{x} \right) = -\text{PF} \left(\frac{H(-x)}{x^2} \right) + \delta_0' . \quad (7.2.17)$$

onde $\text{PF} \left(\frac{H(-x)}{x^2} \right)$ é a distribuição

$$\varphi \longrightarrow \text{PF} \int_{-\infty}^0 \frac{\varphi(x)}{x^2} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{\varphi(0)}{\epsilon} - \varphi'(0) \ln \epsilon \right\} .$$

Somando (7.2.16) e (7.2.17) obtemos finalmente

$$\frac{d}{dx} \text{PF} \left(\frac{1}{x} \right) = -\text{PF} \left(\frac{1}{x^2} \right) . \quad (7.2.18)$$

Observa-se que $\text{PF} \left(\frac{1}{x^2} \right)$ não pode ser obtida por meio do valor principal, já que os termos divergentes oriundos de cada integral não se cancelam.

De modo geral funções como $1/x^m$ ($m > -1$), $1/(x^2 - a^2)$, $1/(x - a)^m$ etc., que não são localmente integráveis, também podem definir distribuições pelo processo da parte finita de Hadamard.

Tais distribuições singulares são chamadas “pseudo-funções” e são designadas pelo símbolo da função precedido do símbolo PF.

7.3 Multiplicação e Divisão de Distribuições

Não se pode definir a multiplicação entre duas distribuições quaisquer. É fácil de compreender essa dificuldade quando se lembra que o produto de duas funções localmente integráveis nem sempre é localmente integrável (por exemplo $\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x}$).

Não obstante, é sempre possível definir um produto multiplicativo entre uma função infinitamente derivável $\alpha(x)$ e uma distribuição arbitrária T , pela fórmula

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle . \quad (7.3.1)$$

que tem um sentido para toda $\varphi \in \mathcal{D}$, já que $\alpha\varphi \in \mathcal{D}$. Essa definição é sugerida pelo resultado

$$\langle \alpha f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) f(x) \varphi(x) dx = \langle f, \alpha\varphi \rangle,$$

válido para $T = f$.

A aplicação direta de (7.3.1) nos dá os seguintes resultados:

$$\alpha(x)\delta_a = \alpha(a)\delta_a, \quad x^n \text{PF} \left(\frac{1}{x^m} \right) = \text{PF} \left(\frac{1}{x^{m-n}} \right) \quad (7.3.2)$$

para todo $n \geq 0$ e todo $m \geq 1$ (se $m - n < 1$ o símbolo PF é inútil). Fora isso,

$$x^n \delta_0^{(l)} = \begin{cases} 0, & \text{se } n > l \\ (-1)^n \frac{l!}{(l-n)!} \delta_0^{(l-n)}, & \text{se } n \leq l \end{cases}. \quad (7.3.3)$$

Em particular, temos $x\delta_0 = 0$, $x\delta_0' = -\delta_0$ etc.

Esse produto se estende a um número qualquer de distribuições T_1, \dots, T_k desde que $(k-1)$ delas sejam funções infinitamente deriváveis, e goza das propriedades usuais de produto, a saber, comutatividade, distributividade e associatividade.

O produto αT se deriva segundo a regra habitual da derivada de um produto

$$(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'. \quad (7.3.4)$$

Há outros casos em que se pode multiplicar duas distribuições S e T , em que S não é tão regular como $\alpha(x)$ e T não é tão arbitrária. O sentido a ser dado ao produto $S \cdot T$ depende de cada caso.

• O problema da divisão

É um problema muito freqüente nas teorias das equações diferenciais e integrais. Trata-se de, dada a distribuição B e a função infinitamente diferenciável $\alpha(x)$, achar todas as distribuições T verificando

$$\alpha(x)T = B. \quad (7.3.5)$$

Caso $\alpha(x)$ não tenha zeros reais, a única solução é

$$T = \frac{1}{\alpha(x)} B.$$

Quando $\alpha(x)$ tem zeros reais, uma solução particular é dada por

$$T = \text{PF} \left(\frac{1}{\alpha(x)} \right) B$$

desde que o produto do segundo membro seja definido. Mas essa não é a única solução já que a equação homogênea

$$\alpha(x)T = 0$$

admite soluções não nulas na teoria das distribuições.

Por exemplo, dividir a distribuição 1 pela função x , consiste em achar todas as distribuições T tais que

$$xT = 1 \tag{7.3.6}$$

Além da solução $T = \text{VP} \left(\frac{1}{x} \right)$, existe uma infinidade de soluções da forma

$$\text{VP} \left(\frac{1}{x} \right) + c\delta_0, \tag{7.3.7}$$

onde c é uma constante arbitrária.

Consideremos o problema mais geral

$$x^n T = \alpha(x). \tag{7.3.8}$$

A solução geral de (7.3.8) será a soma de uma solução particular

$$T = \alpha(x) \text{PF} \left(\frac{1}{x^n} \right)$$

com todas as soluções de

$$x^n T = 0. \tag{7.3.9}$$

Qualquer distribuição satisfazendo (7.3.9) só pode ter suporte localizado na origem. Por um teorema de Schwartz, toda distribuição cujo suporte é a origem é uma combinação linear única de derivadas de δ_0 :

$$T = \sum_{p=0}^m c_p \delta_0^{(p)}.$$

Usando o resultado (7.3.3), devemos concluir que a solução mais geral de (7.3.8) é

$$T = \alpha(x) \text{PF} \left(\frac{1}{x^n} \right) + \sum_{p=0}^{n-1} c_p \delta_0^{(p)},$$

onde c_0, \dots, c_{n-1} são n constantes arbitrárias.

O aparecimento de constantes arbitrárias é uma característica do problema de divisão, na teoria das distribuições.

O problema da divisão, em mais de uma variável, é mais delicado, estando relacionado com a mudança de variáveis de que trataremos mais tarde.

7.4 Equações Diferenciais

A equação diferencial de ordem n

$$a_0(x) \frac{d^n}{dx^n} T + a_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} T + \dots + a_n(x) T = B \quad (7.4.1)$$

onde $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ são funções infinitamente diferenciáveis, B uma distribuição qualquer e as derivadas são interpretadas no sentido de distribuições, pode admitir três tipos de soluções:

- 1) Solução clássica, quando T é uma função suficientemente derivável, de modo que as derivadas no sentido usual existam, até ordem n (nesse caso B também é uma função).
- 2) Solução fraca, se T é uma função não suficientemente diferenciável para que possa ser substituída em (7.4.1).
- 3) Solução distribucional, quando T é uma distribuição singular, que satisfaz (7.4.1).

Qualquer um dos três tipos de solução é uma solução generalizada de (7.4.1).

Há um teorema relativo às soluções clássicas⁵ que diz o seguinte:

Teorema - Se $a_0(x)$ nunca se anula e B é uma função localmente integrável as únicas soluções generalizadas de (7.4.1) são as soluções clássicas.

• Exemplos

Vejamos alguns exemplos. Abaixo, c_1, c_2 e c_3 são constantes arbitrárias.

1. $x \frac{dT}{dx} = 0$. $H(x)$ é uma solução fraca, já que não é diferenciável no ponto $x = 0$. Qualquer constante é uma solução clássica. De modo geral,

⁵Vide L. Schwartz, "Théorie des distributions", Vol. I and II, Paris: Hermann (1957-1959). [NdEs]

qualquer solução generalizada é da forma

$$T = c_1 H + c_2 .$$

2. $x^2 \frac{dT}{dx} = 0$. Existe uma solução distribucional $T = \delta_0$, uma solução fraca $T = H(x)$ e uma solução clássica $T = C$ (C constante). A solução generalizada mais geral é

$$T = c_1 \delta_0 + c_2 H + c_3 .$$

3. $x \frac{dT}{dx} = \delta_0$. Existe uma solução distribucional $T = -\delta_0$, mas a solução generalizada mais geral é

$$T = -\delta_0 + c_1 H + c_2 .$$

4. $x \frac{dT}{dx} + \lambda T = 0$ ($\lambda > 1$, λ não-inteiro). Uma solução distribucional é $T_1 = \text{PF}(H(x)x^{-\lambda})$. Outra é $T_2 = \text{PF}(H(-x)x^{-\lambda})$. Não existe solução clássica. A solução geral é

$$T = T_1 + T_2 .$$

• Funções de Green

Seja

$$LT = a_0(x) \frac{d^n}{dx^n} T + a_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} T + \dots + a_n(x) T ,$$

$a_0(x), \dots, a_n(x)$ são funções infinitamente diferenciáveis e $a_0(x) \neq 0$ para todo x .

Diz-se que qualquer solução generalizada da equação

$$LT = \delta(x - \xi) , \tag{7.4.2}$$

onde ξ é um número real fixo, mas arbitrário, é uma solução fundamental do operador L , com pólo a ξ . Por exemplo, $\frac{|x-\xi|}{2}$ é uma solução fundamental de, $\frac{d^2}{dx^2}$, já $\frac{\text{sen}(k|x-x'|)}{2k}$ é solução fundamental de $\frac{d^2}{dx^2} + k^2$ etc.

Consideremos o problema de determinar uma solução particular da equação não-homogênea

$$LT = B \tag{7.4.3}$$

sujeita a n condições arbitrárias mas suficientes para especificar completamente a solução.

Chame-se função de Green do problema em questão, a solução fundamental do operador L , com pólo a ξ , que satisfaz a n condições homogêneas do mesmo tipo.

No caso de uma variável, a função de Green $G(x, \xi)$ é uma solução fraca de

$$LG(x, \xi) = \delta(x - \xi), \quad (7.4.4)$$

isto é, uma solução contínua, mas não suficientemente diferenciável. Conclui-se facilmente, da regra de derivação das distribuições, que $G(x, \xi)$ e suas primeiras $n - 2$ derivadas são contínuas, mas que a derivada de ordem $n - 1$ tem uma descontinuidade a $x - \xi$, com salto $\sigma = \frac{1}{a_0(\xi)}$.

No caso de B ser uma função integrável, com suporte limitado I , a solução do problema (7.4.3) é uma função $f(x)$ composta de duas partes

$$f(x) = f_0(x) + h(x)$$

em que

$$f_0(x) = \int_I G(x, \xi)g(\xi) d\xi \quad (7.4.5)$$

satisfaz a eq. (7.4.3) com n condições homogêneas, ao passo que $h(x)$ é a solução clássica de

$$Lh = 0. \quad (7.4.6)$$

com as n condições não homogêneas do problema.

Um método de construção da função de Green $G(x, \xi)$ do problema (7.4.3) consiste em observar que $G(x, \xi)$ é, no complementar do ponto ξ , uma solução clássica da eq. (7.4.6). Logo se exprime, tanto para $x < \xi$, como para $x > \xi$, como combinação linear de n soluções linearmente independentes da equação (7.4.6). Cada expressão envolve n constantes arbitrárias. As $2n$ constantes serão determinadas por:

- a) as n condições homogêneas do problema,
- b) as n condições de continuidade e descontinuidade que G e suas derivadas satisfazem.

7.5 Convergência de Distribuições

Seja T_n , $n = 1, 2, \dots$, uma seqüência de distribuições tais que, para cada $\varphi \in \mathcal{D}$, $\langle T_n, \varphi \rangle$ tenha um limite quando $n \rightarrow \infty$, que indicaremos por $\langle T, \varphi \rangle$.

Quando φ percorre \mathcal{D} , $\langle T, \varphi \rangle$ é um funcional linear sobre \mathcal{D} . Não é evidente, mas demonstra-se (demonstração bastante delicada) que $\langle T, \varphi \rangle$ é contínuo. Temos, pois, uma distribuição T .

Define-se convergência de distribuições em \mathcal{D}' dizendo-se que a seqüência de distribuições T_n converge para T quando $n \rightarrow \infty$, se, para cada $\varphi \in \mathcal{D}$, $\langle T_n, \varphi \rangle$ converge para $\langle T, \varphi \rangle$.

Aplica-se também essa definição ao caso de distribuições dependentes de um parâmetro contínuo α : T_α converge para T_{α_0} , quando $\alpha \rightarrow \alpha_0$, se $\langle T_\alpha, \varphi \rangle$ converge para $\langle T_{\alpha_0}, \varphi \rangle$ quando $\alpha \rightarrow \alpha_0$, para cada $\varphi \in \mathcal{D}$.

Diz-se que uma série de distribuições $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ converge para T se as somas parciais

$$S_k = \sum_{n=1}^k T_n$$

convergem para T .

O seguinte teorema relaciona a convergência uniforme de funções localmente integráveis, com a convergência de distribuições:

“Se as funções localmente integráveis $f_n(x)$ convergem para a função $f(x)$, quando $n \rightarrow \infty$, uniformemente sobre todo intervalo limitado, as distribuições f_n convergem para a distribuição f ”.

Se as distribuições T_n convergem para T , então as derivadas T_n' convergem para T' . De fato,

$$\langle T_n', \varphi \rangle = -\langle T_n, \varphi' \rangle \longrightarrow -\langle T, \varphi' \rangle = \langle T', \varphi \rangle \quad (7.5.1)$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}$.

Em conseqüência desse resultado, toda série convergente em \mathcal{D}' é derivável termo a termo, sob o sinal \sum tantas vezes quanto se quiser.

Em Física-Matemática freqüentemente encontram-se seqüências de funções $f_n(x)$ que não convergem nem pela convergência uniforme, nem pela convergência simples. Mas pode acontecer que $f_n(x)$ seja a k -ésima derivada distribucional de uma função localmente integrável $g_n(x)$ e que $f(x)$ seja $\frac{d^k g}{dx^k}$ e que as funções $g_n(x)$ sejam uniformemente convergentes para $g(x)$, sobre todo intervalo limitado. Então, as funções $f_n(x)$ convergem para a função $f(x)$, no sentido de distribuições.

• Exemplos de convergência de funções em \mathcal{D}'

Estudemos dois exemplos importantes em diversas aplicações em Física.

1. Seja

$$T_\epsilon = \frac{1}{x + i\epsilon}, \quad \epsilon > 0.$$

Tem-se

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\langle \frac{1}{x + i\epsilon}, \varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x + i\epsilon} dx = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow 0}} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(z)}{z + i\epsilon} dz,$$

onde Γ é a curva mostrada⁶ na figura 7.2.

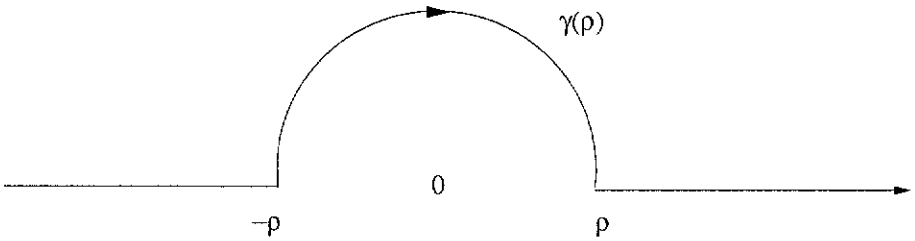


Figura 7.2. A curva Γ .

A última integral pode ser escrita como

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow 0}} \left\{ \int_{-\infty}^{-\rho} \frac{\varphi(x)}{x + i\epsilon} dx + \int_{\rho}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x + i\epsilon} dx + \int_{\gamma(\rho)} \frac{\varphi(z)}{z + i\epsilon} dz \right\}.$$

Em cada integral, o limite $\epsilon \rightarrow 0$ pode ser efetuado sem dificuldade. A integral sobre o semi-círculo de raio ρ pode ser calculada por meio da mudança de variável $z = \rho e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $dz = i\rho e^{i\theta} d\theta$, obtendo-se $-i \int_0^\pi \varphi(\rho e^{i\theta}) d\theta$. No limite $\rho \rightarrow 0$, $\varphi(\rho e^{i\theta}) \rightarrow \varphi(0)$, logo essa integral no limite é $-i\pi\varphi(0)$. Por outro lado,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\rho} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\rho}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\} = \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Obtemos assim

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\langle \frac{1}{x + i\epsilon}, \varphi \right\rangle = \left\langle \text{VP} \left(\frac{1}{x} \right), \varphi \right\rangle - i\pi\varphi(0),$$

⁶Em verdade, nem toda função $\varphi \in \mathcal{D}$ possui uma extensão analítica em uma vizinhança do seu suporte real, como é requerido para que uma tal mudança de caminho de integração possa ser feita. Porém, o conjunto de funções $\varphi \in \mathcal{D}$ com tal propriedade é um conjunto denso, o que justifica o argumento empregado. [NdEs]

ou seja,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\epsilon} = \text{VP} \left(\frac{1}{x} \right) - i\pi\delta_0. \quad (7.5.2)$$

2. Seja

$$f_\alpha(x) = \frac{\text{sen}(\alpha x)}{\pi x}.$$

Tem-se

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\text{sen}(\alpha x)}{x}, \varphi \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(\alpha x)}{x} \varphi(x) dx \\ &= \int_{-A}^A \text{sen}(\alpha x) \left[\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \right] dx + \varphi(0) \int_{-A}^A \frac{\text{sen}(\alpha x)}{x} dx, \end{aligned} \quad (7.5.3)$$

onde A é escolhido de modo que $[-A, A]$ contém o suporte de φ .

Mostremos que a primeira integral tende para 0, quando $\alpha \rightarrow \infty$. Observa-se inicialmente que a função $\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$ é infinitamente diferenciável, o valor de $\psi(x)$ e suas derivadas no ponto $x = 0$ sendo definido pela regra de l'Hospital. Integrando por partes obtemos

$$\int_{-A}^A \text{sen}(\alpha x) \psi(x) dx = - \left[\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha} \psi(x) \right]_{-A}^A + \frac{1}{\alpha} \int_{-A}^A \cos(\alpha x) \psi'(x) dx.$$

No limite $\alpha \rightarrow \infty$, a integral e a parte integrada tendem para 0, com $\frac{1}{\alpha}$.

A integral $\int_{-A}^A \frac{\text{sen}(\alpha x)}{x} dx = \int_{-\alpha A}^{\alpha A} \frac{\text{sen}(y)}{y} dy$ tende, quanto $\alpha \rightarrow \infty$, para o limite π , como é bem conhecido. Temos, assim

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\text{sen}(\alpha x)}{\pi x}, \varphi \right\rangle = \pi \varphi(0),$$

ou seja,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(\alpha x)}{\pi x} = \delta_0. \quad (7.5.4)$$

A propósito, a função

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \alpha \\ 0, & |x| > \alpha \end{cases} \quad (7.5.5)$$

tem por transformada de Fourier a função $\frac{\text{sen}(2\pi\alpha\xi)}{\pi\xi}$. Quando $\alpha \rightarrow \infty$, f_α tende para 1, enquanto $\frac{\text{sen}(2\pi\alpha\xi)}{\pi\xi}$ tende para δ_0 . É natural, pois, atribuir à função 1 uma transformada de Fourier generalizada, a distribuição δ_0 .

se $g(\xi) = [\mathcal{F}f](\xi)$, então,

$$g(\xi) \text{ é limitada, absolutamente contínua e } \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} g(\xi) = 0, \quad (7.7.2)$$

$$\mathcal{F}[f'(x)] = 2i\pi\xi g(\xi), \quad (7.7.3)$$

$$\mathcal{F}[xf(x)] = -\frac{1}{2i\pi}g'(\xi), \quad (7.7.4)$$

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = e^{-2i\pi a\xi}g(\xi), \quad (a \text{ real}), \quad (7.7.5)$$

$$\mathcal{F}[f(kx)] = \frac{1}{|k|}g(\xi/k), \quad (k \text{ real } \neq 0), \quad (7.7.6)$$

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g], \quad (7.7.7)$$

$$\mathcal{F}[f(-x)] = \overline{\mathcal{F}[f(x)]} = \overline{\mathcal{F}[\overline{f(x)}]}, \quad (7.7.8)$$

$$\mathcal{F}[\overline{f(x)}] = \overline{\overline{\mathcal{F}[f(x)]}} = \overline{\mathcal{F}[\overline{f(-x)}]}. \quad (7.7.9)$$

Acima, \overline{f} designa o complexo conjugado de f .

• Transformação de Fourier de distribuições

Sejam $f(x)$ e $g(\xi)$ funções da classe $L^1(-\infty, \infty)$, ambas localmente integráveis nas variáveis x e ξ , respectivamente. Suponhamos que $g = \mathcal{F}f$.

Queremos estender a definição de transformada de Fourier para distribuições, de modo que se tenha

$$\langle g, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}f, \varphi \rangle$$

se isso for possível temos,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\varphi(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2i\pi x\xi} dx.$$

Invertendo a ordem das integrações, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\varphi(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)e^{-2i\pi x\xi} d\xi.$$

Assim obtivemos a relação

$$\langle \mathcal{F}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}\varphi \rangle.$$

o que nos leva a definir, para uma distribuição T qualquer,

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle. \quad (7.7.10)$$

Essa definição teria um sentido se toda função $\varphi \in \mathcal{D}_\xi$ tivesse uma imagem de Fourier em \mathcal{D}_x . Mas isso não é verdade, já que as transformadas de Fourier das funções $\varphi \in \mathcal{D}$ têm suporte ilimitado.

Assim, a fórmula (7.7.10) só tem sentido se impusermos certas restrições sobre T , isto é, se afrouxarmos as condições que a função de teste deve satisfazer. Vamos, pois, introduzir um novo espaço de funções de teste.

• O espaço \mathcal{S}

Designamos por \mathcal{S} , o chamado espaço de Schwartz, a totalidade das funções $f(x)$ infinitamente deriváveis sobre a reta e “rapidamente decrescentes no infinito”, bem como cada uma de suas derivadas. Mais precisamente, as funções $\varphi \in \mathcal{S}$ são caracterizadas pela condição

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^k \varphi^{(p)}(x)| = 0 \quad (7.7.11)$$

para todo $k \geq 0$ e todo $p \geq 0$, que também pode ser expressa assim: para todo $k \geq 0$ e todo inteiro $p \geq 0$ a função $x^k \varphi^{(p)}(x)$ é limitada.

São exemplos de funções $\varphi \in \mathcal{S}$ as funções e^{-x^2} , e^{-x^4} e qualquer função de classe C^∞ tal que, para $|x| \rightarrow \infty$

$$|\varphi(x)| \leq C e^{-|x|}.$$

Diz-se que uma seqüência de funções $\varphi_n \in \mathcal{S}$ converge para 0, quando $n \rightarrow \infty$ no sentido de \mathcal{S} se quaisquer que forem os inteiros $k \geq 0$ e $p \geq 0$ as funções $x^k \varphi_n^{(p)}(x)$ convergirem para 0, uniformemente sobre \mathbb{R} .

É óbvio que $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ e que se φ_n converge para 0 em \mathcal{D} , necessariamente converge para 0 em \mathcal{S} .

• Distribuições temperadas

Chamam-se distribuições temperadas as distribuições que são prolongáveis em funcionais lineares e contínuos sobre \mathcal{S} . O espaço das distribuições temperadas será designado do por \mathcal{S}' (espaço dual de \mathcal{S})¹⁰.

¹⁰Notar que, como $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$, tem-se $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.

• Exemplos de distribuições temperadas

- 1) Uma função f absolutamente integrável¹¹ define uma distribuição temperada. De fato, para toda $\varphi \in \mathcal{S}$, tem-se $|\varphi(x)| \leq A$, para algum A . Logo,

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq A \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty,$$

logo $\langle f, \varphi \rangle$ tem um sentido.

- 2) Uma função $f(x)$ limitada é temperada pois,

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| dx < \infty.$$

- 3) Uma função $f(x)$ localmente integrável e lentamente crescente, isto é, tal que, para algum $k \geq 0$ se tenha

$$\frac{|f(x)|}{(1+x^2)^{k/2}} \leq C_k \quad (7.7.12)$$

é temperada, porquanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |\varphi(x)| dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|}{(1+x^2)^{k/2}} (1+x^2)^{k/2} |\varphi(x)| dx \\ &\leq C_k \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{k/2} |\varphi(x)| dx < \infty. \end{aligned}$$

Nota-se que a condição (7.7.12) também pode ser escrita

$$|f(x)| \leq A|x|^k, \quad \text{para } |x| \rightarrow \infty.$$

- 4) Toda distribuição T de suporte limitado é temperada pois $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$.

Assim, são distribuições temperadas as funções $\ln|x|$, os polinômios, as distribuições δ e suas derivadas etc. São também temperadas as pseudo-funções $\text{PF} \frac{1}{x^m}$ e qualquer distribuição que seja o produto de uma distribuição temperada e de uma função $\alpha(x)$ lentamente crescente. Não são temperadas as distribuições e^x , e^{x^2} etc.

¹¹Uma função é absolutamente integrável se satisfaz $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$. Isso equivale a dizer que a função pertence à classe $L^1(-\infty, \infty)$. [NdEs]

• Transformação de Fourier das distribuições temperadas

Se T é temperada ($T \in \mathcal{S}'_x$) e $\varphi \in \mathcal{S}_\xi$ a fórmula (7.7.10) define sua transformada de Fourier $\mathcal{F}T$ como uma distribuição temperada ($\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'_\xi$). Isso porque, para toda $\varphi \in \mathcal{S}_\xi$ tem-se $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}_x$, como mostramos a seguir:

Seja

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-2i\pi x\xi} d\xi .$$

Derivando formalmente k vezes temos

$$\psi^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (-2i\pi\xi)^k \varphi(\xi) e^{-2i\pi x\xi} d\xi .$$

Como $\xi^k \varphi(\xi)$ é absolutamente integrável para todo inteiro $k \geq 0$, segue-se que ψ é infinitamente derivável.

Por outro lado, φ é infinitamente derivável e para cada inteiro $p \geq 0$ tem-se

$$\mathcal{F}\varphi^{(p)}(\xi) = (2i\pi x)^p \psi(x) ,$$

de onde se tira

$$|x^p \psi(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi^{(p)}(\xi)| d\xi = C_{0,p} ,$$

o que quer dizer que $\psi(x)$ decresce rapidamente no infinito. O mesmo vale para as derivadas $\psi^{(m)}(x)$, que verificam

$$|x^p \psi^{(m)}(x)| \leq (2\pi)^{m-p} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi^m \varphi^{(p)}(\xi)| d\xi = C_{m,p} .$$

Assim, $\psi(x) \in \mathcal{S}_x$ e a fórmula (7.7.10) tem um sentido.

• Propriedades da transformação de Fourier

Todas as propriedades básicas da transformação de Fourier clássica (7.7.3)-(7.7.9) (exceto a primeira, (7.7.2)) se estendem às distribuições temperadas.

Verifiquemos, por exemplo, a (7.7.3). Seja $T \in \mathcal{S}'_x$ e $S = \mathcal{F}T \in \mathcal{S}'_\xi$.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}T', \varphi \rangle &= \langle T', \mathcal{F}\varphi \rangle = -\langle T, (\mathcal{F}\varphi)' \rangle \\ &= 2i\pi \langle T, \mathcal{F}(\xi\varphi) \rangle = 2i\pi \langle \mathcal{F}T, \xi\varphi \rangle = 2i\pi \langle \xi \mathcal{F}T, \varphi \rangle , \end{aligned}$$

$\forall \varphi \in \mathcal{S}$, de onde resulta

$$\mathcal{F}T' = 2i\pi\xi \mathcal{F}T ,$$

que generaliza (7.7.3).

• Exemplos de cálculo de imagens de Fourier de distribuições

1) *Cálculo de $\mathcal{F}\delta_0$.* Tem-se

$$\langle \mathcal{F}\delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \mathcal{F}\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi = \langle 1, \varphi \rangle.$$

Temos, pois

$$\mathcal{F}\delta_0 = 1. \quad (7.7.13)$$

Daí resulta, pela fórmula (7.7.3),

$$\mathcal{F}\delta_0' = 2i\pi\xi, \quad \mathcal{F}\delta_0'' = -4\pi^2\xi^2$$

etc.

2) *Cálculo de $\mathcal{F}1$.* Como 1 é uma distribuição temperada cuja derivada é 0, segue-se que $S = \mathcal{F}1$ satisfaz a equação

$$\xi S_\xi = 0.$$

Logo, S_ξ é da forma $C\delta_0$. Determinamos a constante C usando a definição (7.7.10) para a função de teste $\varphi = e^{-\pi\xi^2}$ e cuja imagem de Fourier é $\psi = e^{-\pi x^2}$.

$$C = \langle C\delta_0, e^{-\pi x^2} \rangle = \langle 1, e^{-\pi\xi^2} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\xi^2} d\xi = 1.$$

Assim temos

$$\mathcal{F}1 = \delta_0. \quad (7.7.14)$$

3) *Cálculo de $\mathcal{F}x^m$ (m inteiro > 0).* $\mathcal{F}x^m$ deduz-se da fórmula (7.7.4), usando (7.7.14)

$$\mathcal{F}x^m = \frac{1}{(-2i\pi)^m} \delta_0^{(m)} \quad (7.7.15)$$

com m inteiro > 0 .

4) *Cálculo de $\mathcal{F}VP\left(\frac{1}{x}\right)$.* Tem-se que $VP\left(\frac{1}{x}\right)$ é a única distribuição ímpar que verifica $xVP\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ (vide (7.3.6)-(7.3.7)). Logo, $S = \mathcal{F}VP\left(\frac{1}{x}\right)$ é a única distribuição ímpar que satisfaz a equação

$$-\frac{1}{2i\pi} \frac{d}{d\xi} S = \delta_0. \quad (7.7.16)$$

A solução geral da eq. (7.7.16) é

$$S = -2i\pi \frac{\epsilon(\xi)}{2} + C, \quad \text{com} \quad \epsilon(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0 \\ -1, & \xi < 0 \end{cases}.$$

A constante C é par, logo $S = -i\pi\epsilon(\xi)$. Assim,

$$\mathcal{F} \text{VP} \left(\frac{1}{x} \right) = -i\pi\epsilon(\xi). \quad (7.7.17)$$

• Fórmula de reciprocidade de Fourier

Queremos provar que se $\varphi \in \mathcal{S}$ e $\psi(\xi) = \mathcal{F}[\varphi(x)]$, então $\overline{\mathcal{F}}[\psi(\xi)] = \varphi(x)$. Seja $\gamma(x) = \overline{\mathcal{F}}[\psi(\xi)]$ e a um número real qualquer. Temos

$$\gamma(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) e^{2i\pi a \xi} d\xi.$$

Mas,

$$\psi(\xi) e^{2i\pi a \xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-2i\pi(x-a)\xi} dx.$$

Então,

$$\gamma(a) = \langle 1, \mathcal{F}[\varphi(x+a)] \rangle = \langle \mathcal{F}1, \varphi(x+a) \rangle = \langle \delta_0, \varphi(x+a) \rangle = \varphi(a).$$

Mostramos assim que $\gamma = \varphi$, isto é, que $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi = \varphi, \forall \varphi \in \mathcal{S}$. Do mesmo modo se prova que $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi = \varphi$.

A mesma fórmula é imediata para $T \in \mathcal{S}'$:

$$\langle \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}T, \varphi \rangle = \langle \overline{\mathcal{F}}T, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle T, \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

Logo, $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}T = T$ e do mesmo modo

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T = T. \quad (7.7.18)$$

No espaço das distribuições temperadas \mathcal{F} e $\overline{\mathcal{F}}$ são inversas uma da outra. Já com as funções isso não ocorre. Se $f(x) \in L^1(-\infty, \infty)$, então $\mathcal{F}f = g(\xi)$ é uma função contínua, mas não pertencem a $L^1(-\infty, \infty)$ necessariamente¹². Mesmo que $g(\xi) \in L^1(-\infty, \infty)$, $\overline{\mathcal{F}}g = h(x)$ é uma função

¹²Um exemplo é o seguinte. A função f_α definida em (7.5.5), página 165, pertence a $L^1(-\infty, \infty)$ e tem por transformada de Fourier a função $\frac{\text{sen}(2\pi\alpha\xi)}{\pi\xi}$, a qual, por sua vez, não pertence a $L^1(-\infty, \infty)$, pois a integral $\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\text{sen}(2\pi\alpha\xi)}{\pi\xi} \right| d\xi$ diverge. [NdEs]

contínua quase sempre igual a $f(x)$. Tem-se $h(x) = f(x)$ se e só se $f(x)$ for contínua.

• **Transformada de Fourier de distribuições de suporte limitado**

Seja $S \in \mathcal{E}'$. Então, a sua transformada de Fourier pode ser calculada pela fórmula

$$\mathcal{F}S = \langle S_x, e^{-2i\pi x\xi} \rangle = F(\xi). \quad (7.7.19)$$

Como $e^{-2i\pi x\xi}$ é infinitamente diferenciável em ξ , $F(\xi)$ é infinitamente diferenciável.

$F(\xi)$ é prolongável aos valores complexos $\xi + i\eta$ em uma função analítica inteira $F(z)$.

A propriedade essencial da transformação de Fourier, a razão de ser de suas numerosas aplicações, é a propriedade (7.7.7) da troca da convolução em multiplicação. Essa propriedade se estende ao espaço das distribuições temperadas dentro das condições exigidas para a existência de um e de outro produto.

7.8 A Convolução

• **Produto tensorial de distribuições**

Sejam $f(x)$ e $g(y)$ funções localmente integráveis nas variáveis x e y , respectivamente. Então, a função $h(x, y) = f(x)g(y)$, localmente integrável no plano de ponto genérico (x, y) , é o seu produto tensorial $f(x) \otimes g(y)$.

Essa definição se estende imediatamente a distribuições. Seja $\varphi(x, y)$ em $\mathcal{D}_{x,y}$ (o espaço das funções de duas variáveis x e y , infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto). Então,

$$\begin{aligned} \langle f(x) \otimes g(y), \varphi(x, y) \rangle &= \iint f(x)g(y)\varphi(x, y) \, dx dy \\ &= \int f(x) \left(\int g(y)\varphi(x, y) \, dy \right) dx = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Do mesmo modo, se encontra

$$\langle f(x) \otimes g(y), \varphi(x, y) \rangle = \langle g(y), \langle f(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle.$$

Por generalização, define-se o produto tensorial de duas distribuições S_x e T_y , e se indica por $S \otimes T$, como a distribuição, bem determinada e única $W_{x,y}$, que para cada $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}_{x,y}$ assim se calcula:

$$\langle W_{x,y}, \varphi(x, y) \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle T_y, \langle S_x, \varphi(x, y) \rangle \rangle. \quad (7.8.1)$$

Essa fórmula tem um sentido, porquanto a função $\varphi \in \mathcal{D}_{x,y}$ considerada como função de x , está em \mathcal{D}_x e depende do parâmetro y . $\langle S_x, \varphi(x, y) \rangle$ é uma função infinitamente derivável de y e tem, como função de y , um suporte limitado e, portanto, pertence a \mathcal{D}_y . Pode-se, pois, calcular o segundo membro de (7.8.1).

Observa-se que se S tem um suporte A e T tem um suporte B , o suporte de $S \otimes T$ é o produto cartesiano $A \times B$.

Exemplos:

- 1) Se $H(x)$ é a função de Heaviside, então o produto tensorial $H(x) \otimes H(y)$ é a função

$$H(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{para } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

- 2) O produto tensorial $\delta_x \otimes \delta_y$ é assim definido:

$$\begin{aligned} \langle \delta_x \otimes \delta_y, \varphi(x, y) \rangle &= \langle \delta_x, \langle \delta_y, \varphi(x, y) \rangle \rangle \\ &= \langle \delta_x, \varphi(x, 0) \rangle = \varphi(0, 0) = \langle \delta_{x,y}, \varphi(x, y) \rangle. \end{aligned}$$

De um modo geral, a distribuição de Dirac na origem sobre o espaço \mathbb{R}^n é o produto tensorial de n distribuições de Dirac na origem sobre a reta:

$$\langle \delta_0, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle = \langle \delta_{x_1} \otimes \delta_{x_2} \otimes \dots \otimes \delta_{x_n}, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle.$$

• Produto de convolução de duas funções

Para duas funções $f(x)$ e $g(x)$ definidas sobre a reta, o produto de convolução $h = f * g = g * f$ é uma função definida pela integral

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt. \quad (7.8.2)$$

A função $h(x)$ não existe se as funções $f(x)$ e $g(x)$ não satisfazem certas condições que asseguram a convergência absoluta da integral no segundo

membro de (7.8.2). Um dos casos em que a integral converge é aquele em que as funções f e g pertencem à classe $L^1(-\infty, \infty)$ – nesse caso h também é $L^1(-\infty, \infty)$. Outra possibilidade ocorre quando as funções são apenas localmente integráveis, mas seu comportamento no infinito é tal que a integral é absolutamente convergente. Nesse caso h é localmente integrável e pode ser considerada como distribuição. Então, para cada $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle h, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\varphi(x) dx = \iint f(x-t)g(t)\varphi(x) dx dt.$$

Pela mudança de variáveis $x - t = \xi$, $t = \eta$, obtemos

$$\langle h, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(\eta)\varphi(\xi + \eta) d\xi d\eta = \left\langle f(\xi), \langle g(\eta), \varphi(\xi + \eta) \rangle \right\rangle.$$

Igualmente, obtém-se

$$\langle h, \varphi \rangle = \left\langle g(\eta), \langle f(\xi), \varphi(\xi + \eta) \rangle \right\rangle,$$

$$\langle f(x) * g(x), \varphi \rangle = \langle f(\xi) \otimes g(\eta), \varphi(\xi + \eta) \rangle = \langle g(\xi) \otimes f(\eta), \varphi(\xi + \eta) \rangle.$$

Sejam agora S e T duas distribuições sobre a reta. Chama-se o produto de convolução $S * T$ uma nova distribuição sobre a reta definida por

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_{\xi} \otimes T_{\eta}, \varphi(\xi + \eta) \rangle \quad (7.8.3)$$

sempre que o segundo membro tiver um sentido. É claro que se $S * T$ existe, $T * S$ também existe e é igual a $S * T$.

Se S e T são arbitrárias a fórmula (7.8.3) pode não ter sentido porquanto, embora $\varphi(x)$ tenha suporte limitado, a função de duas variáveis $\varphi(\xi + \eta)$ não o tem. O suporte de $\varphi(\xi + \eta)$ no plano (ξ, η) é constituído dos pontos (ξ, η) tais que $\xi + \eta \in K$ (K sendo o suporte de $\varphi(x)$), isto é, o suporte de $\varphi(\xi + \eta)$ é uma faixa paralela à reta $\xi + \eta = 0$.

Mas o segundo membro de (7.8.3) tem sentido se o suporte de $S_{\xi} \otimes T_{\eta}$ e o de $\varphi(\xi + \eta)$ têm uma intersecção limitada. Isso acontece, por exemplo, nos seguintes casos:

- a) Uma das distribuições, pelo menos, tem suporte limitado.
- b) Ambas as distribuições têm suporte limitado à esquerda, isto é, seu suporte está contido na semi-reta (a, ∞) , onde a é qualquer número real. O mesmo vale para as distribuições que têm ambas suporte limitado à direita (suporte contido na semi-reta $(-\infty, b)$).

- c) Ambas as distribuições são definidas no espaço \mathbb{R}^4 de variáveis t, x, y, z e uma, pelo menos, tem suporte contido no “cone do futuro”, definido por

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0, \quad t \geq 0,$$

enquanto a outra tem suporte no semi-espaço $t \geq 0$.

O produto de convolução existe em outros casos, mesmo que não sejam satisfeitas as condições sobre o suporte, desde que as distribuições se comportem no infinito com certa regularidade.

• Propriedades da convolução

Se $\alpha(x)$ é uma função infinitamente diferenciável no sentido usual e T uma distribuição qualquer, $T * \alpha$ é uma função infinitamente diferenciável no sentido usual, dada pela fórmula

$$(T * \alpha)(x) = \langle T_t, \alpha(x - t) \rangle. \quad (7.8.4)$$

Diz-se então que a função $(T * \alpha)(x)$ é a *regularizada de T por α* . Por exemplo, $T * 1$ é a constante $\langle T, 1 \rangle$, $T * x$ é a função $x \langle T, 1 \rangle - \langle T, t \rangle$ etc.

• Cálculo de algumas convoluções

- 1) $\delta_0 * T$, sendo T uma distribuição qualquer. Tem-se

$$\langle \delta_0 * T, \varphi \rangle = \langle \delta_\xi \otimes T_\eta, \varphi(\xi + \eta) \rangle = \langle T_\eta, \varphi(\eta) \rangle,$$

o que permite escrever

$$\delta_0 * T = T. \quad (7.8.5)$$

Isso mostra que para o produto de convolução, δ_0 é a unidade.

- 2) Para $a \in \mathbb{R}$ arbitrário

$$\langle \delta_a * T, \varphi \rangle = \langle \delta_{a, (\xi)} \otimes T_\eta, \varphi(\xi + \eta) \rangle = \langle T_\eta, \varphi(\eta + a) \rangle.$$

Chamaremos de “translata de T ”, e indicaremos por $\tau_a T$, a distribuição definida por

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T_\eta, \varphi(\eta + a) \rangle. \quad (7.8.6)$$

Temos, pois,

$$\langle \delta_a * T, \varphi \rangle = \langle \tau_a T, \varphi \rangle. \quad (7.8.7)$$

Assim,

$$\delta_a * T = \tau_a T$$

etc. Por exemplo,

$$\delta_a * \text{VP} \left(\frac{1}{x} \right) = \text{VP} \left(\frac{1}{x+a} \right).$$

3) $\delta'_0 * T$. Vale

$$\begin{aligned} \langle \delta'_0 * T, \varphi \rangle &= \langle \delta'_\xi \otimes T_\eta, \varphi(\xi + \eta) \rangle = - \left\langle T_\eta, \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\eta + \xi) \Big|_{\xi=0} \right\rangle \\ &= - \langle T_\eta, \varphi'(\eta) \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle = \langle T', \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Assim, pois,

$$\delta'_0 * T = T'.$$

De modo geral, tem-se

$$\delta_0^{(n)} * T = T^{(n)}. \quad (7.8.8)$$

Do mesmo modo, se D é um operador diferencial com coeficientes constantes, tem-se

$$(D\delta_0) * T = DT.$$

Para derivar uma convolução basta derivar um dos fatores. Com efeito, calculemos $(S * T)'$: Por um lado, temos

$$\begin{aligned} \langle (S * T)', \varphi \rangle &= - \langle S * T, \varphi' \rangle = - \left\langle S_\xi \otimes T_\eta, \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\eta + \xi) \right\rangle \\ &= \langle S'_\xi \otimes T_\eta, \varphi(\eta + \xi) \rangle = \langle S' * T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

e, por outro lado, temos também

$$\begin{aligned} \langle (S * T)', \varphi \rangle &= - \langle S * T, \varphi' \rangle = - \left\langle S_\xi \otimes T_\eta, \frac{\partial}{\partial \eta} \varphi(\eta + \xi) \right\rangle \\ &= \langle S_\xi \otimes T'_\eta, \varphi(\eta + \xi) \rangle = \langle S * T', \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Conclui-se, dessas duas cadeias de igualdadees que

$$(S * T)' = S' * T = S * T' .$$

Do mesmo modo, se D é um operador com coeficientes constantes, tem-se

$$D(S * T) = (DS) * T = S * (DT) .$$

• Aplicação à teoria do potencial

Sabe-se que

$$\nabla^2 \left(-\frac{1}{4\pi r} \right) = \delta_0 . \quad (7.8.9)$$

O potencial eletrostático $\Phi(x)$ de uma distribuição de cargas $\rho(x)$ é dado por

$$\Phi = \left(-\frac{1}{4\pi r} \right) * \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) . \quad (7.8.10)$$

De fato,

$$\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \left(-\frac{1}{4\pi r} \right) * \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) = \delta_0 * \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) \stackrel{(7.8.9)}{=} \frac{\rho}{\epsilon_0} .$$

A fórmula (7.8.10) generaliza a integral

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d\vec{x}' .$$

• Equações de convolução

Seja \mathcal{A}' uma álgebra de convolução, isto é, um sub-espço vetorial de \mathcal{D}' no qual a convolução de duas distribuições seja sempre definida e esteja em \mathcal{A}' , que $\delta_0 \in \mathcal{A}'$ e que esse produto seja associativo e comutativo. Por exemplo, \mathcal{E}' , que é o sub-espço das distribuições de suporte limitado, é uma álgebra de convolução. O espaço das distribuições de suporte limitado à esquerda, \mathcal{D}'_+ , também é uma álgebra de convolução. Em \mathbb{R}^4 , o espaço das distribuições cujo suporte está situado no cone do futuro é uma álgebra de convolução.

Numa álgebra de convolução, uma equação de convolução é uma equação da forma

$$A * X = B \quad (7.8.11)$$

onde A e B são dados em \mathcal{A}' e X é a incógnita também pertencente a \mathcal{A}' .

Dada $B \in \mathcal{A}'$, a condição necessária e suficiente para que a eq. (7.8.11) tenha ao menos uma solução em \mathcal{A}' é que a equação

$$A * E = \delta_0 \quad (7.8.12)$$

tenha solução. Nesse caso, E é única e é chamada o inverso de A . Então, a solução de (7.8.11) é única e é dada por

$$X = E * B. \quad (7.8.13)$$

$E = A^{-1}$ é também chamada *solução elementar*, ou *solução fundamental* da eq. (7.8.11). E , tomada como distribuição em $x - x'$, como costumamos dizer, uma possível função de Green.

Quando não se está numa álgebra, a eq. (7.8.11) pode ter uma solução elementar, mas essa não será única, pois, $E + T$, onde T é solução da equação homogênea $A * T = 0$, também satisfaz a (7.8.12). Por exemplo, em \mathbb{R}^3 , $A = \nabla^2$ tem um inverso $E = -\frac{1}{4\pi r}$, que não está numa álgebra. A solução (7.8.10) não é, pois, única.

• Convolução multiplicação e transformação de Fourier

Sejam S e T duas distribuições de suporte limitado (suas imagens de Fourier são funções $F(\xi)$ e $G(\xi)$, respectivamente). O produto de convolução também tem suporte limitado e sua imagem de Fourier calcula-se assim:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[S * T](\xi) &= \langle S * T, e^{-2i\pi x\xi} \rangle = \langle S_u \otimes T_v, e^{-2i\pi(u+v)\xi} \rangle \\ &= \langle S_u, e^{-2i\pi u\xi} \rangle \langle T_v, e^{-2i\pi v\xi} \rangle = F(\xi)G(\xi). \end{aligned}$$

Essa fórmula ainda vale quando só uma das distribuições tem suporte limitado e também em vários outros casos:

$$\mathcal{F}[S * T] = \mathcal{F}S \cdot \mathcal{F}T. \quad (7.8.14)$$

Obtem-se igualmente

$$\overline{\mathcal{F}[S * T]} = \overline{\mathcal{F}S} \cdot \overline{\mathcal{F}T}, \quad (7.8.15)$$

de onde se deduz

$$\mathcal{F}[S \cdot T] = (\mathcal{F}S) * (\mathcal{F}T), \quad \overline{\mathcal{F}[S \cdot T]} = (\overline{\mathcal{F}S}) * (\overline{\mathcal{F}T}). \quad (7.8.16)$$

As fórmulas (7.8.14) e (7.8.16) são particularmente úteis na definição de um dos produtos $S * T$ e $S \cdot T$ quando o outro é conhecido.

Exemplo 1 - Cálculo de $(\delta_+)^2$.

Sabendo-se que $\delta_+ = \overline{\mathcal{F}}H$, tem-se por (7.8.15)

$$\delta_+ \cdot \delta_+ = \overline{\mathcal{F}}[H * H] = \overline{\mathcal{F}}[xH] = -\frac{1}{2i\pi} \frac{d}{d\xi} \delta_+ = -\frac{1}{2i\pi} \left\{ \frac{1}{2} \delta'_0 + \frac{1}{2i\pi} \text{PF} \frac{1}{\xi^2} \right\}.$$

Assim,

$$(\delta_+)^2 = -\frac{1}{4i\pi} \delta'_0 + \frac{1}{4\pi^2} \text{PF} \frac{1}{x^2}. \quad (7.8.17)$$

Exemplo 2 - Cálculo de $(\text{VP} \frac{1}{x}) * (\text{VP} \frac{1}{x})$.

Como $\mathcal{F} [\text{VP} \frac{1}{x}] = -i\pi\epsilon(\xi)$, obtem-se de (7.8.14)

$$\mathcal{F} \left[\left(\text{VP} \frac{1}{x} \right) * \left(\text{VP} \frac{1}{x} \right) \right] = -\pi^2 \epsilon(\xi) \cdot \epsilon(\xi) = -\pi^2.$$

Logo,

$$\left(\text{VP} \frac{1}{x} \right) * \left(\text{VP} \frac{1}{x} \right) = -\pi^2 \delta_0. \quad (7.8.18)$$

A fórmula (7.8.18) resolve imediatamente a equação de convolução

$$\left(\text{VP} \frac{1}{x} \right) * X = B, \quad (7.8.19)$$

onde B é uma distribuição convoluível com $\text{VP} \frac{1}{x}$. Convolvendo ambos os membros de (7.8.19) por $\text{VP} \frac{1}{x}$, obtemos

$$X = -\frac{1}{\pi^2} B * \left(\text{VP} \frac{1}{x} \right).$$

Índice Remissivo

- $(a)_n$, 13
- $B(p, q)$, 5
- $L^1(-\infty, \infty)$, 167
- \square , 25
- $\Gamma(z)$, 1
- PF, 155, 157
- \mathcal{D} , 144
- \mathcal{S} , 169
- γ , a constante de Euler-Mascheroni, 4, 21, 81
- ∇^2 , 25
- $\overline{\mathcal{F}}$, 167
- $\psi(z)$, 9
- \mathcal{F} , 167
- \mathcal{D}' , 149
- \mathcal{E} , 166
- \mathcal{E}' , 167
- \mathcal{S}' , 169
- VP, 153

- álgebra de convolução, 179
- átomo de hidrogênio, 37, 68
- autofunções, 26
- autofunções da equação de Legendre, 44
- autovalores, 26

- barreira de potencial, 127

- coeficientes de Bessel, 84
- comportamento assintótico das funções de Bessel, 85
- Condição de Dirichlet, 27
- condição de Helmholtz e Sommerfeld, 116
- Condição de Neumann, 27
- condição de radiação, 116
- condição de radiação de Helmholtz e Sommerfeld, 116
- Condição intermediária, 27
- Condições de Cauchy, 27
- condições de Dirichlet e de Neumann, 27
- condições iniciais, 27
- cone do futuro, 136
- cone do passado, 136
- conjunto ortogonal completo, 47
- constante de Euler-Mascheroni, 4, 9, 12, 13, 21, 81
- constante de separação, 28

- convergência de distribuições, 163
- convolução, 175
- Coordenadas cilíndricas circulares, 35
- coordenadas cilíndricas circulares, 35
- coordenadas curvilíneas ortogonais, 33
- coordenadas parabólicas, 37, 38
- coordenadas polares, 45
- coordenadas polares esféricas, 33
- corda vibrante, 27

- D'Alembertiano, 25
- definição de distribuição, 145
- definição de transformada de Fourier para distribuições, 168
- derivação de $(\ln x)_+$, 154
- derivação de $\ln|x|$, 152
- derivada da distribuição, 149
- derivada da distribuição de Dirac, 151
- derivada de uma distribuição, 150
- derivada distribucional, 150
- descontinuidade de primeira espécie, 150
- diferenciabilidade de distribuições, 150
- distribuição, 145
- Distribuição de Dirac, 145
- distribuição de Dirac, 146, 175
- distribuição de Heaviside, 147
- distribuição regular, 147
- distribuição singular, 147
- Distribuições, 145
- distribuições de Heisenberg, 154
- distribuições de suporte limitado, 166
- Distribuições em mais de uma variável, 147
- distribuições regulares, 147
- distribuições singulares, 147
- distribuições temperadas, 169
- duplo fatorial, 3

- equação associada de Legendre, 54
- Equação da corda vibrante, 100
- equação da corda vibrante, 27
- equação da difusão ou da condução do calor, 25
- equação das ondas estacionárias, 39
- equação de Bessel, 18, 30, 71, 72
- equação de Bessel modificada, 71
- equação de D'Alembert não-homogênea, 134

- equação de difusão, 39
 equação de Helmholtz, 25, 31, 34, 36, 39
 equação de Helmholtz escalar em coordenadas esféricas, 85
 equação de Helmholtz tridimensional, 33
 equação de Hermite, 30
 equação de Klein-Gordon, 25
 equação de Laguerre associada, 30
 Equação de Laplace, 100
 equação de Laplace, 25, 39
 equação de Laplace em coordenadas cilíndricas, 71
 equação de Legendre, 22, 41
 equação de Legendre associada, 30, 41
 equação de ondas livres, 25
 equação de Poisson, 25, 97
 Equação de Poisson unidimensional, 106
 equação de Schrödinger independente do tempo, 25, 127
 equação de Schrödinger unidimensional, 23
 equação diferencial de Hermite, 22
 equação diferencial de Laguerre, 22
 equação diferencial parcial, 99
 Equação do calor, 100
 equação do Schrödinger, 37
 equação elíptica, 26, 27
 equação hiperbólica, 26
 equação indicial, 17, 18
 equação linear homogênea, 26
 equação parabólica, 26
 Equações de convolução, 179
 equações elípticas, 100
 equações hiperbólicas, 27, 100
 equações parabólicas, 100
 espaço de Schwartz, 169
 espaço dual, 149, 169
 espalhamento quântico unidimensional, 127

 fórmula de adição de harmônicos esféricos, 61
 fórmula de duplicação de Legendre, 8
 fórmula de Legendre, 9
 fórmula de Leibnitz, 42, 66
 Fórmula de reciprocidade de Fourier, 173
 fórmula de Rodrigues, 42, 52, 54, 56, 66
 fórmula do produto de Euler para a função gama, 3
 fórmula do produto de Weierstrass para a função gama, 4
 fórmula dos complementos para a função gama, 6
 fórmula integral de Cauchy, 52
 fórmulas de recorrência, 17, 41, 42
 fase de Condon-Shortley, 57
 fator de Condon-Shortley, 57
 fatores da escala, 33
 fatorial duplo, 3
 formas lineares, 144
 função absolutamente integrável, 170
 função $\Gamma(z)$, 1
 função $\psi(z)$, 9
 função $B(p, q)$, 5
 função associada de Legendre, 54
 função beta, 5
 função de Bessel de primeira espécie, 73
 função de Bessel modificada, 74
 função de Bessel modificada de segunda espécie, 80
 função de Green, 87, 99, 103, 162
 função de Green avançada, 134, 136
 Função de Green da equação das oscilações forçadas, 104
 Função de Green da equação de Helmholtz na esfera, 110
 Função de Green da equação de Helmholtz no disco, 109
 Função de Green da equação de Helmholtz no exterior do círculo, 117
 Função de Green na equação de Helmholtz, 115
 Função de Green na teoria do potencial, 110
 Função de Green para a equação de D'Alembert, 134
 Função de Green para a equação de Helmholtz, 126
 Função de Green para a equação de Helmholtz no exterior da esfera, 118
 Função de Green para a equação de Laplace, 131
 função de Green para a equação de Poisson, 98
 Função de Green para a equação do calor, 137
 função de Green para a equação do calor, 122
 Função de Green para a equação tridimensional de Helmholtz, 129
 função de Green retardada, 132, 134, 136
 Função de Green retardada para a equação da corda vibrante, 132
 função de Green, definição, 99
 função de Heaviside, 122, 147
 função de Legendre de segunda espécie, 53
 função delta de Dirac, 97, 143
 função gama, 1
 função geratriz, 47
 função geratriz da função de Bessel, 74
 Função geratriz dos polinômios de Legendre, 44
 função geratriz dos polinômios de Legendre, 45
 Função geratriz dos polinômios de Legendre associados, 55
 função hipergeométrica confluyente, 68
 função infinitamente derivável, 144
 função infinitamente deferenciável, 144
 função localmente integrável, 146
 função psi, 9
 funções de Bessel de segunda espécie, 79

- Funções de Bessel de terceira espécie, 84
 funções de Bessel de terceira espécie, 85
 funções de Bessel esféricas, 86
 funções de Bessel esféricas modificadas, 88
 Funções de Green, 161
 funções de Hankel, 85
 funções de Neumann, 79
 funções de teste, 144
 funções esféricas, 57
 funções gama incompletas, 10
 funções integráveis, 123
 funções simbólicas, 143
 funcionais lineares, 144
 funcional linear e contínuo, 145
- Hadamard, 154, 155
 harmônicos esféricos, 57
- índices, 17
 integral de Dirichlet, 13
 integral de Euler, 1
 integral de Poisson, 115
 interação entre dois nucleons, 22
- Laplaciano, 25
 Laplaciano bidimensional, 33
 localmente integrável, 146
- método da função de Green, 98
 Método das autofunções, 104
 método das imagens, 112, 113
 método de Frobenius, 16, 41
 método de separação de variáveis, 27, 31, 39
 Método direto, 105
 modos normais de vibração, 29
 multiplicação entre duas distribuições, 157
- número quântico principal, 38
 números quânticos, 69
 níveis de excitação do átomo de hidrogênio, 38
 natureza das funções de Green, 100
- onda divergente, 118
 onda esférica emergente, 141
 ondas convergentes, 116
 ondas divergentes, 116, 117
 ondas esféricas divergentes, 119, 120
 Operações com distribuições, 149
 operador diferencial parcial linear, 98
 operador Laplaciano em um sistema de coordenadas ortogonais, 33
 ortogonalidade das funções de Bessel, 84
 ortogonalidade das funções de Bessel esféricas, 87
 Ortogonalidade e normalização dos polinômios de Legendre, 43
- Ortogonalidade e normalização dos polinômios de Legendre associados, 56
- P.S.E., 15
 P.S.R., 15
 Paridade dos polinômios de Legendre, 43
 Parte finita de Hadamard, 155
 polinômio de Legendre, 42
 polinômios de Laguerre, 68
 polinômios de Legendre, 44
 Polinômios de Legendre, definição, 42
 ponto ordinário, 15
 ponto singular, 15
 ponto singular essencial, 15
 ponto singular irregular, 15
 ponto singular não-essencial, 15
 ponto singular no infinito, 16
 ponto singular regular, 15
 potencial de espalhamento, 128
 Potencial eletrostático, 48
 potencial eletrostático, 45
 potencial mesônico, 22
 princípio da causalidade, 109, 134
 princípio de causalidade, 133
 princípio de Huygens, 136
 problema de contorno bem-posto, 26, 100
 Problema de Dirichlet, 111
 Problema de Dirichlet para a esfera, 112
 Problema de Neumann, 111
 problema de Sturm-Liouville, 101, 103, 104
 problemas de Sturm-Liouville regulares, 101
 problemas regulares, 101
 processo da parte finita de Hadamard, 157
 produto de convolução, 124, 176
 produto de convolução de distribuições, 176
 Produto de convolução de duas funções, 175
 produto tensorial, 174
 Produto tensorial de distribuições, 174
 produto tensorial de duas distribuições, 175
 Propriedades básicas da transformação de Fourier, 124
 propriedades clássicas da transformada de Fourier, 167
 pseudo-funções, 157, 170
- quadrupólo linear, 66
- regras de seleção, 68
 relação de completeza, 103
 relações de ortogonalidade das funções de Bessel, 84
 relações de ortogonalidade das funções de Bessel esféricas, 87
 relações de ortogonalidade das funções seno, 29
 relações de ortogonalidade dos harmônicos esféricos, 57

- Relações de ortogonalidade dos polinômios de Legendre, 43
- relações de ortogonalidade dos polinômios de Legendre, 44
- Relações de ortogonalidade dos polinômios de Legendre associados, 56
- relações de ortogonalidade dos polinômios de Legendre associados, 56
- Relações de recorrência das funções de Bessel, 75
- Relações de recorrência dos polinômios de Legendre, 46
- Relações de recorrência dos polinômios de Legendre associados, 56
- relações de recorrência para as funções modificadas de Bessel, 76
- representação de Laplace para os polinômios de Legendre, 52
- representação de Schläfli, 52
- Representação integral da função de Bessel, 76
- representação integral de Hankel da função gama, 4
- Representação integral dos polinômios de Legendre, 52

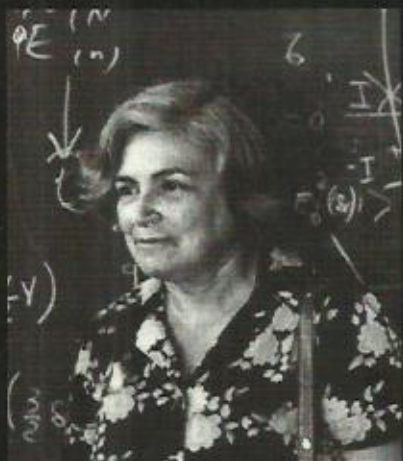
- Série de Bessel, 84
- série de harmônicos esféricos, 58, 59
- série de Laplace, 58
- série de polinômios de Legendre, 47, 48, 113
- séries de Fourier-Bessel, 90, 94
- séries de harmônicos esféricos, 58
- símbolo de Pochhammer, 13
- segunda identidade de Green, 110
- segunda solução da equação de Bessel, 20, 78
- segunda solução da equação de Legendre, 53
- simetria azimutal, 41
- singularidade no infinito, 16
- singularidades logarítmicas, 54
- sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais, 33
- sistema ortonormal completo, 104
- solução clássica de uma equação diferencial, 160
- solução distribucional de uma equação diferencial, 160
- solução elementar, 180
- solução fraca de uma equação diferencial, 160
- solução fundamental, 161, 180
- solução generalizada de uma equação diferencial, 160
- soluções fisicamente aceitáveis, 48
- superposição de ondas divergentes, 118
- suporte de uma distribuição, 149
- suporte de uma função, 145

- teorema da adição, 61, 62, 65
- teorema de adição de harmônicos esféricos, 59, 61
- teorema de Fuchs, 19
- teorema de Green, 110, 111, 115
- teoria do potencial, 179
- tipo de simetria, 31
- tipos de soluções de equações diferenciais, 160
- Transformação de Fourier de distribuições, 168
- transformada de Fourier, 124
- transformada de Fourier conjugada, 124

- valor principal de Cauchy, 153
- vibrações forçadas, 116

- Wronskiano, 55, 106

- Zeros de funções de Bessel e Neumann, 84



A Prof^a Carmen Lys Ribeiro Braga (1923-1989), foi uma das mais notáveis docentes do Instituto de Física da USP.

Ministrou durante muitos anos os cursos de Física-Matemática e de Métodos de Física Teórica, contribuindo para a formação de várias gerações de estudantes.

“Estas notas de aula apresentam um texto adequado a um curso básico de Física-Matemática. O texto visa aplicações mais voltadas, por exemplo, à Eletrodinâmica Clássica, à Óptica ou à Teoria do Calor. O tratamento de numerosas aplicações da teoria é uma característica marcante destas notas de aula. O núcleo central do presente livro é composto dos dois capítulos finais, dedicados às funções de Green e à Teoria das Distribuições, ambos dotados de qualidades raramente encontradas na literatura. É nossa expectativa que a publicação desse curso contribua à perpetuação da sua memória e à preservação de uma cultura educacional legítima”

Os editores



ISBN 858832560-8



9 798588 325608