

SEGUNDA LISTA DE EXERCÍCIOS

(1) *Expressões para funções.*

(a) Expresse a área e o perímetro de um triângulo equilátero em função da medida x de seu lado.

(b) Expresse o comprimento da aresta de um cubo em função da medida d de sua diagonal interna. Depois expresse a área da superfície e o volume do cubo em função de d .

(2) Para cada uma das funções f e g determine:

(i) domínio e imagem de f e g ;

(ii) quando possível: $f \circ g$ e $g \circ f$.

(a) $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = \frac{x}{2} - 3$ (b) $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

(c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ e $g(x) = \frac{1}{x-1}$

(3) Com relação à função f dada, responda:

(i) qual o domínio e qual a imagem de f ?

(ii) f é injetora? f é sobrejetora?

(iii) caso exista, qual é a inversa de f ?

(a) $f(x) = 1 - x$ (b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ (c) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$

4) Operações com funções

Sejam $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto de \mathbb{R} , $\alpha \in \mathbb{R}$ um número real, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções. Então podemos definir as funções:

- $(f + g) : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo $x \in A$;
- $(f - g) : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, para todo $x \in A$;
- $(f \cdot g) : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, para todo $x \in A$;
- $\left(\frac{f}{g}\right) : B \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, para todo $x \in B$, onde $B = \{x \in A : g(x) \neq 0\}$;
- $(\alpha f) : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, para todo $x \in A$;

Seja $f(x) = x^2 + 1$. Encontre uma função g tal que:

$$\text{(a)} \quad (f \cdot g)(x) = x^4 - 1 \quad \text{(b)} \quad (f + g)(x) = 3x^2 \quad \text{(c)} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = 1$$

5) Diferença entre Conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos. Já vimos em aula a definição da *diferença entre conjuntos*:

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

(a) Se A , B e C são conjuntos, vale que $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$? Caso tenha concluído que a afirmação é falsa, verifique qual inclusão é verdadeira, e tente achar condições sobre A , B e C para que se tenha igualdade.

(b) Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função, e seja A um subconjunto de X . Vale que $f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A)$? Caso tenha concluído que a afirmação é falsa, verifique qual inclusão é verdadeira, e tente achar condições sobre f para que se tenha igualdade.