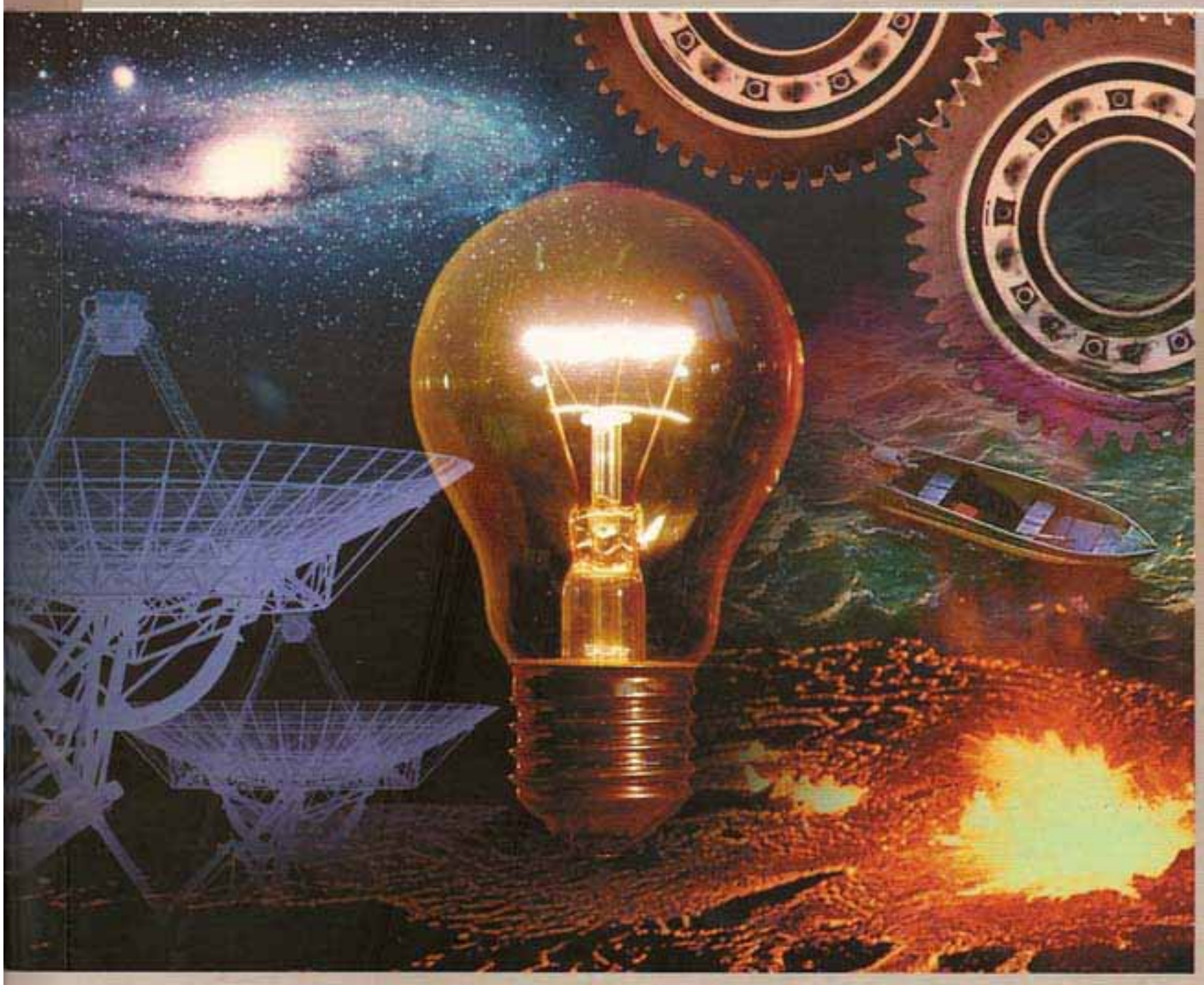
PAUL A. TIPLER | GENE MOSCA

FÍSICA

PARA CIENTISTAS E ENGENHEIROS

VOLUME 1

Mecânica, Oscilações e Ondas, Termodinâmica



Sexta Edição

gen | LTC

SEXTA EDIÇÃO

FÍSICA PARA CIENTISTAS E ENGENHEIROS

Volume 1

Mecânica
Oscilações e Ondas
Termodinâmica

Paul A. Tipler
Gene Mosca

Tradução e Revisão Técnica
Paulo Machado Mors
Professor do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul

gen | LTC

Sumário Geral

VOLUME 1

1 Medida e Vetores

PARTE I MECÂNICA

2 Movimento em Uma Dimensão
3 Movimento em Duas e Três Dimensões
4 Leis de Newton
5 Aplicações Adicionais das Leis de Newton
6 Trabalho e Energia Cinética
7 Conservação da Energia
8 Conservação da Quantidade de Movimento Linear
9 Rotação
10 Quantidade de Movimento Angular
R Relatividade Especial
11 Gravitação
12 Equilíbrio Estático e Elasticidade
13 Fluidos

PARTE II OSCILAÇÕES E ONDAS

14 Oscilações
15 Ondas Progressivas
16 Superposição e Ondas Estacionárias

PARTE III TERMODINÂMICA

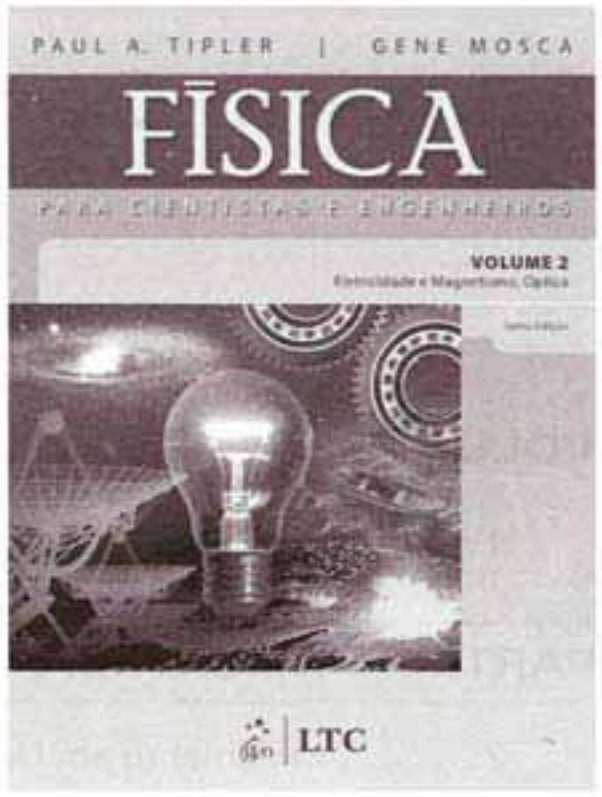
17 Temperatura e Teoria Cinética dos Gases
18 Calor e a Primeira Lei da Termodinâmica
19 A Segunda Lei da Termodinâmica
20 Propriedades Térmicas e Processos Térmicos

APÊNDICES

A Unidades SI e Fatores de Conversão
B Dados Numéricos
C Tabela Periódica dos Elementos

Tutorial Matemático
Respostas dos Problemas Ímpares de Finais de Capítulo
Índice

VOLUME 2



PARTE IV ELETRICIDADE E MAGNETISMO

21 O Campo Elétrico I: Distribuições Discretas de Cargas
22 O Campo Elétrico II: Distribuições Contínuas de Cargas
23 Potencial Elétrico
24 Capacitância
25 Corrente Elétrica e Circuitos de Corrente Contínua
26 O Campo Magnético
27 Fontes de Campo Magnético
28 Indução Magnética
29 Circuitos de Corrente Alternada
30 Equações de Maxwell e Ondas Eletromagnéticas

PARTE V LUZ

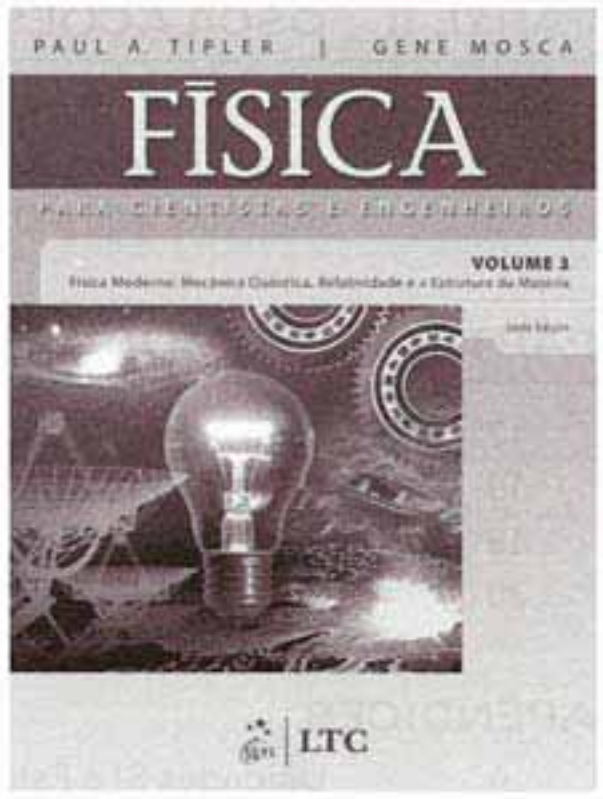
31 Propriedades da Luz
32 Imagens Ópticas
33 Interferência e Difração

APÊNDICES

A Unidades SI e Fatores de Conversão
B Dados Numéricos
C Tabela Periódica dos Elementos

Tutorial Matemático
Respostas dos Problemas Ímpares de Finais de Capítulo
Índice

VOLUME 3



PARTE VI FÍSICA MODERNA: MECÂNICA QUÂNTICA, RELATIVIDADE E ESTRUTURA DA MATÉRIA

34 Dualidade Onda-Partícula e Física Quântica
35 Aplicações da Equação de Schrödinger
36 Átomos
37 Moléculas
38 Sólidos
39 Relatividade
40 Física Nuclear
41 Partículas Elementares e a Origem do Universo

APÊNDICES

A Unidades SI e Fatores de Conversão
B Dados Numéricos
C Tabela Periódica dos Elementos

Tutorial Matemático
Respostas dos Problemas Ímpares de Finais de Capítulo
Índice

Sumário

Prefácio xi
Sobre os Autores xix

Capítulo 1
MEDIDA E VETORES 1

1-1 A Natureza da Física 2
1-2 Unidades 3
1-3 Conversão de Unidades 5
1-4 Dimensões de Quantidades Físicas 6
1-5 Algarismos Significativos e Ordem de Grandeza 7
1-6 Vetores 12
1-7 Propriedades Gerais dos Vetores 13

Física em Foco
O Segundo Bissexto de 2005 20

Resumo 21
Problemas 22

PARTE I MECÂNICA

Capítulo 2
MOVIMENTO EM UMA DIMENSÃO 27

2-1 Deslocamento, Velocidade e Rapidez 28
2-2 Aceleração 35
2-3 Movimento com Aceleração Constante 37
2-4 Integração 46

Física em Foco
Aceleradores Lineares 50

Resumo 51
Problemas 52

Capítulo 3
MOVIMENTO EM DUAS E TRÊS DIMENSÕES 63

3-1 Deslocamento, Velocidade e Aceleração 63
3-2 Caso Especial 1: Movimento de Projéteis 71
3-3 Caso Especial 2: Movimento Circular 78

Física em Foco
GPS: Calculando Vetores Enquanto Você se Move 81

Resumo 82
Problemas 83

Capítulo 4
LEIS DE NEWTON 93

4-1 Primeira Lei de Newton: A Lei da Inércia 93
4-2 Força e Massa 94
4-3 Segunda Lei de Newton 96
4-4 A Força da Gravidade: Peso 99
4-5 Forças de Contato: Sólidos, Molas e Fios 100
4-6 Resolvendo Problemas: Diagramas de Corpo Livre 103
4-7 Terceira Lei de Newton 108
4-8 Resolvendo Problemas: Problemas com Dois ou Mais Objetos 110

Física em Foco
Montanhas-russas e a Necessidade de Velocidade 113

Resumo 114
Problemas 115

Capítulo 5
APLICAÇÕES ADICIONAIS DAS LEIS DE NEWTON 125

5-1 Atrito 126
5-2 Forças de Arraste 136
5-3 Movimento em Trajetória Curva 138
*5-4 Integração Numérica: Método de Euler 143
5-5 O Centro de Massa 145

Física em Foco
Reconstituição de Acidentes — Medidas e Forças 154

Resumo 155
Problemas 156

Capítulo 6
TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA 169

6-1 Trabalho Realizado por Força Constante 169

6-2 Trabalho Realizado por Força Variável – Movimento Unidimensional 174
6-3 O Produto Escalar 177
6-4 O Teorema do Trabalho-Energia Cinética – Trajetórias Curvas 183
*6-5 Trabalho no Centro de Massa 185

Física em Foco
Trabalho na Correia Transportadora de Bagagem 188

Resumo 189
Problemas 190

Capítulo 7
CONSERVAÇÃO DA ENERGIA 197

7-1 Energia Potencial 197
7-2 A Conservação da Energia Mecânica 204
7-3 A Conservação da Energia 213
7-4 Massa e Energia 221
7-5 Quantização da Energia 224

Física em Foco
Vento Quente 226

Resumo 227
Problemas 229

Capítulo 8
CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR 241

8-1 Conservação da Quantidade de Movimento Linear 241
8-2 Energia Cinética de um Sistema 247
8-3 Colisões 248
*8-4 Colisões no Referencial do Centro de Massa 263
8-5 Massa Continuamente Variável e Propulsão de Foguetes 265

Física em Foco
Motores a Detonação Pulsada: Mais Rápidos (e Ruidosos) 269

Resumo 270
Problemas 271

Capítulo 9
ROTAÇÃO 281

9-1 Cinemática Rotacional: Velocidade Angular e Aceleração Angular 282
9-2 Energia Cinética Rotacional 284
9-3 Cálculo do Movimento de Inércia 286
9-4 Segunda Lei de Newton para a Rotação 292
9-5 Aplicações da Segunda Lei de Newton para a Rotação 295
9-6 Corpos que Rolam 300

Física em Foco
Ultracentrífugas 307

Resumo 308
Problemas 309

Capítulo 10
QUANTIDADE DE MOVIMENTO ANGULAR 321

10-1 A Natureza Vetorial da Rotação 322
10-2 Torque e Quantidade de Movimento Angular 324
10-3 Conservação da Quantidade de Movimento Angular 330
*10-4 Quantização da Quantidade de Movimento Angular 340

Física em Foco
O Mundo Girando: Quantidade de Movimento Angular Atmosférica 343

Resumo 344
Problemas 345

Capítulo R
RELATIVIDADE ESPECIAL 353

R-1 O Princípio da Relatividade e a Constância da Velocidade da Luz 354
R-2 Réguas em Movimento 356
R-3 Relógios em Movimento 357
R-4 Réguas em Movimento Novamente 360
R-5 Relógios Distantes e Simultaneidade 361
R-6 Quantidade de Movimento, Massa e Energia Relativísticas 364

Resumo 367
Problemas 368

Capítulo 11
GRAVITAÇÃO 373

11-1 Leis de Kepler 374
11-2 Lei de Newton da Gravitação 376
11-3 Energia Potencial Gravitacional 383
11-4 O Campo Gravitacional 387
*11-5 Determinação do Campo Gravitacional de uma Casca Esférica por Integração 392

Física em Foco
Lentes Gravitacionais: Uma Janela para o Universo 394

Resumo 396
Problemas 397

Capítulo 12

EQUILÍBRIO ESTÁTICO E ELASTICIDADE 405

12-1 Condições de Equilíbrio 405
12-2 O Centro de Gravidade 406
12-3 Alguns Exemplos de Equilíbrio Estático 407
12-4 Equilíbrio Estático em um Referencial Acelerado 414
12-5 Estabilidade do Equilíbrio Rotacional 415
12-6 Problemas Indeterminados 416
12-7 Tensão e Deformação 417

Física em Foco
Nanotubos de Carbono: Pequenos e Fortes 420

Resumo 421
Problemas 422

Capítulo 13

FLUIDOS 431

13-1 Massa Específica 432
13-2 Pressão em um Fluido 433
13-3 Empuxo e Princípio de Arquimedes 439
13-4 Fluidos em Movimento 446

Física em Foco
Aerodinâmica Automotiva: Viajando com o Vento 455

Resumo 456
Problemas 457

PARTE II OSCILAÇÕES E ONDAS

Capítulo 14

OSCILAÇÕES 465

14-1 Movimento Harmônico Simples 465
14-2 Energia no Movimento Harmônico Simples 472
14-3 Alguns Sistemas Oscilantes 475
14-4 Oscilações Amortecidas 483
14-5 Oscilações Forçadas e Ressonância 487

Física em Foco
No Compasso da Marcha: A Ponte do Milênio 491

Resumo 492
Problemas 493

Capítulo 15

ONDAS PROGRESSIVAS 501

15-1 Movimento Ondulatório Simples 502
15-2 Ondas Periódicas 509
15-3 Ondas em Três Dimensões 514
15-4 Ondas Incidindo sobre Barreiras 518
15-5 O Efeito Doppler 523

Física em Foco
Tudo Tremeu: Bacias Sedimentares e Ressonância Sísmica 529

Resumo 530
Problemas 532

Capítulo 16

SUPERPOSIÇÃO E ONDAS ESTACIONÁRIAS 539

16-1 Superposição de Ondas 540
16-2 Ondas Estacionárias 547
*16-3 Tópicos Adicionais 556

Física em Foco
Ecos do Silêncio: Arquitetura Acústica 560

Resumo 561
Problemas 562

PARTE III TERMODINÂMICA

Capítulo 17

TEMPERATURA E TEORIA CINÉTICA DOS GASES 571

17-1 Equilíbrio Térmico e Temperatura 571
17-2 Termômetros de Gás e a Escala Absoluta de Temperatura 574
17-3 A Lei dos Gases Ideais 577
17-4 A Teoria Cinética dos Gases 582

Física em Foco
Termômetros Moleculares 592

Resumo 593
Problemas 594

Capítulo 18

CALOR E A PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA 599

18-1 Capacidade Térmica e Calor Específico 600
18-2 Mudança de Fase e Calor Latente 603
18-3 O Experimento de Joule e a Primeira Lei da Termodinâmica 606
18-4 A Energia Interna de um Gás Ideal 608
18-5 Trabalho e o Diagrama PV para um Gás 609
18-6 Capacidades Térmicas dos Gases 613

18-7 Capacidades Térmicas dos Sólidos 618
18-8 Falha do Teorema da Eqüipartição 619
18-9 A Compressão Adiabática Quase-estática de um Gás 622

Física em Foco
Respirometria: Respirando o Calor 626

Resumo 627
Problemas 629

Capítulo 19
A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA 635

19-1 Máquinas Térmicas e a Segunda Lei da Termodinâmica 636
19-2 Refrigeradores e a Segunda Lei da Termodinâmica 640
19-3 A Máquina de Carnot 643
*19-4 Bombas Térmicas 649
19-5 Irreversibilidade, Desordem e Entropia 650
19-6 Entropia e a Disponibilidade de Energia 657
19-7 Entropia e Probabilidade 658

Física em Foco
A Perpétua Batalha sobre o Movimento Perpétuo 660

Resumo 661
Problemas 662

Capítulo 20
PROPRIEDADES TÉRMICAS E PROCESSOS TÉRMICOS 669

20-1 Expansão Térmica 670
20-2 A Equação de van der Waals e Isotermas Líquido-Vapor 674
20-3 Diagramas de Fase 676
20-4 A Transferência de Calor 677

Física em Foco
Ilhas Urbanas de Calor: Noites Quentes na Cidade 688

Resumo 689
Problemas 690

Apêndice A
UNIDADES SI E FATORES DE CONVERSÃO 695

Apêndice B
DADOS NUMÉRICOS 697

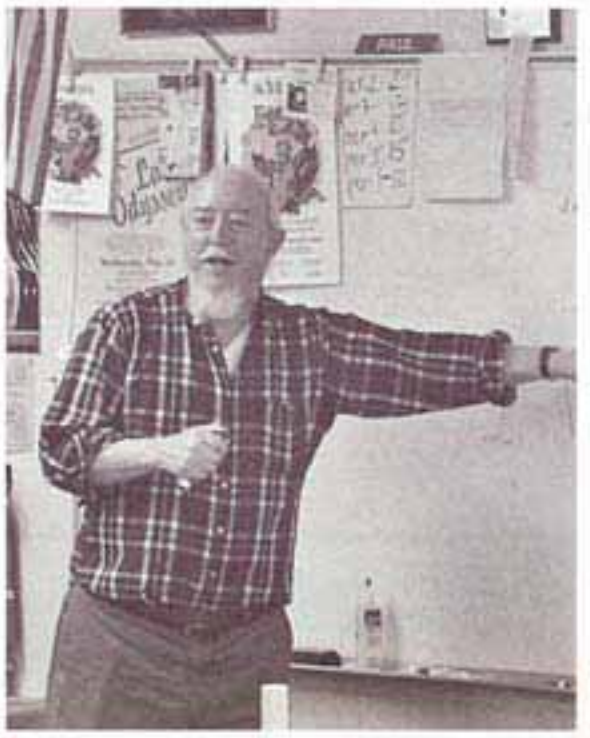
Apêndice C
TABELA PERIÓDICA DOS ELEMENTOS 701

TUTORIAL MATEMÁTICO 703

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS ÍMPARES DE FINAIS DE CAPÍTULO 733

ÍNDICE 755

Sobre os Autores



Paul Tipler nasceu na pequena cidade rural de Antigo, no Wisconsin, em 1933. Ele concluiu o ensino médio em Oshkosh, Wisconsin, onde seu pai era superintendente das escolas públicas. Graduou-se pela Purdue University em 1955 e doutorou-se pela University of Illinois em 1962, onde estudou a estrutura dos núcleos. Lecionou por um ano na Wesleyan University em Connecticut, enquanto escrevia sua tese, e depois mudou-se para a Oakland University em Michigan, onde foi um dos membros fundadores do departamento de física, desempenhando papel importante no desenvolvimento do currículo de física. Ao longo dos 20 anos seguintes, lecionou praticamente todos os cursos de física e escreveu a primeira e segunda edições de seus largamente utilizados livros-texto *Física Moderna* (1969, 1978) e *Física* (1976, 1982). Em 1982 ele se mudou para Berkeley, na Califórnia, onde reside atualmente, e onde escreveu *Física Universitária* (1987) e a terceira edição de *Física* (1991). Além da física, seus interesses incluem música, excursões e acampamentos, e ele é um excelente pianista de jazz e jogador de pôquer.

Gene Mosca nasceu na Cidade de Nova York e cresceu em Shelter Island, estado de Nova York. Ele estudou na Villanova University, na University of Michigan e na University of Vermont, onde doutorou-se em física. Gene aposentou-se recentemente de suas funções docentes na U.S. Naval Academy, onde, como coordenador do conteúdo do curso de física, instituiu inúmeras melhorias tanto em sala de aula quanto no laboratório. Considerado por Paul Tipler como "o melhor revisor que eu já tive", Mosca tornou-se seu co-autor a partir da quinta edição desta obra.

FÍSICA PARA CIENTISTAS E ENGENHEIROS

Volume 1

Mecânica
Oscilações e Ondas
Termodinâmica

PARTE III **TERMODINÂMICA**

Temperatura e Teoria Cinética dos Gases

17-1 Equilíbrio Térmico e Temperatura
17-2 Termômetros de Gás e a Escala Absoluta de Temperatura
17-3 A Lei dos Gases Ideais
17-4 A Teoria Cinética dos Gases

CAPÍTULO 17

QUANDO BENJAMIN FRANKLIN ESTEVE EM PARIS, ELE ASSISTIU AO PRIMEIRO VÔO DO HOMEM EM BALÃO DE AR QUENTE DE QUE SE TEM REGISTRO. DESDE ENTÃO, MUITA GENTE TEM VOADO EM BALÕES SUSTENTADOS POR AR QUENTE.

? Por que o balão sobe quando o ar que ele contém é aquecido? (Veja o Exemplo 17-7.)

Até as criancinhas possuem uma compreensão básica do que é quente e do que é frio, mas o que é temperatura? O que é que ela mede? Iniciamos, neste Capítulo 17, o estudo da temperatura.

Um piloto, um balonista e um mergulhador devem ter uma boa compreensão prática sobre as temperaturas do ar e da água ao planejarem seus vôos e mergulhos. Pilotos e balonistas devem estar cientes de como variações da temperatura afetam a massa específica do ar e os padrões dos ventos. Mergulhadores sabem que variações da temperatura corporal afetam a quantidade de ar do reservatório que será necessária em um mergulho. Eles também compreendem a importância de se equalizar a pressão sobre seus corpos com a pressão do ar contido dentro dos seus corpos. Para o mergulhador, o piloto e o balonista, a importância do comportamento dos gases em função da temperatura é vital. Assim, começamos nosso estudo da termodinâmica com uma discussão sobre a temperatura e um exame da lei dos gases ideais.

Neste capítulo, mostramos que uma escala consistente de temperatura pode ser definida em termos das propriedades dos gases de pequena massa específica, e que a temperatura é uma medida da energia cinética média das moléculas de um corpo.

17-1 EQUILÍBRIO TÉRMICO E TEMPERATURA

Usualmente, nosso sentido do tato é capaz de nos dizer se um corpo está quente ou frio. Sabemos que, para tornar um corpo frio mais quente, podemos colocá-lo em contato com um corpo quente e que, para tornar um corpo quente mais frio, podemos colocá-lo em contato com um corpo frio.

Quando um corpo é aquecido ou resfriado, algumas de suas propriedades físicas se alteram. Se um sólido ou um líquido é aquecido, seu volume usualmente aumenta. Se um gás é aquecido e sua pressão é mantida constante, seu volume aumenta. No entanto, se um gás é aquecido e seu volume é mantido constante, é sua pressão que aumenta. Se um condutor elétrico é aquecido, sua resistência elétrica se altera. (Esta propriedade é discutida no Capítulo 25 — Volume 2.) Uma propriedade física que varia com a temperatura é chamada de **propriedade termométrica**. Uma variação de uma propriedade termométrica indica uma variação da temperatura de um corpo.

Seja uma barra de cobre aquecida colocada em contato com uma barra de ferro resfriada, de forma que a barra de cobre esfria e a barra de ferro aquece. Dizemos que as duas barras estão em **contato térmico**. A barra de cobre se contrai levemente ao ser resfriada e a barra de ferro se expande levemente ao ser aquecida. Quando este processo termina, os comprimentos das barras passam a ser constantes. Então, as duas barras estão em **equilíbrio térmico** entre si.

Suponha, agora, que uma barra aquecida de cobre seja colocada em uma corrente de água fria. A barra esfria até parar de se contrair, quando estiver em equilíbrio

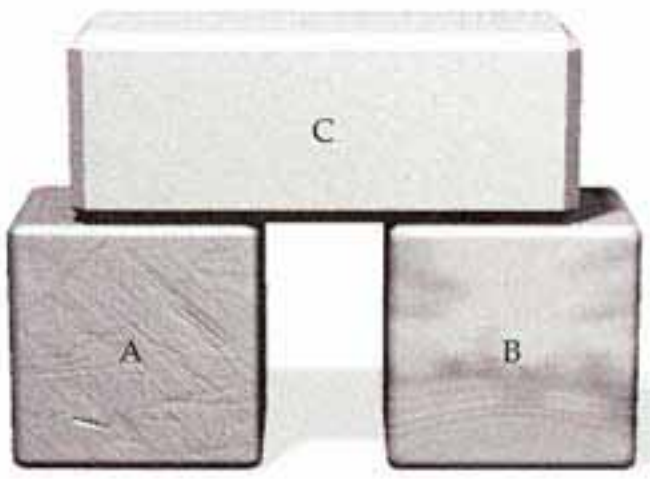
térmico com a água. Depois, colocamos uma barra fria de ferro na corrente, próximo da barra de cobre mas sem tocá-la. A barra de ferro se aquecerá até também atingir o equilíbrio térmico com a água. Se tomarmos as barras e as colocarmos em contato térmico entre si, verificamos que seus comprimentos não variam. Elas estão em equilíbrio térmico entre si. Apesar do senso comum, não existe uma maneira lógica de se deduzir este fato, que é chamado de **lei zero da termodinâmica** (Figura 17-1):

> Se dois corpos estão em equilíbrio térmico com um terceiro, então os três corpos estão em equilíbrio térmico entre si.
>
> LEI ZERO DA TERMODINÂMICA

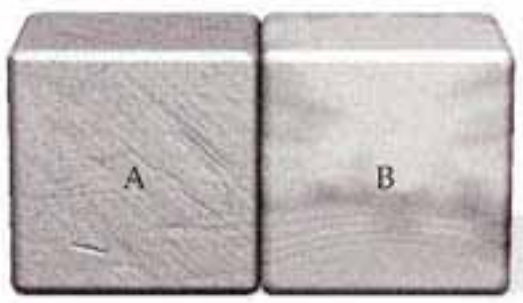
Por definição, dois corpos têm a mesma *temperatura* se eles estão em equilíbrio térmico entre si. A lei zero, como veremos, nos permite definir uma escala de temperatura.

AS ESCALAS DE TEMPERATURA CENTÍGRADA E FAHRENHEIT

Qualquer propriedade termométrica pode ser usada para estabelecer uma escala de temperatura. O termômetro comum de mercúrio consiste em um bulbo de vidro e um tubo contendo uma determinada quantidade de mercúrio.* Quando este termômetro é colocado em contato com um corpo mais quente, o mercúrio se expande, aumentando o comprimento da coluna de mercúrio (o vidro também se expande, mas em uma quantidade desprezível). Podemos criar uma escala ao longo do tubo de vidro usando o seguinte procedimento. Primeiro, o termômetro é colocado dentro de gelo e água em equilíbrio† a uma pressão de 1 atm. Quando o termômetro está em equilíbrio térmico com o gelo e a água, marcamos o tubo de vidro no topo da coluna de mercúrio. Esta marca representa a temperatura do **ponto de gelo** da água (também chamada de **ponto normal de congelamento** da água). Depois, o termômetro é colocado dentro de água fervente a uma pressão de 1 atm. Quando o termômetro está em equilíbrio térmico com a água fervente marcamos o tubo de vidro no topo da coluna de mercúrio. Esta marca representa a temperatura do **ponto de vapor** da água (também chamado de **ponto normal de ebulição** da água).



(*a*)



(*b*)

FIGURA 17-1 A lei zero da termodinâmica. (*a*) Os sistemas A e B estão em contato térmico com o sistema C, mas não em contato entre si. Quando A e B atingem, cada um, o equilíbrio térmico com C, eles estão em equilíbrio térmico um com o outro, o que pode ser verificado colocando-os em contato, como na Parte (*b*).

* O mercúrio é altamente tóxico. Hoje em dia, o álcool é comumente usado em termômetros.

† Água e gelo em equilíbrio constituem um banho de temperatura constante. Quando o gelo é colocado em água não gelada, a água resfria enquanto parte do gelo derrete. Quando, finalmente, o equilíbrio térmico é estabelecido, não há mais gelo derretendo. Se o sitema água/gelo for levemente aquecido, mais algum gelo derreterá, mas a temperatura do sistema não irá variar, desde que ainda haja gelo presente.

A **escala de temperatura centígrada** define a temperatura do ponto de gelo como zero grau centígrado (0°C) e a temperatura do ponto de vapor como 100°C. O espaço entre as marcas de zero e de 100 graus é dividido em 100 intervalos iguais (os graus). Marcas de graus também são feitas nas extensões abaixo e acima desses pontos. Se L_t é o comprimento da coluna de mercúrio, a temperatura centígrada t_C é dada por

$$t_C = \frac{L_t - L_0}{L_{100} - L_0} \times 100° \qquad 17\text{-}1$$

onde L_0 é o comprimento da coluna de mercúrio quando o termômetro está em um banho de gelo e L_{100} é o comprimento quando o termômetro está em um banho de vapor. A temperatura normal do corpo humano, medida na escala centígrada, é de cerca de 37°C.

Uma deficiência da escala centígrada é que ela depende da propriedade termométrica de algum material, como o mercúrio. Um aperfeiçoamento é a escala Celsius, discutida na Seção 17-2, que tem excelente concordância com a escala centígrada. (A concordância entre estas duas escalas é tão boa que muitos se referem à escala Celsius como a escala centígrada.)

Historicamente, a **escala de temperatura Fahrenheit** (largamente utilizada nos Estados Unidos) define a temperatura do ponto de gelo como 32°F e a temperatura do ponto de vapor como 212°F*. Para converter temperaturas entre as escalas Fahrenheit e centígrada, notamos que há 100 graus centígrados e 180 graus Fahrenheit entre os pontos de gelo e de vapor. Uma variação de temperatura de um grau centígrado é igual, portanto, à variação de 1,8 = 9/5 graus Fahrenheit. Para converter a temperatura de uma escala para outra, devemos também levar em conta o fato de que as temperaturas zero das duas escalas não são a mesma. A relação geral entre uma temperatura Fahrenheit t_F e uma temperatura centígrada t_C é

$$t_C = \tfrac{5}{9}(t_F - 32°) \qquad (\text{ou } t_F = \tfrac{9}{5}t_C + 32°) \qquad 17\text{-}2$$

CONVERSÃO FAHRENHEIT–CENTÍGRADOS

Hoje, definimos a escala Fahrenheit usando a Equação 17-2, com t_C igual à temperatura *Celsius*.

Exemplo 17-1 Convertendo Temperaturas Fahrenheit e Celsius

Viviane mede a temperatura de seu filhinho de seis meses, que está doente, com um termômetro calibrado na escala Celsius, e lê 40,0°C. Então, ela telefona ao médico procurando orientação. Quando ela informa ao médico a temperatura do bebê, o médico pergunta, "Quanto é isto, em Fahrenheit?" Ela faz a conversão, usando a Equação 17-2, e responde "102°F". Ela fez a conversão corretamente?

SITUAÇÃO Determine t_F usando $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32°)$ (Equação 17-2), com $t_C = 40{,}0°C$.

SOLUÇÃO

1. Escreva t_F em termos de t_C, a partir de $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32°)$: $t_F = \frac{9}{5}t_C + 32°$
2. Substitua $t_C = 40{,}0°C$: $t_F = \frac{9}{5}(40{,}0°) + 32° = \boxed{104°F}$

A Viviane errou por 2°F.

CHECAGEM A temperatura de 40°C está a 0,4 do caminho entre 0°C e 100°C, e a temperatura de 72°F está a 0,4 do caminho entre 0°F e 180°F. Então, esperamos que a temperatura Fahrenheit seja 72°F + 32°F = 104°F, que é o nosso resultado do passo 2.

PROBLEMA PRÁTICO 17-1 (*a*) Determine a temperatura Celsius equivalente a 68°F. (*b*) Determine a temperatura Fahrenheit equivalente a −40°C.

* Quando o físico alemão Daniel Fahrenheit inventou sua escala de temperatura, ele queria que todas as temperaturas mensuráveis fossem poositivas. Originalmente, ele escolheu 0°F como a temperatura mais fria que ele podia obter com uma mistura de gelo e água salgada e 96°F (um valor conveniente, por ser divisível por muitos fatores) como a temperatura do corpo humano. Depois, ele modificou ligeiralmente sua escala, para tornar números redondos as temperaturas do ponto de gelo e do ponto de vapor. Esta modificação resultou em uma temperatura média do corpo humano entre 98° e 99°F.

Outras propriedades termométricas podem ser usadas para construir termômetros e escalas de temperaturas. A Figura 17-2 mostra uma tira bimetálica que consiste em dois metais diferentes unidos. Quando a tira é aquecida ou resfriada, ela se dobra para acomodar as diferenças de expansão térmica dos dois metais. A Figura 17-3 mostra um termômetro que consiste em uma bobina bimetálica com um ponteiro preso para indicar a temperatura. Quando o termômetro é aquecido, a bobina se deforma e o ponteiro se move. Da mesma forma que os termômetros de mercúrio, ela está calibrada com o intervalo entre o ponto de gelo e o ponto de vapor dividido em 100 graus centígrados (ou 180 graus Fahrenheit).

FIGURA 17-2 Uma tira bimetálica. Quando aquecida ou resfriada, os dois metais se expandem ou se contraem diferentemente, fazendo com que a tira se dobre.

17-2 TERMÔMETROS DE GÁS E A ESCALA ABSOLUTA DE TEMPERATURA

Quando diferentes tipos de termômetros centígrados são calibrados na água com gelo e no vapor, eles concordam (por definição) em 0°C e em 100°C, mas fornecem leituras ligeiramente diferentes nos pontos intermediários. As discrepâncias crescem significativamente acima do ponto de vapor e abaixo do ponto de gelo. Contudo, para um grupo de termômetros, os termômetros de gás, as temperaturas medidas coincidem muito bem, mesmo longe dos pontos de calibração. Em um **termômetro de gás a volume constante**, o volume do gás é mantido constante e as variações da pressão do gás são usadas para indicar variações de temperatura (Figura 17-4). Uma pressão de ponto de gelo P_0 e uma pressão de ponto de vapor P_{100} são determinadas colocando-se o termômetro em banhos de água com gelo e de água com vapor, e o intervalo entre eles é dividido em 100 graus iguais (no caso da escala centígrada). Se a pressão é P_t em um banho cuja temperatura deve ser determinada, a temperatura em graus centígrados é definida como

$$t_C = \frac{P_t - P_0}{P_{100} - P_0} \times 100°C \qquad 17\text{-}3$$

TERMÔMETRO DE GÁS A VOLUME CONSTANTE NA ESCALA CENTÍGRADA

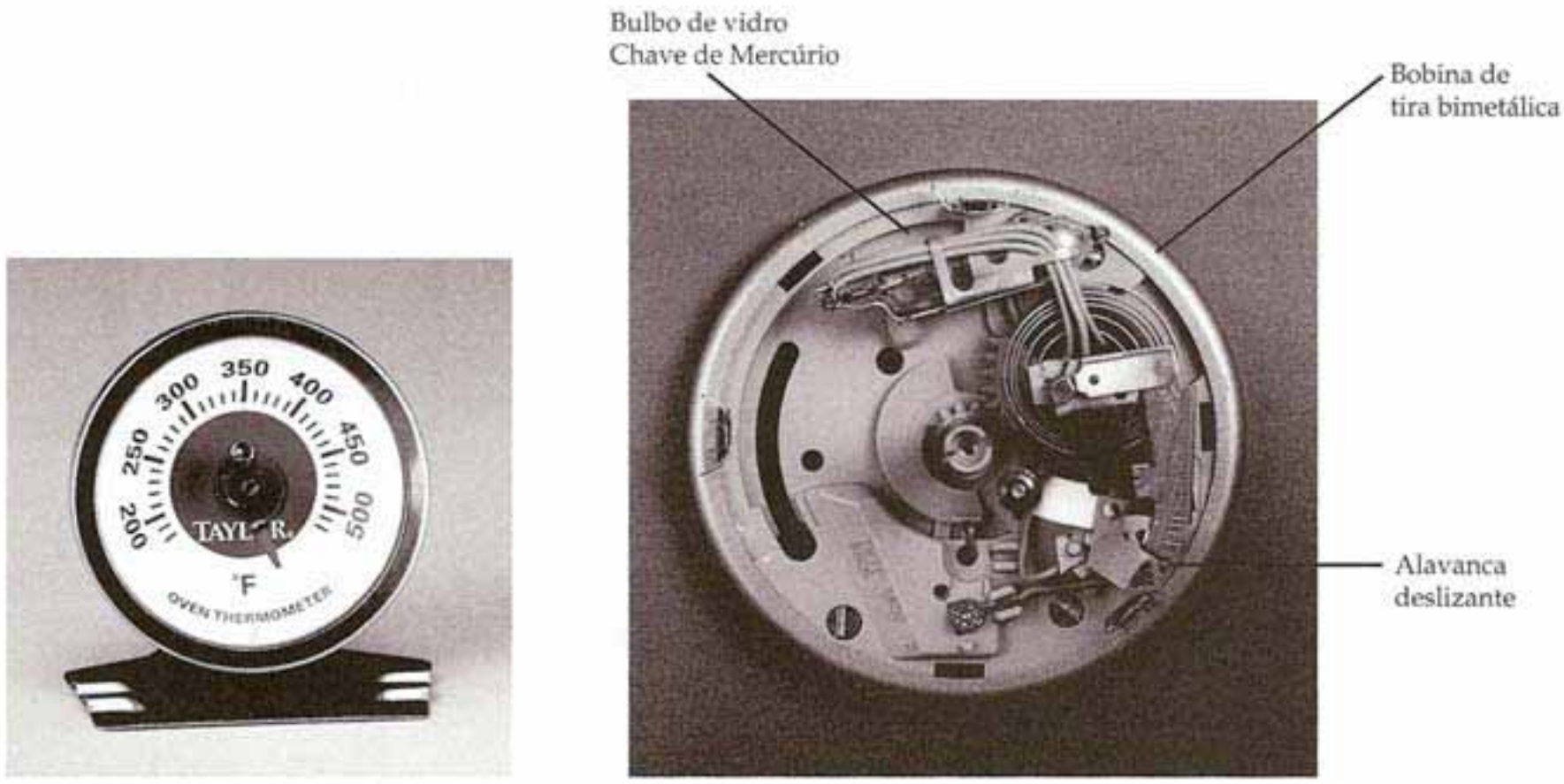


FIGURA 17-3 (*a*) Um termômetro que utiliza uma tira bimetálica na forma de uma bobina. (O ponteiro está preso a uma das extremidades da bobina.) Quando a temperatura da bobina aumenta, o ponteiro gira no sentido horário porque o metal externo se expande mais do que o metal interno. (*b*) Um termostato doméstico controla o ar condicionado central. Quando o ar se torna mais quente, a bobina se expande, o bulbo de vidro montado sobre ela se inclina e o mercúrio dentro do bulbo escorre e fecha uma chave elétrica, ligando o aparelho. Uma alavanca deslizante (embaixo, à direita), usada para girar o suporte da bobina, estabelece a temperatura desejada. O circuito é interrompido quando o ar mais frio faz com que a bobina bimetálica se contraia. *((a) Cortesia de Taylor Precision Products. (b) Richard Menga/Fundamental Photographs.)*

Suponha que uma determinada temperatura esteja sendo medida, digamos o ponto de ebulição do enxofre à pressão de 1 atmosfera, usando-se quatro termômetros de gás a volume constante, cada um contendo um dos quatro gases: ar, hidrogênio, nitrogênio e oxigênio. Os termômetros são calibrados, o que significa que, para cada um deles, os valores de P_{100} e de P_0 são determinados. Cada termômetro é, então, mergulhado em enxofre fervente e, quando em equilíbrio térmico com o enxofre, a pressão no termômetro é medida. Depois, a temperatura é calculada com o uso da Equação 17-3. Este processo dará o mesmo resultado para cada um dos quatro termômetros? Talvez surpreendentemente, a resposta é sim. Todos os quatro termômetros medem a mesma temperatura, desde que a massa específica do gás em cada um deles seja suficientemente pequena.

Uma medida da massa específica do gás no termômetro é a sua pressão do ponto de vapor, P_{100}. Se variamos a quantidade de gás em um termômetro de gás a volume constante, tanto acrescentando quanto retirando gás, mudamos ambos P_{100} e P_0. Como resultado, cada vez que a quantidade de gás é alterada, o termômetro deve ser recalibrado. A Figura 17-5 mostra os resultados de medidas do ponto de fusão do enxofre usando quatro termômetros de gás a volume constante, preenchidos com ar, hidrogênio, nitrogênio e oxigênio. Para cada termômetro, a temperatura medida é plotada em função da pressão do ponto de vapor do termômetro, P_{100}. Quando uma quantidade de gás é retirada, sua massa específica e a pressão de ponto de vapor diminuem. Vemos que, quando valores pequenos de massa específica para o gás são usados (pequenos P_{100}), os termômetros têm boa concordância. No limite de uma massa específica de gás se aproximando de zero, todos os termômetros de gás fornecerão o mesmo valor para a temperatura de fusão do enxofre. Esta temperatura medida com pequena massa específica é independente das propriedades de um gás em particular. Obviamente, não há nada de especial com o ponto de fusão do enxofre. Termômetros de gás a volume constante contendo gás com pequena massa específica concordam em qualquer temperatura. Assim, os termômetros de gás a volume constante que contêm gás com pequena massa específica podem ser utilizados para definir temperatura.

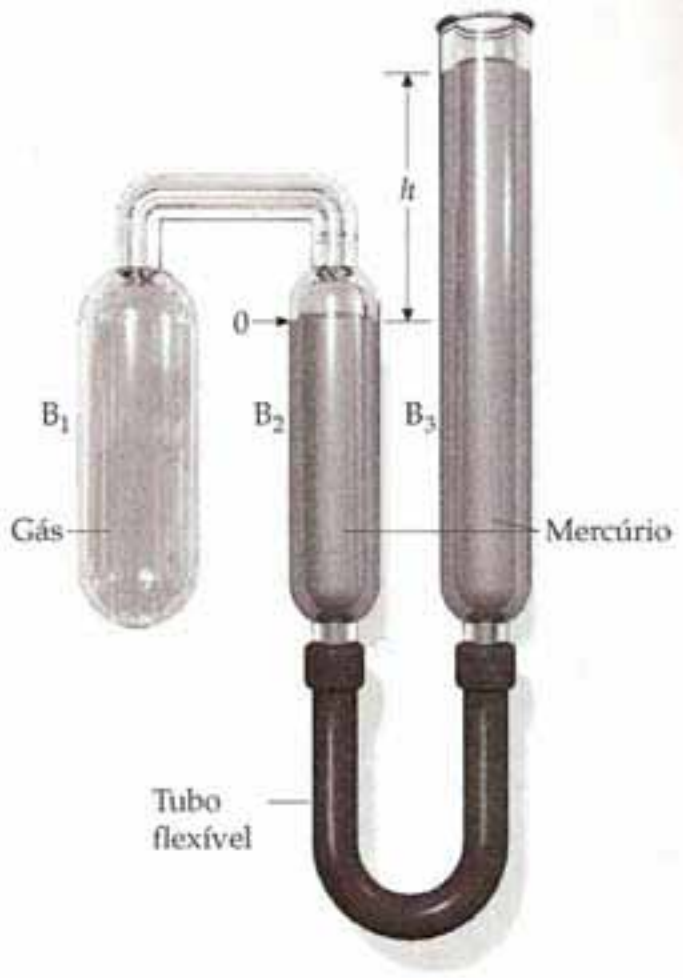


FIGURA 17-4 Um termômetro de gás a volume constante. O volume é mantido constante elevando-se ou abaixando-se o tubo B_3, de modo que o mercúrio no tubo B_2 permaneça no marco zero. A temperatura é escolhida como proporcional à pressão do gás no tubo B_1, que é indicada pela altura h da coluna de mercúrio do tubo B_3.

Seja uma série de medidas de temperatura feitas com um termômetro de gás a volume constante que tem uma quantidade de gás fixa mas muito pequena. De acordo com a Equação 17-3, a pressão P_t no termômetro varia linearmente com a temperatura medida t_C. A Figura 17-6 mostra um gráfico da pressão do gás em função da temperatura medida em um termômetro de gás a volume constante. Quando extrapolamos esta linha reta para uma pressão de gás nula, a temperatura se aproxima de −273,15°C. Este limite é o mesmo para qualquer tipo de gás usado.

Um estado de referência que é muito mais precisamente reprodutível do que os pontos de gelo ou de vapor é o **ponto triplo da água** — a temperatura e a pressão únicas em que água, vapor d'água e gelo coexistem em equilíbrio (veja a Figura 17-7). Este estado de equilíbrio ocorre em 4,58 mmHg e 0,01°C. A **escala de temperatura de gás ideal** é definida de modo que a temperatura do estado de ponto triplo seja igual a 273,16 kelvins (K). A temperatura T de

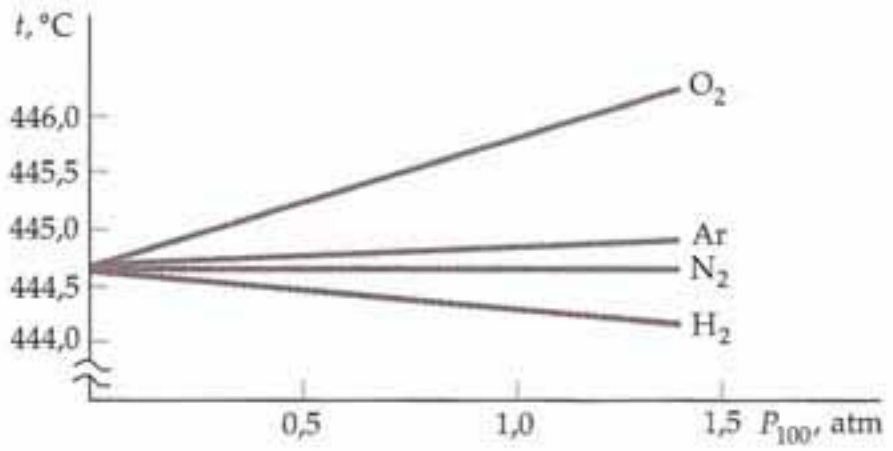


FIGURA 17-5 Temperatura do ponto de ebulição do enxofre, medida com termômetros de gás de volume constante contendo gases diferentes. O aumento ou a diminuição da quantidade de gás no termômetro faz com que a pressão P_{100} do ponto de vapor da água varie. À medida que a quantidade de gás é reduzida, a temperatura do ponto de ebulição do enxofre, conforme medida por todos os termômetros, se aproxima do valor 444,60°C. Note que o eixo das temperaturas mostra uma faixa de 444°C até 446°C.

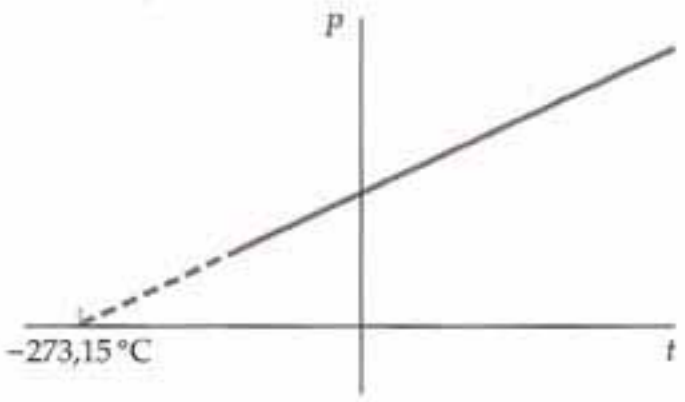


FIGURA 17-6 Gráfico de pressão *versus* temperatura para um gás, a partir de medidas de um termômetro de gás a volume constante. Quando extrapolado para a pressão zero, o gráfico intercepta o eixo das temperaturas no valor −273,15°C.

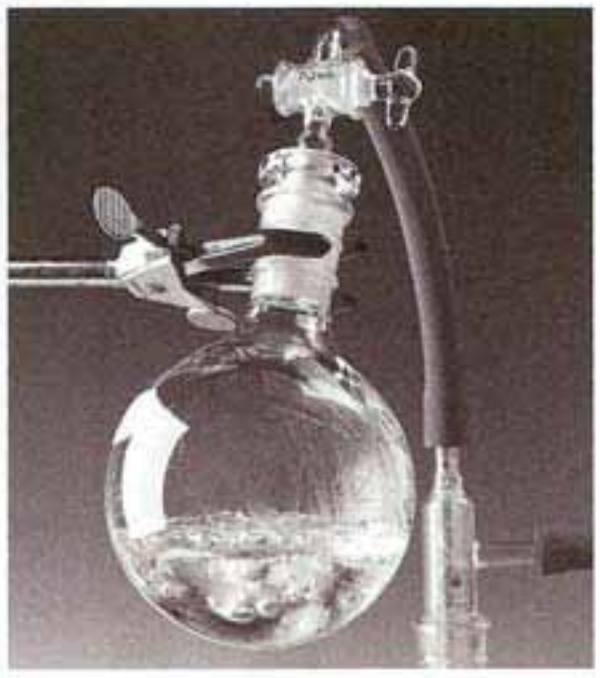


FIGURA 17-7 Água em seu ponto triplo. O frasco esférico contém água líquida, gelo e vapor d'água em equilíbrio térmico. *(Richard Menga/ Fundamental Photographs.)*

qualquer outro estado é definida como proporcional à pressão em um termômetro de gás a volume constante:

$$T = \frac{P}{P_3} T_3 \qquad 17\text{-}4$$

TERMÔMETRO A VOLUME CONSTANTE NA ESCALA DE TEMPERATURA DE GÁS IDEAL

onde P é a pressão do gás observada no termômetro, P_3 é a pressão quando o termômetro está imerso em um banho de água–gelo–vapor no ponto triplo e $T_3 = 273{,}16$ K (a temperatura do ponto triplo). O valor de P_3 depende da quantidade de gás no termômetro.

O grau Celsius é uma unidade do mesmo tamanho do kelvin, mas o ponto zero da **escala Celsius** difere do ponto zero da escala de temperatura de gás ideal. Por definição, o zero na escala Celsius corresponde a uma temperatura de gás ideal de exatamente 273,15 K.

A menor temperatura que pode ser medida com um termômetro de gás a volume constante é de cerca de 20 K, e o gás utilizado deve ser o hélio. Abaixo desta temperatura o hélio se liquefaz; todos os outros gases se liquefazem em temperaturas mais altas (Tabela 17-1). Veremos, no Capítulo 19, que a segunda lei da termodinâmica pode ser usada para definir a **escala absoluta de temperatura**, independentemente das propriedades de qualquer substância e sem limites sobre a faixa de temperaturas a serem medidas. Temperaturas baixas como 10^{-10} kelvin podem ser medidas. A escala absoluta assim definida é idêntica àquela definida pela Equação 17-4, na faixa de temperaturas alcançada pelos termômetros de gás. O símbolo T é usado quando em referência à temperatura absoluta.

Como o grau Celsius e o kelvin têm o mesmo tamanho, as *diferenças* de temperatura são iguais, na escala Celsius e na escala de temperatura absoluta (também chamada de **escala Kelvin**). Isto é, uma *variação* de temperatura de 1 K é idêntica a uma *variação* de temperatura de 1°C. As duas escalas diferem apenas na escolha da temperatura zero. Para converter de graus Celsius para kelvins, simplesmente somamos 273,15:*

$$T = t_C + 273{,}15\ \text{K} \qquad 17\text{-}5$$

CONVERSÃO CELSIUS-ABSOLUTA

Apesar de as escalas Celsius e Fahrenheit serem convenientes para o dia-a-dia, a escala absoluta é muito mais conveniente para propósitos científicos, em parte porque muitas fórmulas são expressas de maneira mais simples com o seu uso, e em parte porque a escala absoluta pode receber uma interpretação fundamental.

* Em muitos casos, podemos arredondar a temperatura do zero absoluto para −273°C.

! A escala de temperatura de gás ideal, definida pela Equação 17-4, tem como vantagem que qualquer temperatura medida não depende das propriedades do gás particular utilizado, mas depende apenas das propriedades gerais dos gases.

! Note que a unidade SI de temperatura, o kelvin, não é um grau, não sendo acompanhada por um símbolo de grau.

Tabela 17-1 Temperaturas de Vários Lugares e Fenômenos

Exemplo 17-2 Convertendo de Kelvin para Fahrenheit

O "supercondutor de alta temperatura" $YBa_2Cu_3O_7$ se torna supercondutor quando a temperatura cai para 92 K. Determine a temperatura limiar de supercondutividade em graus Fahrenheit.

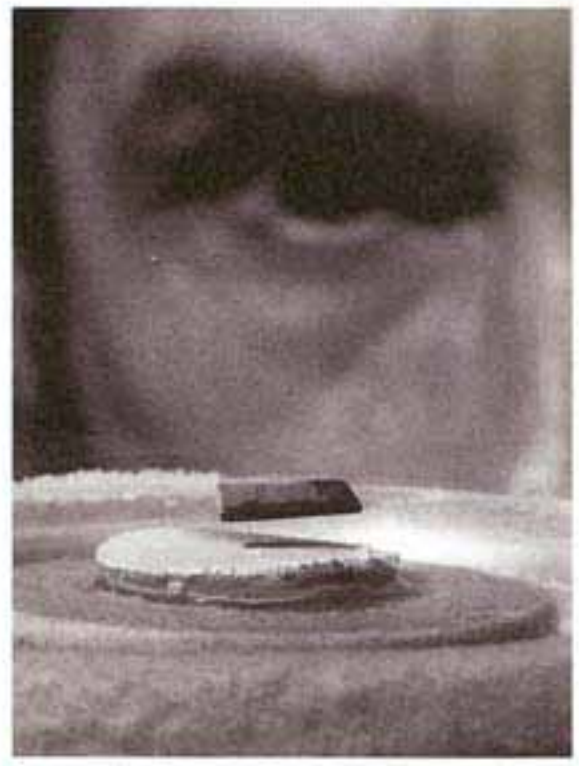
SITUAÇÃO Primeiro, converta para graus Celsius; depois, para Fahrenheit.

SOLUÇÃO

1. Converta de kelvins para graus Celsius:
$$T = t_C + 273{,}15$$
$$\text{logo} \quad 92 = t_C + 273{,}15 \Rightarrow t_C = -181{,}15°\text{C}$$

2. Para determinar a temperatura Fahrenheit, usamos $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32°)$ (Equação 17-2):
$$t_C = \tfrac{5}{9}(t_F - 32°)$$
$$\text{logo} \quad -181{,}15° = \tfrac{5}{9}(t_F - 32°) \Rightarrow t_F = \boxed{-294°\text{F}}$$

CHECAGEM A temperatura de 92 K está mais próxima de 0 K do que de 273 K, de modo que é de se esperar que a temperatura Fahrenheit seja consideravelmente menor do que 32°F. Nosso resultado confirma esta expectativa.



(U.S. Dept. of Energy.)

17-3 A LEI DOS GASES IDEAIS

As propriedades de amostras de gás que possuem pequena massa específica levam à definição da escala de temperatura de gás ideal. Se comprimimos tal gás mantendo sua temperatura constante, a pressão aumenta. De modo similar, se um gás se expande à temperatura constante, sua pressão diminui. Em boa aproximação, o produto da pressão pelo volume de uma amostra de gás de pequena massa específica é uma constante, quando a temperatura é constante. Este resultado foi descoberto experimentalmente por Robert Boyle (1627–1691) e é conhecido como a **lei de Boyle**:

$$PV = \text{constante} \qquad \text{(temperatura constante)}$$

Há uma lei mais geral que reproduz a lei de Boyle como um caso especial. De acordo com a Equação 17-4, a temperatura absoluta de uma amostra de um gás de pequena massa específica é proporcional à sua pressão, quando o volume é constante. Além disso, a temperatura absoluta de uma amostra de um gás de pequena massa específica é proporcional ao seu volume, quando a pressão é constante. Este resultado foi descoberto experimentalmente por Jacques Charles (1746–1823) e por Joseph Gay-Lussac (1778–1850). Podemos combinar estes dois resultados escrevendo

$$PV = CT \qquad 17\text{-}6$$

onde C é uma constante de valor positivo. Podemos ver que esta constante é proporcional ao número de moléculas da amostra de gás com o seguinte argumento. Sejam dois recipientes de igual volume, cada um com a mesma quantidade do mesmo tipo de gás e às mesmas temperatura e pressão. Se consideramos os dois recipientes como um sistema, temos o dobro da quantidade de gás no dobro do volume, mas as mesmas temperatura e pressão. Assim, duplicamos a quantidade $PV/T = C$ ao dobrar a quantidade de gás. Podemos, portanto, escrever C como uma constante k vezes o número N de moléculas no gás:

$$C = kN$$

A Equação 17-6 se torna, então,

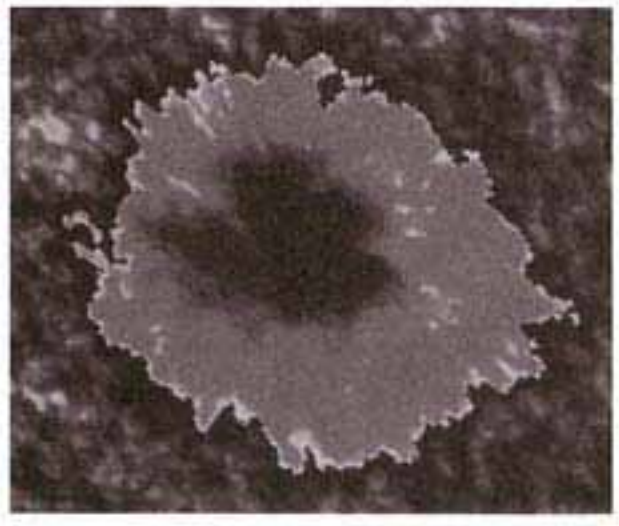
$$PV = NkT \qquad 17\text{-}7$$

A constante k é a chamada **constante de Boltzmann**. Verifica-se, experimentalmente, que seu valor é o mesmo para qualquer tipo de gás:

$$k = 1{,}381 \times 10^{-23}\,\text{J/K} = 8{,}617 \times 10^{-5}\,\text{eV/K} \qquad 17\text{-}8$$

Uma quantidade de um gás é, com freqüência, expressa em moles. Um **mol** de qualquer substância é a quantidade da substância que contém o **número de Avo-**

Veja o **Tutorial Matemático** *para mais informações sobre*
Proporções Diretas e Inversas



Manchas solares aparecem na superfície do Sol quando correntes de gases irrompem lentamente do interior da estrela. A "flor" solar tem um diâmetro de 10.000 milhas (16.093 quilômetros). A variação da temperatura, indicada por variações de cor na imagem computadorizada, não é perfeitamente compreendida. A porção central da mancha solar é mais fria do que as regiões externas, como indicado pela área mais escura. A temperatura do núcleo do Sol é da ordem de 10^7 K, enquanto a temperatura da superfície é apenas de cerca de 6000 K. *(NASA.)*

gadro, N_A, de partículas (como átomos ou moléculas). O número de Avogadro é definido como o número de átomos de carbono em exatamente 12 g (1 mol) de ^{12}C:

$$N_A = 6{,}022 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1} \qquad 17\text{-}9$$

NÚMERO DE AVOGADRO

Se temos n moles de uma substância, então o número de moléculas é

$$N = nN_A \qquad 17\text{-}10$$

A Equação 17-7 fica, então,

$$PV = nN_A kT = nRT \qquad 17\text{-}11$$

onde $R = N_A k$ é a chamada **constante universal dos gases**. Seu valor, igual para todos os gases, é

$$R = N_A k = 8{,}314\ \text{J/(mol} \cdot \text{K)} = 0{,}08206\ \text{L} \cdot \text{atm/(mol} \cdot \text{K)} \qquad 17\text{-}12$$

A Figura 17-8 mostra um gráfico de $PV/(nT)$ *versus* a pressão P para vários gases. Para todos os gases, $PV/(nT)$ é quase constante para uma grande faixa de pressões. Mesmo o oxigênio, que é o que apresenta a maior variação neste gráfico, varia apenas cerca de 1 por cento entre 0 e 5 atm. Um **gás ideal** é definido como um gás para o qual $PV/(nT)$ é constante para todas as pressões. A pressão, o volume e a temperatura de um gás ideal se relacionam por

$$PV = nRT \qquad 17\text{-}13$$

LEI DOS GASES IDEAIS

A Equação 17-13, que relaciona as variáveis P, V e T, é conhecida como a lei dos gases ideais, e constitui um exemplo de uma **equação de estado**. Ela pode descrever as propriedades de gases reais que possuam pequena massa específica (e, portanto, pequenas pressões). Correções devem ser feitas a esta equação para gases com massas específicas maiores. No Capítulo 20, discutimos outra equação de estado, a equação de van der Waals, que inclui tais correções. Para qualquer massa específica, existe uma equação de estado relacionando P, V e T para uma dada quantidade de gás. Assim, o estado de uma dada quantidade de gás está completamente especificado com o conhecimento de quaisquer duas das três **variáveis de estado** P, V e T.

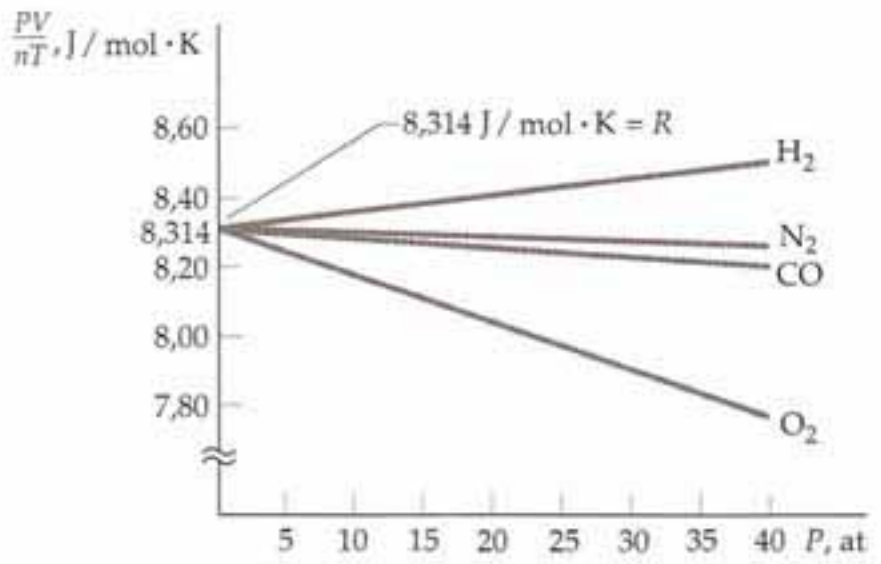


FIGURA 17-8 Gráfico de PV/nT *versus* P para gases reais. Variando-se a quantidade de gás, a pressão varia. A razão PV/nT se aproxima do mesmo valor, 8,314 J/(mol · K), para todos os gases, à medida que suas massas específicas e, portanto, suas pressões, são reduzidas. Este valor é a constante universal dos gases, R.

PRESSÕES PARCIAIS

O ar seco contém cerca de 21 por cento de oxigênio e 79 por cento de nitrogênio. Mergulhadores utilizam, com freqüência, ar enriquecido com oxigênio (chamado de nitrox), porque ele permite aumentar o tempo de um mergulho. Para mergulhos à grande profundidade, uma mistura de oxigênio e hélio (chamada de heliox) é usada, porque esta mistura reduz a chance de que um mergulhador sofra de narcose pelo nitrogênio.

Se temos uma mistura confinada de dois ou mais gases, e se a mistura é suficientemente diluída (de forma que cada gás possa ser visto como um gás ideal), então podemos pensar em cada gás como ocupando todo o volume do recipiente. Isto vale porque o volume das moléculas individuais do gás é desprezível em comparação com o volume do espaço vazio que as cerca. A pressão total exercida pela mistura é igual à soma das pressões exercidas individualmente pelos gases da mistura, chamadas de **pressões parciais**. Além disso, a pressão parcial de cada gás da mistura é a pressão que ele exerceria se só ele ocupasse o recipiente. Este resultado — a pressão total é igual à soma das pressões parciais — é chamado de **lei das pressões parciais.**

ESTRATÉGIA PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Gases Diluídos

SITUAÇÃO Um gás diluído é aquele para o qual o modelo de um gás ideal fornece resultados suficientemente precisos. As variáveis são a pressão, o volume, a temperatura, a massa e/ou a quantidade de substância (número de moles).

SOLUÇÃO

1. Aplique a lei dos gases ideais, $PV = nRT$, para cada gás diluído. Certifique-se de usar a temperatura absoluta e a pressão absoluta.
2. Para uma mistura de gases diluídos, a lei dos gases ideais se aplica a cada gás da mistura, o volume de cada gás da mistura é o volume do recipiente e a pressão de cada gás é a pressão parcial desse gás. A pressão da mistura é a soma das pressões parciais dos gases constituintes.
3. Outras relações úteis são $R = N_A k$, $N = nN_A$ e $m = nM$, onde k é a constante de Boltzmann, N é o número de moléculas, m é a massa do gás e M é a massa molar.
4. Determine a quantidade procurada.

CHECAGEM A pressão, o volume e a temperatura nunca podem ser negativos.

Exemplo 17-3 Misturando Gases

Um tanque de oxigênio de 20 L está à pressão de $0{,}30P_{at}$, e um tanque de nitrogênio de 30 L está à pressão de $0{,}60P_{at}$. A temperatura de cada gás é 300 K. O oxigênio é, então, transferido para o recipiente de 30 L que contém nitrogênio, e os dois gases se misturam. Qual é a pressão da mistura, se a temperatura é mantida igual a 300 K?

SITUAÇÃO O volume final dos dois gases é 30 L. As temperaturas iniciais dos dois gases são iguais. Então, podemos usar a lei de Boyle ($P_iV_i = P_fV_f$) para determinar a pressão parcial de cada gás da mistura. Depois, usamos a lei das pressões parciais para determinar a pressão da mistura.

SOLUÇÃO

1. A pressão da mistura é a soma das pressões parciais dos dois gases: $P = P_{O_2} + P_{N_2}$

2. As temperaturas inicial e final dos gases são as mesmas. Então, usando a lei de Boyle, encontramos as pressões parciais dos gases: $P_iV_i = P_fV_f \Rightarrow P_f = \frac{V_i}{V_f}P_i$

3. O volume final do oxigênio é 30 L (assim como o volume final do nitrogênio):
$$P_{O_2} = \frac{V_i}{V_f}P_i = \frac{20\text{ L}}{30\text{ L}}0{,}30P_{at} = 0{,}20P_{at}$$
$$P_{N_2} = \frac{V_i}{V_f}P_i = \frac{30\text{ L}}{30\text{ L}}0{,}60P_{at} = 0{,}60P_{at}$$

4. A pressão é a soma das pressões parciais: $P = P_{O_2} + P_{N_2} = 0{,}20P_{at} + 0{,}60P_{at} = \boxed{0{,}80P_{at}}$

CHECAGEM Esperamos um aumento da pressão no tanque de 30 L quando o oxigênio é transferido para ele. Esta expectativa é confirmada pelo nosso resultado final ($0{,}80P_{at}$ representa um aumento da pressão de $0{,}20P_{at}$).

Exemplo 17-4 Volume de um Gás Ideal

Qual é o volume ocupado por 1,00 mol de um gás ideal à temperatura de 0,00°C e à pressão de 1,00 atm?

SITUAÇÃO Use a lei dos gases ideais para determinar o volume ocupado pelo gás ideal.

SOLUÇÃO
Podemos determinar o volume usando a lei dos gases ideais com $T = 273$ K:

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{(1{,}00\text{ mol})[0{,}0821\text{ L}\cdot\text{atm}/(\text{mol}\cdot\text{K})](273{,}15\text{ K})}{1{,}00\text{ atm}} = \boxed{22{,}4\text{ L}}$$

CHECAGEM Note que, escrevendo R em L · atm/(mol · K), podemos escrever P em atmosferas para obter V em litros.

PROBLEMA PRÁTICO 17-2 Determine (*a*) o número de moles n e (*b*) o número de moléculas N em 1,00 cm³ de um gás a 0,00°C e 1,00 atm.

CHECAGEM CONCEITUAL 17-1

Os dois dormitórios de uma suíte, de tamanhos idênticos, estão ligados por uma porta aberta. O quarto de Antônio, com ar condicionado, está 5,0°C mais frio do que o quarto de Cláudia. Qual dos quartos possui mais ar em seu interior?

A temperatura de 0°C = 273,15 K e a pressão de 1 atm são usualmente referidas como **temperatura e pressão normais**, ou simplesmente de **condições normais**. Vemos, do Exemplo 17-4, que, sob condições normais, 1 mol de um gás ideal ocupa um volume de 22,4 L.

A Figura 17-9 mostra um gráfico de P *versus* V para várias temperaturas constantes T. Estas curvas são chamadas de **isotermas**. As isotermas para um gás ideal são hipérboles. Para uma quantidade fixa de gás, podemos ver, da lei dos gases ideais (Equação 17-13), que a quantidade PV/T é constante. Usando os subscritos 1 para os valores iniciais e 2 para os valores finais, temos

$$\frac{P_2V_2}{T_2} = \frac{P_1V_1}{T_1} \qquad 17\text{-}14$$

LEI DOS GASES IDEAIS PARA UMA QUANTIDADE FIXA DE GÁS

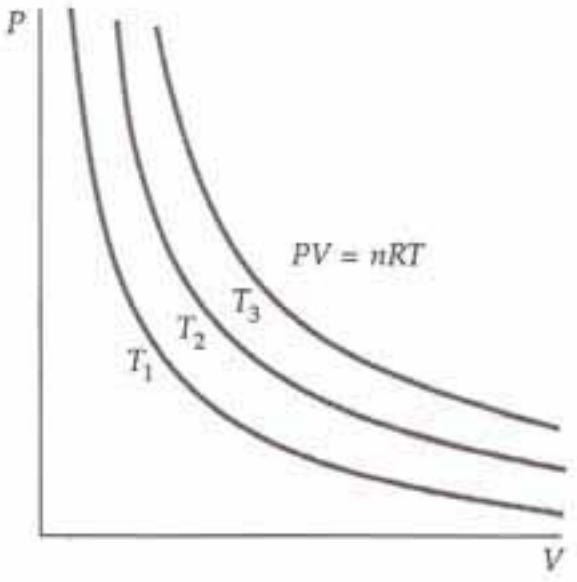


FIGURA 17-9 Isotermas no diagrama PV para um gás. Para um gás ideal, estas curvas são hipérboles dadas por $PV = nRT$. (A equação geral de uma hipérbole que se aproxima assintoticamente dos eixos coordenados é xy = constante.)

Exemplo 17-5 Aquecendo e Comprimindo um Gás

Um gás tem um volume de 2,00 L, uma temperatura de 30,0°C e uma pressão de 1,00 atm. Quando o gás é aquecido até 60,0°C e comprimido para um volume de 1,50 L, qual é a sua nova pressão?

SITUAÇÃO Como a quantidade de gás é fixa, a pressão pode ser determinada usando-se a Equação 17-14. Faça os subscritos 1 e 2 designarem os estados inicial e final, respectivamente.

SOLUÇÃO

1. Expresse a pressão P_2 em termos de P_1 e das temperaturas e dos volumes iniciais e finais:
$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$$
$$P_2 = \frac{T_2V_1}{T_1V_2}P_1$$

2. Calcule as temperaturas absolutas inicial e final:
$$T_1 = 273{,}15 + 30{,}0 = 303{,}15\text{ K}$$
$$T_2 = 273{,}15 + 60{,}0 = 333{,}15\text{ K}$$

3. Substitua os valores numéricos no passo 1 e determine P_2:
$$P_2 = \frac{(333{,}15\text{ K})(2{,}00\text{ L})}{(303{,}15\text{ K})(1{,}50\text{ L})}(1{,}00\text{ atm}) = \boxed{1{,}47\text{ atm}}$$

CHECAGEM Tanto o aquecimento quanto a compressão de um gás tendem a aumentar sua pressão. Assim, esperamos que a pressão do gás seja maior do que o valor inicial de 1,00 atm. Nosso resultado de 1,47 atm corresponde a esta expectativa.

PROBLEMA PRÁTICO 17-3 Quantos moles de gás há no sistema descrito neste exemplo?

A massa por mol de uma substância é a sua **massa molar**, M. (Os termos *peso molecular* ou *massa molecular* também são, às vezes, usados.) A massa molar do ^{12}C é, por definição, 12 g/mol, ou 0,012 kg/mol. As massas molares dos elementos são dadas no Apêndice C. A massa molar de um elemento representa a média das massas molares dos isótopos desse elemento — a média sendo ponderada pela abundância relativa dos isótopos na Terra. A massa molar de um composto, como o CO_2, é a soma das massas molares dos elementos da molécula. A massa molar do carbono é 12,011 g/mol e a massa molar do oxigênio é 15,999 g/mol. Assim, a massa molar do CO_2 é 12,011 g/mol + 2 × 15,999 g/mol = 44,009 g/mol.

CHECAGEM CONCEITUAL 17-2

Se a temperatura diminui com a pressão mantida constante, o que acontece com o volume?

Exemplo 17-6 A Massa de um Átomo de Hidrogênio

A massa molar do hidrogênio é 1,008 g/mol. Qual é a massa média de um átomo de hidrogênio em um copo de H_2O (água)?

SITUAÇÃO Seja m a massa de um átomo de hidrogênio. Como há N_A átomos de hidrogênio em um mol de hidrogênio, a massa molar M é dada por $M = mN_A$. Podemos usar isto para determinar m.

SOLUÇÃO

A massa média de um átomo de hidrogênio é a massa molar dividida pelo número de Avogadro:

$$m = \frac{M}{N_A} = \frac{1{,}008\ \text{g/mol}}{6{,}022 \times 10^{23}\ \text{átomos/mol}} = \boxed{1{,}674 \times 10^{-24}\ \text{g/átomo}}$$

CHECAGEM A massa calculada do átomo de hidrogênio tem, como esperado, um valor muitas e muitas ordens de grandeza menor do que a massa molar.

INDO ALÉM Os três isótopos do hidrogênio são o prótio ^1H, o deutério ^2H e o trítio ^3H. A abundância relativa do ^1H no hidrogênio natural é 99,985%.

Exemplo 17-7 Um Balão de Ar Quente Flutuando

Um pequeno balão de ar quente tem um volume de 15,0 m³ e é aberto embaixo. O ar dentro do balão está a uma temperatura média de 75°C, enquanto o ar da vizinhança tem uma temperatura de 24°C e uma pressão média de 1,00 atm. O balão está amarrado para que não suba, e a tração no cabo que o mantém é de 10,0 N. Use 0,0290 kg/mol para a massa molar do ar. (Despreze a força gravitacional sobre o tecido do balão.) Qual é a pressão média dentro do balão?

SITUAÇÃO Três forças atuam sobre o balão e seu conteúdo: a força de empuxo do ar que o cerca, a força de tração do cabo e a força gravitacional da Terra. A força resultante é a soma destas três forças. A força de empuxo é igual ao peso do ar deslocado (princípio de Arquimedes). A pressão, a temperatura e o volume do gás estão relacionados por $PV = nRT$. A massa m do ar é igual ao número de moles n vezes sua massa molar M.

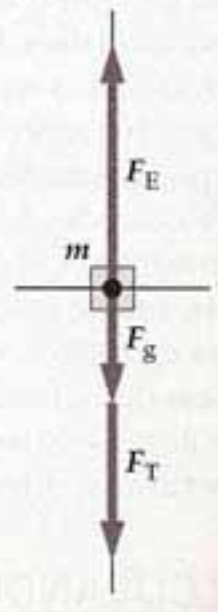


FIGURA 17-10

SOLUÇÃO

1. A força resultante sobre o sistema (balão mais ar nele contido) é zero. Esboce um diagrama de corpo livre (Figura 17-10) para o sistema:

2. Aplique a segunda lei de Newton para o sistema:
$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$
$$\vec{F}_T + \vec{F}_E + \vec{F}_g = 0 \Rightarrow F_E = F_T + F_g$$

3. A força de empuxo é igual ao peso de um volume V do ar próximo ao balão, onde V é o volume do ar dentro do balão. Sejam ρ_1 a massa específica média do ar próximo ao balão e ρ_2 a massa específica média do ar dentro do balão:
$$F_E = \rho_1 Vg$$
$$F_g = \rho_2 Vg$$

4. Substitua os resultados do passo 2 no resultado do passo 1:
$$F_T = F_E - F_g$$
$$F_T = \rho_1 Vg - \rho_2 Vg = (\rho_1 - \rho_2)Vg$$

5. A massa de uma amostra do ar dentro do balão é o número de moles n vezes a massa molar M do ar:
$$\rho_1 = \frac{m_1}{V} = \frac{n_1 M}{V}$$
$$\rho_2 = \frac{m_2}{V} = \frac{n_2 M}{V}$$

6. Substitua os resultados do passo 5 no resultado do passo 4:
$$F_T = \left(\frac{n_1 M}{V} - \frac{n_2 M}{V}\right) Vg \Rightarrow \frac{F_T}{Mg} = n_1 - n_2$$

7. Usando a lei dos gases ideais ($PV = nRT$), substitua n_1 e n_2:
$$\frac{F_T}{Mg} = \frac{P_1 V}{RT_1} - \frac{P_2 V}{RT_2}$$

8. Explicite P_2:
$$P_2 = \left(\frac{P_1}{T_1} - \frac{F_T R}{MgV}\right) T_2$$

9. Determine o valor de P_2. A temperatura em kelvins é igual a 273 mais a temperatura em graus Celsius, 1 atm = 101,3 kPa e R = 8,314 J/(mol · K):
$$P_2 = \left(\frac{1{,}013 \times 10^5}{297} - \frac{10{,}0 \times 8{,}314}{0{,}0290 \times 9{,}81 \times 15{,}0}\right) 348$$
$$= \boxed{1{,}12 \times 10^5 \text{ Pa}} = \boxed{1{,}01 \text{ atm}}$$

CHECAGEM Para produzir uma força resultante para cima sobre o tecido do balão, o ar dentro do balão deve estar a uma pressão maior do que o ar fora do balão. Assim, nosso resultado de 1,10 atm, para a pressão média dentro do balão, é plausível.

INDO ALÉM A pressão na abertura na base do balão é a mesma pressão do ar que o cerca naquela altitude. Em um fluido estático, a pressão diminui com o aumento da altitude e, quanto maior for a massa específica do fluido, maior será a taxa de diminuição da pressão com a altitude. O ar dentro do balão tem uma massa específica menor do que o ar fora do balão. Assim, dentro do balão a diminuição da pressão, da abertura até o topo do balão, é menor do que para o ar externo que cerca o balão.

17-4 A TEORIA CINÉTICA DOS GASES

A descrição do comportamento de um gás em termos das variáveis macroscópicas de estado P, V e T pode ser relacionada a médias simples de quantidades microscópicas, como a massa e a rapidez das moléculas do gás. A teoria resultante, chamada de **teoria cinética dos gases**, fornece um modelo detalhado para gases diluídos.

Do ponto de vista da teoria cinética, um gás confinado consiste em um grande número de partículas em rápido movimento. Em um gás monoatômico, como o hélio e o neônio, estas partículas são átomos isolados mas, em gases poliatômicos, como o oxigênio e o dióxido de carbono, as partículas são moléculas. Na teoria cinética, é prática comum referir-se às partículas que constituem os gases como moléculas. (Isto é a prática, mesmo que chamar um átomo de molécula seja algo incorreto.) Seguiremos esta prática na discussão que se segue.

Em um gás à temperatura ambiente, um grande número de moléculas se move com velocidades de centenas de metros por segundo. Estas moléculas sofrem colisões elásticas, tanto entre si quanto com as paredes do recipiente. No contexto da teoria cinética, podemos desprezar a gravidade, de modo que não haja posições preferenciais para as moléculas no recipiente,* nem orientações preferenciais para seus vetores velocidade. As moléculas estão separadas, em média, por distâncias grandes em comparação com os seus diâmetros. Elas também não exercem forças umas sobre as outras, exceto nas colisões. (Esta suposição equivale a supor um gás de muito baixa massa específica, o que, como vimos na seção anterior, é o mesmo que supor que o gás seja um gás ideal. Como a quantidade de movimento é conservada, as colisões entre as moléculas não têm nenhum efeito sobre a quantidade de movimento total, em nenhuma direção. Assim, essas colisões podem ser desprezadas.)

CALCULANDO A PRESSÃO EXERCIDA POR UM GÁS

A pressão que um gás exerce sobre seu recipiente é devida às colisões entre as moléculas do gás e as paredes do recipiente. Esta pressão é uma força por unidade de área e, pela segunda lei de Newton, esta força é a taxa de variação da quantidade de movimento das moléculas do gás colidindo com as paredes.

* Devido à gravidade, a massa específica das moléculas na base do recipiente é ligeiramente maior do que em cima. Como discutido no Capítulo 13, a massa específica do ar reduz-se à metade a uma altura de cerca de 5,5 km, de modo que a variação em um recipiente de tamanho usual é desprezível.

Seja um recipiente retangular de volume V, contendo N moléculas de gás, cada uma de massa m, movendo-se com uma rapidez v. Vamos calcular a força exercida por estas moléculas sobre a parede da direita, que é perpendicular ao eixo x e tem área A. As moléculas que atingem esta parede em um intervalo de tempo Δt são aquelas que se encontram a uma distância de até $|v_x|\,\Delta t$ da parede (Figura 17-11) e que estão se movendo para a direita. Assim, o número de moléculas que atingem a parede no intervalo de tempo Δt é o número por unidade de volume N/V multiplicado pelo volume $A|v_x|\,\Delta t$ multiplicado por $\frac{1}{2}$ porque, na média, apenas metade das moléculas estão se movendo para a direita. Isto é, no tempo Δt,

$$\text{Número de móleculas que atingem a parede} = \frac{1}{2}\frac{N}{V}|v_x|\,\Delta t\,A$$

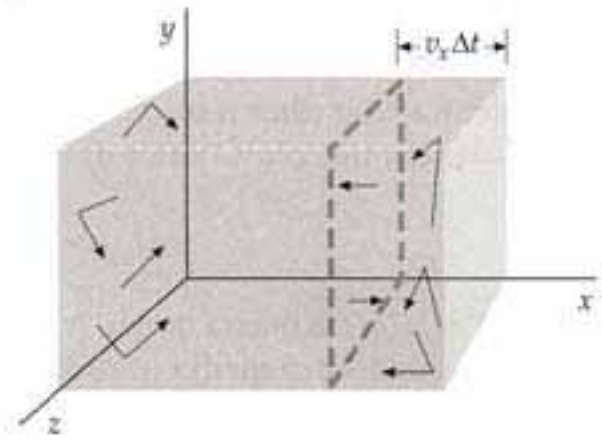


FIGURA 17-11 Moléculas de um gás em um recipiente retangular. As moléculas que se movem para a direita e que estão mais próximas do que $v_x\Delta t$ da parede da direita atingirão esta parede no intervalo de tempo Δt.

A componente x da quantidade de movimento de uma molécula é $+mv_x$ antes de atingir a parede, e $-mv_x$ depois de uma colisão elástica com a parede. A variação da quantidade de movimento tem a magnitude $2mv_x$. A magnitude da variação total da quantidade de movimento $|\Delta\vec{p}|$ de todas as moléculas no intervalo de tempo Δt é $2m|v_x|$ multiplicado pelo número de moléculas que atingem a parede durante este intervalo:

$$|\Delta\vec{p}| = (2m|v_x|) \times \left(\frac{1}{2}\frac{N}{V}|v_x|\,\Delta t\,A\right) = \frac{N}{V}mv_x^2 A\,\Delta t \qquad 17\text{-}15$$

A magnitude da força exercida pela parede sobre as moléculas, que é a magnitude da força exercida pelas moléculas sobre a parede, é a razão $|\Delta\vec{p}|/\Delta t$. A pressão é a magnitude desta força dividida pela área A:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{1}{A}\frac{|\Delta\vec{p}|}{\Delta t} = \frac{N}{V}mv_x^2$$

ou

$$PV = Nmv_x^2 \qquad 17\text{-}16$$

Para dar conta do fato de que todas as moléculas no recipiente não possuem a mesma rapidez, simplesmente substituímos v_x^2 pela sua média $(v_x^2)_{\text{méd}}$. Então, escrevendo a Equação 17-16 em termos da energia cinética $\frac{1}{2}mv_x^2$ associada ao movimento ao longo do eixo x, temos

$$PV = 2N\left(\tfrac{1}{2}mv_x^2\right)_{\text{méd}} \qquad 17\text{-}17$$

A INTERPRETAÇÃO MOLECULAR DA TEMPERATURA

Comparando a Equação 17-17 com $PV = NkT$ (Equação 17-7), que foi obtida experimentalmente para qualquer gás com pequena massa específica, podemos ver que

$$NkT = 2N\left(\tfrac{1}{2}mv_x^2\right)_{\text{méd}} \quad \text{ou} \quad \left(\tfrac{1}{2}mv_x^2\right)_{\text{méd}} = \tfrac{1}{2}kT \qquad 17\text{-}18$$

Assim, a energia cinética média associada ao movimento ao longo do eixo x é $\frac{1}{2}kT$. Mas não há nada de especial em relação à direção x. Conseqüentemente,

$$(v_x^2)_{\text{méd}} = (v_y^2)_{\text{méd}} = (v_z^2)_{\text{méd}} \quad \text{e} \quad (v^2)_{\text{méd}} = (v_x^2)_{\text{méd}} + (v_y^2)_{\text{méd}} + (v_z^2)_{\text{méd}} = 3(v_x^2)_{\text{méd}}$$

Fazendo $(v_x^2)_{\text{méd}} = \frac{1}{3}(v^2)_{\text{méd}}$ e chamando de $K_{\text{trans méd}}$ a energia cinética média de translação das moléculas, a Equação 17-18 se torna

$$K_{\text{trans méd}} = \left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)_{\text{méd}} = \tfrac{3}{2}kT \qquad 17\text{-}19$$

ENERGIA CINÉTICA MÉDIA DE TRANSLAÇÃO DE UMA MOLÉCULA

Além da energia cinética de translação, as moléculas também possuem energia cinética de rotação ou de vibração. No entanto, apenas a energia cinética de translação é relevante no cálculo da pressão exercida por um gás sobre as paredes de seu recipiente.

A temperatura absoluta é, assim, uma medida da energia cinética média de translação das moléculas. A energia cinética total de translação de n moles de um gás que contém N moléculas é

$$K_{\text{trans}} = N\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)_{\text{méd}} = \tfrac{3}{2}NkT = \tfrac{3}{2}nRT \qquad 17\text{-}20$$

onde usamos $Nk = nN_Ak = nR$. Assim, a energia cinética de translação é $\frac{3}{2}kT$ por molécula e $\frac{3}{2}RT$ por mol.

Podemos usar estes resultados para estimar a ordem de grandeza da rapidez das moléculas em um gás. O valor médio de v^2 é, pela Equação 17-19,

$$(v^2)_{\text{méd}} = \frac{3kT}{m} = \frac{3N_AkT}{N_Am} = \frac{3RT}{M}$$

onde $M = N_Am$ é a massa molar. A raiz quadrada de $(v^2)_{\text{méd}}$ é a **raiz quadrada da velocidade quadrática média** (rapidez rms):[1]

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{(v^2)_{\text{méd}}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \qquad 17\text{-}21$$

RAIZ QUADRADA DA VELOCIDADE QUADRÁTICA MÉDIA DE UMA MOLÉCULA

Note que a Equação 17-21 é similar à Equação 15-5 para a rapidez do som em um gás:

$$v_{\text{som}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \qquad 17\text{-}22$$

onde $\gamma = 1{,}4$ para o ar. Isto não surpreende, porque uma onda sonora no ar é uma perturbação de pressão que se propaga por colisões entre as moléculas de ar.

Exemplo 17-8 A Rapidez rms das Moléculas de um Gás

O gás oxigênio (O_2) tem uma massa molar de cerca de 32,0 g/mol, e o gás hidrogênio (H_2) tem uma massa molar de cerca de 2,00 g/mol. Calcule (*a*) a rapidez rms de uma molécula de oxigênio quando a temperatura é 300 K e (*b*) a rapidez rms de uma molécula de hidrogênio, à mesma temperatura.

SITUAÇÃO Determinamos v_{rms} usando a Equação 17-21. Por coerência de unidades, usamos $R = 8{,}314\ \text{J/(mol} \cdot \text{K)}$ e expressamos as massas molares do O_2 e do H_2 em kg/mol.

SOLUÇÃO

(*a*) 1. Substitua os valores dados na Equação 17-21:

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3\,RT}{M}} = \sqrt{\frac{3(8{,}314\ \text{J/mol} \cdot \text{K})(300\ \text{K})}{0{,}0320\ \text{kg/mol}}}$$

$$= 483{,}56\ \text{m/s} = \boxed{484\ \text{m/s}}$$

(*b*) 1. Repita o cálculo com $M = 0{,}00200$ kg/mol:

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3\,RT}{M}} = \sqrt{\frac{3(8{,}314\ \text{J/mol} \cdot \text{K})(300\ \text{K})}{0{,}00200\ \text{kg/mol}}}$$

$$= 1934\ \text{m/s} = \boxed{1{,}93 \times 10^3\ \text{m/s}}$$

CHECAGEM Como v_{rms} é inversamente proporcional a $\sqrt{M}$ (Equação 17-21) e a massa molar do hidrogênio é um dezesseis avos da do oxigênio, a rapidez rms do hidrogênio é quatro vezes a do oxigênio. Nossos cálculos concordam com isto, porque 1930/484 = 4,00.

INDO ALÉM A rapidez rms das moléculas de oxigênio é 484 m/s = 1080 mi/h, cerca de 1,4 vez a rapidez do som no ar, que é cerca de 343 m/s a 300 K.

PROBLEMA PRÁTICO 17-4 Determine a rapidez rms das moléculas de nitrogênio ($M = 28$ g/mol) a 300 K.

O TEOREMA DA EQÜIPARTIÇÃO

Vimos que a energia cinética média associada ao movimento de translação em qualquer direção é $\frac{1}{2}kT$ por molécula (Equação 17-19) ou, equivalentemente, $\frac{1}{2}RT$ por mol, onde k é a constante de Boltzmann e R é a constante universal dos gases. Se a energia de

[1] Em inglês, *root-mean-square speed*, daí a notação "rms". A tradução literal é raiz quadrada da *rapidez* quadrática média, mas mantivemos a forma velocidade quadrática média, consagrada pelo uso no Brasil, que também é correta, já que o quadrado de uma velocidade coincide com o quadrado da rapidez. (N.T.)

uma molécula, associada a este movimento em uma dimensão, é momentaneamente aumentada, digamos por uma colisão entre a molécula e um pistão em movimento durante uma compressão do gás, colisões entre essa molécula e outras moléculas do gás irá redistribuir rapidamente a energia acrescentada. Quando o gás se encontrar novamente em equilíbrio, a energia estará igualmente dividida entre as energias cinéticas de translação associadas aos movimentos nas direções x, y e z. Este partilhamento da energia em partes iguais, entre os três termos da energia cinética de translação, é um caso especial do **teorema da eqüipartição**, um resultado da mecânica estatística clássica. Cada componente de posição e de quantidade de movimento (incluindo posição angular e quantidade de movimento angular) que aparece como um termo quadrático na expressão da energia do sistema é um **grau de liberdade**. Graus de liberdade típicos são associados com a energia cinética de translação, de rotação e de vibração, e com a energia potencial de vibração. O teorema da eqüipartição da energia estabelece que:

> Quando uma substância está em equilíbrio, há uma energia média de $\frac{1}{2}kT$ por molécula, ou $(\frac{1}{2}RT$ por mol, associada a cada grau de liberdade.
>
> TEOREMA DA EQÜIPARTIÇÃO

No Capítulo 18, usamos o teorema da eqüipartição para relacionar as capacidades térmicas medidas dos gases com sua estrutura molecular.

Exemplo 17-8 Misturando os Gases — *Conceitual*

Um tanque termicamente isolado está separado, por uma divisória, em duas seções de 20 L. Uma seção de 20 L contém um mol de nitrogênio a 300 K e a outra seção de 20 L contém um mol de hélio a 320 K. A divisória é removida e os gases se misturam. Para a mistura, a pressão parcial do gás nitrogênio é menor, igual ou maior do que a pressão parcial do gás hélio? A temperatura final da mistura é menor, igual ou maior do que 310 K?

SITUAÇÃO O tanque está isolado e, portanto, a energia de seu conteúdo permanece fixa. Qualquer energia recebida pelas moléculas de nitrogênio é perdida pelas moléculas de hélio. Uma vez realizada a mistura, a temperatura de cada gás é igual à temperatura da mistura, e a temperatura de cada gás é proporcional à sua energia cinética de translação. O hélio é monoatômico e o nitrogênio é diatômico. Então, devemos esperar que a energia recebida pelas moléculas de nitrogênio se converta em energia cinética tanto de rotação quanto de translação.

SOLUÇÃO

1. Depois de feita a mistura, o volume, a temperatura e o número de moles são os mesmos para os dois gases. A lei dos gases ideais relaciona o volume, a temperatura, a pressão parcial e o número de moles de cada gás.	De acordo com a lei dos gases ideais, para cada gás a pressão parcial é completamente especificada por volume, temperatura e número de moles. Volume, temperatura e número de moles são os mesmos para os dois gases, de forma que também as pressões parciais são iguais.
2. O tanque está isolado, de modo que a energia total dos dois gases permanece constante enquanto ocorre a mistura.	O tanque está isolado termicamente, de modo que qualquer energia ganha pelas moléculas de nitrogênio é perdida pelos átomos de hélio. Isto é, o aumento médio da energia de uma molécula de nitrogênio é igual à diminuição média da energia de um átomo de hélio.
3. A temperatura final dos dois gases é a mesma temperatura da mistura.	Após a mistura, a temperatura é a mesma para os dois gases, de modo que a energia cinética média de translação é a mesma para as moléculas dos dois gases.
4. O nitrogênio é um gás diatômico e o hélio é um gás monoatômico, de modo que o nitrogênio possui mais graus de liberdade do que o hélio. Parte da energia recebida pelo nitrogênio corresponderá a um aumento da energia cinética de rotação.	A diminuição da energia cinética de translação dos átomos de hélio é igual ao aumento da energia cinética de translação MAIS o aumento da energia cinética de rotação das moléculas de nitrogênio.
5. A variação de temperatura, para cada gás, é proporcional à variação da energia cinética de translação de cada gás.	A diminuição da temperatura do gás de hélio é maior do que o aumento da temperatura do gás de nitrogênio. A temperatura final é menor do que 310 K.

CHECAGEM Se os dois gases fossem monoatômicos, a temperatura final seria igual a 310 K. Isto aconteceria mesmo se as massas atômicas das duas substâncias fossem muito diferentes.

LIVRE CAMINHO MÉDIO

A rapidez média das moléculas de um gás, em pressões normais, é de várias centenas de metros por segundo, mas se alguém se dirige a um canto da sala afastado de onde você está e abre um vidro de perfume, você só sentirá o odor após alguns minutos. A razão para esta demora é que as moléculas do perfume não viajam diretamente até você, mas sim viajam em um caminho em ziguezague, em virtude de colisões com as moléculas de ar. A distância média λ percorrida por uma molécula entre colisões é o seu **livre caminho médio**. (A razão que o leva a efetivamente sentir o perfume é a existência de correntes de ar (convecção). O tempo para uma molécula de perfume se difundir através de uma sala é da ordem de semanas.)

O livre caminho médio de uma molécula de gás está relacionado ao seu tamanho, ao tamanho das moléculas de gás da vizinhança e à massa específica do gás. Seja uma molécula de gás de raio r_1 se movendo com rapidez v em uma região de moléculas estacionárias (Figura 17-12). A molécula em movimento irá colidir com outra molécula de raio r_2 se os centros das duas moléculas chegarem a uma distância $d = r_1 + r_2$ entre eles. (Se todas as moléculas são do mesmo tipo, então d é o diâmetro molecular.) À medida que a molécula se move, ela colidirá com qualquer molécula cujo centro estiver em um círculo de raio d (Figura 17-13). Em um tempo t a molécula se move uma distância vt e colide com todas as moléculas que estão dentro do volume cilíndrico $\pi d^2 vt$. O número de moléculas neste volume é $n_V \pi d^2 vt$, onde $n_V = N/V$ é o número de moléculas por unidade de volume. (Após cada colisão a molécula muda de direção passando, portanto, a traçar um caminho em ziguezague.) O comprimento total do caminho dividido pelo número de colisões é o livre caminho médio:

$$\lambda = \frac{vt}{n_V \pi d^2 vt} = \frac{1}{n_V \pi d^2}$$

Esse cálculo do livre caminho médio supõe que todas as moléculas do gás, menos uma, estejam estacionárias, o que não é uma situação realística. Quando o movimento de todas as moléculas é levado em conta, a expressão correta para o livre caminho médio é dada por

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\, n_V \pi d^2} \qquad 17\text{-}23$$

LIVRE CAMINHO MÉDIO DE UMA MOLÉCULA

O tempo médio entre colisões é o chamado **tempo de colisão** τ. O inverso do tempo de colisão, $1/\tau$, é igual ao número médio de colisões por segundo, ou a **freqüência de colisões**. Se $v_{méd}$ é a rapidez média, então a distância média percorrida entre colisões é

$$\lambda = v_{méd}\tau \qquad 17\text{-}24$$

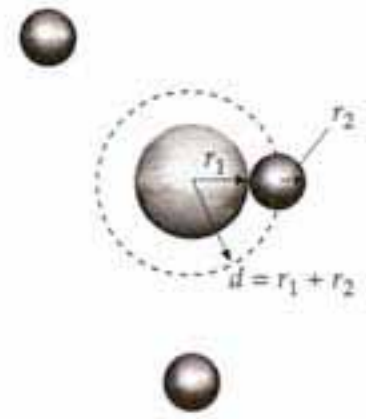


FIGURA 17-12 Modelo de uma molécula (esfera central) se movendo em um gás. A molécula de raio r_1 colidirá com qualquer molécula de raio r_2 se os seus centros estiverem afastados de uma distância $d = r_1 + r_2$, isto é, com qualquer molécula de raio r_2 cujo centro esteja em uma esfera de raio $d = r_1 + r_2$ centrada na primeira molécula.

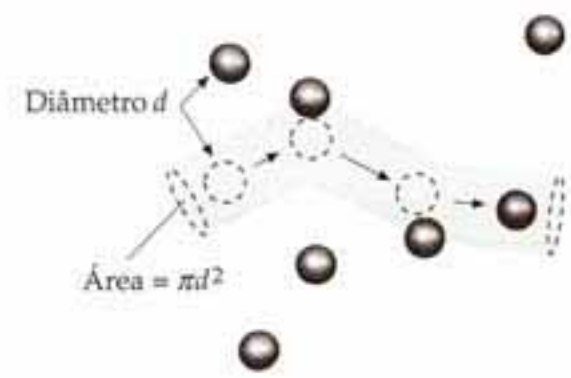


FIGURA 17-13 Modelo de uma molécula movendo-se com rapidez v em um gás de moléculas iguais a ela. O movimento é mostrado durante um tempo t. A molécula de diâmetro d colidirá com qualquer molécula igual a ela cujo centro esteja em um cilindro de volume $\pi d^2 vt$. Neste desenho, todas as colisões são supostas elásticas e todas as moléculas, menos uma, são supostas em repouso.

Exemplo 17-10 Livre Caminho Médio de uma Molécula de CO no Ar *Rico em Contexto*

O centro local de controle ambiental quer saber mais sobre o monóxido de carbono e como ele se espalha em uma sala. Você deve (*a*) calcular o livre caminho médio de uma molécula de monóxido de carbono e (*b*) estimar o tempo médio entre colisões. A massa molar do monóxido de carbono é 28,0 g/mol. Suponha a molécula de CO viajando no ar a 300 K e a 1,00 atm, e o diâmetro, tanto das moléculas de CO quanto das moléculas de ar, igual a $3{,}75 \times 10^{-10}$ m.

SITUAÇÃO (*a*) Como d é fornecido, podemos determinar λ de $\lambda = 1/(\sqrt{2}\, n_V \pi d^2)$ usando a lei dos gases ideais ($PV = NkT$) para determinar $n_V = N/V$. (*b*) Podemos estimar o tempo de colisão usando v_{rms} como a rapidez média.

SOLUÇÃO

(*a*) 1. Escreva λ em termos de n_V e do diâmetro molecular d: $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}\, n_V \pi d^2}$

2. Use a lei dos gases ideais ($PV = NkT$) para calcular $n_V = N/V$: $n_V = \dfrac{N}{V} = \dfrac{P}{kT} = \dfrac{101{,}3 \times 10^3\ \text{Pa}}{(1{,}381 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K})} = 2{,}446 \times 10^{25}\ \text{moléculas/m}^3$

3. Substitua este valor de n_V e o valor fornecido de d para calcular λ:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\, n_V \pi d^2} = \frac{1}{\sqrt{2}(2{,}451 \times 10^{25}/\text{m}^3)\pi\,(3{,}75 \times 10^{-10}\,\text{m}^2)^2}$$
$$= 6{,}5428 \times 10^{-8}\,\text{m} = \boxed{6{,}54 \times 10^{-8}\,\text{m}}$$

(*b*) 1. Escreva τ em termos do livre caminho médio λ:

$$\tau = \frac{\lambda}{v_{\text{méd}}}$$

2. Estime $v_{\text{méd}}$ calculando v_{rms}:

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3\,RT}{M}} = \sqrt{\frac{3(8{,}3145\ \text{J/[mol}\cdot\text{K]})(300\ \text{K})}{0{,}0280\ \text{kg/mol}}} = 517{,}0\ \text{m/s}$$

3. Use $v_{\text{méd}} \approx v_{\text{rms}}$ para estimar τ:

$$\tau = \frac{\lambda}{v_{\text{méd}}} \approx \frac{\lambda}{v_{\text{rms}}} = \frac{6{,}530 \times 10^{-8}\,\text{m}}{517{,}0\ \text{m/s}} = \boxed{1{,}27 \times 10^{-10}\,\text{s}}$$

CHECAGEM O livre caminho médio [o resultado do passo 3 da Parte (*a*)] é 174 vezes o diâmetro molecular $d = 3{,}75 \times 10^{-10}$ m. Se o valor calculado do livre caminho médio fosse menor do que o diâmetro molecular, então teríamos que procurar um erro em nossos cálculos.

INDO ALÉM A freqüência de colisões é de cerca de $1/\tau \approx 8 \times 10^9$ colisões por segundo. (São realmente muitas colisões por segundo.)

*A DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADES MOLECULARES

Não é de se esperar que todas as moléculas de um gás tenham a mesma rapidez. O cálculo da temperatura de um gás nos permite calcular a velocidade quadrática média (o quadrado da rapidez rms) e, portanto, a energia cinética média de translação das moléculas de um gás, mas isto não nos dá nenhuma informação sobre a *distribuição* dos valores de rapidez das moléculas. Antes de tratar este problema, discutimos a idéia de funções distribuição em geral com alguns exemplos elementares da experiência comum.

Funções distribuição Suponha que um professor tenha aplicado um teste valendo 25 pontos a uma grande turma de N estudantes. Para descrever os resultados, o professor pode informar a nota média, mas isto não completa a descrição. Todos os estudantes terem nota 12,5, por exemplo, é bem diferente de metade dos estudantes tirar 25 e a outra metade tirar zero, mesmo que a média, nos dois casos, seja a mesma. Uma descrição completa dos resultados seria informar, para todas as notas recebidas, o número de estudantes n_i que receberam uma nota s_i. Alternativamente, poderíamos informar a fração de estudantes $f_i = n_i/N$ que receberam a nota s_i. Tanto n_i quanto f_i, que são funções da variável s_i, são chamadas de **funções distribuição**. A distribuição relativa é de uso mais conveniente. A probabilidade de que um dos N estudantes, escolhido aleatoriamente, tenha recebido a nota s_i, é igual ao número total n_i de estudantes que receberam esta nota dividido por N, isto é, a probabilidade é igual a f_i. Note que

$$\sum_i f_i = \sum_i \frac{n_i}{N} = \frac{1}{N}\sum_i n_i$$

e, como $\Sigma n_i = N$,

$$\sum_i f_i = 1 \qquad \text{17-25}$$

DEFINIÇÃO: CONDIÇÃO DE NORMALIZAÇÃO

A Equação 17-25 é chamada de **condição de normalização** para as distribuições relativas.

Para determinar a nota média, somamos todas as notas e dividimos por N. Como cada nota s_i foi obtida por $n_i = Nf_i$ estudantes, isto é equivalente a

$$s_{\text{méd}} = \frac{1}{N}\sum_i n_i s_i = \sum_i s_i f_i \qquad \text{17-26}$$

* O título original desta seção é *The Distribution of Molecular Speeds*, mas mantivemos a expressão consagrada pelo uso no Brasil, entendendo-se por distribuição de velocidades a distribuição dos módulos das velocidades das moléculas, ou seja, uma distribuição de valores de rapidez, que são escalares. Naturalmente, esta nomenclatura não tem por que causar confusão; se não, não seria utilizada. (N.T.)

De forma similar, a média de qualquer função $g(s)$ é definida por

$$g(s)_{\text{méd}} = \frac{1}{N}\sum_i g(s_i)n_i = \sum_i g(s_i)f_i \qquad 17\text{-}27$$

MÉDIA DE $g(s)$

Em particular, a média do quadrado das notas é

$$(s^2)_{\text{méd}} = \frac{1}{N}\sum_i s_i^2 n_i = \sum_i s_i^2 f_i \qquad 17\text{-}28$$

onde $(s^2)_{\text{méd}}$ é a *nota quadrática média* e a raiz quadrada de $(s^2)_{\text{méd}}$ é s_{rms}, a **raiz quadrada da nota quadrática média**:

$$s_{\text{rms}} = \sqrt{(s^2)_{\text{méd}}} \qquad 17\text{-}29$$

DEFINIÇÃO: RAIZ QUADRADA DO VALOR QUADRÁTICO MÉDIO DE s

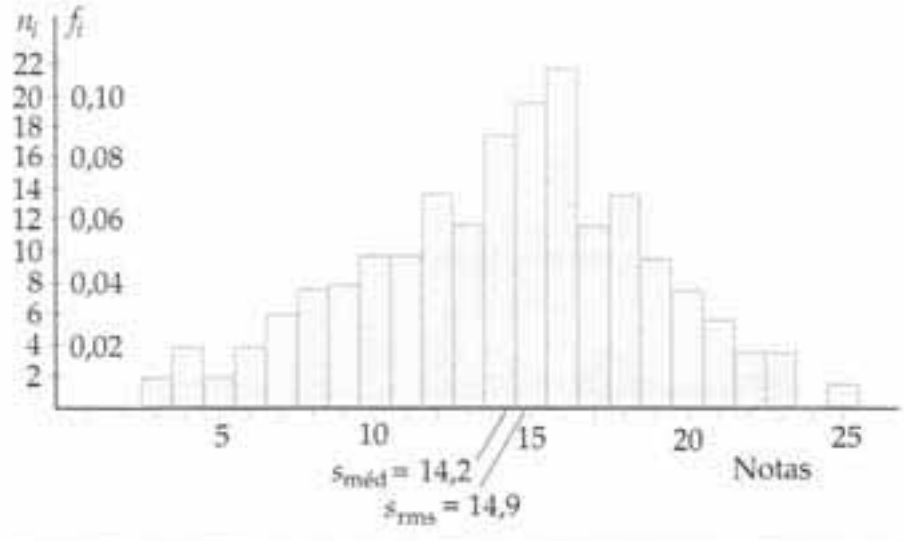


FIGURA 17-14 Histograma para um teste de 25 pontos aplicado a 200 estudantes. n_i é o número de estudantes que receberam a nota s_i e $f_i = n_i/N$ é a fração de estudantes que receberam a nota s_i. A nota mais provável é 16.

Uma possível função distribuição é mostrada na Figura 17-14. Para esta distribuição, a nota mais provável (obtida pela maior parte dos alunos) é 16, a nota média é 14,2 e a nota rms é 14,9.

Exemplo 17-11 Fazendo um Teste

Quinze estudantes fizeram um teste de 25 pontos. Suas notas foram 25, 22, 22, 20, 20, 20, 18, 18, 18, 18, 18, 15, 15, 15 e 10. Determine a nota média e a nota rms.

SITUAÇÃO A função distribuição para este problema é $n_{25} = 1$, $n_{22} = 2$, $n_{20} = 3$, $n_{18} = 5$, $n_{15} = 3$ e $n_{10} = 1$. Para determinar a nota média, usamos $s_{\text{méd}} = N^{-1}\Sigma n_i s_i$ (Equação 17-26). Para encontrar a nota rms, usamos $(s^2)_{\text{méd}} = N^{-1}\Sigma s_i^2 n_i$ (Equação 17-28) e depois tiramos a raiz quadrada.

SOLUÇÃO

1. Por definição, $s_{\text{méd}}$ é
$$s_{\text{méd}} = \frac{1}{N}\sum_i n_i s_i = \frac{1}{15}[1(25) + 2(22) + 3(20) + 5(18) + 3(15) + 1(10)] = \frac{1}{15}(274) = 18{,}27 = \boxed{18{,}3}$$

2. Para calcular s_{rms}, primeiro calcule a média de s^2:
$$(s^2)_{\text{méd}} = \frac{1}{N}\sum_i n_i s_i^2 = \frac{1}{15}[1(25)^2 + 2(22)^2 + 3(20)^2 + 5(18)^2 + 3(15)^2 + 1(10)^2] = \frac{1}{15}(5188) = 345{,}9$$

3. Tire a raiz quadrada de $(s^2)_{\text{méd}}$:
$$s_{\text{rms}} = \sqrt{(s^2)_{\text{méd}}} = \boxed{18{,}6}$$

CHECAGEM As notas média e rms diferem apenas em 1 ou 2 por cento. Além disso, o valor rms é maior do que o valor médio. O fato de que o valor rms é sempre maior do que o valor médio (ou igual) é explicado na discussão que se segue a Equação 17-34*b*.

Considere, agora, o caso de uma distribuição contínua, como a distribuição de alturas em uma população, por exemplo. Para qualquer número finito N de pessoas, o número daquelas que têm *exatamente* 2 metros de altura é zero. Se supomos que a altura possa ser determinada com a precisão que se queira, há um número infinito de alturas possíveis, de forma que a probabilidade de que alguém tenha uma particular (e exata) altura é zero. Portanto, dividimos as alturas em intervalos Δh (por exemplo, Δh pode ser 1 cm ou 0,5 cm) e perguntamos qual é a fração da população que tem alturas dentro de determinado intervalo. Para N muito grande, este número é proporcional ao tamanho do intervalo, desde que o intervalo seja suficientemente pequeno. Definimos a função distribuição $f(h)$ como a fração do número de pessoas com alturas no intervalo entre h e $h + \Delta h$. Então, para N pessoas, $Nf(h)\Delta h$ é o número de pessoas cuja altura está entre h e $h + \Delta h$. A Figura 17-15 mostra uma possível distribuição de alturas.

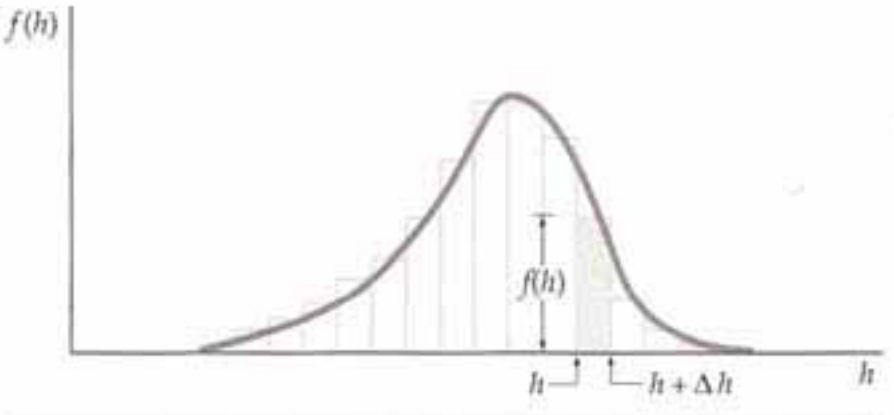


FIGURA 17-15 Uma possível função distribuição de alturas. A fração do número de alturas entre h e $h + \Delta h$ é igual à área sombreada $f(h)\,\Delta h$. O histograma pode ser aproximado por uma curva contínua, como mostrado.

A fração de pessoas que têm alturas em um dado intervalo Δh é a área $f(h)\Delta h$. Se N é muito grande, podemos escolher Δh muito pequeno, e o histograma se aproximará de uma curva contínua. Podemos, portanto, considerar a função distribuição $f(h)$ como uma função contínua, escrever o intervalo como dh e substituir as somas na Equação 17-25 a 17-28 por integrais:

$$\int f(h)\,dh = 1 \qquad 17\text{-}30$$

CONDIÇÃO DE NORMALIZAÇÃO

$$h_{\text{méd}} = \int hf(h)\,dh \qquad 17\text{-}31$$

$$[g(h)]_{\text{méd}} = \int g(h)f(h)\,dh \qquad 17\text{-}32$$

VALOR MÉDIO DE $g(h)$

onde $g(h)$ é uma função arbitrária de h. Assim,

$$(h^2)_{\text{méd}} = \int h^2 f(h)\,dh \qquad 17\text{-}33$$

A probabilidade de que uma pessoa escolhida ao acaso tenha uma altura entre h e $h + dh$ é $f(h)dh$. Uma quantidade útil que caracteriza a distribuição é o **desvio-padrão** σ, definido por

$$\sigma^2 = [(x - x_{\text{méd}})^2]_{\text{méd}} \qquad 17\text{-}34a$$

DESVIO-PADRÃO σ

Expandindo $(x - x_{\text{méd}})^2$, obtemos

$$\sigma^2 = [x^2 - 2xx_{\text{méd}} + x_{\text{méd}}^2]_{\text{méd}} = (x^2)_{\text{méd}} - 2x_{\text{méd}}x_{\text{méd}} + x_{\text{méd}}^2 = (x^2)_{\text{méd}} - x_{\text{méd}}^2$$

ou

$$\sigma^2 = (x^2)_{\text{méd}} - x_{\text{méd}}^2 \qquad 17\text{-}34b$$

O desvio-padrão é uma medida da dispersão dos valores em relação ao valor médio. Na maioria dos casos, haverá poucos valores diferindo de $x_{\text{méd}}$ por mais do que alguns múltiplos de σ. Para a distribuição familiar em forma de sino (a chamada distribuição normal), 68,3 por cento dos valores devem distar até 1σ de $x_{\text{méd}}$ (isto é, estarão entre $x_{\text{méd}} - \sigma$ e $x_{\text{méd}} + \sigma$).

No Exemplo 17-11, vimos que o valor rms era maior do que o valor médio. Esta é uma característica geral para qualquer distribuição (a não ser que os valores sejam todos idênticos, caso em que $\sigma = 0$ e $x_{\text{rms}} = x_{\text{méd}}$). Da definição de valor rms (Equação 17-29), temos $x_{\text{rms}}^2 = (x^2)_{\text{méd}}$. Substituindo $(x^2)_{\text{méd}}$ por x_{rms}^2 na Equação 17-34*b*, obtemos

$$\sigma^2 = x_{\text{rms}}^2 - x_{\text{méd}}^2$$

Como σ^2 e x_{rms} são sempre positivos, x_{rms} deve sempre ser maior do que $|x_{\text{méd}}|$.

Para a distribuição familiar em forma de sino (distribuição normal), 68,3 por cento dos valores estão no intervalo $x_{\text{méd}} \pm \sigma$, 95,5 por cento estão entre $x_{\text{méd}} \pm 2\sigma$ e 99,7 por cento estão entre $x_{\text{méd}} \pm 3\sigma$. (Esta é conhecida como a regra 68–95–99,7.)

A distribuição de Maxwell–Boltzmann A distribuição de velocidades moleculares de um gás pode ser medida diretamente com o aparato ilustrado na Figura 17-16. Na Figura 17-17, os valores medidos de rapidez são plotados para dois valores de temperatura. A quantidade $f(v)$, na Figura 17-17, é a chamada **função distribuição de velocidades de Maxwell–Boltzmann**. Em um gás de N moléculas, o número de moléculas com rapidez entre v e $v + dv$ é dN, dado por

$$dN = Nf(v)\,dv \qquad 17\text{-}35$$

A fração $dN/N = f(v)dv$, para uma faixa particular dv, está ilustrada pela região sombreada na figura. A função distribuição de velocidades de Maxwell–Boltzmann

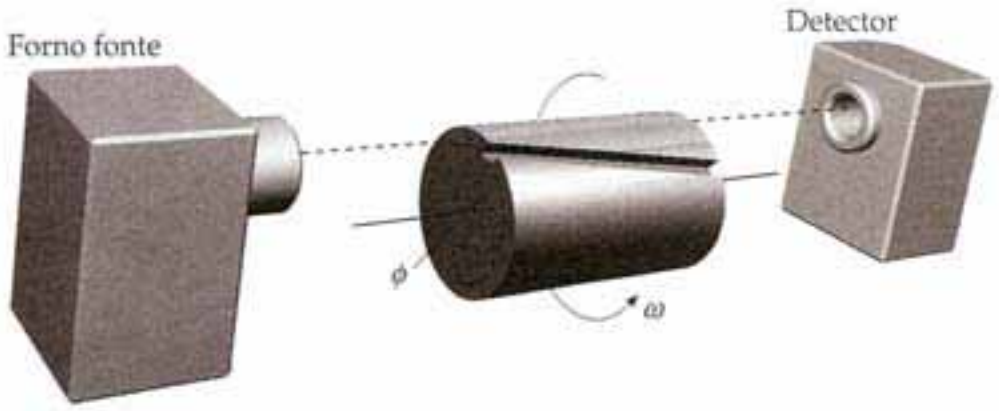


FIGURA 17-16 Diagrama esquemático de um aparato para a determinação da distribuição de velocidades das moléculas de um gás. A substância é vaporizada em um forno e as moléculas de vapor podem escapar, para dentro de uma câmara de vácuo, através de um orifício na parede do forno. As moléculas são colimadas em um feixe estreito por uma série de fendas (não mostradas). O feixe é direcionado para um detector que conta o número de moléculas incidentes sobre ele em um dado período de tempo. Um cilindro giratório interrompe a maior parte do feixe. Pequenas fendas no cilindro (apenas uma delas é representada aqui) permitem a passagem das moléculas que possuem uma rapidez situada em uma pequena faixa, determinada pela rapidez angular do cilindro. A contagem do número de moléculas que alcançam o detector para cada um de um grande número de valores de rapidez angular fornece uma medida do número de moléculas em cada faixa de rapidez.

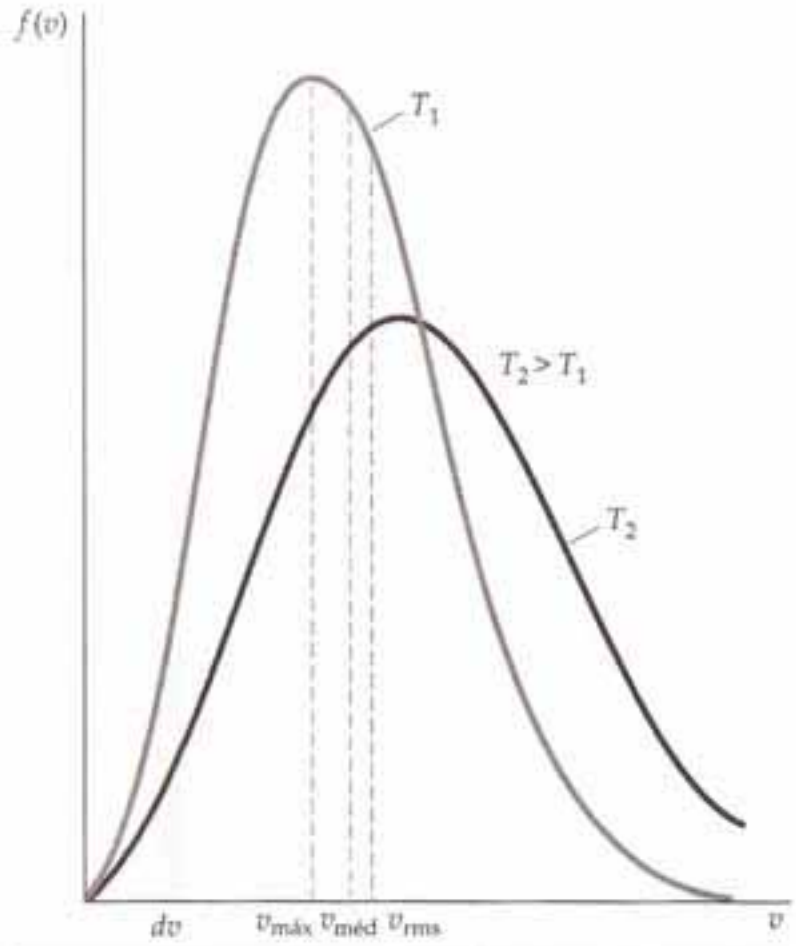


FIGURA 17-17 Distribuição de velocidades moleculares de um gás para duas temperaturas, T_1 e $T_2 > T_1$. A área sombreada $f(v)dv$ é igual à fração do número de moléculas com rapidez em uma estreita faixa dv. A rapidez média, $v_{méd}$, e a rapidez rms, v_{rms}, são ambas ligeiramente maiores do que a rapidez mais provável, $v_{máx}$.

pode ser deduzida usando-se a mecânica estatística. O resultado é

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2kT)} \qquad 17\text{-}36$$

FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADES DE MAXWELL–BOLTZMANN

A rapidez mais provável, $v_{máx}$, aquela para a qual $f(v)$ é máximo, é dada por

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{2\,kT}{m}} = \sqrt{\frac{2\,RT}{M}} \qquad 17\text{-}37$$

RAPIDEZ MAIS PROVÁVEL

A rapidez rms é dada por $v_{rms} = \sqrt{3RT/M}$ (Equação 17-21). Comparando a Equação 17-37 com a Equação 17-21, vemos que a rapidez mais provável é ligeiramente menor do que a rapidez rms.

Exemplo 17-12 Usando a Distribuição de Maxwell–Boltzmann

Calcule a velocidade quadrática média (o valor médio de v^2) para as moléculas de um gás, usando a função distribuição de Maxwell–Boltzmann.

SITUAÇÃO O valor médio de v^2 é calculado de $(h^2)_{méd} = \int h^2 f(h)dh$ (Equação 17-33), com v no lugar de h e $f(v)$ dado pela Equação 17-36.

SOLUÇÃO

1. Por definição, $(v^2)_{méd}$ é
$$(v^2)_{méd} = \int_0^\infty v^2 f(v)\,dv$$

2. Use a Equação 17-36 para $f(v)$:
$$(v^2)_{méd} = \int_0^\infty v^2 \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2kT)}\,dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^4 e^{-mv^2/(2kT)}\,dv$$

3. A integral do passo 2 pode ser encontrada em tabelas de integrais: $$\int_0^\infty v^4 e^{-mv^2/(2kT)}\,dv = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{5/2}$$

4. Use este resultado para calcular $(v^2)_{méd}$: $$(v^2)_{méd} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}\frac{3}{8}\sqrt{\pi}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{5/2} = \boxed{\frac{3kT}{m}}$$

CHECAGEM Nosso resultado concorda com $v_{rms} = \sqrt{3kT/m}$ da Equação 17-21.

No Exemplo 17-8, vimos que a rapidez rms das moléculas de hidrogênio é de cerca de 1,93 km/s. Isto é cerca de 17 por cento da rapidez de escape da superfície da Terra, que vimos, na Seção 11-3, que vale 11,2 km/s. Então, como é que não existe hidrogênio livre na atmosfera da Terra? Como podemos ver, na Figura 17-17, uma fração considerável das moléculas de um gás em equilíbrio possui rapidez maior do que a rapidez rms. Quando a rapidez rms da molécula de um dado gás vale de 15 a 20 por cento da rapidez de escape do planeta, um número suficiente de moléculas possui rapidez maior do que a rapidez de escape, de modo que a maior parte do gás não permanece na atmosfera do planeta por muito tempo, antes de escapar. Assim, não há praticamente nenhum gás hidrogênio na atmosfera da Terra. A rapidez rms das moléculas de oxigênio, por outro lado, é cerca de um quarto daquela das moléculas de hidrogênio, o que que equivale a apenas cerca de 4 por cento da rapidez de escape da superfície da Terra. Portanto, apenas uma fração desprezível de moléculas de oxigênio possui rapidez maior do que a rapidez de escape, e o oxigênio permanece na atmosfera da Terra.

CHECAGEM CONCEITUAL 17-3

Como qualquer físico de baixas temperaturas sabe, o nitrogênio líquido é muito mais barato do que o hélio líquido. Uma razão para isto é que, enquanto o nitrogênio é o constituinte mais abundante da atmosfera, apenas quantidades de hélio muito pequenas são encontradas na atmosfera. (Encontra-se hélio em depósitos de gás natural.) Por que a atmosfera contém apenas quantidades muito pequenas de hélio?

A distribuição de energias A distribuição de velocidades de Maxwell–Boltzmann, como dada pela Equação 17-36, também pode ser escrita como uma distribuição de energias cinéticas de translação. Escrevemos o número de moléculas com energia cinética de translação entre E e $E + dE$ como

$$dN = NF(E)\,dE$$

onde $F(E)$ é a função distribuição de energias. Este número será o mesmo fornecido pela Equação 17-36, com a energia E relacionada com a rapidez v por $E = \frac{1}{2}mv^2$. Então,

$$dE = mv\,dv$$

e

$$Nf(v)\,dv = NF(E)\,dE$$

Podemos escrever

$$f(v)\,dv = Cv^2 e^{-mv^2/(2kT)}\,dv = Cve^{-E/(kT)}v\,dv = C\left(\frac{2E}{m}\right)^{1/2} e^{-E/(kT)}\frac{dE}{m}$$

onde $C = (4/\sqrt{\pi})[m/(2kT)]^{3/2}$ (da Equação 17-36). A função distribuição de energias cinéticas translacionais $F(E)$ é, portanto, dada por

$$F(E) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}\left(\frac{2}{m}\right)^{1/2}\frac{1}{m}E^{1/2}e^{-E/(kT)}$$

Simplificando, obtemos a **função distribuição de energias de Maxwell–Boltzmann**:

$$F(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} E^{1/2}e^{-E/(kT)} \qquad 17\text{-}38$$

FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIAS DE MAXWELL–BOLTZMANN

Na linguagem da mecânica estatística, a distribuição de energias é vista como o produto de dois fatores: um fator é a chamada **densidade de estados** e é proporcional a $\sqrt{E}$, o outro fator é a probabilidade do estado estar ocupado, que é $e^{-E/(kT)}$, chamada de **fator de Boltzmann.**

Veja o **Tutorial Matemático** *para mais informações sobre*
Cálculo Diferencial

Física em Foco

Termômetros Moleculares

Termômetros moleculares mostram variações de temperatura através de alterações que ocorrem com as próprias moléculas. Eles podem ser simples e baratos e têm sido alvo de intensivas pesquisas recentes.

Anéis indicadores de humor usam cristais líquidos* que mudam de cor com a mudança da temperatura do dedo de quem os usa. Muitos cristais líquidos possuem propriedades *termocrômicas* — eles mudam de cor com a temperatura. Esses cristais líquidos são feitos de moléculas retorcidas. Com a variação da temperatura, cada molécula se torna mais ou menos retorcida, o que altera a forma como o cristal líquido absorve ou reflete a luz. Alguns cristais líquidos são sensíveis a variações de até 0,1°C.† As mudanças de cor de cada cristal líquido em particular ocorrem em uma pequena faixa de temperaturas, normalmente menor do que 7°C. No entanto, diferentes cristais líquidos podem ser agrupados de forma compartimentada, para permitir uma sensibilidade em uma faixa de temperaturas de −30°C até 120°C. Este tipo de termômetro é usado em aquários, e também como termômetro clínico.‡ Termômetros de cristal líquido permitem monitoramento em tempo real§ e são uma boa opção quando o custo é um fator importante.¶

Termômetros fluorescentes podem ser úteis no monitoramento da variação da temperatura de pequeníssimos chips de computador, durante o processo de fabricação, assim como no monitoramento de variações da temperatura de automóveis durante a fabricação e testes aerodinâmicos.§ Quando esses termômetros são expostos à luz ultravioleta, a maior parte deles responde por fluorescência (emissão de luz) em dois comprimentos de onda. A razão entre estes dois comprimentos de onda está relacionada à temperatura. Um termômetro fluorescente desenvolvido recentemente é preciso em até 0,05°C e indica temperaturas variando entre 25°C e 140°C,¶ através das mudanças da razão entre os comprimentos de onda emitidos. Com a variação do comprimento de onda, a cor visível muda com a temperatura.

Mas há ocasiões em que termômetros moleculares devem medir temperaturas maiores do que 150°C. Neste caso, os corpos submetidos à medição podem ser revestidos com um pó fosforescente, que emite um rápido brilho quando excitado por luz. O tempo de duração do brilho depende da temperatura do corpo revestido. A duração da fosforescência tem sido usada pela indústria do aço para determinar se o aço está na temperatura correta para a formação das ligas desejadas. Termometria por fosforescência permite medidas de 700°C no aço, com 3°C de erro.** A termometria convencional apresentava erros de até 40°C. A precisão pode economizar, para a indústria do aço, até 70 milhões de dólares por ano.

Termômetros em tempo real não podem dizer o que ocorreu no passado. A medida da maior temperatura de cozimento da carne é importante para a segurança alimentar. A temperatura máxima de cozimento determina se infecções alimentares podem ocorrer. Infelizmente, não se pode medir esta temperatura depois que a carne já esfriou. Mas a proporção de ocorrência de três grandes moléculas na carne bovina permite a determinação da temperatura máxima de cozimento com uma precisão de 2°C,†† mesmo se a carne foi congelada e descongelada após o cozimento. Breve será possível dizer se carnes pré-cozidas entregues em hospitais e escolas passaram por uma temperatura máxima de cozimento segura antes do resfriamento.

Devido ao grande número de aplicações, desde o monitoramento barato da temperatura até a determinação de temperaturas prévias e o monitoramento industrial em tempo real, a termometria molecular tem um futuro brilhante.

---

* James, B. G., "Heat Sensitive Novelty Device," *U.S. Patent 3,802,945*, Apr. 9, 1974.

† White, M. A., and LeBlanc, M., "Thermochromism in Commercial Products," *Journal of Chemical Education*, Sept. 1999, Vol. 76, 1201–1205.

‡ Krause, B. F., "Accuracy and Response Time Comparisons of Four Skin Temperature-Monitoring Devices," *Nurse Anesthesia*, June 1993, Vol. 4, 55–61.

§ Dart, R. C., et al., "Liquid Crystal Thermometry for Continuous Temperature Measurement in Emergency Department Patients," *Annals of Emergency Medicine*, Dec. 1985, Vol. 1 1188–1190.

¶ Manandhar, N., et al., "Liquid Crystal Thermometry for the Detection of Neonatal Hypothermia in Nepal," *Journal of Tropical Pediatrics*, Feb. 1998, Vol. 55, 15+.

§ Chandrasekharan, N., and Kelly, L., "Fluorescent Molecular Thermometers Based on Monomer/Exciplex Interconversion," *The Spectrum*, Sept. 2002, Vol. 15, No. 3, 1–7.

¶ Hanson, T., "Laboratory Scientists Develop Novel Fluorescent Thermometer," *Los Alamos National Laboratory News*, Sept. 4, 2004. http://www.lanl.gov/news index.php?fuseaction=nb.story&story_id=5007&nb_date=2004-04-15 as of July 2006.

** "Thermometry for the Steel Industry," *Thermographic Phosphor Sensing Applications*, Oak Ridge National Laboratory. http://www.ornl.gov/sci/phosphors/galv.htm as of July 200

†† Miller, D. R., and Keeton, J. T., "Verification of Safe Cooking Endpoints in Beef by Multiple Antigen Elisa," *2004 Beef Cattle Research In Texas Publication*. http animalscience.tamu.edu/ANSC/beef/bcrt/2004/miller_3.pdf as of July 2006.

Resumo

	TÓPICO	EQUAÇÕES RELEVANTES E OBSERVAÇÕES	
1.	**Escalas Centígrada e Fahrenheit**	Na escala centígrada, o ponto de fusão do gelo é definido como 0°C e o ponto de vaporização da água é 100°C. Na escala Fahrenheit, o ponto de fusão do gelo é 32°F e o ponto de vaporização da água é 212°F. As temperaturas das escalas Fahrenheit e centígrada relacionam-se por $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32°)$	17-2
2.	**Termômetros de Gás**	Os termômetros de gás têm a propriedade de concordarem todos entre si na medida de qualquer temperatura, desde que a massa específica do gás seja muito baixa. A temperatura de gás ideal T (em kelvins) é definida por $T = \frac{P}{P_3} T_3$ onde P é a pressão observada do gás no termômetro, P_3 é a pressão quando o termômetro está imerso em um banho de água–gelo–vapor em seu ponto triplo e T_3 = 273,16 K (a temperatura de ponto triplo).	17-4
3.	**Escala Celsius**	A temperatura Celsius t_C se relaciona com a temperatura de gás ideal T em kelvins por $t_C = T + 273{,}15\ \text{K}$	17-5
4.	**Gás Ideal**	Para pequenas massas específicas, todos os gases obedecem à lei dos gases ideais.	
	Equação de estado	$PV = nRT$	17-13
	Constante universal dos gases	$R = N_A k = 8{,}314\ \text{J/(mol} \cdot \text{K)}$ $= 0{,}08206\ \text{L} \cdot \text{atm/(mol} \cdot \text{K)}$	17-12
	Constante de Boltzmann	$k = 1{,}381 \times 10^{-23}\ \text{J/K} = 8{,}617 \times 10^{-5}\ \text{eV/K}$	17-8
	Número de Avogadro	$N_A = 6{,}022 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$	17-9
	Equação para uma quantidade fixa de gás	Uma forma da lei dos gases ideais útil para a solução de problemas que envolvem uma quantidade fixa de gás é $\frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P_1 V_1}{T_1}$	17-14
5.	**Teoria Cinética dos Gases**		
	Interpretação molecular da temperatura	A temperatura absoluta T é uma medida da energia cinética média de translação de uma molécula.	
	Teorema da eqüipartição	Quando um sistema está em equilíbrio, há uma energia média de $\frac{1}{2}kT$ por molécula ($\frac{1}{2}RT$ por mol) associada a cada grau de liberdade.	
	Energia cinética média	Para um gás ideal, a energia cinética média de translação de uma molécula é $K_{\text{trans méd}} = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{\text{méd}} = \frac{3}{2}kT$	17-19
	Energia cinética total de translação	A energia cinética total de translação de n moles de um gás contendo N moléculas é dada por $K_{\text{trans}} = N\left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{\text{méd}} = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}nRT$	17-20
	Rapidez rms das moléculas	A rapidez rms de uma molécula de um gás está relacionada com a temperatura absoluta por $v_{\text{rms}} = \sqrt{(v^2)_{\text{méd}}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ onde m é a massa da molécula e M é a massa molar.	17-21
	Livre caminho médio	O livre caminho médio λ de uma molécula está relacionado com o seu diâmetro d e com o número de moléculas por unidade de volume n_V por $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\, n_V \pi d^2}$	17-23

TÓPICO	EQUAÇÕES RELEVANTES E OBSERVAÇÕES	
*6. **Distribuição de Velocidades de Maxwell–Boltzmann**	$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2kT)}$	17-36
Distribuição de Energias de Maxwell–Boltzmann	$F(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} E^{1/2} e^{-E/(kT)}$	17-38

Respostas das Checagens Conceituais

17-1 Há mais ar no quarto do Antônio.

17-2 Diminui.

17-3 A rapidez rms do hélio é cerca de 12 por cento da rapidez de escape da superfície da Terra. Assim, o número de moléculas de hélio com rapidez acima da rapidez de escape é suficiente para que o hélio vá, lentamente, escapando da Terra.

Respostas dos Problemas Práticos

17-1 (*a*) 20°C, (*b*) −40°F

17-2 (*a*) $n = 4{,}47 \times 10^{-5}$ mol, (*b*) $N = 2{,}69 \times 10^{19}$ moléculas

17-3 $n = 0{,}0804$ mol

17-4 $5{,}2 \times 10^2$ m/s

Problemas

Em alguns problemas, você recebe mais dados do que necessita; em alguns outros, você deve acrescentar dados de seus conhecimentos gerais, fontes externas ou estimativas bem fundamentadas.

Interprete como significativos todos os algarismos de valores numéricos que possuem zeros em seqüência sem vírgulas decimais.

• Um só conceito, um só passo, relativamente simples
•• Nível intermediário, pode requerer síntese de conceitos
••• Desafiante, para estudantes avançados
Problemas consecutivos sombreados são problemas pareados.

PROBLEMAS CONCEITUAIS

1 • Verdadeiro ou falso:
(*a*) A lei zero da termodinâmica afirma que dois corpos em equilíbrio térmico entre si devem estar em equilíbrio térmico com um terceiro corpo.
(*b*) As escalas de temperatura Fahrenheit e Celsius diferem apenas na escolha da temperatura do **ponto de congelamento**.
(*c*) O grau Celsius e o kelvin têm o mesmo tamanho.

2 • Como é que você pode determinar se dois corpos estão em equilíbrio térmico entre si se colocá-los em contato físico um com o outro pode ter efeitos indesejáveis? (Por exemplo, se você coloca um pedaço de sódio em contato com água pode ocorrer uma violenta reação química.)

3 • "Ontem, quando eu acordei, fazia 20°F em meu quarto", disse Mateus para o seu velho amigo Matias. "Isto não é nada", respondeu Matias. "No meu quarto fazia −5,0°C." Quem tinha o quarto mais frio, Mateus ou Matias?

4 • Dois recipientes idênticos contêm gases ideais diferentes às mesmas pressão e temperatura. Segue-se daí que (*a*) o número de moléculas de gás é o mesmo nos dois recipientes, (*b*) a massa total de gás é a mesma nos dois recipientes, (*c*) a rapidez média das moléculas de gás é a mesma nos dois recipientes, (*d*) nenhuma das respostas anteriores.

5 • A Figura 17-18 mostra um gráfico de volume *V versus* temperatura absoluta *T* para um processo que leva uma quantidade fixa de um gás ideal do ponto A para o ponto B. O que acontece com a pressão do gás durante este processo?

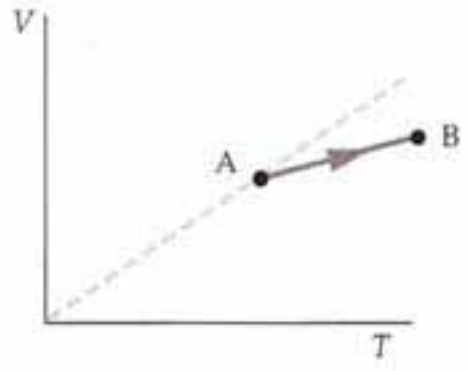


FIGURA 17-18
Problema 5

6 • A Figura 17-19 mostra um gráfico de pressão *P versus* temperatura absoluta *T* para um processo que leva uma amostra de um gás ideal do ponto A para o ponto B. O que acontece com o volume do gás durante este processo?

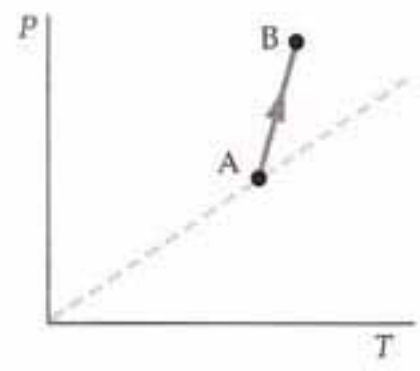


FIGURA 17-19
Problema 6

7 • Se um recipiente contém quantidades iguais, em massa, de hélio e de argônio, qual das seguintes afirmativas é verdadeira?
(*a*) A pressão parcial exercida por cada um dos dois gases sobre as paredes do recipiente é a mesma.
(*b*) A rapidez média de um átomo de hélio é a mesma que a de um átomo de argônio.
(*c*) O número de átomos de hélio e de átomos de argônio no recipiente é o mesmo.
(*d*) Nenhuma das anteriores.

8 • De qual fator deve aumentar a temperatura absoluta de um gás para que a rapidez rms de suas moléculas seja dobrada?

9 • Dois gases diferentes estão à mesma temperatura. O que pode ser dito sobre a energia cinética média de translação das moléculas de cada gás? O que pode ser dito sobre a rapidez rms das moléculas de cada gás?

10 • Um recipiente contém uma mistura de hélio (He) e metano (CH_4). A razão entre a rapidez rms dos átomos de He e a das moléculas de CH_4 é (*a*) 1, (*b*) 2, (*c*) 4, (*d*) 16.

11 • Verdadeiro ou falso: Se a pressão de uma quantidade fixa de gás aumenta, então a temperatura do gás deve aumentar.

12 • Por que as escalas Celsius e Fahrenheit podem ser mais convenientes do que a escala absoluta, para propósitos ordinários, não-científicos?

13 • Um astrônomo afirma que a temperatura no centro do Sol é de cerca de 10^7 graus. Você acha que esta temperatura está em kelvins, graus Celsius, ou isto não importa?

14 • Você tem uma quantidade fixa de gás ideal em um recipiente que se expande para manter a pressão constante. Se você dobra a temperatura absoluta do gás, a rapidez média das moléculas (*a*) permanece constante, (*b*) dobra, (*c*) quadruplica, (*d*) aumenta de um fator $\sqrt{2}$.

15 • Você comprime um gás ideal até a metade de seu volume inicial, também reduzindo à metade sua temperatura absoluta. Durante este processo, a pressão do gás (*a*) é reduzida à metade, (*b*) permanece constante, (*c*) dobra, (*d*) quadruplica.

16 • A energia cinética média de translação das moléculas de um gás dependem (*a*) do número de moles e da temperatura, (*b*) da pressão e da temperatura, (*c*) apenas da pressão, (*d*) apenas da temperatura.

17 •• Qual é a maior rapidez, a rapidez do som em um gás ou a rapidez rms das moléculas do gás? Justifique sua resposta, usando as fórmulas apropriadas, e explique por que sua resposta é intuitivamente plausível.

18 •• Você aumenta a temperatura de um gás mantendo fixo o seu volume. Explique, em termos de movimento molecular, por que a pressão do gás, sobre as paredes do recipiente, aumenta.

19 •• Você comprime um gás mantendo-o a uma temperatura fixa (talvez mergulhando o recipiente em água fria). Explique, em termos de movimento molecular, por que a pressão do gás, sobre as paredes do recipiente, aumenta.

20 •• O oxigênio possui uma massa molar de 32 g/mol, e o nitrogênio possui uma massa molar de 28 g/mol. As moléculas de oxigênio e de nitrogênio em uma sala possuem:
(*a*) a mesma energia cinética média translacional, mas as moléculas de oxigênio possuem uma rapidez média maior do que as moléculas de nitrogênio.
(*b*) a mesma energia cinética média translacional, mas as moléculas de oxigênio possuem uma rapidez média menor do que as moléculas de nitrogênio.
(*c*) a mesma energia cinética média translacional e a mesma rapidez média.
(*d*) a mesma rapidez média, mas as moléculas de oxigênio possuem uma energia cinética média translacional maior do que as moléculas de nitrogênio.
(*e*) a mesma rapidez média, mas as moléculas de oxigênio possuem uma energia cinética média translacional menor do que as moléculas de nitrogênio.
(*f*) Nenhuma das afirmativas anteriores.

21 •• O nitrogênio líquido é relativamente barato, enquanto o hélio líquido é relativamente caro. Uma razão para a diferença de preços é que, enquanto o nitrogênio é o constituinte mais abundante da atmosfera, apenas pequenos traços de hélio podem ser encontrados na atmosfera. Use idéias deste capítulo para explicar por que apenas pequenos traços de hélio podem ser encontrados na atmosfera.

ESTIMATIVA E APROXIMAÇÃO

22 • Estime o número total de moléculas de ar em sua sala de aula.

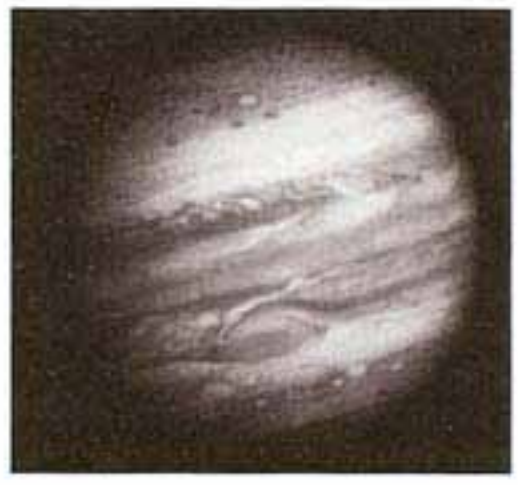
23 •• Estime a massa específica do ar seco no nível do mar em um dia quente de verão.

24 •• Um tubo de ensaio arrolhado, com 10,0 mL de volume, possui 1,00 mL de água em seu fundo. A água tem uma temperatura de 100°C e está inicialmente a uma pressão de 1,00 atm. O tubo de ensaio é colocado sobre uma chama até que a água tenha evaporado totalmente. Estime a pressão final dentro do tubo de ensaio.

25 •• No Capítulo 11, vimos que a rapidez de escape da superfície de um planeta de raio R é $v_e = \sqrt{2gR}$, onde g é a aceleração da gravidade na superfície do planeta. Se a rapidez rms de um gás é maior do que cerca de 15 ou 20 por cento da rapidez de escape de um planeta, virtualmente todas as moléculas do gás escaparão da atmosfera do planeta.
(*a*) Para qual temperatura a v_{rms} do O_2 é igual a 15 por cento da rapidez de escape da Terra?
(*b*) Para qual temperatura a v_{rms} do H_2 é igual a 15 por cento da rapidez de escape da Terra?
(*c*) As temperaturas na atmosfera superior atingem 1000 K. Como é que isto ajuda a dar conta da baixa abundância de hidrogênio na atmosfera terrestre?
(*d*) Calcule as temperaturas para as quais os valores de rapidez média do O_2 e do H_2 são iguais a 15 por cento da rapidez de escape na superfície da Lua, onde g tem cerca de um sexto de seu valor na Terra e R = 1738 km. Como é que isto dá conta da ausência de atmosfera na Lua?

26 •• A rapidez de escape de moléculas gasosas na atmosfera de Marte é 5,0 km/s e a temperatura da superfície de Marte é tipicamente 0°C. Calcule a rapidez rms de (*a*) H_2, (*b*) O_2 e (*c*) CO_2 nesta temperatura. (*d*)H_2, O_2 e CO_2 são passíveis de serem encontrados na atmosfera de Marte?

27 •• A rapidez de escape de moléculas gasosas na atmosfera de Júpiter é 60 km/s e a temperatura da superfície de Júpiter é tipicamente −150°C. Calcule a rapidez rms de (*a*) H_2, (*b*) O_2 e (*c*) CO_2 nesta temperatura. (*d*)H_2, O_2 e CO_2 são passíveis de serem encontrados na atmosfera de Júpiter?



Júpiter visto de cerca de doze milhões de milhas (19.311.600 km). Como a rapidez de escape na superfície de Júpiter é de cerca de 60 km/s, Júpiter retém facilmente o hidrogênio em sua atmosfera. (*Jet Propulsion Laboratory/NASA.*)

28 •• Estime a pressão média sobre a parede de uma cancha de *paddle* devida às colisões da bola durante uma partida. Use valores razoáveis para a massa da bola, sua rapidez típica e as dimensões da cancha. A pressão média exercida pela bola é significativa em comparação com a exercida pelo ar?

29 •• Em uma primeira aproximação, o Sol consiste em um gás com números iguais de prótons e elétrons. (As massas destas partículas podem ser encontradas no Apêndice B.) A temperatura no centro do Sol é de cerca de 1×10^7 K, e a massa específica do Sol é de cerca de 1×10^5 kg/m^3. Como a temperatura é tão alta, os prótons e os elétrons são partículas separadas (em vez de estarem ligados para formar átomos de hidrogênio). (*a*) Estime a pressão no centro do Sol. (*b*) Estime os valores de rapidez rms para os prótons e os elétrons no centro do Sol.

30 •• **RICO EM CONTEXTO, APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** Você está projetando uma câmara de vácuo para a fabricação de revestimentos

refletores. Dentro da câmara, uma pequena amostra de metal será vaporizada para que seus átomos viajem em linha reta (os efeitos da gravidade são desprezíveis durante o curto tempo de vôo) até uma superfície onde eles se depositam para formar um filme muito fino. A amostra de metal está a 30 cm da superfície sobre a qual seus átomos se depositarão. Quão baixa deve ser a pressão dentro da câmara, para que os átomos de metal colidam com moléculas de ar apenas raramente antes de atingirem a superfície?

31 ••• **APLICAÇÃO BIOLÓGICA** Em condições normais de respiração, aproximadamente 5 por cento de cada expiração constitui-se de dióxido de carbono. Com esta informação, e desprezando qualquer diferença entre os conteúdos de água e de vapor, estime a diferença típica de massa entre uma inspiração e uma expiração.

ESCALAS DE TEMPERATURA

32 • Determinada cera de esqui deve ser usada entre −12 e −7,0°C. Qual é esta faixa de temperaturas na escala Fahrenheit?

33 • O ponto de fusão do ouro é 1945,4°F. Expresse esta temperatura em graus Celsius.

34 • Um boletim meteorológico informa que se espera uma queda de temperatura de 15,0°C para as próximas quatro horas. De quantos graus da escala Fahrenheit cairá a temperatura?

35 • O comprimento da coluna de mercúrio de um termômetro é 4,00 cm quando o termômetro está imerso em água com gelo à pressão de 1 atm e 24,0 cm quando o termômetro está imerso em água fervente à pressão de 1 atm. Suponha o comprimento da coluna de mercúrio variando linearmente com a temperatura. (*a*) Esboce um gráfico do comprimento da coluna de mercúrio *versus* temperatura (em graus Celsius). (*b*) Qual é o comprimento da coluna à temperatura ambiente (22,0°C)? (*c*) Se a coluna de mercúrio tem um comprimento de 25,4 cm quando o termômetro está mergulhado em uma solução química, qual é a temperatura da solução?

36 • A temperatura do interior do Sol é de cerca de 1×10^7 K. Quanto vale esta temperatura, em graus (*a*) Celsius, (*b*) Fahrenheit?

37 • O ponto de ebulição do nitrogênio, N_2, é 77,35 K. Expresse esta temperatura em graus Fahrenheit.

38 • A pressão de um termômetro de gás a volume constante é 0,400 atm no ponto de gelo e 0,546 atm no ponto de vapor. (*a*) Esboce um gráfico da pressão *versus* temperatura Celsius para este termômetro. (*b*) Quando a pressão é 0,100 atm, qual é a temperatura? (*c*) Qual é a pressão a 444,6°C (o ponto de ebulição do enxofre)?

39 • Um termômetro de gás a volume constante indica 50,0 torr no ponto triplo da água. (*a*) Esboce um gráfico da pressão *versus* temperatura absoluta para este termômetro. (*b*) Qual será a pressão quando o termômetro medir uma temperatura de 300 K? (*c*) A qual temperatura de gás ideal corresponde uma pressão de 678 torr?

40 • Um termômetro de gás a volume constante tem uma pressão de 50,0 torr quando indica uma temperatura de 373 K. (*a*) Esboce um gráfico da pressão *versus* temperatura absoluta para este termômetro. (*b*) Qual é a sua pressão de ponto triplo, P_3? (*c*) A qual temperatura corresponde uma pressão de 0,175 torr?

41 • Para qual temperatura as escalas Fahrenheit e Celsius indicam a mesma leitura?

42 • Sódio funde a 371 K. Qual é o ponto de fusão do sódio nas escalas Celsius e Fahrenheit de temperatura?

43 • O ponto de ebulição do oxigênio, a 1,00 atm, é 90,2 K. Qual é o ponto de ebulição do oxigênio a 1,00 atm nas escalas Celsius e Fahrenheit?

44 •• Na escala de temperatura Réaumur, o ponto de fusão do gelo é 0°R e o ponto de ebulição da água é 80°R. Deduza expressões para converter temperaturas da escala Réaumur para as escalas Celsius e Fahrenheit.

45 ••• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** Um termistor é um dispositivo de estado sólido largamente usado em uma variedade de aplicações em engenharia. Sua principal característica é que sua resistência elétrica varia muito com a temperatura. Sua dependência com a temperatura é dada aproximadamente por $R = R_0 e^{B/T}$, com R em ohms (Ω), T em kelvins e R_0 e B sendo constantes que podem ser determinadas medindo-se R em pontos de calibração como o ponto de gelo e o ponto de vapor. (*a*) Se $R = 7360\ \Omega$ no ponto de gelo e 153 Ω no ponto de vapor, determine R_0 e B. (*b*) Qual é a resistência do termistor em $t = 98{,}6$°F? (*c*) Qual é a taxa de variação da resistência com a temperatura (dR/dt) no ponto de gelo e no ponto de vapor? (*d*) Para quais temperaturas o termistor é mais sensível?

A LEI DOS GASES IDEAIS

46 • Um gás ideal, em um cilindro com um pistão encaixado (Figura 17-20), é mantido à pressão constante. Se a temperatura do gás aumenta de 50°C para 100°C, de que fator varia o volume?

FIGURA 17-20 Problemas 46 e 71

47 • Um recipiente de 10,0 L contém gás à temperatura de 0,00°C e à pressão de 4,00 atm. Quantos moles de gás há no recipiente? Quantas moléculas?

48 •• Uma baixa pressão de $1{,}00 \times 10^{-8}$ torr pode ser atingida usando-se uma bomba de difusão a óleo. Quantas moléculas há em 1,00 cm^3 de um gás nesta pressão, se sua temperatura é 300 K?

49 •• Você copia o seguinte parágrafo de um livro de física marciano: "1 *snorf* de um gás ideal ocupa um volume de 1,35 *zak*. À temperatura de 22 *glips*, o gás tem uma pressão de 12,5 *klads*. A uma temperatura de −10 *glips*, o mesmo gás tem agora uma pressão de 8,7 *klads*." Determine a temperatura do zero absoluto em *glips*.

50 •• Uma motorista enche os pneus do carro até uma pressão manométrica de 180 kPa em um dia em que a temperatura é de −8,0°C. Quando ela chega ao destino, a pressão dos pneus aumentou para 245 kPa. Qual é a temperatura dos pneus supondo (*a*) que os pneus não se expandiram, ou (*b*) que os pneus se expandiram de modo que o volume do ar neles contido aumentou em 7 por cento?

51 •• Uma sala tem 6,0 m por 5,0 m por 3,0 m. (*a*) Se a pressão do ar na sala é 1,0 atm e a temperatura é 300 K, determine o número de moles de ar na sala. (*b*) Se a temperatura aumenta de 5,0 K e a pressão permanece constante, quantos moles de ar deixam a sala?

52 •• Imagine que 10,0 g de hélio líquido, inicialmente a 4,20 K, evaporem para dentro de um balão vazio que é mantido à pressão de 1,00 atm. Qual é o volume do balão a (*a*) 25,0 K e (*b*) 293 K?

53 •• Um recipiente fechado, com um volume de 6,00 L, contém 10,0 g de hélio líquido a 25,0 K e ar suficiente para preencher o resto de seu volume a uma pressão de 1,00 atm. O hélio, então, evapora e o recipiente tem sua temperatura elevada para a temperatura ambiente (293 K). Qual é a pressão final dentro do recipiente?

54 •• Um pneu de automóvel é cheio até uma pressão manométrica de 200 kPa, quando sua temperatura é 20°C. (Pressão manométrica é a diferença entre a pressão real e a pressão atmosférica.) Depois de viajar a altas velocidades, a temperatura do pneu aumenta para 50°C. (*a*) Supondo que o volume do pneu não varie e que o ar se comporte como um gás ideal, determine a pressão manométrica do

ar no pneu. (*b*) Calcule a pressão manométrica se o pneu se expande e o volume do ar nele contido aumenta em 10 por cento.

55 •• Depois do nitrogênio (N_2) e do oxigênio (O_2), a água, H_2O, é a molécula mais abundante na atmosfera da Terra. Contudo, a fração de moléculas de H_2O em um dado volume de ar varia dramaticamente, de praticamente zero por cento nas condições mais secas até um valor de 4 por cento, quando a umidade é grande. (*a*) Para dadas temperatura e pressão, o ar se torna mais denso quando seu conteúdo de vapor é maior ou menor? (*b*) Qual é a diferença em massa, à temperatura ambiente e à pressão atmosférica, entre um metro cúbico de ar sem moléculas de vapor e um metro cúbico de ar com 4 por cento de moléculas de vapor?

56 •• Um mergulhador está 40 m abaixo da superfície de um lago, onde a temperatura é 5,0°C. Ele libera uma bolha de ar que tem um volume de 15 cm^3. A bolha sobe à superfície, onde a temperatura é 25°C. Suponha que o ar na bolha esteja sempre em equilíbrio térmico com a água ao seu redor, e que não haja troca de moléculas entre a bolha e a água. Qual é o volume da bolha imediatamente antes de romper-se na superfície? *Dica: Lembre-se de que a pressão também varia.*

57 •• **Aplicação em Engenharia** Um balão de ar quente é aberto embaixo. Ele tem um volume de 446 m^3 e é cheio com ar a uma temperatura média de 100°C. O ar fora do balão tem uma temperatura de 20,0°C e uma pressão de 1,00 atm. Qual é a carga que o balão pode erguer (incluindo o revestimento do próprio balão)? Use 29,0 g/mol para a massa molar do ar. (Despreze o volume tanto da carga quanto do revestimento do balão.)

58 ••• Um balão de hélio é usado para erguer um peso de 110 N. O peso do revestimento do balão é 50,0 N e o volume do hélio quando o balão está totalmente inflado é 32,0 m^3. A temperatura do ar é 0°C e a pressão atmosférica é 1,00 atm. O balão é inflado com uma quantidade de gás hélio que faz com que a força resultante para cima, sobre o balão e sua carga, seja de 30,0 N. Despreze efeitos de variação da temperatura causada por mudanças de altitude. (*a*) Quantos moles de gás hélio estão contidos no balão? (*b*) Em que altitude o balão estará completamente inflado? (*c*) O balão chega a atingir a altitude na qual ele se infla completamente? (*d*) Se a resposta para a Parte (*c*) é "Sim", qual é a máxima altitude atingida pelo balão?

TEORIA CINÉTICA DOS GASES

59 • (*a*) Um mol de gás argônio está confinado em um recipiente de 1,0 litro a uma pressão de 10 atm. Qual é a rapidez rms dos átomos de argônio? (*b*) Compare sua resposta com a rapidez rms dos átomos de hélio sob as mesmas condições.

60 • Determine a energia cinética total de translação das moléculas de 1,0 L de gás oxigênio a uma temperatura de 0,0°C e a uma pressão de 1,0 atm.

61 • Estime a rapidez rms e a energia cinética média de um átomo de hidrogênio em um gás a uma temperatura de $1,0 \times 10^7$ K. (Nesta temperatura, que é aproximadamente a temperatura no interior de uma estrela, os átomos de hidrogênio são ionizados e se tornam prótons.)

62 • O hélio líquido tem uma temperatura de apenas 4,20 K e está em equilíbrio com seu vapor quando à pressão atmosférica. Calcule a rapidez rms de um átomo de hélio no vapor a esta temperatura, e comente o resultado.

63 • Mostre que o livre caminho médio de uma molécula em um gás ideal à temperatura T e à pressão P é dado por $\lambda = kT/(\sqrt{2}\,P\pi d^2)$.

64 •• **Aplicação em Engenharia** Os atuais equipamentos de vácuo podem atingir pressões tão baixas quanto $7,0 \times 10^{-11}$ Pa. Seja uma câmara contendo hélio a esta pressão e à temperatura ambiente (300 K). Estime o livre caminho médio e o tempo de colisão para o hélio na câmara. Considere o diâmetro de um átomo de hélio igual a $1,0 \times 10^{-10}$ m.

65 •• Oxigênio (O_2) está confinado em um recipiente cúbico de 15 cm de aresta, à temperatura de 300 K. Compare a energia cinética média de uma molécula do gás com a variação de sua energia potencial gravitacional ao cair de uma altura de 15 cm (a altura do recipiente).

*A DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADES MOLECULARES

66 •• Use o cálculo para mostrar que $f(v)$, dado pela Equação 17-36, tem seu valor máximo para uma rapidez $v = \sqrt{2kT/m}$.

67 •• A função distribuição $f(v)$ é definida na Equação 17-36. Como $f(v)dv$ dá a fração de moléculas que têm rapidez na faixa entre v e $v + dv$, a integral de $f(v)dv$ sobre todos os possíveis valores de rapidez deve ser igual a 1. Dado que a integral $\int_0^\infty v^2 e^{-\text{méd}^2} dv = \sqrt{(\pi/4)}a^{-3/2}$, mostre que $\int_0^\infty f(v)dv = 1$, onde $f(v)$ é dado pela Equação 17-36.

68 •• Dado que a integral $\int_0^\infty v^3 e^{-\text{méd}^2} dv = (1/2a^2)$, calcule a rapidez média $v_{méd}$ das moléculas de um gás, usando a função distribuição de Maxwell–Boltzmann.

69 •• **Vários Passos** As energias cinéticas de translação das moléculas de um gás são distribuídas de acordo com a distribuição de energias de Maxwell–Boltzmann, Equação 17-38. (*a*) Determine o valor mais provável da energia cinética de translação (em termos da temperatura T) e compare este valor com o valor médio. (*b*) Esboce um gráfico da distribuição de energias cinéticas de translação [$f(E)$ *versus* E] e indique a energia mais provável e a energia média. (Não há necessidade de desenhar o eixo vertical do gráfico em escala.) (*c*) Sua professora afirma: "Apenas olhando o gráfico de $f(E)$ *versus* E você pode ver que a energia cinética média de translação é consideravelmente maior do que a energia cinética de translação mais provável." Quais são as características do gráfico que confirmam esta afirmativa?

PROBLEMAS GERAIS

70 • Determine a temperatura na qual a rapidez rms de uma molécula de gás hidrogênio é igual a 343 m/s.

71 •• (*a*) Se 1,0 mol de um gás em um recipiente cilíndrico ocupa um volume de 10 L a uma pressão de 1,0 atm, qual é a temperatura do gás em kelvins? (*b*) Um pistão permite variar o volume do gás dentro do cilindro (Figura 17-20). Quando o gás é aquecido à pressão constante, ele expande para um volume de 20 L. Qual é a temperatura do gás em kelvins? (*c*) Depois, o volume é fixado em 20 L e a temperatura do gás aumenta para 350 K. Qual é, agora, a pressão do gás?

72 •• **Vários Passos** (*a*) O volume por molécula de um gás é o inverso do número de moléculas por unidade de volume. Determine o volume médio, por molécula, para o ar seco à temperatura ambiente e à pressão atmosférica. (*b*) Calcule a raiz cúbica de sua resposta da Parte (*a*) para obter uma estimativa aproximada da distância média d entre as moléculas de ar. (*c*) Determine, ou estime, o diâmetro médio D de uma molécula de ar e compare-o com sua resposta da Parte (*b*). (*d*) Desenhe as moléculas em um volume de ar de forma cúbica com aresta igual a $3d$. Faça seu desenho em escala e coloque as moléculas no que você imagina que seja uma configuração típica. (*e*) Use seu desenho para explicar por que o livre caminho médio de uma molécula de ar é muito maior do que a distância média entre as moléculas.

73 •• **Conceitual** A distribuição de Maxwell–Boltzmann se aplica não apenas a gases, mas também aos movimentos moleculares

dentro de líquidos. O fato de que nem todas as moléculas possuem a mesma rapidez nos ajuda a compreender o processo de evaporação. (*a*) Explique, em termos do movimento molecular, por que uma gota d'água se torna mais fria quando moléculas evaporam de sua superfície. (O resfriamento por evaporação é um importante mecanismo de regulação de nossa temperatura corporal e também é usado para resfriar edifícios em lugares quentes e secos.) (*b*) Use a distribuição de Maxwell–Boltzmann para explicar por que apenas um pequeno aumento da temperatura pode aumentar em muito a taxa na qual uma gota d'água evapora.

74 •• Uma caixa metálica cúbica, com 20 cm de aresta, contém ar à pressão de 1,0 atm e à temperatura de 300 K. A caixa está selada de forma a manter constante o volume interno, e é aquecida até a temperatura de 400 K. Determine a força sobre as paredes da caixa, devida à pressão interna do ar.

75 •• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** Uma das propostas sugeridas para criar hidrogênio líquido combustível é a de converter água comum (H_2O) nos gases H_2 e O_2 por *eletrólise*. Quantos moles de cada um destes gases resultam da eletrólise de 2,0 L de água?

76 •• Um cilindro oco, de massa desprezível e 40 cm de comprimento, repousa deitado sobre uma mesa lisa horizontal. O cilindro é dividido em duas partes iguais por uma membrana vertical não-porosa. Uma das partes contém nitrogênio e a outra parte contém oxigênio. A pressão do nitrogênio é o dobro da pressão do oxigênio. Que distância o cilindro percorrerá se a membrana se romper?

77 •• Um cilindro de volume fixo contém uma mistura de gás hélio (He) e gás hidrogênio (H_2), à temperatura T_1 e à pressão P_1. Se a temperatura é dobrada para $T_2 = 2T_1$, a pressão também deveria dobrar, a não ser pelo fato de que, nesta temperatura, H_2 é 100 por cento dissociado em H_1. Na verdade, à pressão $P_2 = 2P_1$ a temperatura é $T_2 = 3T_1$. Se a massa do hidrogênio no cilindro é m, qual é a massa do hélio no cilindro?

78 •• O livre caminho médio das moléculas de O_2 à temperatura de 300 K e à pressão de 1,00 atm é de $7{,}10 \times 10^{-8}$ m. Uses estes dados para estimar o tamanho de uma molécula de O_2.

79 •• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** Experimentos atuais sobre confinamento atômico e resfriamento podem criar gases de rubídio, e de outros átomos, de baixa massa específica e com temperaturas na região do nanokelvin (10^{-9} K). Estes átomos são confinados e resfriados usando-se campos magnéticos e lasers em câmaras de ultravácuo. Um método que é usado para medir a temperatura de um gás confinado é o de desligar o confinamento e medir o tempo que leva para as moléculas do gás caírem uma determinada distância. Seja um gás de átomos de rubídio a uma temperatura de 120 nK. Calcule quanto tempo um átomo levaria, viajando com a rapidez rms do gás, para cair uma distância de 10,0 cm, se (*a*) ele estava inicialmente se movendo para baixo, e (*b*) ele estava inicialmente se movendo para cima. Suponha que o átomo não colida com nenhum outro átomo em sua trajetória.

80 ••• Um cilindro está cheio com 0,10 mol de um gás ideal, nas condições normais de temperatura e pressão, e um pistão de 1,4 kg mantém o gás dentro do cilindro (Figura 17-21), podendo se mover sem atrito. A coluna de gás confinado tem 2,4 m de altura. O pistão e o cilindro estão circundados por ar, também nas condições normais de temperatura e pressão. O pistão é largado do repouso e começa a cair. O movimento do pistão cessa depois que as oscilações param, com o pistão e o gás confinado em equilíbrio térmico com o ar circundante. (*a*) Determine a altura da coluna de gás. (*b*) Suponha que o pistão seja empurrado para um pouco abaixo de sua posição de equilíbrio e depois liberado. Supondo que a temperatura do gás permaneça constante, determine a freqüência de vibração do pistão.

FIGURA 17-21 Problema 80

81 ••• **PLANILHA ELETRÔNICA, VÁRIOS PASSOS** Neste problema, você usará uma **planilha eletrônica** para estudar a distribuição de velocidades moleculares em um gás. A Figura 17-22 poderá ajudá-lo a começar. (*a*) Introduza os valores de R, M e T, como mostrado. Então, introduza na coluna A os valores de rapidez em uma faixa de 0 a 1200 m/s, com incrementos de 1 m/s. (Esta planilha será longa.) Na célula B7, introduza a fórmula para a distribuição relativa de velocidades de Maxwell–Boltzmann. Esta fórmula contém os parâmetros v, R, M e T. Substitua v por A7, R por B$1, M por B$2 e T por B$3. Depois, use o comando "FILL DOWN" ("PREENCHER") para introduzir a fórmula nas células abaixo de B7. Crie um gráfico de $f(v)$ *versus* v usando os dados das colunas A e B. (*b*) Explore como o gráfico varia quando você aumenta ou diminui a temperatura e descreva os resultados. (*c*) Acrescente uma terceira coluna na qual cada célula contenha a soma acumulada de todos os valores $f(v)$ multiplicados pelo intervalo de tamanho dv (que é igual a 1) das linhas acima, incluindo a própria linha em questão. Qual é a interpretação física dos números desta coluna? (*d*) Para gás nitrogênio a 300 K, qual é a porcentagem de moléculas com rapidez menor do que 200 m/s? (*e*) Para gás nitrogênio a 300 K, qual é a porcentagem de moléculas com rapidez maior do que 700 m/s?

	A	B	C
1	R =	8,31	J/mol-K
2	M =	0,028	kg/mol
3	T =	300	K
4			
5	v	f(v)	soma f(v)dv
6	(m/s)	(s/m)	(sem unidade)
7	0	0	0
8	1	3,0032E-08	3,00325E-08
9	2	1,2013E-07	1,5016E-07
10	3	2,7028E-07	4,20441E-07
11	4	4,8048E-07	9,0092E-07
12	5	7,5071E-07	1,65163E-06

FIGURA 17-22 Problema 81 (Apenas as primeiras linhas da planilha são mostradas.)

CAPÍTULO 18

A COMPETIÇÃO MASCULINA DE CICLISMO DA UNIVERSIDADE DE INDIANA, ESTADOS UNIDOS, ACONTECE DESDE 1951. APENAS ESTUDANTES DA UNIVERSIDADE PODEM COMPETIR NESTA PROVA DE 200 VOLTAS E 50 MILHAS. (*© Carlos Sanchez Pereyra/ Dreamstime.com.*)

? Qual é o trabalho necessário para encher um pneu de bicicleta? (Veja o Exemplo 18-13.)

Calor e a Primeira Lei da Termodinâmica

18-1 Capacidade Térmica e Calor Específico
18-2 Mudança de Fase e Calor Latente
18-3 O Experimento de Joule e a Primeira Lei da Termodinâmica
18-4 A Energia Interna de um Gás Ideal
18-5 Trabalho e o Diagrama *PV* para um Gás
18-6 Capacidades Térmicas dos Gases
18-7 Capacidades Térmicas dos Sólidos
18-8 Falha do Teorema da Eqüipartição
18-9 A Compressão Adiabática Quase-estática de um Gás

A relação entre o calor transferido para um sistema, o trabalho realizado sobre ele e a variação de sua energia interna é a base da primeira lei da termodinâmica. Na Parte I deste livro discutimos o movimento; agora, consideramos o papel desempenhado pelo calor na geração de movimento — seja o movimento de pessoas correndo para pegar um ônibus, o movimento cíclico dos pistões do motor de um carro, ou mesmo o gotejar da água nas paredes externas de um copo de limonada gelada em um dia quente.

Durante anos, a potência gerada pela troca de calor tem sido aproveitada. Desde as antigas máquinas a vapor até os motores de combustão interna de automóveis e os motores a jato, os engenheiros têm descoberto maneiras de melhorar o desempenho de suas máquinas, retirando delas a maior quantidade possível de energia. Mesmo os atletas de hoje treinam e se alimentam visando aperfeiçoar seu desempenho, essencialmente tratando seus corpos como qualquer outra máquina mecânica.

Neste capítulo definimos capacidade térmica e examinamos como o aquecimento de uma amostra pode causar ou um aumento de sua temperatura ou uma mudança de sua fase (de sólido para líquido, por exemplo). Examinamos, depois, a relação entre variações da energia interna de um sistema e a energia transferida para o sistema através de calor e trabalho, e expressamos a lei de conservação da energia para sistemas como a primeira lei da termodinâmica. Finalmente, veremos como a capacidade térmica de um sistema está relacionada à sua estrutura molecular.

18-1 CAPACIDADE TÉRMICA E CALOR ESPECÍFICO

Calor é a transferência de energia em razão de uma diferença de temperatura. Durante o século XVII, Galileu, Newton e outros cientistas concordavam de maneira geral com a teoria dos antigos atomistas gregos que consideravam a energia térmica como uma manifestação do movimento molecular. Durante o século seguinte foram desenvolvidos métodos para realizar medidas quantitativas da quantidade de energia transferida em função de diferenças de temperatura e se verificou que, se corpos estão em contato térmico, a quantidade de energia liberada por um dos corpos é igual à quantidade de energia absorvida pelo outro corpo. Esta descoberta levou a uma teoria segundo a qual o calor era considerado uma substância material conservada. De acordo com esta teoria, um fluido invisível chamado de "calórico" fluía de um dos corpos para entrar no outro, e este calórico não poderia nem ser criado nem destruído.

A teoria do calórico reinou até o século XIX, quando foi observado que o atrito cinético entre corpos poderia produzir uma transferência ilimitada de energia entre eles, contrariando a idéia de que o calórico era uma substância presente em quantidades fixas. A teoria moderna para o calor não surgiu antes dos anos de 1840, quando James Joule (1818–1889) demonstrou que, quando um líquido viscoso era agitado com uma pá, o aumento ou a diminuição de uma dada quantidade de energia térmica era sempre acompanhado pela diminuição ou pelo aumento de uma quantidade equivalente de energia mecânica. Portanto, a energia térmica em si não é conservada. Ocorre que a energia térmica é uma forma de energia interna e a grandeza conservada é a energia.

Quando um corpo mais quente está em contato térmico com um corpo mais frio, a energia transferida do corpo mais quente para o corpo mais frio, em razão da diferença de temperatura entre os dois corpos, é chamada de **calor**. Uma vez transferida para o corpo mais frio, a energia não passa mais a ser identificada como calor. Ela passa a ser identificada como parte da energia interna do corpo mais frio. A **energia interna** de um corpo é sua energia total no referencial de seu centro de massa. Neste livro, Q é o símbolo para calor e E_{int} é o símbolo para energia interna.

Quando energia é transferida para uma substância na forma de calor, a temperatura da substância usualmente aumenta.* A quantidade de calor Q necessária para aumentar a temperatura de uma amostra da substância é proporcional à variação da temperatura e à massa da amostra:

$$Q = \Delta E_{int} = C\,\Delta T = mc\,\Delta T \qquad 18\text{-}1$$

DEFINIÇÃO: CAPACIDADE TÉRMICA

onde C é a **capacidade térmica**, definida como a variação da energia interna necessária para aumentar em um grau a temperatura de uma amostra. O **calor específico** c é a capacidade térmica específica, ou a capacidade térmica por unidade de massa:

$$c = \frac{C}{m} \qquad 18\text{-}2$$

DEFINIÇÃO: CALOR ESPECÍFICO

A unidade histórica de calor, a **caloria**, foi definida originalmente como a quantidade de calor necessária para aumentar a temperatura de um grama de água em um grau

! O termo *capacidade térmica* não significa que o corpo contém certa quantidade de calor.

* Uma exceção ocorre durante uma mudança de fase, como quando a água congela ou evapora. Mudanças de fase são discutidas na Seção 18-2.

Celsius.† Como reconhecemos, agora, que calor é uma medida de transferência de energia, podemos definir caloria em termos da unidade SI de energia, o joule:

$$1 \text{ cal} = 4{,}184 \text{ J} \qquad 18\text{-}3$$

A unidade americana usual para o calor é o **Btu** (*British thermal unit*, unidade térmica britânica), que foi definida originalmente como a quantidade de energia necessária para aumentar a temperatura de 1 libra de água em 1°F. O Btu está relacionado à caloria e ao joule por

$$1 \text{ Btu} = 252 \text{ cal} = 1{,}054 \text{ kJ} \qquad 18\text{-}4$$

A definição original da caloria implica que o calor específico da água (no estado líquido) é*

$$c_{\text{água}} = 1 \text{ cal/(g} \cdot \text{K)} = 1 \text{ kcal/(kg} \cdot \text{K)} = 4{,}184 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)} \qquad 18\text{-}5a$$

De maneira similar, da definição de Btu, o calor específico da água na unidade americana usual é

$$c_{\text{água}} = 1 \text{ Btu/(lb} \cdot \text{°F)} \qquad 18\text{-}5b$$

A capacidade térmica por mol é chamada de **calor específico molar** c',

$$c' = \frac{C}{n}$$

onde n é o número de moles. Como $C = mc$, o calor específico molar c' e o calor específico c estão relacionados por

$$c' = \frac{C}{n} = \frac{mc}{n} = Mc \qquad 18\text{-}6$$

CALOR ESPECÍFICO MOLAR

onde $M = m/n$ é a massa molar. A Tabela 18-1 lista o calor específico e o calor específico molar de alguns sólidos e líquidos. Observe que o calor molar de todos os metais é aproximadamente o mesmo. Discutimos o significado da similaridade entre os valores para o calor específico dos metais na Seção 18-7.

Tabela 18-1 Calores Específicos e Calores Específicos Molares de Alguns Sólidos e Líquidos

Substância	c, kJ/kg · K	c, kcal/kg · K ou Btu/lb · F°	c', J/mol · K
Água	4,18	1,00	75,2
Álcool (etílico)	2,4	0,58	111
Alumínio	0,900	0,215	24,3
Bismuto	0,123	0,0294	25,7
Chumbo	0,128	0,0305	26,4
Cobre	0,386	0,0923	24,5
Gelo (−10°C)	2,05	0,49	36,9
Mercúrio	0,140	0,033	28,3
Ouro	0,126	0,0301	25,6
Prata	0,233	0,0558	24,9
Tungstênio	0,134	0,0321	24,8
Vapor (a 1 atm)	2,02	0,48	36,4
Vidro	0,840	0,20	—
Zinco	0,387	0,0925	25,2

Exemplo 18-1 Elevando a Temperatura

Um joalheiro está criando peças de ouro. Para isto, ele precisa fundir o ouro para preencher os moldes. Quanto calor é necessário para elevar a temperatura de 3,00 kg de ouro de 22°C (temperatura ambiente) para 1063°C, o ponto de fusão do ouro?

SITUAÇÃO A quantidade de calor Q necessária para aumentar a temperatura da substância (ouro) é proporcional à variação da temperatura e à massa da substância.

SOLUÇÃO

1. O calor necessário é dado pela Equação 18-1, com $c = 0{,}126 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}$ da Tabela 18-1:

$$Q = mc\,\Delta T = (3{,}00 \text{ kg})(0{,}126 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)})(1041 \text{ K}) = \boxed{393 \text{ kJ}}$$

CHECAGEM O problema pede a quantidade de energia e a resposta é dada em joules, que é unidade de energia.

INDO ALÉM Observe que usamos $\Delta T = 1063°\text{C} - 22°\text{C} = 1041°\text{C} = 1041 \text{ K}$.

PROBLEMA PRÁTICO 18-1 Um bloco de 2,0 kg de alumínio está originalmente a 10°C. Se 36 kJ de energia são transferidos ao bloco, qual é a sua temperatura final?

† A quilocaloria é, então, a quantidade de calor necessária para aumentar em 1°C a temperatura de 1 kg de água. A "caloria" usada para medir o equivalente energético de alimentos corresponde, na verdade, à quilocaloria.

* Medidas cuidadosas mostram que o calor específico da água varia em cerca de 1 por cento na faixa de temperaturas de 0°C a 100°C. Normalmente, desprezaremos esta pequena variação.

Vemos, na Tabela 18-1, que o calor específico da água líquida é consideravelmente maior do que o de outras substâncias comuns. Portanto, a água é um excelente material para armazenamento de energia térmica, como em um sistema de aquecimento solar. Ela também é um excelente líquido refrigerante, como o de motores de automóvel. (O líquido refrigerante dos motores de automóvel é uma mistura de água e etileno glicol.)

Grandes quantidades de água, como lagos ou oceanos, tendem a moderar as flutuações de temperatura do ar de sua vizinhança, porque a água pode absorver ou liberar grandes quantidades de calor sofrendo variações muito pequenas de temperatura. *(De Frank Press e Raymond Siever,* Understanding Earth, *3rd ed., W. H. Freeman abd Company, 2001.)*

CALORIMETRIA

Para medir o calor específico de um objeto podemos, primeiro, aquecê-lo até uma temperatura conhecida, digamos o ponto de ebulição da água. Depois, transferimos o objeto para um banho de água cuja massa e temperatura inicial são conhecidas. Finalmente, medimos a temperatura final de equilíbrio do sistema (o objeto, a água do banho e o contêiner da água). Se o sistema estiver termicamente isolado do ambiente (isolando-se o contêiner, por exemplo), então o calor liberado pelo objeto será igual ao calor absorvido pela água e pelo contêiner. Este procedimento é chamado de **calorimetria**, e o contêiner isolado cheio d'água é chamado de **calorímetro**.

Sejam m a massa do objeto, c o seu calor específico e T_{io} a temperatura inicial do objeto. Se T_f é a temperatura final do objeto, da água e do contêiner, o calor liberado pelo objeto é

$$Q_{sai} = mc(T_{io} - T_f)$$

Do mesmo modo, se T_{ia} é a temperatura inicial da água e do contêiner, então o calor absorvido pela água e pelo contêiner é

$$Q_{entra} = m_a\, c_a(T_f - T_{ia}) - m_c\; c_c(T_f - T_{ia})$$

onde m_a e $c_a = 4{,}18\ \text{kJ/(kg} \cdot \text{K)}$ são a massa e o calor específico da água e m_c e c_c são a massa e o calor específico do contêiner. (Observe que expressamos a diferença entre as temperaturas de maneira que ambas sejam quantidades positivas. Conseqüentemente, nossas expressões para Q_{entra} e Q_{sai} são ambas positivas.) Igualando estas quantidades de calor, obtemos uma equação que pode ser resolvida para o calor específico c do objeto:

$$Q_{sai} = Q_{entra} \Rightarrow mc(T_{io} - T_f) = m_a\; c_a(T_f - T_{ia}) + m_c\; c_c(T_f - T_{ia}) \qquad 18\text{-}7$$

Como a Equação 18-7 contém apenas diferenças de temperatura e como o kelvin e o grau Celsius têm o mesmo tamanho, é indiferente usar kelvins ou graus Celsius.

Exemplo 18-2 Medindo o Calor Específico

Para medir o calor específico do chumbo, você aquece 600 g de chumbo até 100,0°C e o coloca em um calorímetro de alumínio de 200 g de massa que contém 500 g de água inicialmente a 17,3°C. Se a temperatura final da mistura é 20,0°C, qual é o calor específico do chumbo? (O calor específico do contêiner de alumínio é 0,900 kJ/(kg · K).)

SITUAÇÃO Iguale o calor liberado pelo chumbo ao calor absorvido pela água e pelo contêiner e resolva para o calor específico do chumbo, c_{Pb}.

SOLUÇÃO

1. Escreva o calor liberado pelo chumbo em termos do seu calor específico: $Q_{Pb} = m_{Pb}c_{Pb}|\Delta T_{Pb}|$
2. Escreva o calor absorvido pela água: $Q_a = m_a c_a\, \Delta T_a$
3. Escreva o calor absorvido pelo contêiner: $Q_c = m_c c_c\, \Delta T_c$
4. Iguale o calor liberado ao calor absorvido pela água e pelo contêiner:
$$Q_{sai} = Q_{entra} \Rightarrow Q_{Pb} = Q_a + Q_c$$
$$m_{Pb}c_{Pb}|\Delta T_{Pb}| = m_a c_a\, \Delta T_a + m_c c_c\, \Delta T_c$$
onde $\Delta T_c = \Delta T_a = 2{,}7\ \text{K}$ e $|\Delta T_{Pb}| = 80{,}0\ \text{K}$

5. Resolva para c_{Pb}:

$$c_{Pb} = \frac{(m_a c_a + m_c c_c)\,\Delta T_a}{m_{Pb}|\Delta T_{Pb}|}$$

$$= \frac{[(0{,}50\text{ kg})(4{,}18\text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}) + (0{,}20\text{ kg})(0{,}90\text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)})](2{,}7\text{ K})}{(0{,}600\text{ kg})(80{,}0\text{ K})}$$

$$= 0{,}128\text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)} = \boxed{0{,}13\text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}}$$

CHECAGEM Como esperado, o calor específico do chumbo é consideravelmente menor do que o da água. (O calor específico da água líquida é 4,18 kJ/(kg · K).)

INDO ALÉM O resultado do passo 5 é expresso com dois algarismos significativos porque a variação da temperatura da água é conhecida com apenas dois algarismos significativos.

PROBLEMA PRÁTICO 18-2 Uma casa contém $1{,}00 \times 10^3$ kg de concreto (calor específico = 1,00 kJ/kg · K). Quanto calor é liberado pelo concreto quando ele resfria de 25°C para 20°C?

18-2 MUDANÇA DE FASE E CALOR LATENTE

Se calor é absorvido por gelo a 0°C, a temperatura do gelo não varia. No lugar disso, o gelo se funde. A fusão é um exemplo de uma **mudança de fase** ou **mudança de estado**. Tipos comuns de mudanças de fase são a solidificação (líquido para sólido), a fusão (sólido para líquido), a vaporização (líquido para vapor ou gás), a condensação (gás ou vapor para líquido) e a sublimação (sólido diretamente para gás ou vapor, como ocorre com o dióxido de carbono sólido, ou gelo seco). Outros tipos de mudança de fase também existem, como a mudança de um sólido de uma forma cristalina para outra. Por exemplo, carbono grafite sob pressão intensa se transforma em diamante.

A teoria molecular pode nos ajudar a entender por que a temperatura permanece constante durante uma mudança de fase. As moléculas em um líquido estão mais próximas e exercem forças atrativas umas sobre as outras, enquanto as moléculas em um gás estão mais afastadas. Devido a esta atração intermolecular, é preciso energia para remover as moléculas de um líquido e formar um gás. Seja uma panela de água sobre a chama de um fogão. Primeiro, enquanto a água é aquecida, os movimentos de suas moléculas aumentam e a temperatura aumenta. Quando a temperatura atinge o ponto de ebulição, as moléculas não podem mais aumentar sua energia cinética e permanecem no líquido. Enquanto a água líquida se transforma em vapor, o acréscimo de energia é utilizado para romper as atrações intermoleculares. Isto é, a energia é utilizada para aumentar a energia potencial das moléculas em vez de aumentar sua energia cinética. Como a temperatura é uma medida da energia *cinética* média de translação das moléculas, a temperatura não varia.

Embora a fusão indique que o gelo passou por uma mudança de fase, sua temperatura não se altera. *(De Donald Wink, Sharon Gislason e Sheila McNicholas,* The Practice of Chemistry, *W. H. Freeman and Company, 2002.)*

Para uma substância pura, uma mudança de fase a uma dada pressão ocorre apenas em uma temperatura específica. Por exemplo, água pura a uma pressão de 1 atm muda de sólido para líquido a 0°C (o ponto normal de fusão da água) e de líquido para gás a 100°C (o ponto normal de ebulição da água).

A energia necessária para fundir uma amostra de uma substância de massa m, sem variação da temperatura, é proporcional à massa da amostra:

$$Q_f = mL_f \qquad 18\text{-}8$$

onde L_f é chamado de **calor latente de fusão** da substância. A uma pressão de 1 atm, o calor latente de fusão da água é 333,5 kJ/kg = 79,7 kcal/kg. Se a mudança de fase é de líquido para gás, o calor necessário é

$$Q_v = mL_v \qquad 18\text{-}9$$

onde L_v é o **calor latente de vaporização**. Para água a uma pressão de 1 atm, o calor latente de vaporização é 2,26 MJ/kg = 540 kcal/kg. A Tabela 18-2 fornece os pontos de fusão e de ebulição e os calores latentes de fusão e de vaporização, todos a 1 atm, para várias substâncias.

Tabela 18-2 Ponto de Fusão (PF), Calor Latente de Fusão (L_f), Ponto de Ebulição (PE) e Calor Latente de Vaporização (L_v) para Várias Substâncias a 1 atm

Substância	PF, K	L_f, kJ/kg	PE, K	L_v kJ/kg
Água (líquida)	273,15	333,5	373,15	2257
Álcool etílico	159	109	351	879
Bromo	266	67,4	332	369
Chumbo	600	24,7	2023	858
Cobre	1356	205	2839	4726
Dióxido de carbono	—	—	194,6*	573*
Enxofre	388	38,5	717,75	287
Hélio	—	—	4,2	21
Mercúrio	234	11,3	630	296
Nitrogênio	63	25,7	77,35	199
Ouro	1336	62,8	3081	1701
Oxigênio	54,4	13,8	90,2	213
Prata	1234	105	2436	2323
Zinco	692	102	1184	1768

* Estes valores são para sublimação. O dióxido de carbono não possui um estado líquido a 1 atm.

Exemplo 18-3 Transformando Gelo em Vapor

Quanto calor é necessário para transformar 1,5 kg de gelo, a −20°C e a 1,0 atm, em vapor?

SITUAÇÃO O calor necessário para transformar o gelo em vapor é a soma de quatro fatores: Q_1, o calor necessário para aumentar a temperatura do gelo de −20°C para 0°C; Q_2, o calor necessário para fundir o gelo; Q_3, o calor necessário para aumentar a temperatura da água de 0°C para 100°C; e Q_4, o calor necessário para vaporizar a água. Ao calcular Q_1 e Q_3, supomos constantes os calores específicos, iguais a 2,05 kJ/kg · K para o gelo e 4,18 kJ/kg · K para a água.

SOLUÇÃO

1. Use $Q_1 = mc\,\Delta T$ para determinar o calor necessário para aumentar a temperatura do gelo até 0°C:
$$Q_1 = mc\,\Delta T = (1{,}5\text{ kg})(2{,}05\text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(20\text{ K}) = 61{,}5\text{ kJ} = 0{,}0615\text{ MJ}$$
2. Use L_f, da Tabela 18-2, para determinar o calor Q_2 necessário para fundir o gelo:
$$Q_2 = mL_f = (1.5\text{ kg})(333{,}5\text{ kJ/kg}) = 500\text{ kJ} = 0{,}500\text{ MJ}$$
3. Determine o calor Q_3 necessário para aumentar a temperatura da água de 0°C para 100°C:
$$Q_3 = mc\,\Delta T = (1{,}5\text{ kg})(4{,}18\text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(100\text{ K}) = 627\text{ kJ} = 0{,}627\text{ MJ}$$
$$Q_3 = 627\text{ kJ} = 0{,}627\text{ MJ}$$
4. Use L_v, da Tabela 18-2, para determinar o calor Q_4 necessário para evaporar a água:
$$Q_4 = mL_V = (1{,}5\text{ kg})(2{,}26\text{ MJ/kg}) = 3{,}39\text{ MJ}$$
5. Some seus resultados para determinar o calor total Q:
$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = \boxed{4{,}6\text{ MJ}}$$

CHECAGEM Você já deve ter observado que é necessário um tempo muito menor para ferver uma chaleira cheia d'água do que para evaporar toda a água até secar a chaleira. Esta observação é consistente com o fato de nosso resultado do passo 3 ser menos de 20 por cento do resultado do passo 4.

INDO ALÉM Observe que a maior parte do calor foi necessária para evaporar a água, e que a quantidade necessária para fundir o gelo foi uma fração significativa do calor necessário para aumentar a temperatura da água líquida até 100°C. Um gráfico da temperatura *versus* tempo para o caso no qual calor é absorvido a uma taxa constante de 1,0 kJ/s é mostrado na Figura 18-1. Observe que leva um tempo consideravelmente maior para evaporar a água do que para fundir o gelo ou para aumentar

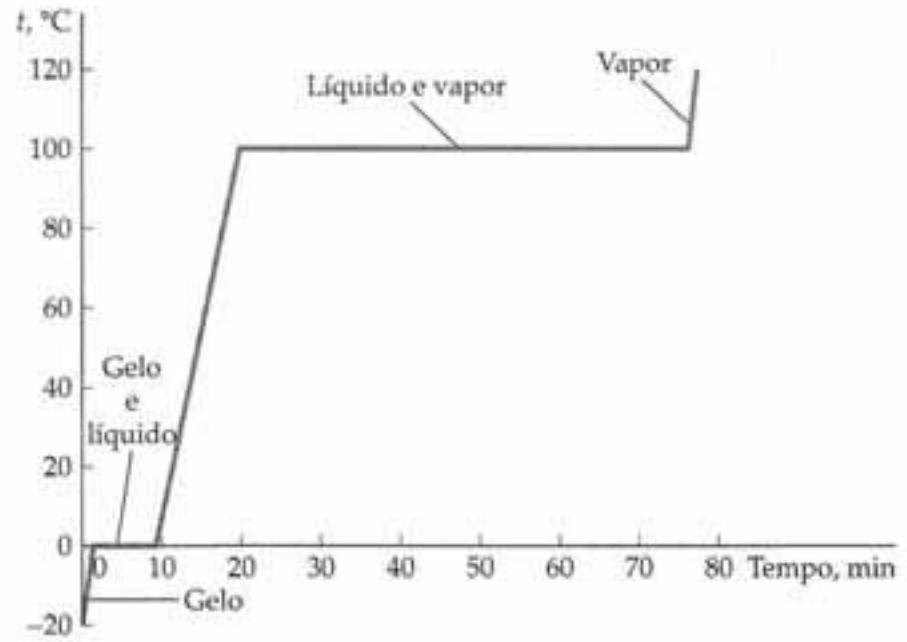


FIGURA 18-1 Uma amostra de 1,5 kg de água é aquecida de −20°C para 120°C a uma taxa constante de 60 kJ/min.

a temperatura da água. Quando toda a água tiver evaporado, a temperatura voltará a aumentar à medida que calor for absorvido.

PROBLEMA PRÁTICO 18-3 Um pedaço de 830 g de chumbo é aquecido até seu ponto de fusão de 600 K. Quanta energia adicional deve ser absorvida pelo chumbo, a 600 K, para fundir completamente todas as 830 g?

Exemplo 18-4 Uma Bebida Gelada — *Rico em Contexto*

Uma jarra com 2,0 litros de limonada ficou sobre uma mesa de piquenique exposta à luz solar durante todo o dia, a 33°C. Você despeja 0,24 kg em um copo de isopor e adiciona 2 cubos de gelo (cada um com 0,025 kg e a 0,0°C). (*a*) Supondo que nenhum calor seja liberado para o ambiente, qual é a temperatura final da limonada? (*b*) Qual é a temperatura final se você adicionar seis cubos de gelo, ao invés de dois?

SITUAÇÃO Igualamos o calor liberado pela limonada ao calor absorvido pelos cubos de gelo. Seja T_f a temperatura final da limonada e da água. Supomos que a limonada tenha o mesmo calor específico que a água.

SOLUÇÃO

(*a*) 1. Escreva o calor liberado pela limonada em termos da temperatura final T_f:

$$Q_{sai} = m_L\, c|\Delta T| = m_L c(T_{Li} - T_f)$$

2. Escreva o calor absorvido pelos cubos de gelo e pela água resultante em termos da temperatura final:

$$Q_{entra} = m_{gelo}L_f + m_{gelo}c\,\Delta T_a = m_{gelo}L_f + m_{gelo}c(T_f - T_{ai})$$

3. Iguale o calor liberado ao calor absorvido e resolva para T_f:

$$Q_{sai} = Q_{entra}$$

$$m_L c(T_{Li} - T_f) = m_{gelo}L_f + m_{gelo}c(T_f - T_{ai})$$

$$\text{logo} \quad T_f = \frac{(m_{gelo}T_{ai} + m_L T_{Li})c - m_{gelo}L_f}{(m_L + m_{gelo})c}$$

$$= \frac{(0{,}050 \times 273{,}15 + 0{,}24 \times 306{,}15)4{,}18 - 0{,}050 \times 333{,}5}{0{,}29 \times 4{,}18}$$

$$= 286{,}7\ \text{K} = \boxed{14°\text{C}}$$

(*b*) 1. Para 6 cubos de gelo, $m_{gelo} = 0{,}15$ kg. Determine a temperatura final como no passo 3 da Parte (*a*):

$$T_f = \frac{(m_{gelo}T_{ai} + m_L T_{Li})c - m_{gelo}L_f}{(m_L + m_{gelo})c}$$

$$= \frac{(0{,}150 \times 273{,}15 + 0{,}24 \times 306{,}15)4{,}18 - 0{,}150 \times 333{,}5}{0{,}39 \times 4{,}18}$$

$$= 262{,}8\ \text{K} = -10{,}4\ °\text{C}$$

2. Uma temperatura final abaixo de 0°C não pode estar correta! Nenhuma quantidade de gelo a 0°C pode diminuir a temperatura da limonada morna para abaixo de 0°C. Nosso cálculo está errado porque nossa hipótese de que todos os cubos de gelo derreteram estava errada. Ao invés disso, o calor liberado pela limonada enquanto ela resfriava de 33°C até 0°C não foi suficiente para derreter todo o gelo. A temperatura final é, portanto:

$$= \boxed{0°\text{C}}$$

CHECAGEM Vamos calcular quanto gelo derrete. Para que a limonada resfrie de 33°C até 0°C, ela deve liberar calor na quantidade $Q = (0{,}24\ \text{kg})(4{,}18\ \text{kJ/kg} \cdot \text{K})(33\ \text{K}) = 33{,}1$ kJ. A massa de gelo que esta quantidade de calor derreterá é $m_{gelo} = Q/L_f = 33{,}1\ \text{kJ}/(333{,}5\ \text{kJ/kg}) = 0{,}10$ kg. Isto é a massa de apenas 4 cubos de gelo. A adição de mais do que 4 cubos de gelo não diminuirá a temperatura abaixo de 0°C, mas meramente aumentará a quantidade de gelo na mistura gelo–limonada a 0°C. Em problemas como este, devemos primeiro determinar quanto gelo deve ser fundido para reduzir a temperatura do líquido para 0°C. Se uma quantidade menor do que esta for adicionada, podemos proceder como na Parte (*a*). Se mais gelo for adicionado, a temperatura final é 0°C.

18-3 O EXPERIMENTO DE JOULE E A PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA

Podemos aumentar a temperatura de um sistema fornecendo-lhe calor, mas também podemos aumentar sua temperatura realizando trabalho sobre ele. A Figura 18-2 é um diagrama do aparato que Joule usou em um famoso experimento no qual ele determinou a quantidade de trabalho necessário para aumentar a temperatura de uma libra de água em um grau Fahrenheit. Aqui, o sistema é um recipiente com água termicamente isolado. O aparato de Joule converte a energia potencial de pesos caindo em trabalho realizado sobre a água por uma pá, como mostrado na figura. Joule descobriu que ele podia aumentar a temperatura de 1,00 libra de água em 1,00°F deixando cair pesos de 772 lb (347,4 kg) de uma altura de um pé. Convertendo para unidades modernas e usando valores atuais, Joule descobriu que precisa de aproximadamente 4,184 J (a unidade de energia adotada pela comunidade científica em 1948) para aumentar a temperatura de 1 g de água em 1°C. A conclusão de que 4,184 J de energia mecânica são exatamente equivalentes a 1 cal de calor é conhecida como o **equivalente mecânico do calor**.

Há outras maneiras de se realizar trabalho sobre este sistema. Por exemplo, poderíamos deixar a gravidade realizar o trabalho soltando o recipiente de água isolado de alguma altura h, permitindo que o sistema sofresse uma colisão inelástica com o chão, ou poderíamos realizar trabalho mecânico para gerar eletricidade e, então, usar a eletricidade para aquecer a água (Figura 18-3). Durante todos estes experimentos, a mesma quantidade de trabalho é necessária para produzir uma dada variação de temperatura. Pela conservação da energia, o trabalho realizado é igual ao aumento da energia interna do sistema.

CHECAGEM CONCEITUAL 18-1

O experimento de Joule, estabelecendo a equivalência mecânica do calor, envolveu a conversão de energia mecânica em energia interna. Dê alguns exemplos da energia interna de um sistema sendo convertida em energia mecânica.

FIGURA 18-2 Diagrama esquemático para o experimento de Joule. Paredes isolantes circundam a água. Enquanto os pesos caem com rapidez constante, eles giram uma roda de pá que realiza trabalho sobre a água. Se o atrito é desprezível, o trabalho realizado pela roda de pá sobre a água é igual à perda de energia mecânica dos pesos, que é determinada calculando-se sua perda de energia potencial.

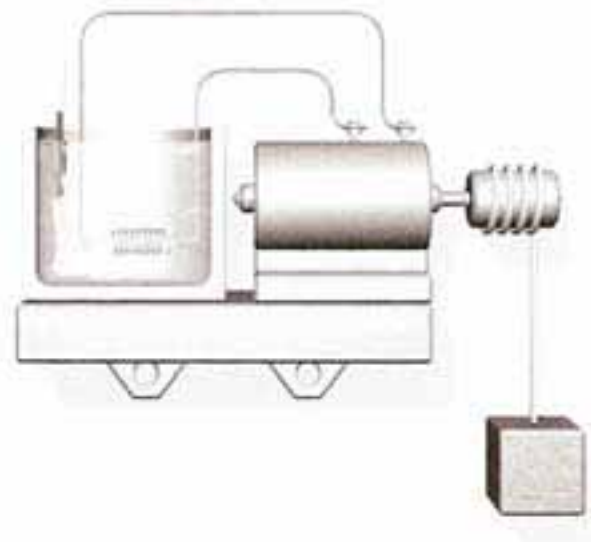


FIGURA 18-3 Outro método de realizar trabalho sobre um recipiente com água termicamente isolado. Trabalho elétrico é realizado sobre o sistema pelo gerador que é acionado pela queda do peso.

Exemplo 18-5 Aquecendo Água Deixando-a Cair

(*a*) Nas cataratas do Niágara (fronteira EUA–Canadá), a queda d'água tem 50 m. Se a diminuição da energia potencial gravitacional da água é igual ao aumento de sua energia interna, calcule o aumento de sua temperatura. (*b*) Nas cataratas do Yosemite (EUA), a queda d'água é de 740 m. Se a diminuição da energia potencial gravitacional da água é igual ao aumento de sua energia interna, calcule o aumento de sua temperatura. (Estes aumentos de temperatura não são facilmente observados porque, enquanto a água cai, sua temperatura é afetada por vários outros fatores. Por exemplo, ela resfria por evaporação e é aquecida enquanto o ar realiza trabalho sobre ela através de interação viscosa.)

SITUAÇÃO A energia cinética da água, um instante antes de atingir o solo, é igual à sua energia potencial original mgh. Durante a colisão, esta energia é convertida em energia interna que, por sua vez, provoca um aumento de temperatura dado por $mc\,\Delta T$.

SOLUÇÃO

(*a*) 1. Iguale a diminuição da energia potencial ao aumento da energia interna: $mgh = mc\,\Delta T$

2. Resolva para a variação de temperatura: $\Delta T = \dfrac{gh}{c} = \dfrac{(9{,}81\ \text{N/kg})(50\ \text{m})}{4{,}184\ \text{kJ/kg}\cdot\text{K}} = 0{,}117\ \text{K} = \boxed{0{,}12\ \text{K}}$

(*b*) Repita o cálculo com $h = 740$ m: $\Delta T = \dfrac{gh}{c} = \dfrac{(9{,}81\ \text{N/kg})(740\ \text{m})}{4{,}184\ \text{kJ/kg}\cdot\text{K}} = 1{,}74\ \text{K} = \boxed{1{,}7\ \text{K}}$

CHECAGEM As cataratas do Yosemite são 14,8 vezes mais altas do que as do Niágara; logo, a variação da energia potencial da água das cataratas do Yosemite é 14,8 vezes maior do que a variação da energia potencial da água das cataratas do Niágara. Portanto, a variação da temperatura deve ser 14,8 vezes maior no primeiro caso. Multiplicando 0,117 K por 14,8 resulta em 1,73 K, o que é muito próximo do nosso resultado da Parte (*b*).

INDO ALÉM Estes cálculos ilustram uma das dificuldades com o experimento de Joule — uma grande quantidade de energia mecânica deve ser dissipada para produzir uma variação mensurável da temperatura da água.

Suponha realizarmos o experimento de Joule substituindo as paredes isolantes do recipiente por paredes condutoras. Descobrimos que o trabalho necessário para produzir uma dada variação da temperatura do sistema depende de quanto calor é absorvido ou liberado pelo sistema por condução através das paredes. Entretanto, se somamos o trabalho realizado sobre o sistema ao calor efetivo absorvido pelo sistema, o resultado é sempre o mesmo para uma dada variação de temperatura. Isto é, a soma da transferência de calor *para* o sistema com o trabalho realizado *sobre* o sistema é igual à variação da energia interna do sistema. Este resultado é a **primeira lei da termodinâmica** que é, simplesmente, um enunciado da conservação da energia.

Seja W_{sobre} o trabalho realizado pela vizinhança *sobre* o sistema. Por exemplo, suponha que nosso sistema seja um gás confinado em um cilindro por um pistão. Se o pistão comprime o gás, a vizinhança realiza trabalho sobre o gás e W_{sobre} é positivo. (Entretanto, se o gás se expande contra o pistão, o gás realiza trabalho sobre a vizinhança e W_{sobre} é negativo.) Além disso, seja Q_{entra} a transferência de calor para o sistema. Se calor é transferido para o sistema, então Q_{entra} é positivo; se calor é retirado do sistema, então Q_{entra} é negativo (Figura 18-4). Usando estas convenções e representando a energia interna por E_{int},* a primeira lei da termodinâmica é escrita como

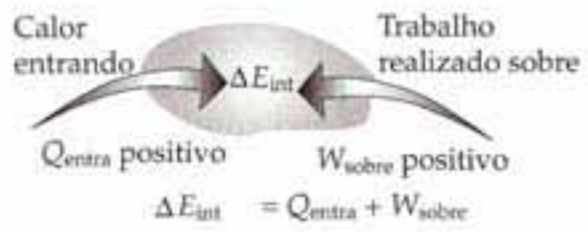


FIGURA 18-4 Convenção de sinais para a primeira lei da termodinâmica.

$$\Delta E_{\text{int}} = Q_{\text{entra}} + W_{\text{sobre}} \qquad 18\text{-}10$$

A variação da energia interna de um sistema é igual ao calor transferido para o sistema mais o trabalho realizado sobre o sistema.

PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA

A Equação 18-10 é a mesma que o teorema do trabalho–energia $W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{sis}}$ do Capítulo 7 (Equação 7-9), exceto que somamos o termo de calor Q_{entra} e chamamos a energia do sistema de E_{int}.

Exemplo 18-6 Agitando a Água

Você realiza 25 kJ de trabalho sobre um sistema que consiste em 3,0 kg de água, agitando-a com uma pá. Durante este tempo, 15 kcal de calor são liberados pelo sistema, devido ao precário isolamento térmico. Qual é a variação da energia interna do sistema?

SITUAÇÃO Expressamos todas as energias em joules e aplicamos a primeira lei da termodinâmica.

* Outro símbolo comumente usado para a energia interna é *U*.

SOLUÇÃO

1. Determinamos ΔE_{int} usando a primeira lei da termodinâmica: $\Delta E_{int} = Q_{entra} + W_{sobre}$
2. Calor é *liberado* pelo sistema; logo, o termo Q_{entra} é negativo: $Q_{in} = -15\text{ kcal} = -(15\text{ kcal})\left(\frac{4{,}18\text{ kJ}}{1\text{ kcal}}\right) = -62{,}7\text{ kJ}$
3. O trabalho é realizado *sobre* o sistema; logo, o termo W_{sobre} é positivo: $W_{sobre} = +25\text{ kJ}$
4. Substitua estas quantidades e resolva para ΔE_{int}: $\Delta E_{int} = Q_{entra} + W_{sobre} = (-62{,}7\text{ kJ}) + (+25\text{ kJ})$
$= -37{,}7\text{ kJ} = \boxed{-38\text{ kJ}}$

CHECAGEM A perda de calor excede o ganho em trabalho; logo, a variação da energia interna é negativa.

É importante entender que a energia interna E_{int} é uma função do estado do sistema, assim como P, V e T são funções do estado do sistema. Considere um gás em algum estado inicial (P_i,V_i). A temperatura T_i pode ser determinada pela equação de estado. Por exemplo, se o gás é ideal, $T_i = P_iV_i/(nR)$. A energia interna $E_{int,i}$ também depende apenas do estado do gás, que é determinado por quaisquer duas variáveis de estado, como P e V, P e T, ou V e T. Se aquecemos ou resfriamos lentamente o gás, e se trabalhamos sobre o gás ou deixamos que ele realize trabalho, ele se moverá através de uma seqüência de estados; isto é, ele terá valores diferentes para as funções de estado P, V, T e E_{int}.

Por outro lado, o calor Q e o trabalho W não são funções do estado do sistema. Isto é, não há funções Q e W associadas a nenhum estado particular do gás. Podemos conduzir o gás através de uma seqüência de estados, iniciando e terminando no estado (P_i,V_i), durante a qual o gás realiza trabalho positivo e absorve uma quantidade igual de calor. Ou podemos conduzi-lo através de uma seqüência diferente de estados, durante a qual trabalho é realizado sobre o gás e calor é liberado por ele. Calor não é algo que esteja contido em um sistema. O calor é uma medida da energia que é transferida de um sistema para outro em razão de uma diferença de temperatura. Trabalho é uma medida da energia que é transferida de um sistema para outro porque o ponto de aplicação de uma força exercida por um dos sistemas sobre o outro sofre um deslocamento com uma componente que é paralela à força.

Para quantidades muito pequenas de calor absorvido, de trabalho realizado ou de variações de energia interna, é comum escrever-se a Equação 18-10 como

$$dE_{int} = dQ_{entra} + dW_{sobre} \qquad 18\text{-}11$$

Nesta equação, dE_{int} é a diferencial da função energia interna. Entretanto, nem dQ_{entra} nem dW_{sobre} são diferenciais de nenhuma função. A rigor, dQ_{entra} meramente representa uma pequena quantidade de energia transferida para ou pelo sistema, em razão de aquecimento ou resfriamento, e dW_{sobre} representa uma pequena quantidade de energia transferida para ou pelo sistema através de trabalho realizado sobre ele ou por ele.

! Se, depois, o gás retorna ao seu estado original (P_i,V_i), a temperatura T e a energia interna E_{int} devem ser iguais aos valores originais.

! É correto dizer que a energia interna de um sistema aumentou, mas não é correto dizer que o trabalho de um sistema aumentou ou que o calor de um sistema aumentou.

18-4 A ENERGIA INTERNA DE UM GÁS IDEAL

A energia cinética de translação K das moléculas em um gás *ideal* está relacionada à temperatura absoluta T pela Equação 17-20:

$$K = \tfrac{3}{2}nRT$$

onde n é o número de moles do gás e R é a constante universal dos gases. Se a energia interna de um gás é apenas a energia cinética de translação, então $E_{int} = K$ e

$$E_{int} = \tfrac{3}{2}nRT \qquad 18\text{-}12$$

Então, a energia interna dependerá apenas da temperatura do gás, e não de seu volume ou da pressão. Se as moléculas tiverem outros tipos de energia além da energia cinética de translação, como energia rotacional, a energia interna será maior do que a

dada pela Equação 18-12. Mas, de acordo com o teorema da eqüipartição da energia (Capítulo 17, Seção 4), a energia média associada a qualquer grau de liberdade será $\frac{1}{2}RT$ por mol ($\frac{1}{2}kT$ por molécula) e, novamente, a energia interna dependerá apenas da temperatura e não do volume ou da pressão.

Podemos imaginar que a energia interna de um gás *real* deve incluir outros tipos de energia, dependentes da pressão e do volume do gás. Suponha, por exemplo, que moléculas vizinhas do gás exerçam forças atrativas umas sobre as outras. Então, trabalho é necessário para aumentar a separação entre as moléculas. Assim, se a distância média entre as moléculas aumentar, a energia potencial associada à atração molecular aumentará. A energia interna do gás dependerá, portanto, do volume do gás, além de sua temperatura.

Joule, usando um aparato semelhante ao mostrado na Figura 18-5, realizou um experimento simples, porém interessante, para determinar se a energia interna de um gás depende, ou não, de seu volume. O compartimento da esquerda na Figura 18-5 contém, inicialmente, um gás, e o compartimento da direita está evacuado. Uma válvula, inicialmente fechada, conecta os dois compartimentos. O sistema todo está termicamente isolado da vizinhança por paredes rígidas; logo, nenhuma energia pode ser transferida para ou do sistema, nem por aquecimento nem por resfriamento, e nenhuma energia pode ser transferida através de trabalho realizado sobre o gás ou por ele. Quando a válvula é aberta, o gás rapidamente entra na câmara evacuada. Este processo é chamado de **expansão livre**. O gás acaba atingindo o equilíbrio térmico consigo mesmo. Como nenhum trabalho foi realizado sobre o gás e nenhum calor foi transferido para ele, a energia interna final do gás deve ser igual à sua energia interna inicial. Se as moléculas do gás exercem forças atrativas umas sobre as outras, a energia potencial associada a estas forças aumentará quando o volume aumentar. Como a energia é conservada, a energia cinética de translação, portanto, diminuirá, o que resultará em uma diminuição da temperatura do gás.

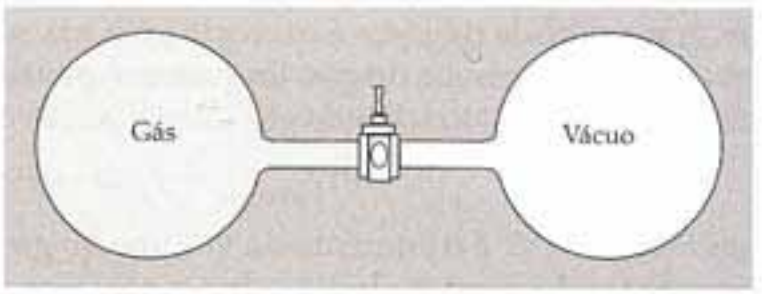


FIGURA 18-5 Expansão livre de um gás. Quando a válvula é aberta, o gás se expande rapidamente para dentro da câmara de vácuo. Como nenhum trabalho é realizado sobre o gás e o sistema está todo ele termicamente isolado, as energias internas inicial e final do gás são iguais.

Quando Joule realizou este experimento, ele descobriu que a temperatura final era igual à temperatura inicial. Experimentos subseqüentes confirmaram este resultado para gases com pequenas massas específicas. Este resultado implica que, para um gás com pequena massa específica — isto é, para um gás ideal — a temperatura depende apenas da energia interna, ou, como usualmente dizemos, a energia interna depende apenas da temperatura. Entretanto, se o experimento é realizado com uma grande quantidade de gás inicialmente no compartimento da esquerda e, portanto, com uma massa específica elevada, então a temperatura após a expansão é levemente mais baixa do que a temperatura antes da expansão. Este resultado indica que existe uma pequena atração entre as moléculas de um gás.

18-5 TRABALHO E O DIAGRAMA *PV* PARA UM GÁS

Em muitos tipos de motores, um gás realiza trabalho expandindo-se contra um pistão móvel. Por exemplo, em uma máquina a vapor, água é aquecida em uma caldeira para produzir vapor. O vapor, então, realiza trabalho à medida que se expande e conduz um pistão. Em um motor de automóvel, uma mistura de vapor de gasolina e ar sofre ignição, entrando em combustão. As altas temperatura e pressões resultantes fazem com que o gás se expanda rapidamente, conduzindo o pistão e realizando trabalho. Nesta seção, vemos como podemos descrever matematicamente o trabalho realizado por um gás em expansão.

PROCESSOS QUASE-ESTÁTICOS

A Figura 18-6 mostra um gás ideal confinado em um cilindro com um pistão bem ajustado e que supomos sem atrito. Se o pistão se move, o volume do gás varia. A temperatura ou a pressão, ou ambos, também devem variar, pois estas três variáveis estão relacionadas pela equação de estado $PV = nRT$. Se empurramos repentinamente o pistão para comprimir o gás a pressão será, inicialmente, maior nas proximidades

do pistão do que longe dele. O gás acabará por atingir novos valores de equilíbrio para a pressão e a temperatura. Não podemos determinar variáveis macroscópicas como T, P ou E_{int} para todo o sistema antes que o equilíbrio seja restabelecido no gás. Entretanto, se movemos o pistão lentamente, em pequenas etapas, e permitimos que o equilíbrio seja restabelecido após cada etapa, podemos comprimir ou expandir o gás de tal maneira que este nunca esteja muito distante de um estado de equilíbrio. Durante este tipo de processo, chamado de **processo quase-estático**, o gás se move através de uma série de estados de equilíbrio. Na prática, é possível realizar processos quase-estáticos com boa aproximação.

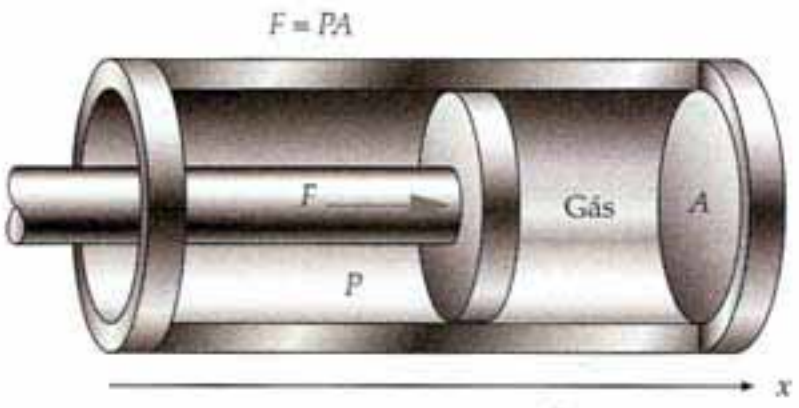


FIGURA 18-6 Gás confinado em um cilindro termicamente isolado com um pistão móvel. Se o pistão se move uma distância dx, o volume do gás varia de $dV = A\,dx$. O trabalho realizado pelo gás é $PA\,dx = P\,dV$, onde P é a pressão.

Vamos começar com um gás em alta pressão que se expande quase-estaticamente. A magnitude da força F exercida pelo gás sobre o pistão é PA, onde A é a área do pistão e P é a pressão do gás. Enquanto o pistão se move por uma pequena distância dx, o trabalho realizado *pelo* gás *sobre* o pistão é

$$dW_{\text{pelo gás}} = F_x\,dx = PA\,dx = P\,dV \qquad 18\text{-}13$$

onde $dV = A\,dx$ é o aumento do volume do gás. Durante a expansão o pistão exerce uma força de magnitude PA sobre o gás, mas no sentido oposto ao da força do gás sobre o pistão. Portanto, o trabalho realizado *pelo* pistão *sobre* o gás é exatamente o negativo do trabalho realizado *pelo* gás

$$dW_{\text{sobre o gás}} = -dW_{\text{pelo gás}} = -P\,dV \qquad 18\text{-}14$$

Observe que, para uma expansão, dV é positivo, o gás realiza trabalho sobre o pistão e, portanto, $dW_{\text{sobre o gás}}$ é negativo; para uma compressão, dV é negativo, trabalho é realizado sobre o gás e, portanto, $dW_{\text{sobre o gás}}$ é positivo.

O trabalho realizado sobre o gás durante uma expansão ou compressão, de um volume V_i até um volume V_f, é

$$W_{\text{sobre o gás}} = -\int_{V_i}^{V_f} P\,dV \qquad 18\text{-}15$$

TRABALHO REALIZADO SOBRE UM GÁS

Para calcular este trabalho, precisamos conhecer como varia a pressão durante a expansão ou compressão. As várias possibilidades podem ser ilustradas mais facilmente usando um diagrama PV.

DIAGRAMAS *PV*

Podemos representar os estados de um gás em um diagrama P *versus* V. Como, ao especificar P e V, estamos especificando o estado do gás, cada ponto do diagrama PV indica um estado particular do gás. A Figura 18-7 mostra um diagrama PV com uma linha horizontal representando uma série de estados com o mesmo valor de P. Esta linha representa uma *compressão* à pressão constante. Este processo é chamado de **compressão isobárica**. Para uma variação de volume ΔV (ΔV é negativo, para uma compressão), temos

$$W_{\text{sobre}} = -\int_{V_i}^{V_f} P\,dV = -P\int_{V_i}^{V_f} dV = -P\,\Delta V = |P\,\Delta V|$$

que é igual à área sombreada sob a curva (a linha) na figura. Para uma compressão, o trabalho realizado sobre o gás é igual à área sob a curva P *versus* V. (Para uma expansão, o trabalho realizado sobre o gás é igual ao valor negativo da área sob a curva P *versus* V.) Como freqüentemente as pressões são dadas em atmosferas e os volumes são dados em litros, é conveniente ter um fator de conversão de litro-atmosfera para joule:

$$1\ \text{L}\cdot\text{atm} = (10^{-3}\ \text{m}^3)(101{,}325 \times 10^3\ \text{N/m}^2) \approx 101{,}3\ \text{J} \qquad 18\text{-}16$$

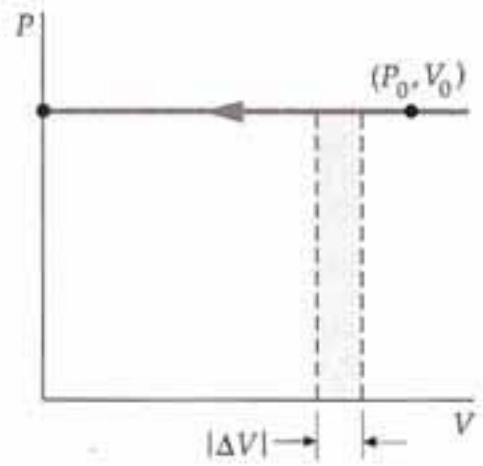


FIGURA 18-7 Cada ponto em um diagrama PV, tal como (P_0,V_0), representa um particular estado do gás. A linha horizontal representa estados com uma pressão constante P_0. A área sombreada, $P_0|\Delta V|$, representa o trabalho realizado sobre o gás ao ser comprimido de $|\Delta V|$.

PROBLEMA PRÁTICO 18-4

Se 5,00 L de um gás ideal, a uma pressão de 2,00 atm, é resfriado de forma que seu volume é reduzido, à pressão constante, até atingir 3,00 L, qual é o trabalho realizado sobre o gás?

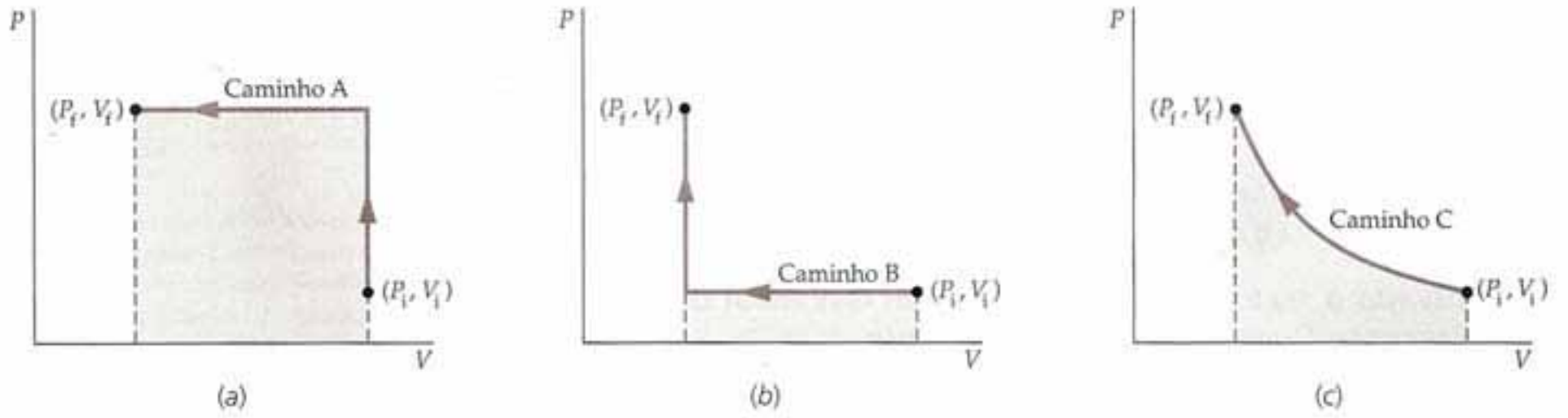


FIGURA 18-8 Três caminhos em diagramas PV ligando um estado inicial (P_i,V_i) a um estado final (P_f,V_f). A área sombreada indica o trabalho realizado sobre o gás ao longo de cada caminho.

A Figura 18-8 mostra três diferentes caminhos possíveis em um diagrama PV para um gás que está inicialmente no estado (P_i,V_i) e atinge o estado final (P_f,V_f). Supomos o gás ideal e escolhemos os estados inicial e final com a mesma temperatura, de modo que $P_iV_i = P_fV_f = nRT$. Como a energia interna depende apenas da temperatura, as energias internas inicial e final também são iguais.

Na Figura 18-8*a*, o gás é aquecido **isometricamente** (a volume constante)* até atingir a pressão P_f, e depois é resfriado isobaricamente (à pressão constante) até atingir o volume V_f. O trabalho realizado sobre o gás ao longo do trecho com volume constante (vertical) do caminho A é zero; ao longo do trecho com pressão constante (horizontal) do caminho A, este trabalho vale

$$P_f|V_f - V_i| = -P_f(V_f - V_i).$$

Na Figura 18-8*b*, o gás é primeiramente resfriado à pressão constante até atingir o volume V_f, e depois é aquecido a volume constante até atingir a pressão P_f. O trabalho realizado sobre o gás ao longo deste caminho é $P_i|V_f - V_i| = -P_i(V_f - V_i)$, que é muito menor do que o realizado ao longo do caminho mostrado na Figura 18-8*a*, como pode ser visto comparando-se as regiões sombreadas na Figura 18-8*a* e na Figura 18-8*b*.

Na Figura 18-8*c*, o caminho C representa uma compressão **isotérmica**, significando que a temperatura permanece constante. (Para manter a temperatura constante durante a compressão é preciso que energia seja retirada do gás, na forma de calor, durante o processo.) Podemos calcular o trabalho realizado sobre o gás ao longo do caminho C usando $P = nRT/V$. Assim, o trabalho realizado sobre gás enquanto ele é comprimido de V_i até V_f, ao longo do caminho C, é

$$W_{\text{sobre}} = -\int_{V_i}^{V_f} P\,dV = -\int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V}\,dV$$

Como T é constante para um processo isotérmico, podemos fatorá-lo da integral. Temos, então

$$W_{\text{isoterma}} = -nRT\int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = -nRT\ln\frac{V_f}{V_i} = nRT\ln\frac{V_i}{V_f} \qquad 18\text{-}17$$

TRABALHO REALIZADO SOBRE UM GÁS DURANTE UMA COMPRESSÃO ISOTÉRMICA

Vemos que a quantidade de trabalho realizado sobre o gás é diferente para cada um dos processos ilustrados. A variação da energia interna do gás depende dos estados inicial e final do gás, mas não do caminho escolhido. A variação da energia interna é igual ao trabalho realizado sobre o gás mais o calor transferido para o gás. Assim, podemos ver que, como o trabalho é diferente para cada um dos processos ilustrados, a quantidade de calor transferido também deve ser diferente para ca-

Veja o* Tutorial Matemático *para mais informações sobre
Logaritmos

* Processos com volume constante também são chamados de *processos isocóricos* ou *processos isovolumétricos*.

da processo. Esta discussão ilustra o fato de que tanto o trabalho realizado quanto a quantidade de calor transferido dependem apenas de como o sistema executa a transição de um estado para outro, mas a variação da energia interna do sistema não tem esta dependência.

ESTRATÉGIA PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Calculando o Trabalho Realizado por um Gás Ideal Durante um Processo Quase-estático com Vínculo

SITUAÇÃO O incremento do trabalho realizado por um gás é igual à pressão vezes o incremento do volume. Isto é, $dW_{\text{pelo gás}} = P\,dV$. Segue que $W_{\text{pelo gás}} = \int_{V_i}^{V_f} P dV$. O vínculo do processo quase-estático é que determina como avaliar esta integral.

SOLUÇÃO

1. Se o volume V é constante, então dV é igual a zero e $W_{\text{pelo gás}} = 0$.
2. Se a pressão P é constante, então $W_{\text{pelo gás}} = P \int_{V_i}^{V_f} dV = P(V_f - V_i)$
3. Se a temperatura T é constante, então $P = nRT/V$ e

$$W_{\text{pelo gás}} = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$$

4. Se nenhuma energia é trocada com o gás na forma de calor, então veja a Seção 18-9.

CHECAGEM Se o volume aumenta, então o $W_{\text{pelo gás}}$ deve ser positivo e vice-versa.

Exemplo 18-7 Trabalho Realizado sobre um Gás Ideal

Um gás ideal passa por um processo cíclico, do ponto A para o ponto B, do ponto B para o ponto C, do ponto C para o ponto D e de volta para o ponto A, como mostra a Figura 18-9. O gás, que inicialmente tem um volume de 1,00 L e uma pressão de 2,00 atm, expande-se à pressão constante até atingir o volume de 2,50 L e, depois, é resfriado a volume constante até atingir a pressão de 1,00 atm. Em seguida, ele é comprimido à pressão constante até atingir, novamente, o volume de 1,00 L, e, depois, é aquecido a volume constante até retornar ao seu estado original. Determine o trabalho realizado sobre o gás e a quantidade total de calor transferida para ele durante o ciclo.

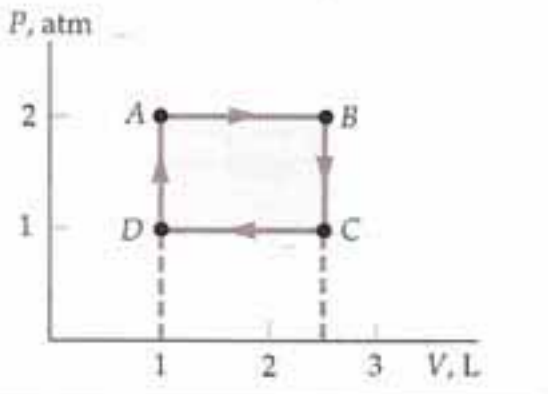


FIGURA 18-9

SITUAÇÃO Calculamos o trabalho realizado durante cada etapa. Como $\Delta E_{\text{int}} = 0$ para qualquer ciclo completo, a primeira lei da termodinâmica implica que a quantidade total de calor transferido para o gás, somada ao trabalho total realizado sobre o gás, é igual a zero.

SOLUÇÃO

1. Do ponto A até o ponto B o processo é uma expansão à pressão constante e, portanto, o trabalho realizado sobre o gás tem um valor negativo. O trabalho realizado sobre o gás é igual ao valor negativo da área sombreada sob a curva AB, mostrada na Figura 18-10*a*:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= -P\,\Delta V = -P(V_B - V_A) \\ &= -(2{,}00\ \text{atm})(2{,}50\ \text{L} - 1{,}00\ \text{L}) \\ &= -3{,}00\ \text{L}\cdot\text{atm} \end{aligned}$$

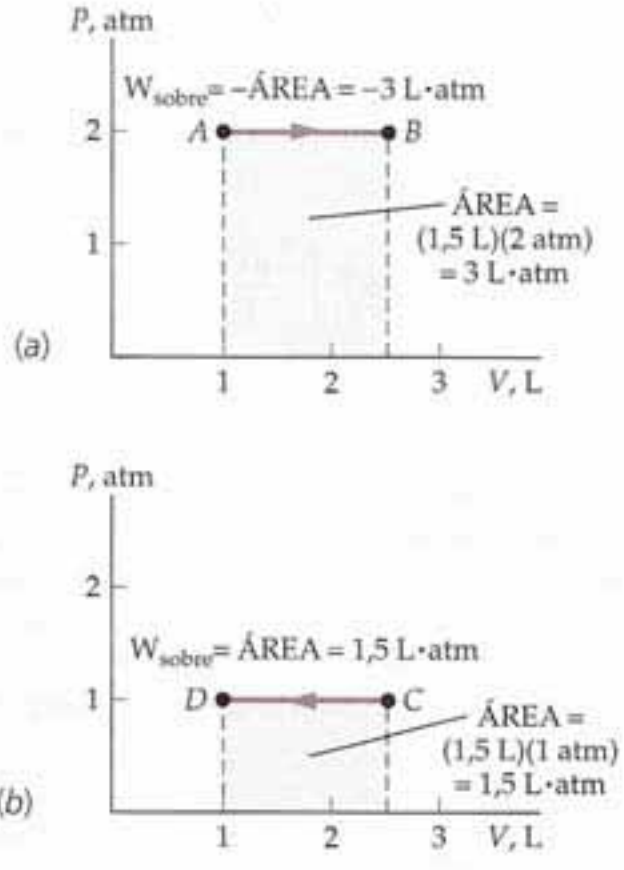


FIGURA 18-10 (*a*) O trabalho realizado sobre o gás durante a expansão de A até B é igual ao negativo da área sob a curva. (*b*) O trabalho realizado sobre o gás durante a compressão de C até D é igual à área sob a curva.

2. Converta as unidades para joules: $W_{AB} = -3{,}00\ \text{L}\cdot\text{atm} \times \dfrac{101{,}3\ \text{J}}{1\ \text{L}\cdot\text{atm}} = -304\ \text{J}$

3. Do ponto *B* até o ponto *C* (Figura 18-9) o gás resfria a volume constante e, portanto, o trabalho realizado é zero: $W_{BC} = 0$

4. Enquanto o gás sofre a compressão à pressão constante, do ponto *C* até o ponto *D*, o trabalho realizado sobre ele tem um valor positivo. Este trabalho é igual à área sob a curva *CD*, mostrada na Figura 18-10*b*:
$$W_{CD} = -P\,\Delta V = -P(V_D - V_C)$$
$$= -(1{,}00\ \text{atm})(1{,}00\ \text{L} - 2{,}50\ \text{L})$$
$$= 1{,}50\ \text{L}\cdot\text{atm} = 152\ \text{J}$$

5. Enquanto o gás é aquecido de volta ao seu estado original *A* o volume é, novamente, constante (Figura 18-9) e, portanto, nenhum trabalho é realizado: $W_{DA} = 0$

6. O trabalho total realizado sobre o gás é a soma dos trabalhos realizados ao longo de cada passo:
$$W_{\text{total}} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$$
$$= (-304\ \text{J}) + 0 + 152\ \text{J} + 0 = \boxed{-152\ \text{J}}$$

7. Como o gás volta ao seu estado original, a variação total da energia interna é zero: $\Delta E_{\text{int}} = 0$

8. A quantidade de calor transferido para o gás é determinada usando-se a primeira lei da termodinâmica:
$$\Delta E_{\text{int}} = Q_{\text{entra}} + W_{\text{sobre}}$$
$$\text{logo}\quad Q_{\text{entra}} = \Delta E_{\text{int}} - W_{\text{sobre}} = 0 - (-152\ \text{J}) = \boxed{152\ \text{J}}$$

CHECAGEM Esperamos que a energia efetiva transferida para o gás seja zero em um processo cíclico, o que é o caso neste Exemplo, porque o trabalho realizado sobre o gás é de −152 J e a quantidade de calor transferido para o gás é de +152 J.

INDO ALÉM O trabalho realizado pelo gás é igual ao valor negativo do trabalho realizado sobre o gás; logo, o trabalho total realizado pelo gás durante o ciclo é de +152 J. Durante o ciclo, o gás absorve da vizinhança 152 J de calor e realiza 152 J de trabalho sobre a vizinhança. Este processo leva o gás de volta ao seu estado inicial. O trabalho total realizado pelo gás é igual à área envolvida pelo ciclo da Figura 18-9. Tais processos cíclicos têm aplicações importantes para máquinas térmicas, como veremos no Capítulo 19.

18-6 CAPACIDADES TÉRMICAS DOS GASES

A determinação da capacidade térmica de uma substância fornece informações sobre sua energia interna, que está relacionada à sua estrutura molecular. Para todas as substâncias que se expandem quando aquecidas, a capacidade térmica à pressão constante C_P é maior do que a capacidade térmica a volume constante C_V. Se calor é absorvido por uma substância à pressão constante, a substância se expande e realiza trabalho positivo sobre a vizinhança (Figura 18-11). Portanto, é preciso mais calor para se obter uma dada variação de temperatura à pressão constante do que para se obter a mesma variação de temperatura quando o volume é mantido constante. A expansão é geralmente desprezível para sólidos e líquidos e, portanto, para eles $C_P \approx C_V$. Mas um gás, aquecido à pressão constante, expande-se rapidamente e realiza uma quantidade significativa de trabalho, o que faz com que $C_P - C_V$ não seja desprezível.

Se calor é absorvido por um gás a volume constante, nenhum trabalho é realizado (Figura 18-12); logo, a quantidade de calor transferido para o gás é igual ao aumento da energia interna do gás. Chamando de Q_V a quantidade de calor transferido para o gás a volume constante, temos

$$Q_V = C_V\,\Delta T$$

Como $W = 0$, temos, da primeira lei da termodinâmica,

$$\Delta E_{\text{int}} = Q_V + W = Q_V$$

Logo,

$$\Delta E_{\text{int}} = C_V\,\Delta T$$

Tomando o limite quando ΔT tende a zero, obtemos

$$dE_{\text{int}} = C_V\,dT \qquad 18\text{-}18a$$

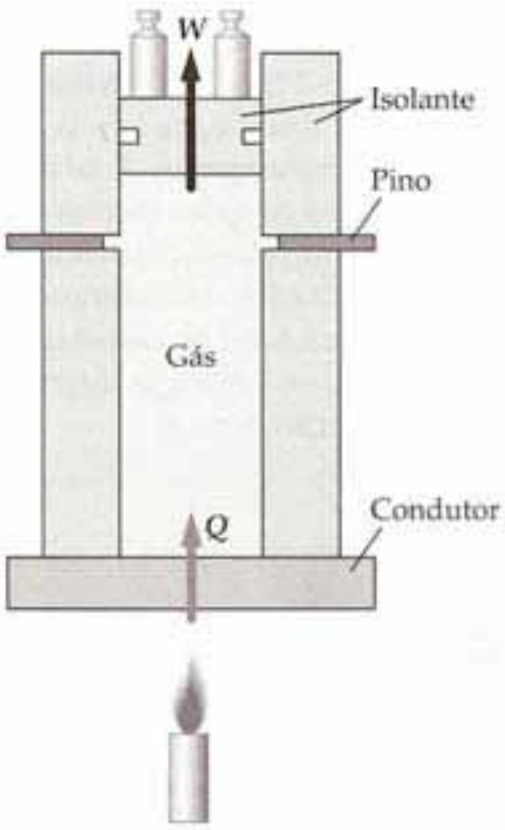


FIGURA 18-11 Calor é absorvido e a pressão permanece constante. O gás se expande, realizando trabalho sobre o pistão.

e

$$C_V = \frac{dE_{int}}{dT} \qquad 18\text{-}18b$$

A capacidade térmica a volume constante é a taxa de variação da energia interna com a temperatura. Como E_{int} e T são funções de estado, as Equações 18-18*a* e 18-18*b* valem para qualquer processo.

Vamos, agora, calcular a diferença $C_P - C_V$ para um gás ideal. Da definição de C_P, a quantidade de calor transferido para o gás à pressão constante é

$$Q_P = C_P \Delta T$$

Da primeira lei da termodinâmica,

$$\Delta E_{int} = Q_P + W_{sobre} = Q_P - P\,\Delta V$$

Então,

$$\Delta E_{int} = C_P \Delta T - P\,\Delta V \qquad \text{ou} \qquad C_P \Delta T = \Delta E_{int} + P\,\Delta V$$

Para variações infinitesimais, fica

$$C_P\,dT = dE_{int} + P\,dV$$

Usando a Equação 18-18*a* para dE_{int}, obtemos

$$C_P\,dT = C_V\,dT + P\,dV \qquad 18\text{-}19$$

A pressão, o volume e a temperatura para um gás ideal estão relacionados por

$$PV = nRT$$

Diferenciando os dois lados da lei dos gases ideais, obtemos

$$P\,dV + V\,dP = nR\,dT$$

Para um processo à pressão constante, $dP = 0$; logo,

$$P\,dV = nR\,dT$$

Substituindo $P\,dV$ por $nR\,dT$ na Equação 18-19, temos

$$C_P\,dT = C_V\,dT + nR\,dT = (C_V + nR)\,dT$$

Logo,

$$C_P = C_V + nR \qquad 18\text{-}20$$

mostrando que, para um gás ideal, a capacidade térmica à pressão constante é maior do que a capacidade térmica a volume constante pela quantidade nR.

A Tabela 18-3 lista valores das capacidades térmicas molares c_P' e c_V' medidas para vários gases. Observe, na tabela, que a previsão de gás ideal, $c_P' - c_V' = R$, vale muito bem para todos os gases. A tabela também mostra que c_V' vale, aproximadamente, $1{,}5R$ para todos os gases monoatômicos, $2{,}5R$ para todos os gases diatômicos e mais do que $2{,}5R$ para gases constituídos de moléculas mais complexas. Podemos entender estes resultados considerando o modelo molecular de um gás (Capítulo 17). A energia cinética total de translação de n moles de um gás é $K_{trans} = \frac{3}{2}nRT$ (Equação 17-20). Assim, se a energia interna de um gás é constituída apenas de energia cinética de translação, temos

$$E_{int} = \tfrac{3}{2}nRT \qquad 18\text{-}21$$

As capacidades térmicas são, portanto,

$$C_V = \frac{dE_{int}}{dT} = \tfrac{3}{2}nR \qquad 18\text{-}22$$

C_V PARA UM GÁS MONOATÔMICO IDEAL

e

$$C_P = C_V + nR = \tfrac{5}{2}nR \qquad 18\text{-}23$$

C_P PARA UM GÁS MONOATÔMICO IDEAL

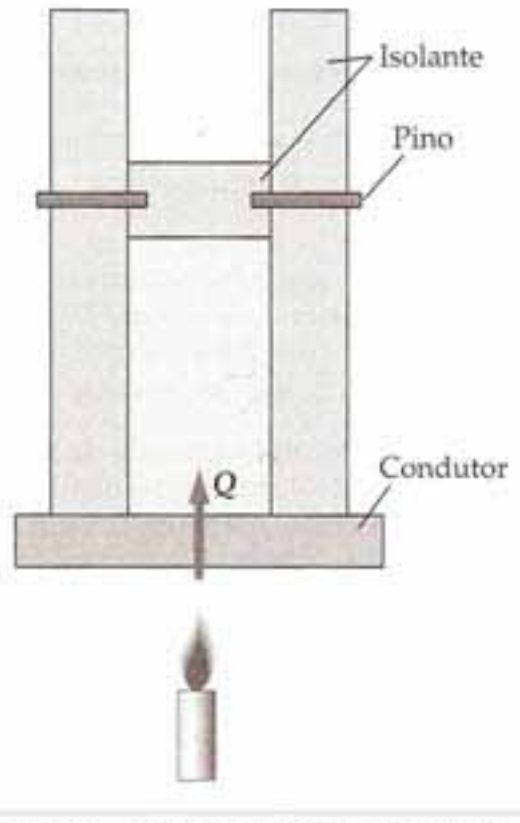


FIGURA 18-12 O pistão é mantido fixo através de pinos. Calor é absorvido a volume constante, de modo que nenhum trabalho é realizado e todo o calor é transformado em energia interna do gás.

Tabela 18-3 Capacidades Térmicas Molares de Vários Gases a 25°C, em J/mol · K

Gás	c'_P	c'_V	c'_V/R	$c'_P - c'_V$	$(c'_P - c'_V)/R$
Monoatômico					
He	20,79	12,52	1,51	8,27	0,99
Ne	20,79	12,68	1,52	8,11	0,98
Ar	20,79	12,45	1,50	8,34	1,00
Kr	20,79	12,45	1,50	8,34	1,00
Xe	20,79	12,52	1,51	8,27	0,99
Diatômico					
N_2	29,12	20,80	2,50	8,32	1,00
H_2	28,82	20,44	2,46	8,38	1,01
O_2	29,37	20,98	2,52	8,39	1,01
CO	29,04	20,74	2,49	8,30	1,00
Poliatômico					
CO_2	36,62	28,17	3,39	8,45	1,02
N_2O	36,90	28,39	3,41	8,51	1,02
H_2S	36,12	27,36	3,29	8,76	1,05

Os resultados da Tabela 18-3 apresentam boa concordância com estas previsões para gases monoatômicos mas, para outros gases, as capacidades térmicas são maiores do que as previstas pelas Equações 18-22 e 18-23. A energia interna de um gás constituído de moléculas diatômicas ou mais complicadas é, evidentemente, maior do que $\frac{3}{2}nRT$. A razão é que estas moléculas podem ter outros tipos de energia, como energia de rotação ou de vibração, além da energia cinética de translação.

Exemplo 18-8 Aquecendo, Resfriando e Comprimindo um Gás Ideal

Um sistema, constituído de 0,32 mol de um gás monoatômico, com $c'_V = \frac{3}{2}R$, ocupa um volume de 2,2 L à pressão de 2,4 atm, como representado pelo ponto A da Figura 18-13. O sistema é conduzido através de um ciclo formado por três processos:

1. O gás é aquecido à pressão constante até atingir o volume de 4,4 L no ponto B.
2. O gás é resfriado a volume constante até que a pressão diminua para 1,2 atm (ponto C).
3. O gás sofre uma compressão isotérmica de volta para o ponto A.

(*a*) Qual é a temperatura nos pontos A, B e C? (*b*) Determine W, Q e ΔE_{int} para cada processo e para o ciclo inteiro.

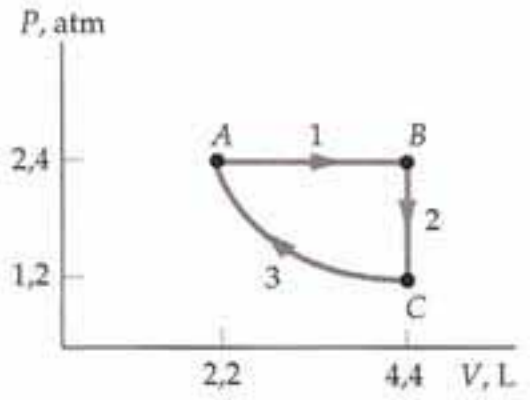


FIGURA 18-13 O trabalho total realizado *sobre* o gás durante um ciclo é o negativo da área envolvida pela curva. O trabalho total realizado *pelo* gás durante um ciclo é a área envolvida pela curva.

SITUAÇÃO Você pode determinar a temperatura, em todos os pontos, a partir da lei dos gases ideais. Você pode determinar, para cada processo, o trabalho, determinando a área sob a curva, e o calor transferido, usando a capacidade térmica dada e as temperaturas inicial e final de cada processo. No processo 3, T é constante, de forma que $\Delta E_{int} = 0$ e o calor absorvido pelo gás somado ao trabalho realizado sobre ele é igual a zero.

SOLUÇÃO

(*a*) Determine as temperaturas nos pontos A, B e C usando a lei dos gases ideais:

$$T_C = T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = \frac{(2{,}4\text{ atm})(2{,}2\text{ L})}{(0{,}32\text{ mol})(0{,}08206\text{ L}\cdot\text{atm}/(\text{mol}\cdot\text{K}))}$$

$$= 201\text{ K} = \boxed{2{,}0 \times 10^2\text{ K}}$$

$$T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = \frac{P_A 2V_A}{nR} = 2\frac{P_A V_A}{nR} = 2T_A = 402\text{ K} = \boxed{4{,}0 \times 10^2\text{ K}}$$

(*b*) 1. Para o processo 1, use $W_1 = -P_A\,\Delta V$ para calcular o trabalho e $C_P = \frac{5}{2}nR$ para calcular o calor Q_1. Então, use W_1 e Q_1 para calcular $\Delta E_{\text{int }1}$:

$$W_1 = -P_A\,\Delta V = -P_A(V_B - V_A) = -(2{,}4\text{ atm})(2{,}2\text{ L})$$
$$= -5{,}28\text{ L}\cdot\text{atm}\left(\frac{101{,}3\text{ J}}{1\text{ L}\cdot\text{atm}}\right) = -534{,}9\text{ J} = \boxed{-0{,}53\text{ kJ}}$$

$$Q_1 = C_P\,\Delta T = \tfrac{5}{2}nR\,\Delta T = \tfrac{5}{2}(0{,}32\text{ mol})(8{,}314\text{ J/(mol}\cdot\text{K)})(201\text{ K})$$
$$= 1337\text{ J} = \boxed{1{,}3\text{ kJ}}$$

$$\Delta E_{\text{int }1} = Q_1 + W_1 = 1337\text{ J} - 534{,}9\text{ J} = 802\text{ J} = \boxed{0{,}80\text{ kJ}}$$

2. Para o processo 2, use $C_V = \frac{3}{2}nR$ e $T_C - T_B$ do passo 1 para determinar Q_2:
Então, como $W_2 = 0$, $\Delta E_{\text{int }2} = Q_2$:

$$W_2 = \boxed{0}$$

$$Q_2 = C_V\,\Delta T = \tfrac{3}{2}nR\,\Delta T = \tfrac{3}{2}(0{,}32\text{ mol})[8{,}314\text{ J/(mol}\cdot\text{K)}](-201\text{ K})$$
$$= -802\text{ J} = \boxed{-0{,}80\text{ kJ}}$$

$$\Delta E_{\text{int }2} = W_2 + Q_2 = 0 + (-802\text{ J}) = \boxed{-0{,}80\text{ kJ}}$$

3. Calcule W_3 de $W = -nRT\ln(V_A/V_C)$ (Equação 18-17) na compressão isotérmica. Então, como $\Delta E_{\text{int }3} = 0$, $Q_3 = -W_3$:

$$W_3 = nRT_A \ln\frac{V_A}{V_C} = (0{,}32\text{ mol})[8{,}314\text{ J/(mol}\cdot\text{K)}](-201\text{ K})\ln 2{,}0$$
$$= 371\text{ J} = \boxed{0{,}37\text{ kJ}}$$

$$\Delta E_{\text{int }3} = \boxed{0}$$

$$Q_3 = \Delta E_{\text{int }3} - W_3 = -371\text{ J} = \boxed{-0{,}37\text{ kJ}}$$

4. Determine o trabalho total W, o calor total Q e a variação total ΔE_{int} somando as quantidades encontradas nos passos 2, 3 e 4:

$$W_{\text{total}} = W_1 + W_2 + W_3 = (-535\text{ J}) + 0 + 371\text{ J} = \boxed{-0{,}16\text{ kJ}}$$

$$Q_{\text{total}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1337\text{ J} + (-802\text{ J}) + (-371\text{ J})$$
$$= \boxed{0{,}16\text{ kJ}}$$

$$\Delta E_{\text{int total}} = \Delta E_{\text{int }1} + \Delta E_{\text{int }2} + \Delta E_{\text{int }3}$$
$$= 802\text{ J} + (-802\text{ J}) + 0 = \boxed{0{,}00\text{ kJ}}$$

CHECAGEM A variação total da energia interna é zero, como deve ser para um processo cíclico. A soma do trabalho total realizado sobre o gás ao calor total absorvido pelo gás é igual a zero.

INDO ALÉM O trabalho total realizado sobre o gás é igual à área sob a curva *CA* menos a área sob a curva *AB*, o que é igual ao valor negativo da área envolvida pelas três curvas na Figura 18-13.

CAPACIDADES TÉRMICAS E O TEOREMA DA EQÜIPARTIÇÃO

De acordo com o teorema da eqüipartição, enunciado na Seção 4 do Capítulo 17, a energia interna de n moles de um gás deve ser igual a $\frac{1}{2}nRT$ para cada grau de liberdade das moléculas do gás. A capacidade térmica a volume constante de um gás deve, então, ser $\frac{1}{2}nR$ vezes o número de graus de liberdade das moléculas. Da Tabela 18-2, nitrogênio, oxigênio, hidrogênio e monóxido de carbono têm capacidades térmicas molares a volume constante de cerca de $\frac{5}{2}R$. Assim, as moléculas de cada um destes gases têm cinco graus de liberdade. Por volta de 1880, Rudolf Clausius especulou que estes gases deveriam consistir em moléculas diatômicas que podiam girar em torno de dois eixos, o que lhes dava dois graus de liberdade adicionais (Figura 18-14). Sabemos, agora, que estes dois graus de liberdade, adicionais aos três de translação, estão associados com a rotação em torno dos dois eixos, x' e y', perpendiculares à linha que une os átomos. A energia cinética de uma molécula diatômica é, portanto,

$$K = \tfrac{1}{2}mv_x^2 + \tfrac{1}{2}mv_y^2 + \tfrac{1}{2}mv_z^2 + \tfrac{1}{2}I_{x'}\omega_{x'}^2 + \tfrac{1}{2}I_{y'}\omega_{y'}^2$$

A energia interna total de n moles deste tipo de gás é, então,

$$E_{\text{int}} = 5 \times \tfrac{1}{2}nRT = \tfrac{5}{2}nRT \qquad 18\text{-}24$$

e a capacidade térmica a volume constante é

$$C_V = \tfrac{5}{2}nR \qquad 18\text{-}25$$

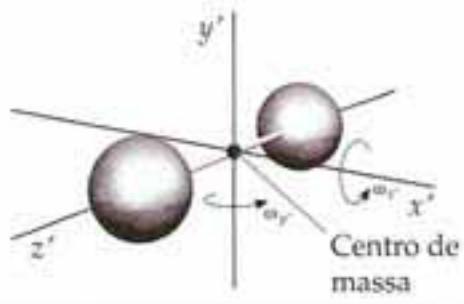


FIGURA 18-14 Modelo de haltere rígido para uma molécula diatômica.

Aparentemente, gases diatômicos não giram em torno da linha que une os dois átomos — se eles girassem, haveria seis graus de liberdade e C_V deveria ser $\frac{6}{2}nR = 3nR$, o que não concorda com os resultados experimentais. Além disso, gases monoatômicos simplesmente não giram. Veremos, na Seção 18-8, que estes fatos desconcertantes são facilmente explicados quando levamos em conta a quantização da quantidade de movimento angular.

Exemplo 18-9 Aquecendo um Gás Ideal Diatômico

Uma amostra, constituída de 2,00 mol de oxigênio a uma pressão inicial de 1,00 atm, é aquecida de 20,0°C para 100,0°C. Suponha válido o modelo de gás ideal para o sistema. (*a*) Que quantidade de calor transferido para a amostra é necessária, se o volume é mantido constante durante o aquecimento? (*b*) Que quantidade de calor transferido para a mostra é necessária, se a pressão é mantida constante? (*c*) Quanto trabalho realiza o gás, na Parte (*b*)?

SITUAÇÃO A quantidade de calor transferido necessária para aquecimento a volume constante é $Q_V = C_V \Delta T$, onde $C_V = \frac{5}{2}nR$ (porque o oxigênio é um gás diatômico). Para aquecimento à pressão constante, $Q_P = C_P \Delta T$, com $C_P = C_V + nR$. Finalmente, a quantidade de trabalho realizado pelo gás é igual ao valor negativo do trabalho realizado sobre o gás, o que pode ser determinado de $\Delta E_{int} = Q_{entra} + W_{sobre}$. (Alternativamente, $W_{pelo} = P\,\Delta V$.)

SOLUÇÃO

(*a*) 1. Escreva a quantidade de calor transferido necessária para volume constante, em termos de C_V e de ΔT:
$$Q_V = C_V \Delta T$$

2. Calcule a quantidade de calor transferido necessária para $\Delta T = 80°C = 80\ K$:
$$Q_V = C_V \Delta T = \tfrac{5}{2}nR\,\Delta T = \tfrac{5}{2}(2{,}00\ mol)[8{,}314\ J/(mol \cdot K)](80{,}0\ K) = \boxed{3{,}33\ kJ}$$

(*b*) 1. Escreva a quantidade de calor transferido necessária para pressão constante, em termos de C_P e de ΔT:
$$Q_P = C_P \Delta T$$

2. Calcule a capacidade térmica à pressão constante:
$$C_P = C_V + nR = \tfrac{5}{2}nR + nR = \tfrac{7}{2}nR$$

3. Calcule a quantidade de calor transferido necessária à pressão constante para $\Delta T = 80\ K$:
$$Q_P = C_P \Delta T = \tfrac{7}{2}(2{,}00\ mol)[8{,}314\ J/(mol \cdot K)](80{,}0\ K) = \boxed{4{,}66\ kJ}$$

(*c*) 1. O trabalho W_{sobre} pode ser determinado a partir da primeira lei da termodinâmica:
$$\Delta E_{int} = Q_{entra} + W_{sobre} \quad \text{logo} \quad W_{sobre} = \Delta E_{int} - Q_{entra}$$

2. A variação da energia interna é igual ao calor transferido a volume constante, que foi calculado na Parte (*a*):
$$\Delta E_{int} = Q_V = C_V \Delta T = \tfrac{5}{2}nR\,\Delta T$$
e
$$Q_P = C_P \Delta T = \tfrac{7}{2}nR\,\Delta T$$
logo
$$W_{sobre} = \Delta E_{int} - Q_P = \tfrac{5}{2}nR\,\Delta T - \tfrac{7}{2}nR\,\Delta T = -nR\,\Delta T = -(2{,}00\ mol)[8{,}314\ J/(mol \cdot K)](80{,}0\ K) = -1{,}33\ kJ$$

3. O trabalho realizado pelo gás à pressão constante é, então:
$$W_{pelo} = -W_{sobre} = \boxed{1{,}33\ kJ}$$

CHECAGEM Observe que o trabalho realizado pelo gás na Parte (*c*) tem um valor positivo. Isto está de acordo com o esperado, porque o gás se expande quando aquecido à pressão constante.

PROBLEMA PRÁTICO 18-5 Determine os volumes inicial e final deste gás a partir da lei dos gases ideais e use-os para calcular o trabalho realizado pelo gás se o calor é adicionado à pressão constante, usando $W_{pelo} = P\,\Delta V$.

Exemplo 18-10 Modos Vibracionais do Dióxido de Carbono *Conceitual*

A molécula de dióxido de carbono consiste em um átomo de carbono localizado diretamente entre dois átomos de oxigênio. Esta molécula tem três modos de vibração distintos. Esboce estes modos em um sistema de referência no qual o centro de massa da molécula esteja em repouso.

SITUAÇÃO Se a molécula não estivesse vibrando, os centros dos átomos estariam ao longo de uma linha reta. Quando vibram, os átomos podem se mover paralela ou perpendicularmente

à linha que passa pelos seus centros. Há dois modos de estiramento nos quais os átomos se movem paralelamente à linha que passa pelos seus centros, e um modo de flexão em que eles se movem perpendicularmente a esta linha.

SOLUÇÃO

1. No modo de estiramento simétrico (Figura 18-15*a*), o átomo de carbono permanece estacionário e os átomos de oxigênio oscilam defasados de 180° entre si. Você consegue perceber por que este modo é, algumas vezes, chamado de modo de respiração?
2. No modo de estiramento anti-simétrico (Figura 18-15*b*), os dois átomos de oxigênio vibram em fase entre si, mas defasados de 180° em relação ao movimento do átomo de carbono.
3. No modo de flexão (Figura 18-15*c*), os dois átomos de oxigênio vibram em fase entre si, mas defasados de 180° em relação ao movimento do átomo de carbono.

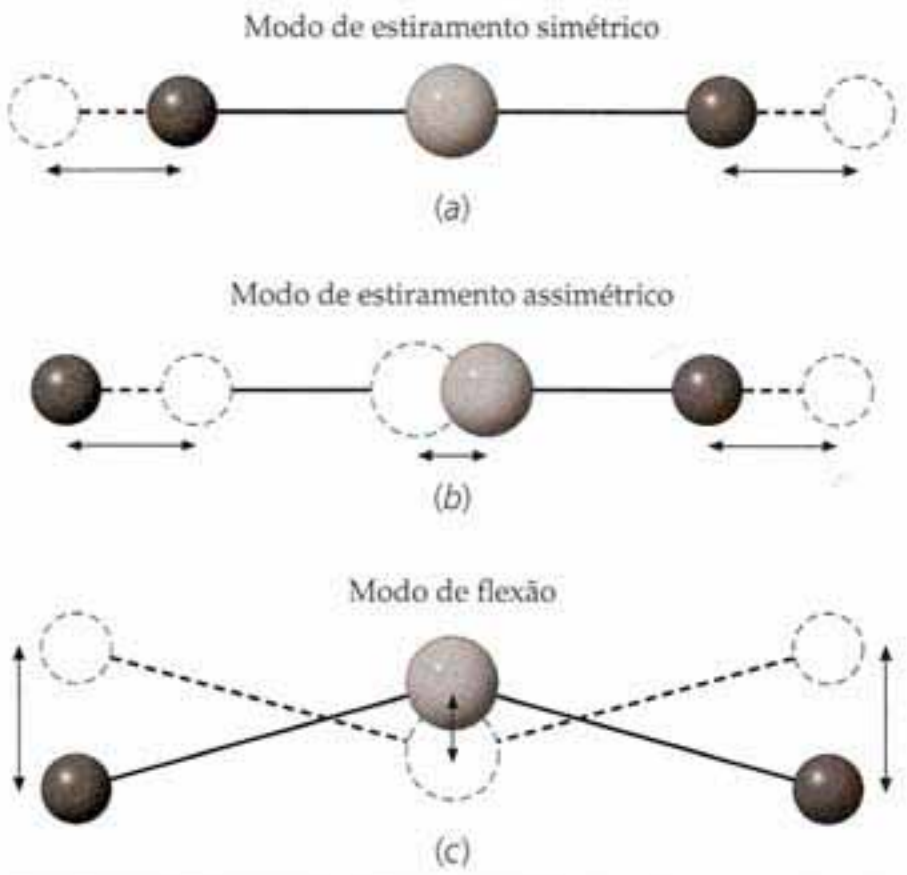


FIGURA 18-15

18-7 CAPACIDADES TÉRMICAS DOS SÓLIDOS

Na Seção 18-1, observamos que todos os metais listados na Tabela 18-1 têm calores específicos molares aproximadamente iguais. A maioria dos sólidos tem capacidades térmicas molares aproximadamente iguais a $3R$:

$$c' = 3R = 24{,}9\ \text{J/mol} \cdot \text{K} \qquad 18\text{-}26$$

Este resultado é conhecido como a **lei de Dulong–Petit**. Podemos compreender esta lei aplicando o teorema da eqüipartição ao modelo simples para sólido mostrado na Figura 18-16. De acordo com este modelo, um sólido consiste em um arranjo regular de átomos no qual cada átomo tem uma posição fixa de equilíbrio e está conectado por molas aos seus vizinhos. Cada átomo pode vibrar nas direções x, y e z. A energia total de um átomo em um sólido é:

$$E = \tfrac{1}{2}mv_x^2 + \tfrac{1}{2}mv_y^2 + \tfrac{1}{2}mv_z^2 + \tfrac{1}{2}k_{ef}x^2 + \tfrac{1}{2}k_{ef}y^2 + \tfrac{1}{2}k_{ef}z^2$$

onde k_{ef} é a constante de força efetiva das molas hipotéticas. Cada átomo tem, portanto, seis graus de liberdade. O teorema da eqüipartição afirma que uma substância em equilíbrio tem uma energia média de $\frac{1}{2}RT$ por mol para cada grau de liberdade. Assim, a energia interna de um mol de um sólido é

$$E_{\text{int m}} = 6 \times \tfrac{1}{2}RT = 3RT \qquad 18\text{-}27$$

o que significa que c' é igual a $3R$.

FIGURA 18-16 Modelo de um sólido no qual os átomos estão ligados uns aos outros por molas. A energia interna da molécula é constituída por energias cinética e potencial de vibração.

Exemplo 18-11 Usando a Lei de Dulong–Petit

A massa molar do cobre é 63,5 g/mol. Use a lei de Dulong–Petit para calcular o calor específico do cobre.

SITUAÇÃO A lei de Dulong–Petit fornece o calor específico molar de um sólido, c'. O calor específico é, então, $c = c'/M$ (Equação 18-6), onde M é a massa molar.

SOLUÇÃO

1. A lei de Dulong–Petit fornece c' em termos de R: $c' = 3R$

2. Usando $M = 63{,}5$ g/mol para o cobre, o calor específico é:

$$c = \frac{c'}{M} = \frac{3R}{M} = \frac{3(8{,}314\ \text{J/(mol} \cdot \text{K)})}{63{,}5\ \text{g/mol}}$$

$$= 0{,}392\ \text{J/(g} \cdot \text{K)} = \boxed{0{,}392\ \text{kJ/(kg} \cdot \text{K)}}$$

CHECAGEM Este resultado difere do valor medido de 0,386 kJ/(kg · K), dado na Tabela 18-1, em menos de 2 por cento.

PROBLEMA PRÁTICO 18-6 O valor medido para o calor específico de certo metal é 1,02 kJ/kg · K. (*a*) Calcule a massa molar deste metal, supondo que ele obedeça à lei de Dulong–Petit. (*b*) Que metal é este?

18-8 FALHA DO TEOREMA DA EQÜIPARTIÇÃO

Embora o teorema da eqüipartição tenha tido um sucesso espetacular ao explicar as capacidades térmicas de gases e sólidos, ele também apresentou falhas espetaculares. Por exemplo, se uma molécula de um gás diatômico, como a da Figura 18-14, girasse em torno da linha que une os átomos, haveria um grau de liberdade a mais. Da mesma forma, uma molécula diatômica não sendo rígida, os dois átomos poderiam vibrar ao longo da linha que os une. Teríamos, então, mais dois graus de liberdade, correspondendo às energias cinética e potencial de vibração. Mas, de acordo com os valores medidos das capacidades térmicas molares na Tabela 18-3, gases diatômicos aparentemente não giram em torno da linha que une os átomos nem vibram. O teorema da eqüipartição não explica esta conseqüência nem o fato de que moléculas monoatômicas não giram em torno de nenhum dos três possíveis eixos perpendiculares do espaço. Além disso, observa-se que as capacidades térmicas dependem da temperatura, ao contrário do que prevê o teorema da eqüipartição. O caso mais espetacular de dependência da capacidade térmica com a temperatura é o do H_2, como mostrado na Figura 18-17. Para temperaturas abaixo de 70 K, c'_V vale $\frac{3}{2}R$ para o H_2, o mesmo que para um gás de moléculas que sofrem translação, mas não giram nem vibram. Para temperaturas entre 250 K e 700 K, $c'_V = \frac{5}{2}R$, que é o valor para moléculas com movimento de translação e de rotação, mas que não vibram. E, para temperaturas acima de 700 K, as moléculas de H_2 começam a vibrar. No entanto, as moléculas se dissociam antes que c'_V atinja $\frac{7}{2}R$. Finalmente, o teorema da eqüipartição prevê um valor constante de $3R$ para a capacidade térmica dos sólidos. Enquanto este resultado vale para quase todos os sólidos a altas temperaturas, ele não vale para temperaturas muito baixas.

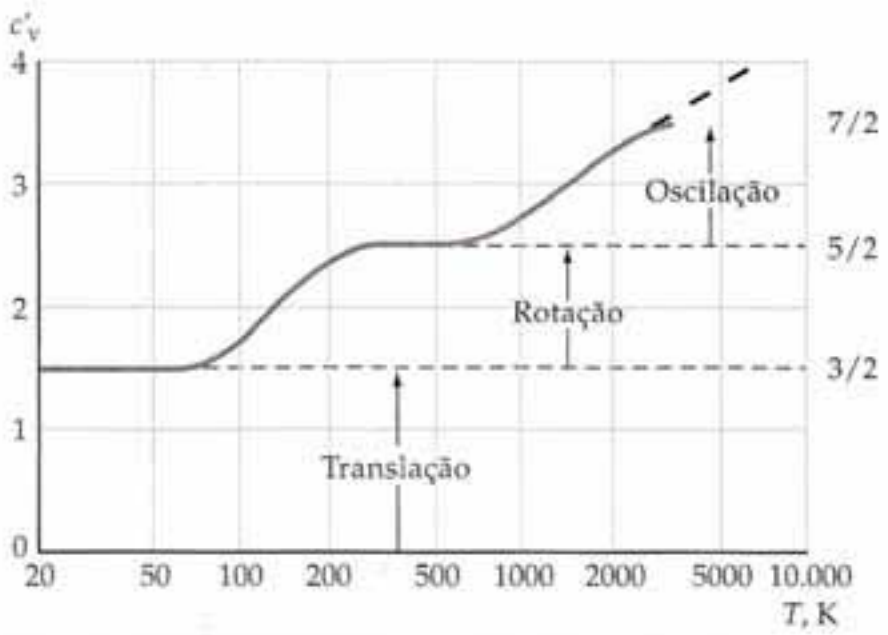


FIGURA 18-17 Dependência com a temperatura da capacidade térmica molar do H_2. (A curva é qualitativa nas regiões onde c'_v está variando.) Noventa e cinco por cento das moléculas de H_2 são dissociadas em hidrogênio atômico a 5000 K.

O teorema da eqüipartição falha porque a energia é **quantizada**. Isto é, uma molécula pode ter apenas certos valores de energia interna, como ilustrado esquematicamente pelo diagrama de níveis de energia da Figura 18-18. A molécula pode ganhar ou perder energia apenas se o ganho ou a perda a conduza a outro nível permitido. Por exemplo, a energia que pode ser trocada entre moléculas de gás que colidem é da ordem de kT, a energia térmica típica de uma molécula. A validade do teorema da eqüipartição depende do valor relativo entre kT e o espaçamento entre os níveis de energia permitidos.

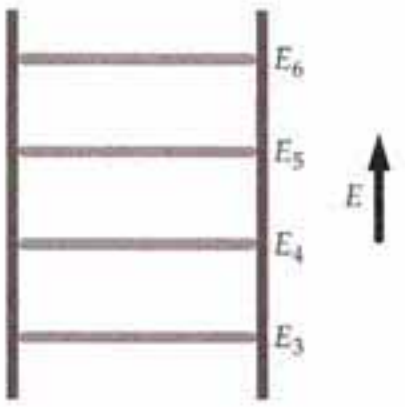


FIGURA 18-18 Diagrama de níveis de energia. Um sistema ligado pode ter apenas certas energias discretas.

Se o espaçamento entre os níveis permitidos de energia for grande em comparação a kT, então não poderá ocorrer transferência de energia através de colisões e o teorema clássico da eqüipartição não será válido. Se o espaçamento entre os níveis for muito menor do que kT, então a quantização da energia não será notada e o teorema da eqüipartição será válido.

CONDIÇÕES PARA A VALIDADE DO TEOREMA DA EQÜIPARTIÇÃO

Considere a rotação de uma molécula. A energia de rotação é

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{(I\omega)^2}{2I} = \frac{L^2}{2I} \qquad 18\text{-}28$$

onde I é o momento de inércia da molécula, ω é sua velocidade angular e $L = I\omega$ é a sua quantidade de movimento angular. Havíamos mencionado, na Seção 10-5, que a quantidade de movimento angular é quantizada, e sua magnitude está restrita a

$$L = \sqrt{\ell(\ell + 1)}\hbar \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots \qquad 18\text{-}29$$

onde $\hbar = h/(2\pi)$ e h é a constante de Planck. A energia de uma molécula que gira é, portanto, quantizada nos valores

$$E = \frac{L^2}{2I} = \frac{\ell(\ell + 1)\hbar^2}{2I} = \ell(\ell + 1)\, E_{0r} \qquad 18\text{-}30$$

onde

$$E_{0r} = \frac{\hbar^2}{2I} \qquad 18\text{-}31$$

é característica do intervalo de energia entre os níveis. Se esta energia é muito menor do que kT, esperamos que a física clássica e que o teorema da eqüipartição sejam válidos. Vamos definir uma temperatura crítica T_c como

$$kT_c = E_{0r} = \frac{\hbar^2}{2I} \qquad 18\text{-}32$$

Se T for muito maior do que esta temperatura crítica, então kT será muito maior do que o espaçamento entre os níveis de energia, que é da ordem de kT_c, e esperamos que a física clássica e o teorema da eqüipartição sejam válidos. Se T for menor, ou da ordem de T_c, então kT não será muito maior do que o espaçamento entre os níveis de energia e esperamos que a física clássica e o teorema da eqüipartição falhem. Vamos estimar T_c para alguns casos de interesse.

1. *Rotação de* H_2 *em torno de um eixo que passa pelo centro de massa perpendicularmente à linha que une os átomos de H* (Figura 18-19): O momento de inércia de H_2 em relação ao eixo é

   $$I_H = 2M_H\left(\frac{r_s}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}M_H r_s^2$$

   onde M_H é a massa de um átomo de H e r_s é a distância de separação. Para o hidrogênio, $M_H = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg e $r_s \approx 8 \times 10^{-11}$ m. A temperatura crítica é, então,

   $$T_c = \frac{\hbar^2}{2kI} = \frac{\hbar^2}{kM_H r_s^2}$$
   $$= \frac{(1{,}05 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{(1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg})(8 \times 10^{-11}\ \text{m})^2} \approx 75\ \text{K}$$

   Como vemos na Figura 18-17, esta é aproximadamente a temperatura abaixo da qual a energia rotacional não contribui para a capacidade térmica.

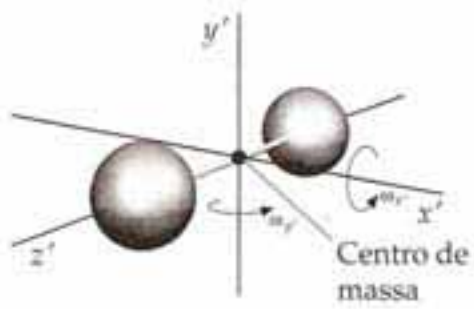


FIGURA 18-19 Modelo de haltere rígido para uma molécula diatômica.

2. O_2: Como a massa do O_2 é aproximadamente 16 vezes a do H_2, e a separação é aproximadamente a mesma, a temperatura crítica para o O_2 deve ser aproximadamente $(75/16) \approx 4{,}6$ K. Para todas as temperaturas para as quais O_2 existe como gás, $T \gg T_c$; logo, kT é muito maior do que o espaçamento entre os níveis de energia. Conseqüentemente, esperamos que o teorema da eqüipartição da física clássica seja válido.
3. *Rotação de um gás monoatômico:* Considere o átomo de He, que tem um núcleo constituído por dois prótons e dois nêutrons e possui dois elétrons. A massa de um elétron é cerca de 8000 vezes menor do que a massa do núcleo de He, mas o raio do núcleo é aproximadamente 100.000 vezes menor do que a distância entre o núcleo e um elétron. Portanto, o momento de inércia do átomo de He é praticamente todo ele devido aos seus dois elétrons. A distância do núcleo de He a um de seus elétrons é aproximadamente a metade da distância de separação entre os átomos de H no H_2, e a massa do elétron é cerca de 2000 vezes menor do que a do núcleo de H. Portanto, usando $m_e = M_H/2000$ e $r = r_s/2$, encontramos o momento de inércia dos dois elétrons no He sendo aproximadamente

$$I_{He} = 2m_e r^2 \approx 2\frac{M_H}{2000}\left(\frac{r_s}{2}\right)^2 = \frac{I_H}{2000}$$

A temperatura crítica para o He é, assim, cerca de 2000 vezes a do H_2, ou aproximadamente 150.000 K. Isto é muito maior do que a temperatura de dissociação (a temperatura na qual os elétrons são arrancados dos seus núcleos) para o hélio. Logo, o intervalo entre os níveis permitidos é sempre muito maior do que kT e as moléculas de He não podem ser induzidas a girar, pelas colisões que ocorrem no gás. Outros gases monoatômicos têm momentos de inércia levemente maiores por possuírem mais elétrons, mas suas temperaturas críticas são, ainda assim, de dezenas de milhares de kelvins. Portanto, suas moléculas também não podem ser induzidas a girar pelas colisões que ocorrem no gás.

4. *Rotação de um gás diatômico em torno de um eixo unindo os átomos*: Vemos, de nossa discussão sobre gases monoatômicos, que o momento de inércia de uma molécula de gás diatômico em relação ao seu eixo também será praticamente todo ele devido aos elétrons e será da mesma ordem de grandeza que para um gás monoatômico. Novamente, a temperatura crítica calculada, T_c, associada à ocorrência de rotações provocadas por colisões entre moléculas do gás, excede a temperatura de dissociação do gás, tornando impossível a rotação nestas circunstâncias.

É interessante observar que o sucesso do teorema da eqüipartição ao explicar os valores medidos para as capacidades térmicas de gases e sólidos conduziu ao primeiro entendimento real sobre a estrutura molecular no século XIX, enquanto sua falha desempenhou um papel importante no desenvolvimento da mecânica quântica no século XX.

Exemplo 18-12 Energia Rotacional do Átomo de Hidrogênio

À temperatura ambiente (300 K) o hidrogênio é um gás diatômico. Contudo, para temperaturas mais altas a molécula de hidrogênio se dissocia. A uma temperatura de 8000 K o gás hidrogênio é 99,99 por cento monoatômico. (*a*) Estime a menor energia rotacional (diferente de zero) para o átomo de hidrogênio e compare-a com kT à temperatura ambiente. (*b*) Calcule a temperatura crítica T_c para um gás de hidrogênio atômico.

SITUAÇÃO Da Equação 18-30, a menor energia rotacional corresponde a $\ell = 1$. Usamos a Equação 18-30 para determinar a energia em termos do momento de inércia. Podemos desprezar o momento de inércia do núcleo, porque seu raio é 100.000 vezes menor do que o raio do átomo. Assim, o momento de inércia do átomo é essencialmente o momento de inércia do elétron em relação ao núcleo. Então $I = m_e r^2$, onde $r = 5{,}29 \times 10^{-11}$ m é a distância entre o núcleo e o elétron.

SOLUÇÃO

(*a*) 1. A menor energia diferente de zero ocorre para $\ell = 1$:

$$E_\ell = \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2I} \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\text{logo} \quad E_1 = \frac{1(1+1)\hbar^2}{2m_e r^2} = \frac{\hbar^2}{m_e r^2}$$

2. Os valores numéricos são:

$$\hbar = 1{,}05 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$$
$$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg}$$
$$r = 5{,}29 \times 10^{-11}\ \text{m}$$

3. Substitua os valores numéricos:

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{m_e r^2} = \boxed{4{,}32 \times 10^{-18}\ \text{J}}$$

4. O valor de kT a $T = 300$ K é:

$$kT = (1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K}) = 4{,}14 \times 10^{-21}\ \text{J}$$

5. Compare E_1 e kT:

$$\frac{E_1}{kT} = \frac{4{,}32 \times 10^{-18}\ \text{J}}{4{,}14 \times 10^{-21}\ \text{J}} \approx 10^3$$

$\boxed{E_1 \text{ é cerca de três ordens de grandeza maior do que } kT.}$

(*b*) Iguale $kT_c = E_1$ e resolva para T_c:

$$kT_c = E_1$$

$$T_c = \frac{E_1}{k} = \frac{4{,}32 \times 10^{-18}\ \text{J}}{1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J/K}} = \boxed{3{,}13 \times 10^5\ \text{K}}$$

CHECAGEM A temperatura crítica para um átomo de hidrogênio ($\sim 3 \times 10^5$ K) é tão alta que o átomo estaria ionizado muito antes de a temperatura crítica ter sido atingida. Isto "explica" por que nenhum grau de liberdade rotacional contribui para a capacidade térmica dos átomos de hidrogênio.

18-9 A COMPRESSÃO ADIABÁTICA QUASE-ESTÁTICA DE UM GÁS

Um processo no qual um sistema não recebe e nem libera calor é chamado de **processo adiabático**. Este tipo de processo ocorre quando o sistema está extremamente bem isolado ou quando o processo acontece de forma muito rápida. Considere a compressão adiabática quase-estática na qual um gás, que está em um recipiente isolado termicamente, é lentamente comprimido por um pistão que está, portanto, realizando trabalho sobre o gás. Como não existe troca de calor com o gás, o trabalho realizado sobre ele é igual ao aumento de sua energia interna, e a temperatura do gás aumenta. A curva representando este processo em um diagrama PV é mostrada na Figura 18-20.

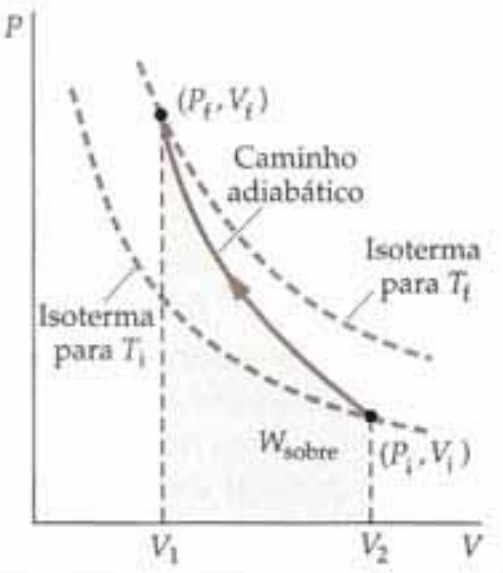


FIGURA 18-20 Compressão adiabática quase-estática de um gás ideal. As linhas tracejadas são as isotermas para as temperaturas inicial e final. A curva que liga os estados inicial e final da compressão adiabática é mais inclinada do que as isotermas, porque a temperatura aumenta durante a compressão.

Podemos encontrar a equação da curva adiabática para um gás ideal usando a equação de estado ($PV = nRT$) e a primeira lei da termodinâmica ($dE_{int} = dQ_{entra} + dW_{sobre}$). A primeira lei da termodinâmica leva a

$$C_V dT = 0 + (-P\,dV) \qquad 18\text{-}33$$

onde usamos $dE_{int} = C_V dT$ (Equação 18-18*a*), $dQ_{entra} = 0$ (o processo é adiabático) e $dW_{sobre} = -PdV$ (Equação 18-15). Substituindo $P = nRT/V$, obtemos

$$C_V dT = -nRT\frac{dV}{V}$$

Separando as variáveis e dividindo os dois lados por TC_V, temos

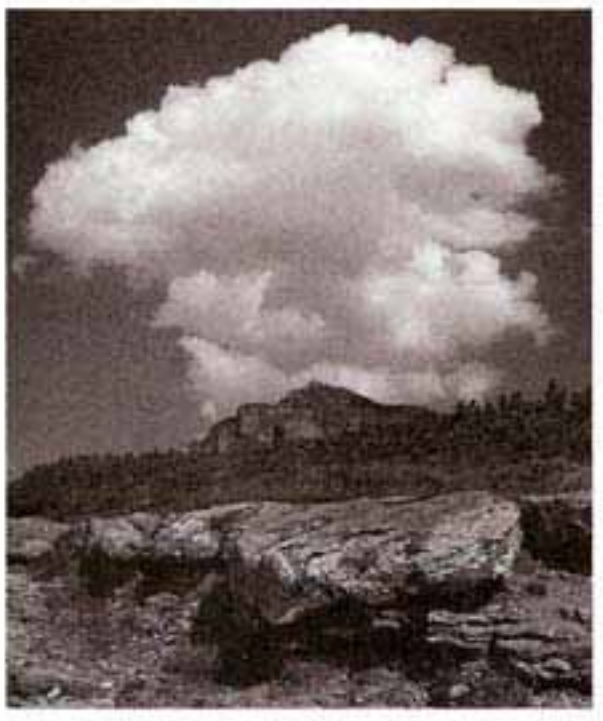
$$\frac{dT}{T} + \frac{nR}{C_V}\frac{dV}{V} = 0$$

Integrando,

$$\ln T + \frac{nR}{C_V}\ln V = \text{constante}$$

Simplificando,

$$\ln T + \frac{nR}{C_V}\ln V = \ln T + \ln V^{nR/C_V} = \ln(TV^{nR/C_V}) = \text{constante}$$



Nuvens se formam se o ar úmido que sobe se resfria devido à expansão adiabática do ar. O resfriamento faz com que o vapor d'água se condense em gotículas líquidas. (© *Cosmin Constantin Sava/Dreamstime.com.*)

Logo,

$$TV^{nR/C_V} = \text{constante} \qquad 18\text{-}34$$

onde as constantes nas duas equações precedentes não são iguais. A Equação 18-34 pode ser reescrita lembrando que $C_P - C_V = nR$, o que nos dá

$$\frac{nR}{C_V} = \frac{C_P - C_V}{C_V} = \frac{C_P}{C_V} - 1 = \gamma - 1 \qquad 18\text{-}35$$

onde γ é a razão entre as capacidades térmicas:

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \qquad 18\text{-}36$$

Logo,

$$TV^{\gamma - 1} = \text{constante} \qquad 18\text{-}37$$

Podemos eliminar T da Equação 18-37 usando $PV = nRT$. Temos, então,

$$\frac{PV}{nR}V^{\gamma - 1} = \text{constante}$$

ou

$$PV^{\gamma} = \text{constante} \qquad 18\text{-}38$$

PROCESSO ADIABÁTICO QUASE-ESTÁTICO

A Equação 18-38 relaciona P e V para expansões e compressões adiabáticas. Explicitando V da equação $PV = nRT$ (a equação do gás ideal), substituindo na Equação 18-38 e simplificando, obtemos

$$\frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma - 1}} = \text{constante} \qquad 18\text{-}39$$

PROBLEMA PRÁTICO 18-7

Mostre que, para um processo adiabático quase-estático, $T^{\gamma}/P^{\gamma-1} = \text{constante}$.

O trabalho realizado sobre o gás em uma compressão adiabática pode ser calculado a partir da primeira lei da termodinâmica:

$$dE_{int} = dQ_{entra} + dW_{sobre} \qquad \text{ou} \qquad dW_{sobre} = dE_{int} - dQ_{entra}$$

Como $dE_{int} = C_V dT$ e $dQ_{entra} = 0$, temos

$$dW_{sobre} = C_V\, dT$$

Logo,

$$W_{adiabático} = \int dW_{sobre} = \int C_V\, dT = C_V\, \Delta T \qquad 18\text{-}40$$

TRABALHO ADIABÁTICO SOBRE UM GÁS IDEAL

onde supomos C_V constante.* Observamos que o trabalho realizado sobre um gás depende apenas da variação da temperatura do gás. Durante uma compressão adiabática trabalho é realizado sobre o gás e sua energia interna e temperatura aumentam. Durante uma *expansão* adiabática quase-estática, trabalho é realizado *pelo* gás e a energia interna e a temperatura diminuem.

Também podemos usar a lei dos gases ideais para escrever a Equação 18-40 em termos dos valores inicial e final da pressão e do volume. Se T_i é a temperatura inicial e T_f é a temperatura final temos, para o trabalho realizado,

$$W_{adiabático} = C_V\, \Delta T = C_V(T_f - T_i)$$

* Para um gás ideal, E_{int} é proporcional à temperatura absoluta e, portanto, $C_V = dE_{int}/dT$ é uma constante.

Usando $PV = nRT$, obtemos

$$W_{\text{adiabático}} = C_V\left(\frac{P_fV_f}{nR} - \frac{P_iV_i}{nR}\right) = \frac{C_V}{nR}(P_fV_f - P_iV_i)$$

Usando a Equação 18-35 para simplificar esta expressão, temos

$$W_{\text{adiabático}} = \frac{P_fV_f - P_iV_i}{\gamma - 1} \qquad 18\text{-}41$$

Exemplo 18-13 Compressão Adiabática Quase-estática do Ar

Uma bomba manual é usada para inflar um pneu de bicicleta até uma pressão manométrica de 482 kPa. (*a*) Quanto trabalho precisa ser realizado, se cada acionamento da bomba é um processo adiabático quase-estático? A pressão atmosférica é 1,00 atm, a temperatura externa do ar é 20°C e o volume de ar no pneu permanece constante e igual a 1,00 L. (*b*) Qual é a pressão do pneu inflado depois que a bomba é removida e a temperatura do ar no pneu retorna para 20°C?

SITUAÇÃO O trabalho realizado é determinado a partir de $\Delta E_{int} = Q_{entra} + W_{sobre}$ com $Q_{entra} = 0$. Para um gás ideal, $\Delta E_{int} = C_V\,\Delta T$ (Equação 18-40). Como o processo é quase-estático e adiabático, sabemos que $T^\gamma/P^{\gamma-1}$ = constante (Equação 18-39). (Esta relação fornece a temperatura final.) Determine γ usando $\gamma = C_P/C_V$, $C_P = C_V + nR$ e $C_V = \frac{5}{2}nR$ (Equações 18-36, 18-20 e 18-25). Adote o subscrito 1 para se referir aos valores iniciais e o subscrito 2 para os valores finais. Então, $P_1 = 1{,}00$ atm, $V_2 = 1{,}00$ L e $T_1 = 20°C = 293$ K.

SOLUÇÃO

(*a*) 1. Para determinar o trabalho realizado, aplicamos a primeira lei da termodinâmica. Como a compressão é adiabática, $Q_{entra} = 0$:
$$\Delta E_{int} = Q_{entra} + W_{sobre} = 0 + W_{sobre}$$

2. Para um gás ideal, a variação da energia interna é $C_V\,\Delta T$:
$$W = \Delta E_{int} = C_V\,\Delta T$$

3. Para um gás diatômico, $C_V = \frac{5}{2}nR$:
$$W = C_V\,\Delta T = \tfrac{5}{2}nR\,\Delta T$$

4. A temperatura final pode ser determinada usando-se $T^\gamma/P^{\gamma-1}$ = constante (Equação 18-39):
$$\frac{T_1^\gamma}{P_1^{\gamma-1}} = \frac{T_2^\gamma}{P_2^{\gamma-1}} \Rightarrow T_2 = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}T_1$$

5. Determine γ para um gás diatômico usando as Equações 18-36, 18-20 e 18-25:
$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_V + nR}{C_V} = 1 + \frac{nR}{C_V} = 1 + \frac{nR}{\frac{5}{2}nR} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

6. Resolva para T_2. A pressão informada é a manométrica e, portanto, adicione 1,00 atm = 101,3 kPa à pressão informada de 482 kPa:
$$T_2 = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}T_1 = \left(\frac{583\text{ kPa}}{101{,}3\text{ kPa}}\right)^{0{,}4/1{,}4}293\text{ K} = 483\text{ K}$$
$$P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma = (1{,}00\text{ atm})\left(\frac{4{,}00\text{ L}}{2{,}00\text{ L}}\right)^{1{,}4} = \boxed{2{,}64\text{ atm}}$$

7. Calcule o trabalho, usando o resultado do passo 3. Use $PV = nRT$ (a lei dos gases ideais) para expressar nR em termos de P_2, V_2 e T_2:
$$W = \frac{5}{2}nR\,\Delta T = \frac{5}{2}\frac{P_2V_2}{T_2}(T_2 - T_1)$$
$$= \frac{5}{2}\frac{(583\text{ kPa})(1{,}00\times10^{-3}\text{ m}^3)}{483\text{ K}}(483\text{ K} - 293\text{ K}) = \boxed{634\text{ J}}$$

(*b*) O ar no pneu resfria a volume constante. Então, $P_3/T_3 = P_2/T_2$, onde P_3 e T_3 são a pressão e a temperatura finais:
$$\frac{P_3}{T_3} = \frac{P_2}{T_2}, \quad \text{onde} \quad T_3 = T_0 = 293\text{ K}$$
$$P_3 = \frac{T_3}{T_2}P_2 = \frac{293\text{ K}}{634\text{ K}}2{,}64\text{ atm} = \boxed{1{,}22\text{ atm}}$$

CHECAGEM Para a compressão adiabática a temperatura final é maior do que a temperatura inicial, como esperado, e o trabalho realizado sobre o gás é positivo, como esperado.

INDO ALÉM (1) O trabalho também pode ser calculado usando-se $W_{\text{adiabático}} = (P_fV_f - P_iV_i)/(\gamma - 1)$ (Equação 18-41), mas o uso de $W_{\text{adiabático}} = C_V\,\Delta T$ é preferível porque está ligado de forma mais direta a um princípio (a primeira lei da termodinâmica) e, portanto, é mais fácil de lembrar. (2) Uma bomba e um pneu de bicicleta reais não estão isolados; logo, o processo de encher um pneu não está nem perto de ser adiabático.

RAPIDEZ DAS ONDAS SONORAS

Podemos usar a Equação 18-38 para calcular o módulo volumétrico adiabático de um gás ideal, que está relacionado à rapidez das ondas sonoras no ar. Primeiro, diferenciamos a expressão PV^γ = constante (Equação 18-38):

$$P\,d(V^\gamma) + V^\gamma\,dP = 0$$

ou

$$\gamma P V^{\gamma-1}\,dV + V^\gamma\,dP = 0$$

Então,

$$dP = -\frac{\gamma P\,dV}{V}$$

Lembrando a Equação 13-6, o módulo volumétrico adiabático* é

$$B_{\text{adiabático}} = -\frac{dP}{dV/V} = \gamma P \qquad 18\text{-}42$$

A rapidez do som (Equação 15-4) é dada por

$$v = \sqrt{\frac{B_{\text{adiabático}}}{\rho}}$$

onde a massa específica ρ está relacionada ao número de moles n e à massa molecular M por $\rho = m/V = nM/V$. Usando a lei dos gases ideais, $PV = nRT$, podemos eliminar V da massa específica:

$$\rho = \frac{nM}{V} = \frac{nM}{nRT/P} = \frac{MP}{RT}$$

Usando este resultado e γP para $B_{\text{adiabático}}$, obtemos

$$v = \sqrt{\frac{B_{\text{adiabático}}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{MP/(RT)}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

que é a Equação 15-5, a rapidez do som em um gás.

* O módulo volumétrico, discutido no Capítulo 13, é o negativo da razão entre a variação da pressão e a variação relativa do volume, $B = -\Delta P/(\Delta V/V)$. O módulo volumétrico isotérmico, que descreve as variações que ocorrem à temperatura constante, difere do módulo volumétrico adiabático, que descreve as variações que ocorrem sem transferência de calor. Para ondas sonoras a freqüências audíveis, as variações de pressão ocorrem de maneira rápida demais para que haja transferência apreciável de calor e, portanto, o módulo volumétrico apropriado é o módulo volumétrico adiabático.

Física em Foco

Respirometria: Respirando o Calor

A calorimetria, o estudo e a medida de transferência de calor, ajuda a determinar o balanço energético total de sistemas. Wilber O. Atwater, o primeiro diretor de estações experimentais do Departamento Americano de Agricultura,* ambiciosamente decidiu medir o balanço energético de pessoas. Este esforço consistiu em medir e analisar a alimentação e a água dadas aos participantes, medir, analisar e queimar o lixo dos participantes e analisar a temperatura, a química e a umidade de uma sala pequena na qual os participantes viviam.† Esta sala estava termicamente isolada e seu interior era uma caixa de cobre revestida com tubulações de cobre para a água, o que permitia medidas cuidadosas do calor liberado, e bobinas elétricas para a manutenção da temperatura. Qualquer variação da temperatura do ar na sala era resultante da energia proveniente das pessoas dentro dela. Esta energia era medida pelas variações de temperatura registradas por termômetros sensíveis suspensos dentro da caixa e por variações da temperatura da água que circulava pelas tubulações que revestiam as paredes.‡

Mas, apesar desta sala de cobre se prestar muito bem para a medida do balanço energético de pessoas em repouso e em ação, ela era cara e de difícil uso. Isto levou à calorimetria indireta com a medida da respiração — *respirometria*. Pesquisas adicionais mostraram que mais de 95 por cento[#] do gasto energético humano pode ser confiavelmente calculado apenas medindo-se as quantidades de oxigênio inalado e de dióxido de carbono exalado.[°] Um dado freqüentemente usado hoje em dia é o de 5 kcal/L de consumo de oxigênio.[§] Dependendo do equipamento de medida, o volume de oxigênio pode ser calculado a partir da pressão parcial de oxigênio no ar inalado, ou pode estar baseado na inalação de oxigênio ambulatorialmente administrado à pessoa.

A respirometria é extremamente útil, pois é a forma mais rápida de se medir a energia usada por organismos. Com modificações apropriadas, a respirometria é usada em gado,[¶] aves domésticas,[**] animais exóticos[††] e até mesmo em resíduos de esgoto.[‡‡] Recentemente, a respirometria tem sido usada para determinar se um composto já está maduro o suficiente para ser adicionado ao solo. Se a taxa de troca de gás do composto é alta, então a atividade de bactérias ainda é alta e o composto ainda não está completamente maduro.[##]

Na medicina, a respirometria é usada em terapia nutricional, especialmente para pacientes gravemente feridos ou muito doentes.[°°,§§] Em ginásios e centros esportivos, respirômetros portáteis fornecem, aos atletas e a pacientes em dieta,[¶¶] medidas rápidas e precisas das necessidades de energia e são usados para auxiliá-los a alcançar e manter o peso saudável.

Finalmente, a respirometria é usada como ferramenta auxiliar na avaliação de políticas públicas e para definir padrões de nutrição. Um estudo comparou os cálculos de dois padrões diferentes de nutrição com medidas reais de respirometria de adultos sedentários e ativos. Um dos padrões indicava a necessidade de mais energia do que os participantes, de fato, usavam.[***] À medida que a calorimetria indireta vai se tornando mais barata, ela vai sendo usada como auxiliar no estudo das necessidades energéticas de pessoas em todo o mundo.

---

* Swan, P., "100 Years Ago," *Nutrition Notes of the American Society for Nutritional Sciences*, June 2004, Vol. 40, No. 2, 4–5. http://www.nutrition.org/media/publications/nutrition-notes/nnjun04a.pdf

† Atwater, W. O., *A Respiration Calorimeter with Appliances for the Direct Determination of Oxygen*. Washington, D. C.: Carnegie Institution, 1905.

‡ Morrison, P., and Morrison, P., "Laws of Calorie Counting," *Scientific American*, Aug. 2000, 93+.

Ferrannini, E., "The Theoretical Bases of Indirect Calorimetry: A Review," *Metabolism*, Mar. 1988, Vol. 37, No. 3, 287–301.

° Mansell, P. I., and MacDonald, I. A., "Reappraisal of the Weir Equation for Calculation of Metabolic Rate," *AJP—Regulatory, Integrative and Comparative Physiology*, June 1990, Vol. 258, No. 6, R1347–R1354.

§ Food and Nutrition Board, *Dietary Reference Intakes for Energy, Carbohydrate, Fiber, Fat, Fatty Acids, Cholesterol, Protein, and Amino Acids*. Washington, D. C.: National Academies Press, 2005, 884.

¶ Mcleod, K., et al. "Effects of Brown Midrib Corn Silage on the Energy Balance of Dairy Cattle," *Journal of Dairy Science*, April 2000, Vol. 84, 885–895.

** "Animal Calorimetry," *Biomeasurements and Experimental Techniques for Avian Species*. http://web.uconn.edu/poultry/NE-127/NewFiles/Home2.html as of July 2006.

†† Schalkwyk, S. J., et al., "Gas Exchange of the Ostrich Embryo During Peak Metabolism in Relation to Incubator Design," *South African Journal of Animal Science*, 2002, Vol. 32, 122–129.

‡‡ Rai, C. L., et al., "Influence of Ultrasonic Disintegration on Sludge Growth Reduction and Its Estimation by Respirometry," *Environmental Science and Technology*, Nov. 2004, Vol. 38, No. 21, 5779–5785.

Seekings, B., "Field Test for Compost Maturity," *Biocycle*, July 1996, Vol. 37, No. 8, 72–75.

°° American Association for Respiratory Care, "Metabolic Measurement Using Indirect Calorimetry During Mechanical Ventilation—2004 Revision & Update," *Respiratory Care*, Sept. 2004, Vol. 49, No. 9, 1073–1079. http://www.guideline.gov/summary/summary.aspx?ss=15&doc_id=6515 as of July 2006.

§§ Steward, D., and Pridham, K., "Stability of Respiratory Quotient and Growth Outcomes of Very Low Birth Weight Infants," *Biological Research for Nursing*, Jan. 2001, Vol. 2, No. 3, 198–205.

¶¶ St-Onge, M., et al., "A New Hand-Held Indirect Calorimeter to Measure Postprandial Energy Expenditure," *Obesity Research*, April 2004, Vol. 12, No. 4, 704–709.

*** Alfonzo-González, G., et al., "Estimation of Daily Energy Needs with the FAO/WHO/UNU 1985 Procedures in Adults: Comparison to Whole-Body Indirect Calorimetry Measurements," *European Journal of Clinical Nutrition*, Aug. 2004, Vol. 58, No. 8, 1125–1131.

Resumo

1. A primeira lei da termodinâmica, que expressa a conservação da energia, é uma lei fundamental da física.
2. O teorema da eqüipartição é uma lei fundamental da física clássica. Ele falha se a energia térmica típica kT é pequena em comparação com o espaçamento entre os níveis quantizados de energia.

	TÓPICO	EQUAÇÕES RELEVANTES E OBSERVAÇÕES	
1.	**Calor**	A energia que é transferida de um sistema para outro devido a uma diferença de temperatura é chamada de calor.	
	Caloria	A caloria, originalmente definida como o calor necessário para aumentar em 1°C a temperatura de 1 g de água, é agora definida como exatamente igual a 4,184 joules.	
2.	**Capacidade Térmica**	A capacidade térmica é a quantidade de calor necessária para aumentar em um grau a temperatura de uma substância.	
		$C = \frac{Q}{\Delta T}$	18-1
	A volume constante	$C_V = \frac{Q_V}{\Delta T}$	
	A pressão constante	$C_P = \frac{Q_P}{\Delta T}$	
	Calor específico (capacidade térmica por unidade de massa)	$c = \frac{C}{m}$	18-2
	Calor específico molar (capacidade térmica por mol)	$c' = \frac{C}{n}$	18-6
	Relação entre capacidade térmica e energia interna	$C_V = \frac{dE_{int}}{dT}$	18-18*a*
	Gás ideal	$C_P - C_V = nR$	18-20
	Gás ideal monoatômico	$C_V = \frac{3}{2}nR$	18-22
	Gás ideal diatômico	$C_V = \frac{5}{2}nR$	18-25
3.	**Fusão e Vaporização**	A fusão e a vaporização ocorrem a uma temperatura constante.	
	Calor latente de fusão	O calor necessário para fundir uma substância é o produto da massa da substância pelo seu calor latente de fusão L_f:	
		$Q_f = mL_f$	18-8
	L_f da água	$L_f = 333{,}5$ kJ/kg	
	Calor latente de vaporização	O calor necessário para evaporar um líquido é o produto da massa do líquido pelo seu calor latente de vaporização, L_v:	
		$Q_v = mL_v$	18-9
	L_v da água	$L_v = 2257$ kJ/kg	
4.	**Primeira Lei da Termodinâmica**	A variação da energia interna de um sistema é igual à energia transferida para o sistema na forma de calor mais a energia transferida para o sistema na forma de trabalho:	
		$\Delta E_{int} = Q_{entra} + W_{sobre}$	18-10
5.	**Energia Interna E_{int}**	A energia interna de um sistema é uma propriedade do estado do sistema, como são a pressão, o volume e a temperatura. Calor e trabalho não são propriedades de estado.	
	Gás ideal	E_{int} depende apenas da temperatura T.	

	TÓPICO	EQUAÇÕES RELEVANTES E OBSERVAÇÕES	
	Gás ideal monoatômico	$E_{int} = \frac{3}{2}nRT$	18-12
	Relação entre energia interna e capacidade térmica	$dE_{int} = C_V dT$	18-18*b*
6.	**Processo Quase-estático**	Um processo quase-estático ocorre lentamente, permitindo que o sistema se mova através de uma série de estados de equilíbrio.	
	Isométrico (isocórico)	V = constante	
	Isobárico	P = constante	
	Isotérmico	T = constante	
	Adiabático	$Q = 0$	
	Adiabático, gás ideal	$TV^{\gamma-1}$ = constante	18-37
		PV^{γ} = constante	18-38
		$T^{\gamma}/P^{\gamma-1}$ = constante	18-39
		onde	
		$\gamma = C_P/C_V$	18-36
7.	**Trabalho Realizado sobre um Gás**	$W_{sobre} = -\int_{V_i}^{V_f} P\,dV = C_V\,\Delta T - Q_{entra}$	18-10, 18-15, e 18-18
	Isométrico	$W_{sobre} = -\int_{V_i}^{V_f} P\,dV = 0 \qquad V_f = V_i$	
	Isobárico	$W_{sobre} = -\int_{V_i}^{V_f} P\,dV = -P\int_{V_i}^{V_f} dV = -P\,\Delta V$	
	Isotérmico	$W_{isotérmico} = -\int_{V_i}^{V_f} P\,dV = -nRT\int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT\ln\frac{V_f}{V_i}$	18-17
	Adiabático	$W_{adiabático} = C_V\,\Delta T$	18-40
8.	**Teorema da Eqüipartição**	O teorema da eqüipartição estabelece que, se o sistema está em equilíbrio, há uma energia média de $\frac{1}{2}kT$ por molécula, ou $\frac{1}{2}RT$ por mol, associada a cada grau de liberdade.	
	Falha do teorema da eqüipartição	O teorema da eqüipartição falha se a energia térmica ($\sim kT$) que pode ser trocada em colisões for menor do que o intervalo de energia ΔE entre níveis quantizados de energia. Por exemplo, moléculas de um gás monoatômico não podem girar porque a primeira energia diferente de zero permitida é muito maior do que kT.	
9.	**Lei de Dulong–Petit**	O calor específico molar da maioria dos sólidos é $3R$. Isto é previsto pelo teorema da eqüipartição, supondo que um átomo em um sólido tenha seis graus de liberdade.	

Resposta da Checagem Conceitual

18-1 Uma mola comprimida em um disparador de dardos é liberada e sua energia interna é transferida para o dardo na forma de energia cinética. O ar comprimido em um tanque é liberado e usado para levantar um carro no elevador da oficina.

Respostas dos Problemas Práticos

18-1 30°C

18-2 500 kJ

18-3 20,5 kJ

18-4 405 J

18-5 V_i = 48,0 L, V_f = 61,1 L, W = 13,1 L · atm = 1,33 kJ

18-6 (*a*) M = 24,4 g/mol. (*b*) O metal deve ser o magnésio, que tem massa molar de 24,3 g/mol.

18-7 Para um processo quase-estático, PV^{γ} = constante. Pela lei dos gases ideais, $V = nRT/P$. A substituição de nRT/P na equação PV^{γ} resulta em $P(nRT/P)^{\gamma}$ = constante. Rearranjando os termos, obtemos $T^{\gamma}/P^{\gamma-1}$ = constante/(nR).

Problemas

Em alguns problemas, você recebe mais dados do que necessita; em alguns outros, você deve acrescentar dados de seus conhecimentos gerais, fontes externas ou estimativas bem fundamentadas.

Interprete como significativos todos os algarismos de valores numéricos que possuem zeros em seqüência sem vírgulas decimais.

Use 343 m/s para a rapidez do som, a não ser quando especificamente indicado.

• Um só conceito, um só passo, relativamente simples
•• Nível intermediário, pode requerer síntese de conceitos
••• Desafiante, para estudantes avançados
Problemas consecutivos sombreados são problemas pareados.

PROBLEMAS CONCEITUAIS

1 • O corpo A tem o dobro da massa do corpo B e o dobro do calor específico do corpo B. Se quantidades iguais de calor são transferidas para estes corpos, como se comparam as subseqüentes variações de suas temperaturas? (*a*) $\Delta T_A = 4\Delta T_B$, (*b*) $\Delta T_A = 2\Delta T_B$, (*c*) $\Delta T_A = \Delta T_B$, (*d*) $\Delta T_A = \frac{1}{2}\Delta T_B$, (*e*) $\Delta T_A = \frac{1}{4}\Delta T_B$.

2 • O corpo A tem o dobro da massa do corpo B. A variação da temperatura do corpo A é igual à variação da temperatura do corpo B quando eles absorvem quantidades iguais de calor. Conseqüentemente, a relação entre seus calores específicos é (*a*) $c_A = 2c_B$, (*b*) $2c_A = c_B$, (*c*) $c_A = c_B$, (*d*) nenhuma das respostas anteriores.

3 • O calor específico do alumínio é mais do que o dobro do calor específico do cobre. Um bloco de cobre e um bloco de alumínio têm a mesma massa e a mesma temperatura (20°C). Os blocos são jogados simultaneamente em um único calorímetro contendo água a 40°C. Qual afirmativa é verdadeira quando o equilíbrio térmico é atingido? (*a*) O bloco de alumínio está a uma temperatura maior do que o bloco de cobre. (*b*) O bloco de alumínio absorveu menos energia do que o bloco de cobre. (*c*) O bloco de alumínio absorveu mais energia do que o bloco de cobre. (*d*) As afirmativas (*a*) e (*c*) estão corretas.

4 • Um bloco de cobre está em uma panela de água fervente e tem uma temperatura de 100°C. O bloco é removido da água fervente e colocado imediatamente em um recipiente isolado cheio com uma quantidade de água que tem uma temperatura de 20°C e a mesma massa do bloco de cobre. (A capacidade térmica do recipiente isolado é desprezível.) A temperatura final será mais próxima de (*a*) 40°C, (*b*) 60°C, (*c*) 80°C.

5 • Você derrama uma certa quantidade de água a 100°C e uma quantidade igual de água a 20°C em um recipiente isolado. A temperatura final da mistura será (*a*) 60°C, (*b*) menor do que 60°C, (*c*) maior do que 60°C.

6 • Você derrama água a 100°C e alguns cubos de gelo a 0°C em um recipiente isolado. A temperatura final da mistura será (*a*) 50°C, (*b*) menor do que 50°C, mas maior do que 0°C, (*c*) 0°C, (*d*) você não pode dizer a temperatura final a partir dos dados fornecidos.

7 • Você derrama água a 100°C e alguns cubos de gelo a 0°C em um recipiente isolado. Quando o equilíbrio térmico é atingido, você percebe que alguns cubos de gelo permanecem e flutuam na água líquida. A temperatura final da mistura será (*a*) maior do que 0°C, (*b*) menor do que 0°C, (*c*) 0°C, (*d*) você não pode dizer a temperatura final a partir dos dados fornecidos.

8 • O experimento de Joule estabelece o equivalente mecânico do calor envolvido na conversão de energia mecânica em energia interna. Dê alguns exemplos do dia-a-dia nos quais parte da energia interna de um sistema é convertida em energia mecânica.

9 • Pode um gás absorver calor enquanto sua energia interna não varia? Caso afirmativo, dê um exemplo. Caso negativo, explique por quê.

10 • A equação $\Delta E_{int} = Q + W$ é o enunciado formal da primeira lei da termodinâmica. Nesta equação, as quantidades Q e W, respectivamente, representam (*a*) o calor absorvido pelo sistema e o trabalho realizado pelo sistema, (*b*) o calor absorvido pelo sistema e o trabalho realizado sobre o sistema, (*c*) o calor liberado pelo sistema e o trabalho realizado pelo sistema, (*d*) o calor liberado pelo sistema e o trabalho realizado sobre o sistema.

11 • Um gás real resfria durante uma expansão livre, enquanto um gás ideal não resfria durante uma expansão livre. Explique a razão para esta diferença.

12 • Um gás ideal, a uma pressão de 1,0 atm e a uma temperatura de 300 K, é confinado na metade de um recipiente isolado por uma fina divisória. A outra metade do recipiente está evacuada. A divisória é perfurada e o equilíbrio é rapidamente estabelecido. Qual das seguintes afirmativas é verdadeira? (*a*) A pressão do gás é 0,50 atm e a temperatura do gás é 150 K. (*b*) A pressão do gás é 1,0 atm e a temperatura do gás é 150 K. (*c*) A pressão do gás é 0,50 atm e a temperatura do gás é 300 K. (*d*) Nenhuma das afirmativas anteriores.

13 • Um gás consiste em íons que se repelem. O gás sofre uma expansão livre, na qual não ocorre absorção ou liberação de calor e nenhum trabalho é realizado. A temperatura do gás aumenta, diminui ou permanece a mesma? Explique sua resposta.

14 • Dois balões de borracha de mesmo volume, cheios de gás, estão localizados no fundo de um lago frio e escuro. A temperatura da água diminui com o aumento da profundidade. Um dos balões sobe rapidamente e se expande adiabaticamente enquanto está subindo. O outro balão sobe mais lentamente e se expande isotermicamente. A pressão em cada balão permanece igual à pressão da água em contato com o balão. Qual dos balões terá o maior volume quando atingir a superfície do lago? Explique sua resposta.

15 • Um gás varia seu estado quase-estaticamente de A para C, ao longo dos caminhos mostrados na Figura 18-21. O trabalho realizado pelo gás é (*a*) máximo para o caminho A → B → C, (*b*) mínimo para o caminho A → C, (*c*) máximo para o caminho A → D → C, (*d*) o mesmo para os três caminhos.

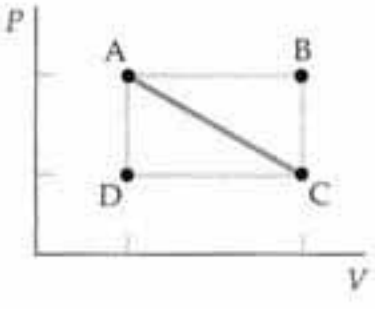


FIGURA 18-21 Problema 15

16 • Quando um gás ideal sofre um processo adiabático, (*a*) nenhum trabalho é realizado pelo sistema, (*b*) não há transferência de calor para o sistema, (*c*) a energia interna do sistema permanece

constante, (*d*) a quantidade de calor transferido para o sistema é igual à quantidade de trabalho realizado pelo sistema.

17 • Verdadeiro ou falso:
(*a*) Quando um sistema pode ir do estado 1 para o estado 2 através de vários processos diferentes, a quantidade de calor absorvida pelo sistema será a mesma para todos os processos.
(*b*) Quando um sistema pode ir do estado 1 para o estado 2 através de vários processos diferentes, a quantidade de trabalho realizado sobre o sistema será a mesma para todos os processos.
(*c*) Quando um sistema vai do estado 1 para o estado 2 através de vários processos diferentes, a variação da energia interna do sistema será a mesma para todos os processos.
(*d*) A energia interna de uma dada quantidade de gás ideal depende apenas de sua temperatura absoluta.
(*e*) Um processo quase-estático é aquele no qual o sistema nunca está longe do equilíbrio.
(*f*) Para qualquer substância que se expande quando aquecida, C_P é maior do que C_V.

18 • O volume de uma amostra de gás permanece constante enquanto sua pressão aumenta. (*a*) A energia interna do sistema não varia. (*b*) O sistema realiza trabalho. (*c*) O sistema não absorve calor. (*d*) A variação da energia interna deve ser igual ao calor absorvido pelo sistema. (*e*) Nenhuma das alternativas anteriores.

19 •• Quando um gás ideal sofre um processo isotérmico, (*a*) nenhum trabalho é realizado pelo sistema, (*b*) o sistema não absorve calor, (*c*) o calor absorvido pelo sistema é igual à variação de sua energia interna, (*d*) o calor absorvido pelo sistema é igual ao trabalho que ele realiza.

20 •• Considere a seguinte série de processos quase-estáticos pelos quais um sistema passa seqüencialmente: (*1*) uma expansão adiabática, (*2*) uma expansão isotérmica, (*3*) uma compressão adiabática e (*4*) uma compressão isotérmica que leva o sistema de volta ao seu estado original. Esboce a série de processos em um diagrama *PV* e, depois, esboce a série de processos em um diagrama *VT* (no qual o volume é plotado em função da temperatura).

21 • Um gás ideal, em um cilindro, está a uma pressão P e com um volume V. Durante um processo adiabático quase-estático, o gás é comprimido até que seu volume diminua para $V/2$. Então, em um processo quase-estático isotérmico, o gás se expande até que seu volume atinja novamente o valor V. Que tipo de processo trará o sistema de volta ao seu estado original? Esboce o ciclo em um gráfico.

22 •• O metal A é mais denso do que o metal B. Qual deles você esperaria ter uma maior capacidade térmica por unidade de massa — o metal A ou o metal B? Por quê?

23 •• Um gás ideal sofre um processo durante o qual $P\sqrt{V}$ = constante e o volume do gás diminui. A temperatura aumenta, diminui ou permanece a mesma durante este processo? Explique.

ESTIMATIVA E APROXIMAÇÃO

24 • **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA, RICO EM CONTEXTO** Durante os primeiros estágios do projeto de uma moderna planta de geração de energia elétrica, você está encarregado da equipe de engenheiros ambientais. A nova planta deve ser localizada no oceano e usará a água do oceano para refrigeração. A planta produzirá energia elétrica a uma taxa de 1,00 GW. Como ela terá uma eficiência de um terço (típico da maioria das plantas modernas), calor será liberado para a água de refrigeração a uma taxa de 2,00 GW. Se os códigos ambientais exigem que a água só pode retornar ao oceano com um aumento de temperatura de no máximo 15°F, estime o fluxo (em kg/s) de água para a refrigeração da planta.

25 •• Um forno de microondas típico tem um consumo de energia de aproximadamente 1200 W. Estime quanto tempo uma xícara de água levará para ferver no forno de microondas, supondo que 50 por cento do consumo de energia elétrica são utilizados para aquecer a água. Como esta estimativa se compara com a experiência do dia-a-dia?

26 •• Uma demonstração sobre o aquecimento de um gás sob compressão adiabática consiste em colocar uma pequena tira de papel dentro de um grande tubo de ensaio de vidro, o qual é, então, fechado com um pistão. Se o pistão comprimir rapidamente o ar confinado, o papel pegará fogo. Supondo que a temperatura na qual o papel pega fogo seja de 451°F, estime o fator pelo qual o volume do ar aprisionado pelo pistão deve ser reduzido para que esta demonstração funcione.

27 •• Uma pequena variação do volume de um líquido ocorre quando ele é aquecido à pressão constante. Use os seguintes dados para estimar a contribuição relativa desta variação para a capacidade térmica da água entre 4,00°C e 100°C. A massa específica da água a 4,00°C e 1,00 atm é 1,000 g/cm³. A massa específica da água líquida a 100°C e 1,00 atm é 0,9584 g/cm³.

CAPACIDADE TÉRMICA, CALOR ESPECÍFICO, CALOR LATENTE

28 • **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA, RICO EM CONTEXTO** Você projetou uma casa solar que contém $1{,}00 \times 10^5$ kg de concreto (calor específico = 1,00 kJ/kg · K). Quanto calor é liberado pelo concreto à noite, quando ele resfria de 25,0°C para 20,0°C?

29 • Quanto calor deve ser absorvido por 60,0 g de gelo a −10,0°C para transformá-lo em 60,0 g de água líquida a 40,0°C?

30 •• Quanto calor deve ser liberado por 0,100 kg de vapor a 150°C para transformá-lo em 0,100 kg de gelo a 0,00°C?

31 •• Uma peça de alumínio de 50,0 g é resfriada de 20°C para −196°C, quando colocada em um grande recipiente com nitrogênio líquido a esta temperatura. Quanto nitrogênio evapora? (Suponha que o calor específico do alumínio seja constante neste intervalo de temperatura.)

32 •• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA, RICO EM CONTEXTO** Você está supervisionando a criação de alguns moldes de chumbo para uso na indústria da construção. Cada molde exige que um de seus trabalhadores derrame 0,500 kg de chumbo derretido, a uma temperatura de 327°C, em uma cavidade em um grande bloco de gelo a 0°C. Quanta água líquida deve ser drenada por hora, se há 100 trabalhadores capazes de realizar, na média, uma operação a cada 10,0 min?

CALORIMETRIA

33 • **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA, RICO EM CONTEXTO** Durante o verão, na fazenda de cavalos de seu tio, você passa uma semana auxiliando o ferreiro. Você observa a maneira como ele resfria uma ferradura depois de configurar a peça, quente e maleável, na forma e no tamanho corretos. Suponha que 750 g de ferro para uma ferradura tenham sido retirados do fogo, configurados e, a uma temperatura de 650°C, mergulhados em um balde de 25,0 L com água a 10,0°C. Qual é a temperatura final da água, depois de atingido o equilíbrio com a ferradura? Despreze qualquer aquecimento do balde e suponha o calor específico do ferro igual a 460 J/(kg · K).

34 • O calor específico de um determinado metal pode ser determinado medindo-se a variação da temperatura que ocorre quando um pedaço do metal é aquecido e colocado em um recipiente isolado feito do mesmo material e contendo água. Seja um pedaço deste metal com 100 g de massa, inicialmente a 100°C. O recipiente tem 200 g de massa e contém 500 g de água a uma temperatura inicial de 20,0°C. A temperatura final é 21,4°C. Qual é o calor específico do metal?

35 •• **Aplicação Biológica** Em suas várias participações do *Tour de France*, o ciclista campeão Lance Armstrong tipicamente desenvolveu uma potência média de 400 W, 5,0 horas por dia durante 20 dias. Que quantidade de água, inicialmente a 24°C, poderia ser fervida se você pudesse aproveitar toda essa energia?

36 •• Um copo de vidro de 25,0 g contém 200 mL de água a 24,0°C. Se dois cubos de gelo, de 15,0 g cada um e a uma temperatura de −3,00°C são colocados no copo, qual é a temperatura final da bebida? Despreze qualquer transferência de calor entre o copo e o ambiente.

37 •• Um pedaço de gelo de 200 g, a 0°C, é colocado em 500 g de água a 20°C. Este sistema está em um recipiente com capacidade térmica desprezível e isolado da vizinhança. (*a*) Qual é a temperatura final de equilíbrio do sistema? (*b*) Quanto do gelo se derrete?

38 •• Um bloco de cobre de 3,5 kg, a 80°C, é colocado em um balde contendo uma mistura de gelo e água com massa total de 1,2 kg. Quando o equilíbrio térmico é atingido, a temperatura da água é 8,0°C. Quanto de gelo estava no balde, antes de o bloco de cobre ser colocado nele? (Considere desprezível a capacidade térmica do balde.)

39 •• Um recipiente bem isolado, com capacidade térmica desprezível, contém 150 g de gelo a 0°C. (*a*) Se 20 g de vapor d'água a 100°C são inseridos no recipiente, qual é a temperatura final de equilíbrio do sistema? (*b*) Sobra algum gelo, após o sistema ter atingido o equilíbrio?

40 •• Um calorímetro, com capacidade térmica desprezível, contém 1,00 kg de água a 303 K e 50,0 g de gelo a 273 K. (*a*) Determine a temperatura final T. (*b*) Determine a temperatura final T se a massa do gelo é 500 g.

41 •• Um calorímetro de alumínio, de 200 g, contém 600 g de água a 20,0°C. Um pedaço de gelo de 100 g, a −20,0°C, é colocado no calorímetro. (*a*) Determine a temperatura final do sistema, supondo que não haja transferência de calor para ou do sistema. (*b*) Um pedaço de 200 g de gelo, a −20,0°C, é adicionado. Quanto gelo permanece no sistema depois de atingido o equilíbrio? (*c*) A resposta para a Parte (*b*) mudaria se os dois pedaços de gelo tivessem sido colocados ao mesmo tempo?

42 •• O calor específico de um bloco de 100 g de uma substância deve ser determinado. O bloco é colocado em um calorímetro de cobre com massa de 25 g, contendo 60 g de água a 20°C. Depois, 120 mL de água a 80°C são adicionados ao calorímetro. Quando o equilíbrio é atingido, a temperatura do sistema é 54°C. Determine o calor específico do bloco.

43 •• Um pedaço de cobre de 100 g é aquecido, em um forno, até uma temperatura t_C. O cobre é, então, colocado em um calorímetro de cobre, de 150 g de massa, contendo 200 g de água. A temperatura inicial da água e do calorímetro é 16,0°C e a temperatura depois que o equilíbrio é estabelecido é 38,0°C. Quando o calorímetro e seu conteúdo são pesados, descobre-se que 1,20 g de água evaporaram. Qual era a temperatura t_C?

44 ••• Um calorímetro de alumínio, de 200 g, contém 500 g de água a 20,0°C. Um pedaço de alumínio de 300 g é aquecido a 100,0 °C e, então, colocado no calorímetro. Determine a temperatura final do sistema, supondo que não haja transferência de calor para o ambiente.

PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA

45 • Um gás diatômico realiza 300 J de trabalho e, também, absorve 2,50 kJ de calor. Qual é a variação da energia interna do gás?

46 • Se um gás absorve 1,67 MJ de calor enquanto realiza 800 kJ de trabalho, qual é a variação de sua energia interna?

47 • Se um gás absorve 84 J de calor enquanto realiza 30 J de trabalho, qual é a variação de sua energia interna?

48 •• Uma bala de chumbo, inicialmente a 30°C, funde-se assim que atinge um alvo. Supondo que toda a energia cinética inicial se transforme em energia interna da bala, calcule a velocidade de impacto da bala.

49 •• Em um dia frio você pode aquecer suas mãos esfregando-as uma na outra. Suponha que o coeficiente de atrito cinético entre suas mãos seja 0,500, que a força normal entre elas seja de 35,0 N e que você as esfregue com uma velocidade relativa média de 35,0 cm/s. (*a*) Qual é a taxa na qual a energia mecânica é dissipada? (*b*) Suponha, além disso, que a massa de cada uma de suas mãos seja de 350 g, que o calor específico delas seja de 4,00 kJ/kg · K, e que toda a energia mecânica dissipada sirva para aumentar a temperatura de suas mãos. Durante quanto tempo você deve esfregar as mãos para produzir um aumento de 5,00°C na temperatura delas?

TRABALHO E O DIAGRAMA *PV* PARA UM GÁS

Nos Problemas 50 a 53, o estado inicial de 1,00 mol de um gás diluído é $P_1 = 3{,}00$ atm, $V_1 = 1{,}00$ L e $E_{int\,1} = 456$ J, e seu estado final é $P_2 = 2{,}00$ atm, $V_2 = 3{,}00$ L e $E_{int\,2} = 912$ J.

50 • O gás se expande à pressão constante até atingir seu volume final. Ele é, então, resfriado a volume constante até atingir sua pressão final. (*a*) Ilustre este processo em um diagrama *PV* e calcule o trabalho realizado pelo gás. (*b*) Determine o calor absorvido pelo gás durante este processo.

51 • O gás é, primeiramente, resfriado a volume constante até atingir sua pressão final. Depois, ele se expande à pressão constante até atingir seu volume final. (*a*) Ilustre este processo em um diagrama *PV* e calcule o trabalho realizado pelo gás. (*b*) Determine o calor absorvido pelo gás durante este processo.

52 •• O gás se expande isotermicamente até atingir seu volume final, a uma pressão de 1,00 atm. Ele é, então, aquecido a volume constante até atingir sua pressão final. (*a*) Ilustre este processo em um diagrama *PV* e calcule o trabalho realizado pelo gás. (*b*) Determine o calor absorvido pelo gás durante este processo.

53 •• O gás é aquecido e se expande de tal forma a seguir uma trajetória reta em um diagrama *PV*, do seu estado inicial até o seu estado final. (*a*) Ilustre este processo em um diagrama *PV* e calcule o trabalho realizado pelo gás. (*b*) Determine o calor absorvido pelo gás durante este processo.

54 •• Neste problema, 1,00 mol de um gás diluído tem, inicialmente, uma pressão de 1,00 atm, um volume de 25,0 L e uma energia interna de 456 J. Enquanto o gás é aquecido lentamente, a representação de seus estados em um diagrama *PV* move-se em linha reta até o estado final. O gás tem, no final, uma pressão de 3,00 atm, um volume de 75,0 L e uma energia interna de 912 J. Determine o trabalho realizado pelo gás e o calor por ele absorvido.

55 •• Neste problema, 1,00 mol de um gás ideal é aquecido enquanto seu volume varia de forma que $T = AP^2$, onde A é uma constante. A temperatura varia de T_0 até $4T_0$. Determine o trabalho realizado pelo gás.

56 •• **Aplicação em Engenharia, Rico em Contexto** Uma lata de tinta *spray*, selada e praticamente vazia, ainda contém uma quantidade residual do propelente: 0,020 mol de gás nitrogênio. A etiqueta na lata alerta claramente: "Não incinerar." (*a*) Explique este alerta e desenhe um diagrama *PV* para o gás no caso de a lata ser submetida a uma temperatura alta. (*b*) Você está encarregado de testar a lata. O fabricante alega que ela pode suportar uma pressão interna de gás de 6,00 atm antes de explodir. A lata está, inicialmente, nas condições normais de temperatura e pressão em seu laboratório. Você inicia o aquecimento da lata uniformemente,

usando um aquecedor com uma potência de saída de 200 W. A lata e o aquecedor estão em um forno isolado e você pode supor que 1,0 por cento do calor liberado pelo aquecedor seja absorvido pelo gás na lata. Quanto tempo você espera que o aquecedor permaneça aceso antes de a lata explodir?

57 •• Um gás ideal, inicialmente a 20°C e a 200 kPa, tem um volume de 4,00 L. Ele sofre uma expansão isotérmica quase-estática até que sua pressão seja reduzida para 100 kPa. Determine (*a*) o trabalho realizado pelo gás, e (*b*) o calor absorvido pelo gás durante a expansão.

CAPACIDADES TÉRMICAS DOS GASES E O TEOREMA DA EQÜIPARTIÇÃO

58 • A capacidade térmica a volume constante de certa quantidade de gás monoatômico é 49,8 J/K. (*a*) Determine o número de moles do gás. (*b*) Qual é a energia interna do gás a $T = 300$ K? (*c*) Qual é a sua capacidade térmica à pressão constante?

59 •• A capacidade térmica à pressão constante de certa quantidade de gás diatômico é 14,4 J/K. (*a*) Determine o número de moles do gás. (*b*) Qual é a energia interna do gás a $T = 300$ K? (*c*) Qual é a sua capacidade térmica molar a volume constante? (*d*) Qual é a sua capacidade térmica a volume constante?

60 •• (*a*) Calcule, para o ar, a capacidade térmica a volume constante por unidade de massa e a capacidade térmica à pressão constante por unidade de massa. Suponha o ar a uma temperatura de 300 K e a uma pressão de $1{,}00 \times 10^5$ N/m^2. Suponha, também, que o ar seja constituído por 74,0 por cento de moléculas de N_2 (peso molecular de 28,0 g/mol) e 26,0 por cento de moléculas de O_2 (peso molecular de 32,0 g/mol) e que ambos os constituintes sejam gases ideais. (*b*) Compare sua resposta para o calor específico à pressão constante com o valor tabelado nos manuais, de 1,032 kJ/kg · K.

61 •• Neste problema, 1,00 mol de um gás ideal diatômico é aquecido, a volume constante, de 300 K a 600 K. (*a*) Determine o aumento da energia interna do gás, o trabalho realizado pelo gás e o calor por ele absorvido. (*b*) Determine as mesmas quantidades para quando o gás é aquecido de 300 K a 600 K à pressão constante. Use a primeira lei da termodinâmica e seus resultados da Parte (*a*) para calcular o trabalho realizado pelo gás. (*c*) Calcule novamente o trabalho na Parte (*b*), agora integrando a equação $dW = P\,dV$.

62 •• Um gás diatômico está confinado em um recipiente fechado de volume constante V_0 e à pressão P_0. O gás é aquecido até que sua pressão triplique. Que quantidade de calor foi absorvida pelo gás para triplicar a pressão?

63 •• Neste problema, 1,00 mol de ar está confinado em um cilindro com um pistão. O ar confinado é mantido à pressão constante de 1,00 atm. O ar está, inicialmente, a 0°C e com um volume V_0. Determine o volume depois de 13.200 J terem sido absorvidos pelo ar confinado.

64 •• A capacidade térmica à pressão constante de uma amostra de um gás supera a capacidade térmica a volume constante em 29,1 J/K. (*a*) Quantos moles do gás estão presentes? (*b*) Se o gás é monoatômico, quais são os valores de C_V e de C_P? (*c*) Quais são os valores de C_V e de C_P à temperatura ambiente normal?

65 •• Dióxido de carbono (CO_2), a uma pressão de 1,00 atm e à temperatura de −78,5°C, sublima diretamente do estado sólido para o estado gasoso sem passar pela fase líquida. Qual é a variação da capacidade térmica à pressão constante por mol de CO_2 ao sofrer sublimação? (Suponha que as moléculas do gás possam girar, mas não vibrar.) A variação da capacidade térmica é positiva ou negativa, durante a sublimação? A molécula de CO_2 está desenhada na Figura 18-2.

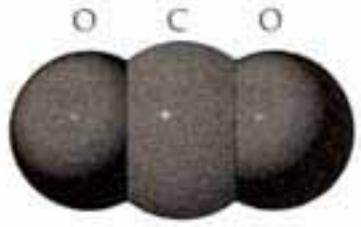


FIGURA 18-22 Problema 65

66 •• Neste problema, 1,00 mol de um gás ideal monoatômico está inicialmente a 273 K e a 1,00 atm. (*a*) Qual é a energia interna inicial do gás? (*b*) Determine o trabalho realizado pelo gás quando 500 J de calor são absorvidos por ele à pressão constante. Qual é a energia interna final do gás? (*c*) Determine o trabalho realizado pelo gás quando 500 J de calor são absorvidos por ele a volume constante. Qual é a energia interna final do gás?

67 •• Liste todos os graus de liberdade possíveis para a molécula de água e estime a capacidade térmica da água a uma temperatura muito acima de seu ponto de ebulição. (Ignore o fato de a molécula poder se dissociar a altas temperaturas.) Pense cuidadosamente sobre as diferentes maneiras nas quais uma molécula de água pode vibrar.

CAPACIDADES TÉRMICAS DOS SÓLIDOS E A LEI DE DULONG–PETIT

68 • A lei de Dulong–Petit foi originalmente usada para se determinar a massa molar de uma substância a partir da medida de sua capacidade térmica. O calor específico de certa substância sólida foi medido, obtendo-se como resultado 0,447 kJ/kg · K. (*a*) Determine a massa molar da substância. (*b*) Qual é o elemento que tem este valor para o calor específico?

EXPANSÃO ADIABÁTICA QUASE-ESTÁTICA DE UM GÁS

69 •• Uma amostra de 0,500 mol de um gás monoatômico ideal, a 400 kPa e 300 K, expande-se quase-estaticamente até que sua pressão diminua para 160 kPa. Determine a temperatura e o volume finais do gás, o trabalho realizado por ele e o calor que ele absorve, se a expansão é (*a*) isotérmica e (*b*) adiabática.

70 •• Uma amostra de 0,500 mol de um gás diatômico ideal, a 400 kPa e 300 K, expande-se quase-estaticamente até que sua pressão diminua para 160 kPa. Determine a temperatura e o volume finais do gás, o trabalho realizado por ele e o calor que ele absorve, se a expansão é (*a*) isotérmica e (*b*) adiabática.

71 •• Uma amostra de 0,500 mol de gás hélio expande-se adiabática e quase-estaticamente, de uma pressão inicial de 5,00 atm e uma temperatura de 500 K para uma pressão final de 1,00 atm. Determine (*a*) a temperatura final do gás, (*b*) o volume final do gás, (*c*) o trabalho realizado pelo gás e (*d*) a variação da energia interna do gás.

PROCESSOS CÍCLICOS

72 •• Uma amostra de 1,00 mol de gás N_2, a 20,0°C e 5,00 atm, expande-se adiabática e quase-estaticamente até que sua pressão seja igual a 1,00 atm. Ele é, então, aquecido à pressão constante até que sua temperatura seja novamente de 20,0°C. Depois de atingir esta temperatura, ele é aquecido a volume constante até que sua pressão seja novamente 5,00 atm. A seguir, ele é comprimido à pressão constante até voltar ao seu estado original. (*a*) Construa um diagrama *PV* mostrando cada processo do ciclo. (*b*) A partir do seu gráfico, determine o trabalho realizado pelo gás durante o ciclo completo. (*c*) Quanto calor é absorvido (ou liberado) pelo gás durante o ciclo completo?

73 •• Uma amostra de 1,00 mol de um gás diatômico ideal se expande. Esta expansão é representada pela linha reta de 1 a 2 no diagrama *PV* (Figura 18-23). Depois, o gás é comprimido isotermicamente. Esta compressão é representada pela linha curva de 2 a 1 no diagrama *PV*. Calcule o trabalho realizado pelo gás a cada ciclo.

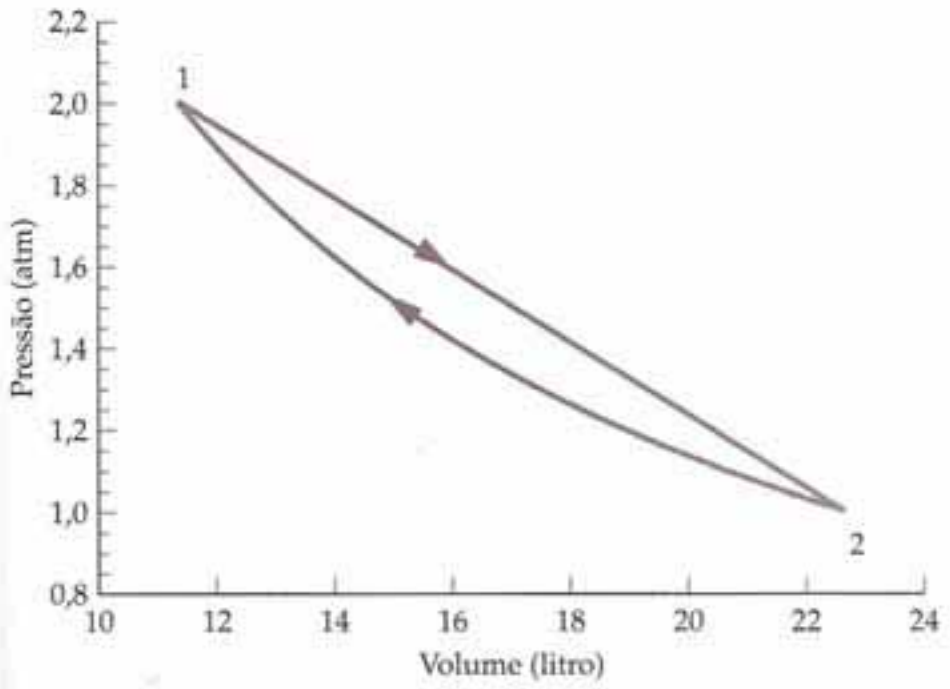


FIGURA 18-23 Problema 73

74 •• Uma amostra de um gás monoatômico ideal tem uma pressão inicial de 2,00 atm e um volume inicial de 2,00 L. O gás é, então, conduzido através do seguinte ciclo quase-estático: Ele se expande isotermicamente até que seu volume seja de 4,00 L. Depois, ele é aquecido a volume constante até que sua pressão seja de 2,00 atm. A seguir, ele é resfriado à pressão constante de volta ao seu estado inicial. (*a*) Mostre este ciclo em um diagrama *PV*. (*b*) Determine a temperatura no final de cada etapa do ciclo. (*c*) Calcule o calor absorvido e o trabalho realizado pelo gás durante cada etapa do ciclo.

75 ••• No ponto D da Figura 18-24, a pressão e a temperatura de 2,00 mol de um gás monoatômico ideal são 2,00 atm e 360 K, respectivamente. O volume do gás no ponto B do diagrama *PV* é igual a três vezes o volume no ponto D e sua pressão é o dobro da pressão no ponto C. Os caminhos AB e CD representam processos isotérmicos. O gás é conduzido através de um ciclo completo ao longo do caminho DABCD. Determine o trabalho realizado pelo gás e o calor por ele absorvido, em cada etapa do ciclo.

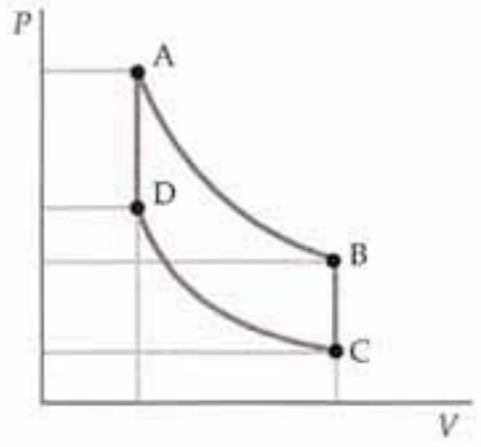


FIGURA 18-24 Problemas 75 e 76

76 ••• No ponto D na Figura 18-24, a pressão e a temperatura de 2,00 mol de um gás diatômico ideal são 2,00 atm e 360 K, respectivamente. O volume do gás no ponto B do diagrama *PV* é igual a três vezes o volume no ponto D e sua pressão é o dobro da pressão no ponto C. Os caminhos AB e CD representam processos isotérmicos. O gás é conduzido através de um ciclo completo ao longo do caminho DABCD. Determine o trabalho realizado pelo gás e o calor por ele absorvido em cada etapa do ciclo.

77 ••• Uma amostra constituída de n moles de um gás ideal está inicialmente a uma pressão P_1, com um volume V_1 e à temperatura T_q. O gás se expande isotermicamente até que sua pressão e volume sejam P_2 e V_2. Depois, ele se expande adiabaticamente até que sua temperatura seja T_f e sua pressão e volume sejam P_3 e V_3. A seguir, ele é comprimido isotermicamente até que sua pressão seja P_4 e seu volume seja V_4, que está relacionado ao volume inicial V_1 por $T_f V_4^{\gamma-1} = T_q V_1^{\gamma-1}$. O gás é, então, comprimido adiabaticamente até voltar ao seu estado original. (*a*) Supondo que cada processo seja quase-estático, represente este ciclo em um diagrama *PV*. (Este ciclo é conhecido como o ciclo de Carnot para um gás ideal.) (*b*) Mostre que o calor Q_q, absorvido durante a expansão isotérmica a T_q, é $Q_q = nRT_q \ln(V_2/V_1)$. (*c*) Mostre que o calor Q_f, liberado pelo gás durante a compressão isotérmica a T_f, é $Q_f = nRT_f \ln(V_3/V_4)$. (*d*) Usando o fato de que $TV^{\gamma-1}$ é constante para uma expansão adiabática quase-estática, mostre que $V_2/V_1 = V_3/V_4$. (*e*) A eficiência de um ciclo de Carnot é definida como o trabalho total realizado pelo gás dividido pelo calor Q_q absorvido pelo gás. Usando a primeira lei da termodinâmica, mostre que a eficiência vale $1 - Q_f/Q_q$. (*f*) Usando seus resultados para as partes anteriores deste problema, mostre que $Q_f/Q_q = T_f/T_q$.

PROBLEMAS GERAIS

78 • Durante o processo quase-estático de compressão de um gás diatômico ideal a um quinto de seu volume inicial, 180 kJ de trabalho são realizados sobre o gás. (*a*) Se esta compressão é realizada isotermicamente à temperatura ambiente (293 K), quanto de calor é liberado pelo gás? (*b*) Quantos moles de gás contém esta amostra?

79 • O diagrama *PV* da Figura 18-25 representa 3,00 mol de um gás monoatômico ideal. O gás está inicialmente no ponto A. Os caminhos AD e BC representam variações isotérmicas. Se o sistema é conduzido ao ponto C ao longo da trajetória AEC, determine (*a*) as temperaturas inicial e final do gás, (*b*) o trabalho realizado pelo gás e (*c*) o calor absorvido pelo gás.

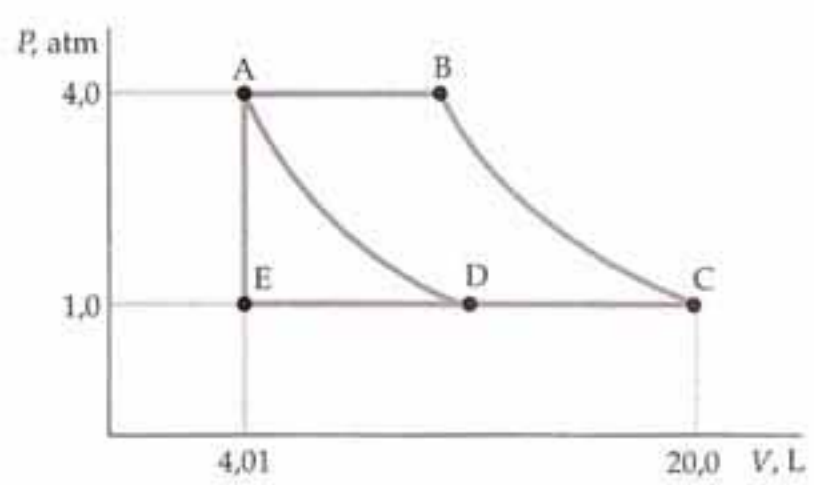


FIGURA 18-25 Problemas 79, 80, 81 e 82

80 •• O diagrama *PV* da Figura 18-25 representa 3,00 mol de um gás monoatômico ideal. O gás inicialmente está no ponto A. Os caminhos AD e BC representam variações isotérmicas. Se o sistema é conduzido ao ponto C ao longo do caminho ABC, determine (*a*) as temperaturas inicial e final do gás, (*b*) o trabalho realizado pelo gás e (*c*) o calor absorvido pelo gás.

81 •• O diagrama *PV* da Figura 18-25 representa 3,00 mol de um gás monoatômico ideal. O gás inicialmente está no ponto A. Os caminhos AD e BC representam variações isotérmicas. Se o sistema

é conduzido ao ponto C ao longo do caminho ADC, determine (*a*) as temperaturas inicial e final do gás, (*b*) o trabalho realizado pelo gás e (*c*) o calor absorvido pelo gás.

82 •• Suponha que os caminhos AD e BC da Figura 18-25 representem processos adiabáticos. Quais são os valores do trabalho realizado pelo gás e do calor absorvido pelo gás ao seguir o caminho ABC?

83 •• **APLICAÇÃO BIOLÓGICA, RICO EM CONTEXTO** Em um experimento de laboratório, você testa o conteúdo calórico de vários alimentos. Suponha que, ao ingerir estes alimentos, 100 por cento da energia liberada por eles sejam absorvidos pelo seu corpo. Você queima 2,50 g de batatas fritas e a chama resultante aquece uma pequena lata de alumínio contendo água. Depois de queimar as batatas fritas, você mede a sua massa e obtém 2,20 g. A massa da lata é 25,0 g e o volume da água contida na lata é 15,0 mL. Se o aumento de temperatura da água é de 12,5°C, quantas quilocalorias (1 kcal = 1 caloria dietética) por porção de 150 g destas batatas fritas você estima que hajam? Suponha que a lata com água capture 50,0 por cento do calor liberado durante a queima das batatas fritas. *Nota: Apesar de o joule ser a unidade SI de escolha para a maioria das situações em termodinâmica, a indústria alimentícia expressa a energia liberada durante o metabolismo em termos de "caloria dietética", que é a nossa quilocaloria.*

84 •• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** Motores a diesel operam sem velas de ignição, diferentemente dos motores a gasolina. O ciclo do motor diesel envolve compressão adiabática do ar em um cilindro seguida da injeção de combustível. Quando o combustível é injetado, se a temperatura do ar no interior do cilindro está acima do ponto de explosão do combustível a mistura combustível–ar sofrerá ignição. A maioria dos motores diesel tem razões de compressão na faixa de 14:1 a 25:1. Para este intervalo de razões de compressão (que corresponde à razão entre os volumes máximo e mínimo), qual é o intervalo de temperaturas máximas do ar no cilindro, supondo que ele entre no cilindro a 35°C? A maioria dos motores modernos a gasolina tem, tipicamente, razões de compressão da ordem de 8:1. Explique por que você espera que o motor a diesel necessite de um sistema de refrigeração melhor (mais eficiente) do que o motor a gasolina.

85 •• A temperaturas muito baixas, o calor específico de um metal é dado por $c = aT + bT^3$. Para o cobre, $a = 0{,}0108\ \text{J/kg} \cdot \text{K}^2$ e $b = 7{,}62 \times 10^{-4}\ \text{J/kg} \cdot \text{K}^4$. (*a*) Qual é o calor específico do cobre a 4,00 K? (*b*) Quanto calor é necessário para aquecer o cobre de 1,00 a 3,00 K?

86 •• Quanto trabalho deve ser realizado sobre 30,0 g de monóxido de carbono (CO), nas condições normais de temperatura e pressão, para comprimi-lo a um quinto de seu volume inicial, se o processo é (*a*) isotérmico, (*b*) adiabático?

87 •• Quanto trabalho deve ser realizado sobre 30,0 g de dióxido de carbono (CO_2), nas condições normais de temperatura e pressão, para comprimi-lo a um quinto de seu volume inicial, se o processo é (*a*) isotérmico, (*b*) adiabático?

88 •• Quanto trabalho deve ser realizado sobre 30,0 g de argônio (Ar), nas condições normais de temperatura e pressão, para comprimi-lo a um quinto de seu volume inicial, se o processo é (*a*) isotérmico, (*b*) adiabático?

89 •• Um sistema termicamente isolado consiste em 1,00 mol de um gás diatômico a 100 K e 2,00 mol de um sólido a 200 K, separados por uma parede rígida isolante. Determine a temperatura de equilíbrio do sistema depois que a parede isolante é removida, supondo que o gás obedeça à lei dos gases ideais e que o sólido obedeça à lei de Dulong–Petit.

90 •• Quando um gás ideal sofre uma variação de temperatura a volume constante, a variação de sua energia interna é dada pela fórmula $\Delta E_{int} = C_V \Delta T$. No entanto, esta fórmula fornece corretamente a variação da energia interna se o volume permanece constante ou não. (*a*) Explique por que esta fórmula fornece valores corretos para um gás ideal mesmo quando o volume varia. (*b*) Usando esta fórmula, juntamente com a primeira lei da termodinâmica, mostre que, para um gás ideal, $C_P = C_V + nR$.

91 •• Um cilindro isolante contém um pistão móvel isolante que serve para manter a pressão constante. Inicialmente, o cilindro contém 100 g de gelo a −10°C. Calor é transferido para o gelo, a uma taxa constante, por um aquecedor de 100 W. Faça um gráfico mostrando a temperatura de gelo/água/vapor como função do tempo, começando em t_i quando a temperatura é −10°C e terminando em t_f quando a temperatura é 110°C.

92 •• (*a*) Neste problema, 2,00 mol de um gás ideal diatômico expande-se adiabática e quase-estaticamente. A temperatura inicial do gás é 300 K. O trabalho realizado pelo gás durante a expansão é 3,50 kJ. Qual é a temperatura final do gás? (*b*) Compare o seu resultado com o que você obteria se o gás fosse monoatômico.

93 •• Um cilindro vertical isolante é dividido em duas partes por um pistão móvel de massa *m*. Inicialmente, o pistão é mantido em repouso. A parte de cima do cilindro está evacuada e a parte de baixo está preenchida com 1,00 mol de um gás ideal diatômico à temperatura de 300 K. Depois que o pistão é liberado e o sistema atinge o equilíbrio, o volume ocupado pelo gás está reduzido à metade. Determine a temperatura final do gás.

94 ••• De acordo com o modelo de Einstein para um sólido cristalino, a energia interna por mol é dada por $U = (3N_A kT_E)/(e^{T_E/T} - 1)$, onde T_E é a temperatura característica, chamada de *temperatura de Einstein*, e T é a temperatura do sólido em kelvin. Use esta expressão para mostrar que a capacidade térmica molar de um sólido cristalino, a volume constante, é dada por

$$c'_V = 3R\left(\frac{T_E}{T}\right)^2 \frac{e^{T_E/T}}{(e^{T_E/T} - 1)^2}$$

95 ••• (*a*) Use os resultados do Problema 94 para mostrar que, no limite $T \gg T_E$, o modelo de Einsten fornece a mesma expressão para o calor específico que a lei de Dulong–Petit. (*b*) Para o diamante, T_E é aproximadamente 1060 K. Integre numericamente $dE_{int} = c'_v dT$ para determinar o aumento da energia interna se 1,00 mol de diamante é aquecido de 300 K até 600 K.

96 ••• Use os resultados do modelo de Einstein do Problema 94 para determinar a energia interna molar do diamante (T_E = 1060 K) a 300 K e a 600 K e, portanto, o aumento da energia interna quando o diamante é aquecido de 300 K até 600 K. Compare seu resultado com o do Problema 95.

97 ••• Durante uma expansão isotérmica um gás ideal, a uma pressão inicial P_0, se expande até que seu volume seja o dobro de seu volume inicial V_0. (*a*) Determine a pressão depois da expansão. (*b*) O gás é, então, comprimido adiabática e quase-estaticamente até que seu volume seja V_0 e sua pressão seja $1{,}32P_0$. O gás é monoatômico, diatômico ou poliatômico? (*c*) Como varia a energia cinética de translação do gás em cada estágio deste processo?

98 ••• Se um pneu furar, o gás do interior vazará gradualmente. Suponha o seguinte: a área do furo é A; o volume do pneu é V; e o tempo τ que leva para a maior parte do gás vazar do pneu pode ser expresso em termos da razão A/V, da temperatura T, da constante de Boltzmann k e da massa inicial m do gás dentro do pneu. (*a*) Com base nestas suposições, use análise dimensional para fazer uma estimativa de τ. (*b*) Use o resultado da Parte (*a*) para estimar o tempo que leva para esvaziar um pneu de carro que foi furado por um prego.

CAPÍTULO 19

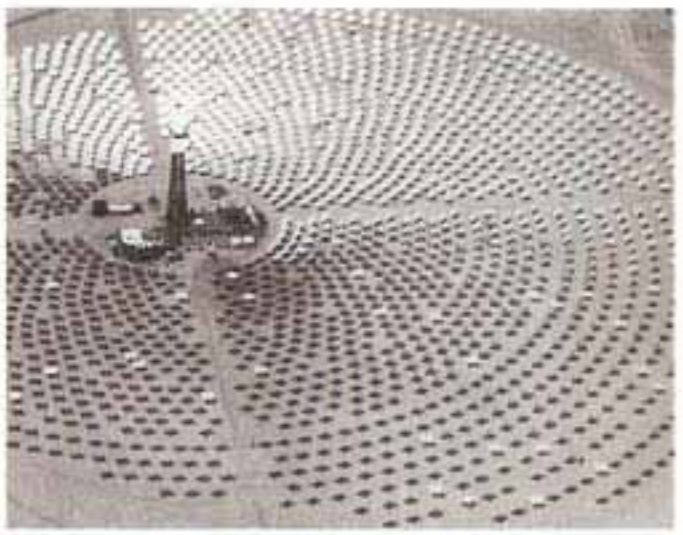
MERGULHADORES CARREGAM TANQUES DE AR QUE OS PERMITEM PERMANECER EMBAIXO D'ÁGUA DURANTE LONGOS PERÍODOS DE TEMPO. *(Paul Springett/ Alamy.)*

A Segunda Lei da Termodinâmica

19-1 Máquinas Térmicas e a Segunda Lei da Termodinâmica
19-2 Refrigeradores e a Segunda Lei da Termodinâmica
19-3 A Máquina de Carnot
*19-4 Bombas Térmicas
19-5 Irreversibilidade, Desordem e Entropia
19-6 Entropia e a Disponibilidade de Energia
19-7 Entropia e Probabilidade

? A probabilidade que, em dado instante, as moléculas do ar em um dos tanques estejam todas na metade do tanque mais afastada da conexão com a mangueira é muitíssimo pequena. Quão pequena ela é? (Veja o Exemplo 19-13.)

Freqüentemente somos solicitados a conservar energia. Mas, de acordo com a primeira lei da termodinâmica, a energia é sempre conservada. O que, então, significa conservar energia se a quantidade total de energia no universo não varia, independentemente do que fizermos? A primeira lei da termodinâmica não conta toda a história. A energia é sempre conservada, mas algumas formas de energia são mais úteis do que outras. A possibilidade ou a impossibilidade de se colocar a energia *em uso* é o tópico da segunda lei da termodinâmica. Cientistas e engenheiros estão constantemente tentando melhorar a eficiência de máquinas térmicas (dispositivos que transformam calor em trabalho). Na indústria da geração de energia os engenheiros se esforçam para atingir maior eficiência, na transformação, em trabalho aproveitável, da energia térmica liberada pela queima de combustíveis fósseis e através da fissão de urânio ou plutônio.



Energia solar é direcionada para o forno solar, localizado no centro, através deste arranjo circular de refletores em Barstow, na Califórnia (EUA). *(Sandia National Laboratory.)*

Neste capítulo examinamos como a segunda lei da termodinâmica se relaciona diretamente com máquinas térmicas e refrigeradores. Também discutimos uma máquina térmica ideal — a máquina de Carnot. Irreversibilidade e entropia também são analisadas no que se refere à disponibilidade de energia, desordem e probabilidade.

19-1 MÁQUINAS TÉRMICAS E A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA

> Nenhum sistema pode absorver calor de um único reservatório e convertê-lo inteiramente em trabalho sem que resultem outras variações no sistema e no ambiente que o cerca.
>
> SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA: ENUNCIADO DE KELVIN

Um exemplo comum de conversão de trabalho em calor é o movimento com atrito. Por exemplo, imagine que você passe dois minutos empurrando um bloco em cima de uma mesa ao longo de uma trajetória fechada, largando o bloco na sua posição inicial. Além disso, suponha que o sistema bloco–mesa esteja inicialmente em equilíbrio térmico com o ambiente. O trabalho que você realiza sobre o sistema é convertido em energia térmica do sistema e, como resultado, o sistema bloco–mesa se aquece. Conseqüentemente, o sistema não está mais em equilíbrio térmico com o ambiente. O sistema transferirá energia na forma de calor para o ambiente, até retornar ao equilíbrio térmico. Como os estados final e inicial do sistema são o mesmo, a primeira lei da termodinâmica diz que a transferência de energia para o ambiente na forma de calor é igual ao trabalho realizado por você sobre o sistema. O processo inverso nunca ocorre – um bloco e uma mesa que estão aquecidos nunca esfriarão espontaneamente, convertendo sua energia interna em trabalho capaz de fazer com que o bloco puxe sua mão em um circuito sobre a mesa! Contudo, esta ocorrência surpreendente não violaria a primeira lei da termodinâmica ou nenhuma outra das leis da física que já encontramos até agora. Ela viola, entretanto, a segunda lei da termodinâmica. Assim, há uma falta de simetria nos papéis desempenhados pelo calor e pelo trabalho que não é evidenciada na primeira lei. Esta falta de simetria está relacionada ao fato de que alguns processos são *irreversíveis*.

Existem muitos outros processos irreversíveis, aparentemente muito diferentes entre si, mas que estão todos relacionados à segunda lei. Por exemplo, a transferência de calor é um processo irreversível. Se colocarmos um corpo aquecido em contato com um corpo frio, o calor será transferido do corpo quente para o corpo frio até que eles atinjam a mesma temperatura. Entretanto, o inverso nunca ocorre. Dois corpos em contato, a uma mesma temperatura, permanecem na mesma temperatura; calor não é transferido de um para o outro deixando um deles mais frio e o outro mais quente. Este fato experimental nos fornece uma definição equivalente da segunda lei da termodinâmica.

> Um processo cujo único resultado efetivo seja o de retirar calor de um reservatório frio e liberar a mesma quantidade de calor para um reservatório quente é impossível.
>
> SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA: ENUNCIADO DE CLAUSIUS

Mostraremos, neste capítulo, que os enunciados de Kelvin e de Clausius para a segunda lei são equivalentes.

O estudo da eficiência das máquinas térmicas deu origem aos primeiros enunciados claros a respeito da segunda lei. Uma **máquina térmica** é um dispositivo cíclico cujo objetivo é converter a maior quantidade possível de calor em trabalho. Máquinas térmicas contêm uma **substância de trabalho** (água, em uma máquina a vapor) que absorve uma quantidade de calor Q_q de um reservatório de alta temperatura, realiza trabalho W sobre o ambiente e libera calor Q_f enquanto retorna para seu estado inicial, onde Q_q, W e Q_f representam magnitudes e nunca são negativos.

! Q_q, W e Q_f representam magnitudes e nunca são negativos.

As primeiras máquinas térmicas eram máquinas a vapor, inventadas no século XVIII para bombeamento de água em minas de carvão. Hoje em dia, máquinas térmicas são usadas para gerar eletricidade. Em uma máquina térmica típica, água líquida sob pressão de várias atmosferas absorve calor de um reservatório de alta temperatura até se vaporizar a aproximadamente 500°C (Figura 19-1). Este vapor se expande contra um pistão (ou contra as pás de uma turbina) realizando trabalho, e sai com uma temperatura muito menor. O vapor é resfriado mais ainda no condensador, onde se condensa e libera calor para um reservatório de baixa temperatura. A água é, então, bombeada de volta para o aquecedor e aquecida novamente.

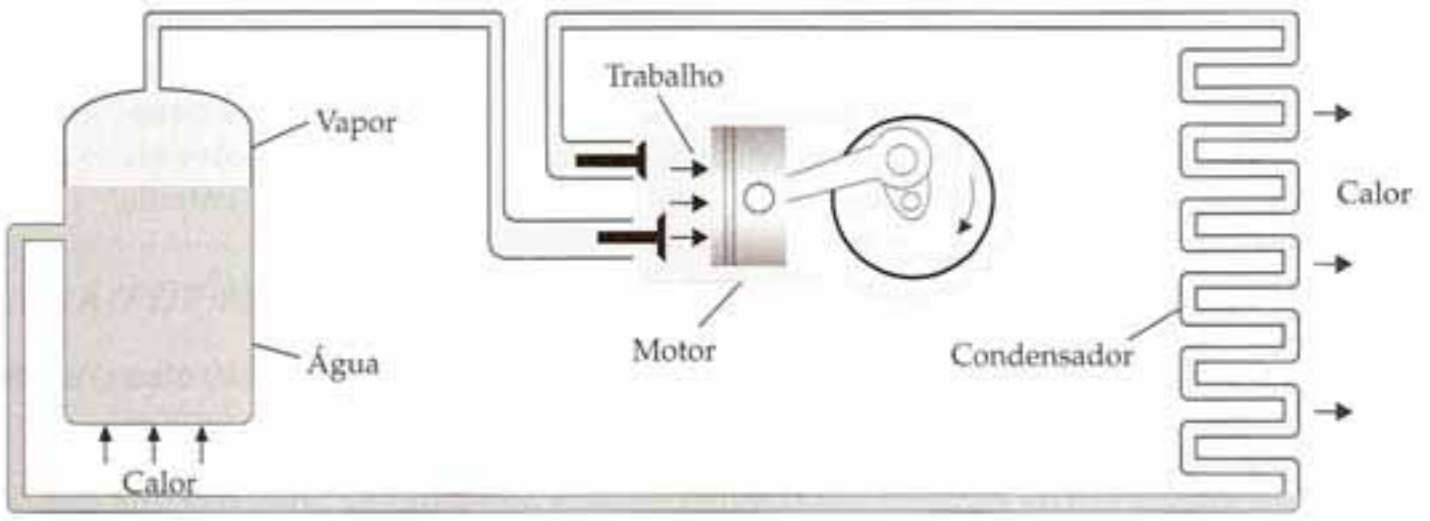


FIGURA 19-1 Desenho esquemático de uma máquina a vapor. Vapor sob alta pressão realiza trabalho sobre o pistão.

A Figura 19-2 é um diagrama esquemático da máquina térmica usada em muitos automóveis — o motor de combustão interna. Com a válvula de exaustão fechada,

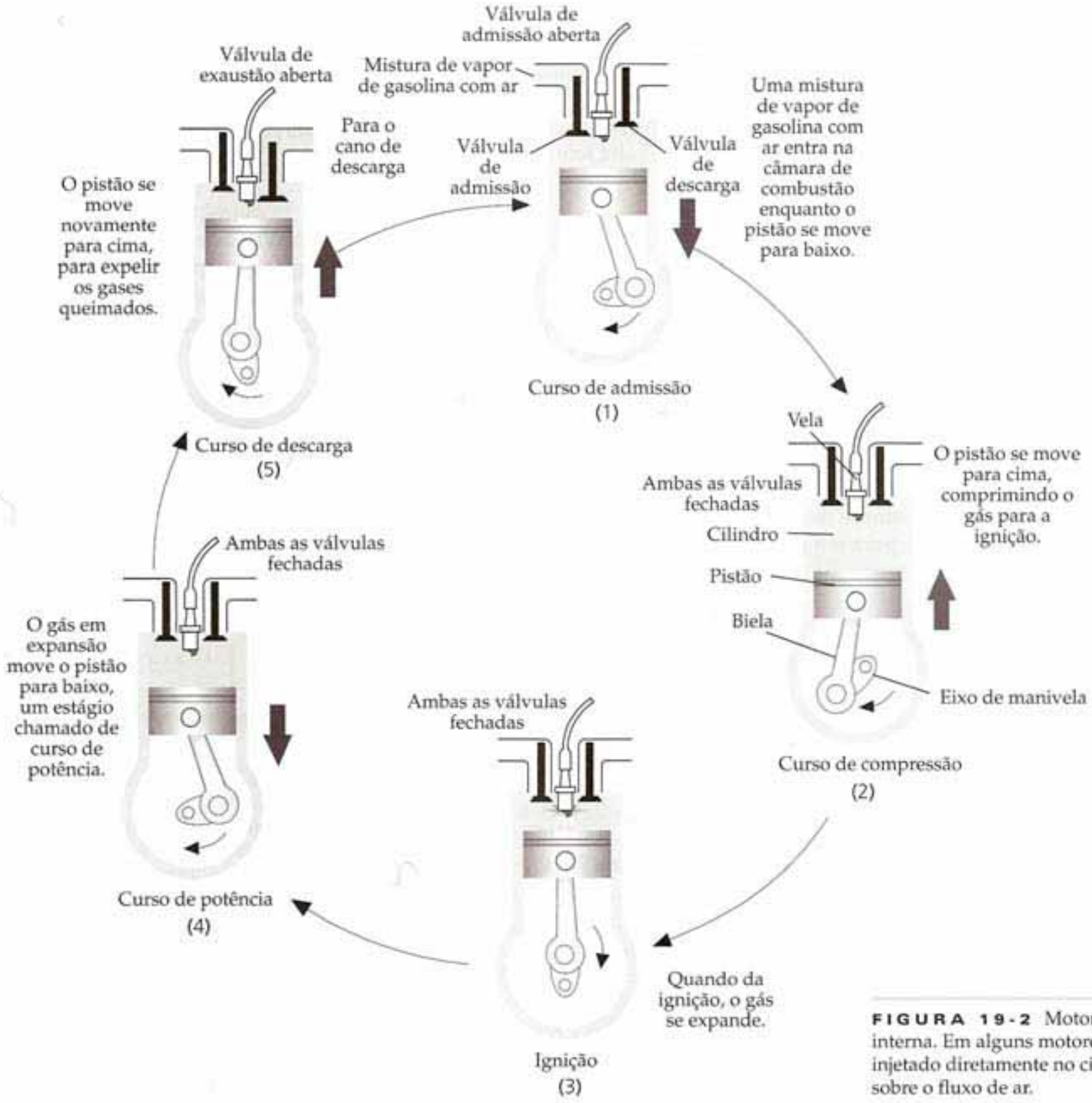


FIGURA 19-2 Motor de combustão interna. Em alguns motores, o fluido é injetado diretamente no cilindro, e não sobre o fluxo de ar.

uma mistura de vapor de gasolina e ar entra na câmara de combustão, enquanto o pistão se move para baixo durante o curso de admissão. A mistura é, então, comprimida e, depois, ocorre a ignição por uma faísca da vela de ignição. Os gases aquecidos se expandem, conduzindo o pistão para baixo e realizando trabalho sobre ele durante o *curso de potência*. Na seqüência, os gases são expelidos através da válvula de exaustão e o ciclo se repete.

Um modelo idealizado dos processos no motor de combustão interna é o chamado **ciclo Otto**, mostrado na Figura 19-3.

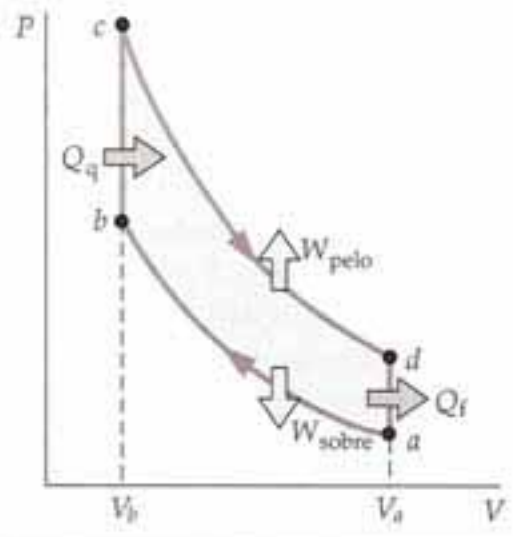


FIGURA 19-3 Ciclo Otto, representando o motor de combustão interna. A mistura ar-combustível é comprimida adiabaticamente de *a* até *b*. Ela é, então, aquecida (por combustão) a volume constante até *c*. O curso de potência é representado pela expansão adiabática de *c* até *d*. O resfriamento a volume constante de *d* até *a* representa a liberação de calor. Os produtos da combustão são trocados por uma nova mistura ar-combustível à pressão constante na etapa *a* (não mostrado). Trabalho é realizado sobre o sistema durante a compressão adiabática e trabalho é realizado pelo sistema durante a expansão adiabática.

A Figura 19-4 mostra uma representação esquemática de uma máquina térmica básica. O calor absorvido é retirado de um **reservatório térmico** quente à temperatura T_q, e o calor liberado é transferido para um reservatório térmico frio a uma temperatura menor T_f. Um reservatório térmico, quente ou frio, é um corpo ou um sistema idealizado com uma capacidade térmica muito grande e, portanto, pode absorver ou liberar calor sem variação apreciável de sua temperatura. Na prática, a queima de um combustível fóssil muitas vezes se comporta como um reservatório de alta temperatura e a atmosfera ambiente ou um lago geralmente se comportam como um reservatório de baixa temperatura. A aplicação da primeira lei da termodinâmica ($\Delta E_{int} = Q_{para} + W_{sobre}$) para a máquina térmica leva a

$$W = Q_q - Q_f \qquad 19\text{-}1$$

onde W é o trabalho realizado *pela* máquina durante um ciclo completo, $Q_q - Q_f$ é o calor total transferido para a máquina durante um ciclo e ΔE_{int} é a variação da energia interna da máquina (incluindo a substância de trabalho) durante um ciclo. Como os estados inicial e final da máquina para um ciclo completo são iguais, as energias internas inicial e final da máquina são iguais. Portanto, $\Delta E_{int} = 0$.

O rendimento ε de uma máquina térmica é definido como a razão entre o trabalho realizado pela máquina e o calor retirado do reservatório de alta temperatura:

$$\varepsilon = \frac{W}{Q_q} = \frac{Q_q - Q_f}{Q_q} = 1 - \frac{Q_f}{Q_q} \qquad 19\text{-}2$$

DEFINIÇÃO: RENDIMENTO DE UMA MÁQUINA TÉRMICA

O calor Q_q geralmente é produzido pela queima de algum combustível que precisa ser pago, como carvão ou óleo e, portanto, é desejável que se tenha o máximo possível de rendimento. As melhores máquinas a vapor operam com aproximadamente 40 por cento de rendimento; os melhores motores de combustão interna operam com aproximadamente 50 por cento de rendimento. Com 100 por cento de rendimento ($\varepsilon = 1$), todo o calor retirado do reservatório quente seria convertido em trabalho e nenhum calor seria liberado para o reservatório frio. Entretanto, *é impossível construir uma máquina térmica com 100 por cento de rendimento*. Esta afirmativa é o **enunciado da segunda lei da termodinâmica para máquinas térmicas**. É outra maneira de expressar o enunciado de Kelvin apresentado anteriormente:

> É impossível para uma máquina térmica, operando em um ciclo, produzir como *único efeito* o de retirar calor de um único reservatório e realizar uma quantidade equivalente de trabalho.
>
> SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA: ENUNCIADO PARA MÁQUINAS TÉRMICAS

Um gás ideal sofrendo uma expansão isotérmica faz exatamente isso. Mas, depois da expansão, o gás não está no seu estado original. Para trazê-lo de volta ao seu estado original, trabalho deve ser realizado sobre o gás e algum calor será liberado.

A segunda lei nos diz que, para realizar trabalho com retirada de energia de um reservatório térmico, devemos ter um reservatório mais frio disponível para receber a energia que não é usada pela máquina ao realizar trabalho. Se isto não fosse verdadeiro, poderíamos projetar um navio que tivesse uma máquina térmica alimentada simplesmente pela extração de calor do oceano. Infelizmente, a falta de um reservatório mais frio, para receber calor da máquina, torna este enorme reservatório de energia indisponível para esse fim. (Teoricamente, é possível fazer funcionar uma máquina térmica entre a superfície mais aquecida da água do oceano e a água mais

! A palavra *ciclo* neste enunciado é importante porque *é* possível converter calor completamente em trabalho em um processo não-cíclico.

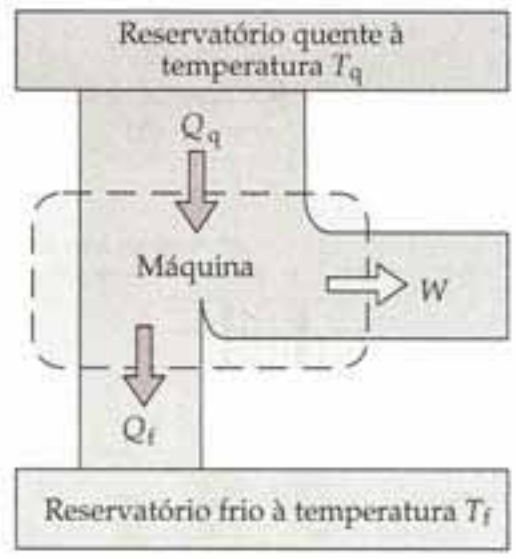


FIGURA 19-4 Representação esquemática de uma máquina térmica. A máquina absorve calor Q_q de um reservatório quente, a uma temperatura T_q, realiza trabalho W e libera calor Q_f para um reservatório frio a uma temperatura T_f.

fria em maiores profundidades, mas nenhum esquema prático para uso desta diferença de temperatura ainda foi projetado.) Para converter calor, a uma dada temperatura, em energia que realiza trabalho (sem nenhuma outra alteração da fonte ou da substância), um reservatório frio, em separado, deve ser usado.

ESTRATÉGIA PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Calculando o Trabalho Realizado por uma Máquina Térmica Operando em um Ciclo

SITUAÇÃO Uma máquina térmica absorve calor de um reservatório térmico de alta temperatura, realiza trabalho e libera calor para um reservatório térmico de baixa temperatura. A conservação da energia nos informa que o calor absorvido pela máquina, por ciclo, é igual ao calor liberado pela máquina, por ciclo, mais o trabalho realizado pela máquina em cada ciclo. O rendimento de uma máquina térmica é definido como a razão entre o trabalho realizado pela máquina, a cada ciclo, e o calor absorvido pela máquina em cada ciclo. A substância de trabalho da máquina é um gás ideal para virtualmente todos os cálculos deste texto.

SOLUÇÃO

1. Para um número inteiro de ciclos, a variação da energia interna vale $\Delta E_{int} = 0$, de forma que $Q_q = W + Q_f$.
2. O rendimento é dado por $\varepsilon = W/Q_q$.
3. O trabalho realizado em uma etapa de um ciclo é dado por $W_{etapa} \int_{V_i}^{V_f} P\,dV$, onde $P = nRT/V$.
4. O calor absorvido pelo gás durante uma etapa é dado por $C\,\Delta T$, onde C é a capacidade térmica.

CHECAGEM O trabalho realizado, W, deve ser igual a $Q_q - Q_f$ se a máquina completa um número inteiro de ciclos.

Exemplo 19-1 Rendimento de uma Máquina Térmica

Durante cada ciclo, uma máquina térmica absorve 200 J de calor de um reservatório quente, realiza trabalho e libera 160 J para um reservatório frio. Qual é o rendimento da máquina?

SITUAÇÃO Usamos a definição de rendimento de uma máquina térmica $\varepsilon = W/Q_q$ (Equação 19-2).

SOLUÇÃO

1. O rendimento é o trabalho realizado dividido pelo calor absorvido: $\varepsilon = \dfrac{W}{Q_q}$
2. O calor absorvido e o calor liberado são dados: $Q_q = 200\,\text{J}$ e $Q_f = 160\,\text{J}$
3. O trabalho é determinado a partir da primeira lei: $W = Q_q - Q_f = 200\,\text{J} - 160\,\text{J} = 40\,\text{J}$
4. Substitua os valores de Q_q e W para calcular o rendimento: $\varepsilon = \dfrac{W}{Q_q} = \dfrac{40\,\text{J}}{200\,\text{J}} = 0{,}20 = \boxed{20\%}$

CHECAGEM O rendimento é adimensional. Neste exemplo, tanto W quanto Q_q são expressos em joules, logo a razão é adimensional, como esperado.

PROBLEMA PRÁTICO 19-1 Uma máquina térmica tem um rendimento de 35 por cento. (*a*) Quanto trabalho ela realiza em um ciclo, se absorve 150 J de calor do reservatório de alta temperatura a cada ciclo? (*b*) Quanto calor é transferido para o reservatório de baixa temperatura a cada ciclo?

Exemplo 19-2 O Ciclo Otto

Tente Você Mesmo

(*a*) Determine o rendimento do ciclo Otto mostrado na Figura 19-3. (*b*) Expresse sua resposta em termos da razão entre os volumes $r = V_a/V_b$.

SITUAÇÃO (*a*) Para determinar ε você precisa determinar Q_q e Q_f. A transferência de calor ocorre apenas durante os dois processos a volume constante, de *b* para *c* e de *d* para *a*. Você pode, então, determinar Q_q e Q_f e, portanto, ε em termos das temperaturas T_a, T_b, T_c e T_d. (*b*) As temperaturas podem ser relacionadas aos volumes usando $TV^{\gamma-1}$ = constante para processos adiabáticos.

SOLUÇÃO

Cubra a coluna da direita e tente por si só antes de olhar as respostas.

Passos	Respostas
(*a*) 1. Escreva o rendimento em termos de Q_q e Q_f:	$\varepsilon = 1 - \dfrac{Q_{\text{frio}}}{Q_{\text{quente}}} = 1 - \dfrac{Q_f}{Q_q}$
2. A liberação de calor ocorre a volume constante de *d* para *a*. Escreva Q_f em termos de C_v e das temperaturas T_a e T_d:	$Q_f = \lvert Q_{d\to a}\rvert = C_v\lvert T_a - T_d\rvert = C_v(T_d - T_a)$
3. A absorção de calor ocorre a volume constante de *b* para *c*. Escreva Q_q em termos de C_v e das temperaturas T_c e T_b:	$Q_q = Q_{b\to c} = C_v(T_c - T_b)$
4. Substitua estas expressões de Q_f e Q_q para determinar o rendimento em termos das temperaturas T_a, T_b, T_c e T_d:	$\varepsilon = \boxed{1 - \dfrac{T_d - T_a}{T_c - T_b}}$
(*b*) 1. Relacione T_c com T_d usando $TV^{\gamma-1}$ = constante e $V_a/V_c = r$:	$T_cV_c^{\gamma-1} = T_dV_d^{\gamma-1}$ $T_c = T_d\dfrac{V_d^{\gamma-1}}{V_c^{\gamma-1}} = T_dr^{\gamma-1}$
2. Relacione T_b com T_a como no passo 1:	$T_b = T_ar^{\gamma-1}$
3. Use estas relações para eliminar T_c e T_b de ε na Parte (*a*) e expresse ε em termos de *r*:	$\varepsilon = 1 - \dfrac{T_d - T_a}{T_dr^{\gamma-1} - T_ar^{\gamma-1}} = \boxed{1 - \dfrac{1}{r^{\gamma-1}}}$

CHECAGEM O resultado da Parte (*a*) é um número adimensional, como esperado. Além disso, a expressão para ε varia entre 0 e 1 e se aproxima de 0 quando *r* se aproxima de 1, como esperado.

INDO ALÉM A razão *r* (volume antes da compressão/volume depois da compressão) é chamada de razão de compressão.

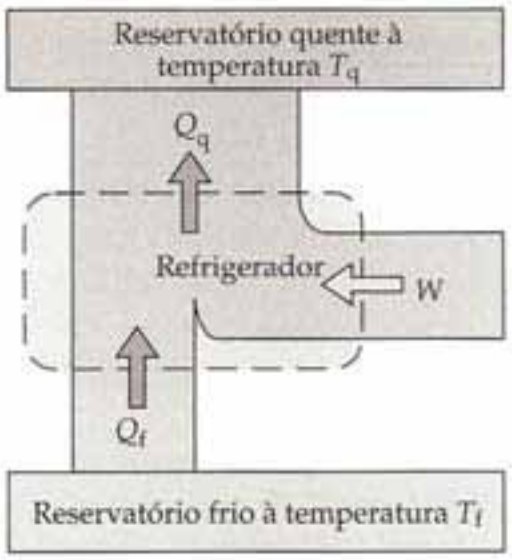
19-2 REFRIGERADORES E A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA

Um **refrigerador** é, essencialmente, uma máquina térmica que funciona ao contrário (Figura 19-5*a*). Calor é retirado do interior do refrigerador (reservatório frio) e calor é liberado para o ambiente (reservatório quente) (Figura 19-5*b*). A experiência mostra que esta transferência requer, sempre, que trabalho seja realizado sobre o refrigerador — um resultado conhecido como o **enunciado da segunda lei da termodinâmica para refrigeradores**, que é outra maneira de expressar o enunciado de Clausius:

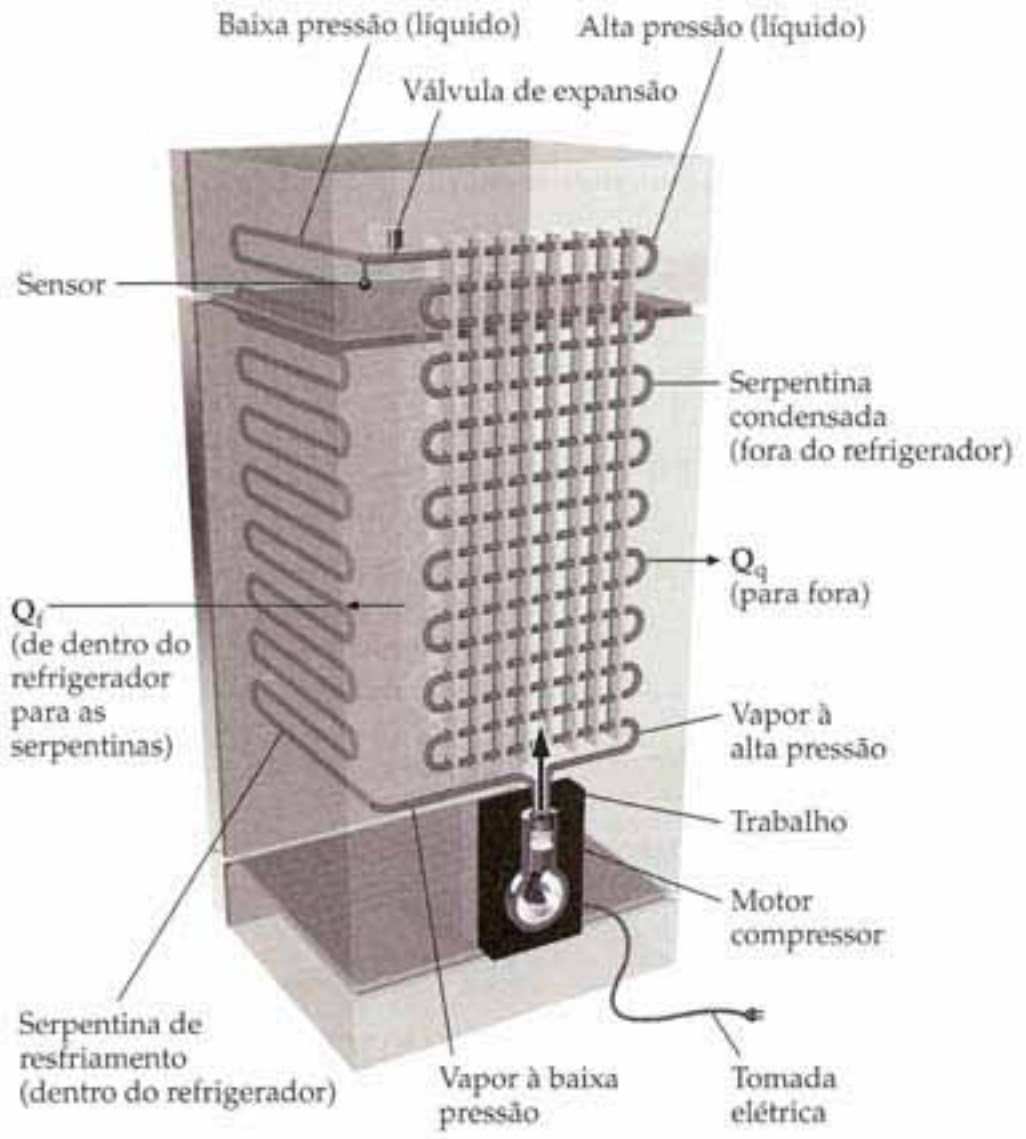
> É impossível para um refrigerador, operando em um ciclo, produzir como *único efeito* o de retirar calor de um corpo frio e liberar a mesma quantidade de calor para um corpo quente.

SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA: ENUNCIADO PARA REFRIGERADORES

Se a definição precedente não fosse verdadeira, poderíamos resfriar nossas casas no verão com refrigeradores que liberariam calor para o lado de fora sem usar eletricidade ou qualquer outro tipo de fonte de energia.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 19-5 (*a*) Representação esquemática de um refrigerador. Trabalho W é realizado sobre o refrigerador e ele extrai calor Q_f de um reservatório frio e libera calor Q_q. (*b*) Um refrigerador real.

Uma medida do desempenho de um refrigerador é a razão Q_f/W entre o calor retirado do reservatório de baixa temperatura e o trabalho realizado sobre o refrigerador. (Este trabalho é igual à energia elétrica consumida.) A razão Q_f/W é chamada de **coeficiente de desempenho** (CD):

$$\text{CD} = \frac{Q_f}{W} \qquad 19\text{-}3$$

DEFINIÇÃO: COEFICIENTE DE DESEMPENHO (REFRIGERADOR)

Quanto maior o CD, melhor será o refrigerador. Refrigeradores típicos têm coeficientes de desempenho da ordem de 5 ou 6. Em termos desta razão, o enunciado da segunda lei para refrigeradores diz que o CD de um refrigerador não pode ser infinito.

Exemplo 19-3 Fazendo Cubos de Gelo — *Rico em Contexto*

Você tem meia hora antes de seus convidados chegarem e se dá conta, repentinamente, de que esqueceu de comprar gelo para as bebidas. Rapidamente, você despeja 1,00 L de água a 10,0°C nas bandejas de gelo e as coloca no congelador. Você terá gelo quando seus convidados chegarem? A etiqueta no seu refrigerador diz que o aparelho tem um coeficiente de desempenho de 5,5 e um consumo de energia de 550 W. Você estima que apenas 10 por cento da energia elétrica contribuem para o resfriamento e o congelamento da água.

SITUAÇÃO Trabalho é igual a potência vezes tempo. Temos a potência, logo precisamos determinar o trabalho para determinar o tempo. O trabalho W está relacionado a Q_f por $\text{CD} = W/Q_f$ (Equação 19-3). Para determinar Q_f, calculamos quanto calor deve ser liberado pela água.

SOLUÇÃO

1. O tempo necessário está relacionado à potência disponível e ao trabalho necessário: $P = W/\Delta t \Rightarrow \Delta t = W/P$
2. O trabalho está relacionado ao coeficiente de desempenho e ao calor absorvido: $\text{CD} = \dfrac{Q_f}{W}$

3. O calor Q_f retirado de dentro do refrigerador é igual ao calor Q_{resf} a ser extraído da água para resfriá-la mais o calor Q_{cong} a ser extraído da água para congelá-la: $Q_f = Q_{resf} + Q_{cong}$
4. A liberação de calor necessária para resfriar em 10°C a quantidade de 1,00 L de água (massa 1 kg) é: $Q_{resf} = mc\,\Delta T = (1{,}00\text{ kg})[4{,}18\text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}](10{,}0\text{ K}) = 41{,}8\text{ kJ}$
5. A liberação de calor necessária para congelar 1 L de água, formando os cubos de gelo, é: $Q_{cong} = mL_f = (1{,}00\text{ kg})(333{,}5\text{ kJ/kg}) = 333{,}5\text{ kJ}$
6. Some estes valores para obter Q_f: $Q_f = 41{,}8\text{ kJ} + 333{,}5\text{ kJ} = 375\text{ kJ}$
7. Substitua Q_f no passo 2 para determinar o trabalho W: $W = \dfrac{Q_f}{\text{CD}} = \dfrac{375\text{ kJ}}{5{,}5} = 68{,}2\text{ kJ}$
8. Use este valor de W e os 55 W de potência disponíveis para determinar o tempo t: $\Delta t = \dfrac{W}{P} = \dfrac{68{,}2\text{ kJ}}{55\text{ J/s}} = 1{,}24\text{ ks} \times \dfrac{1\text{ min}}{60\text{ s}} = 20{,}7\text{ min}$

Seus convidados terão gelo.

CHECAGEM Vinte minutos é um tempo curto, mas plausível, para congelar um litro de água.

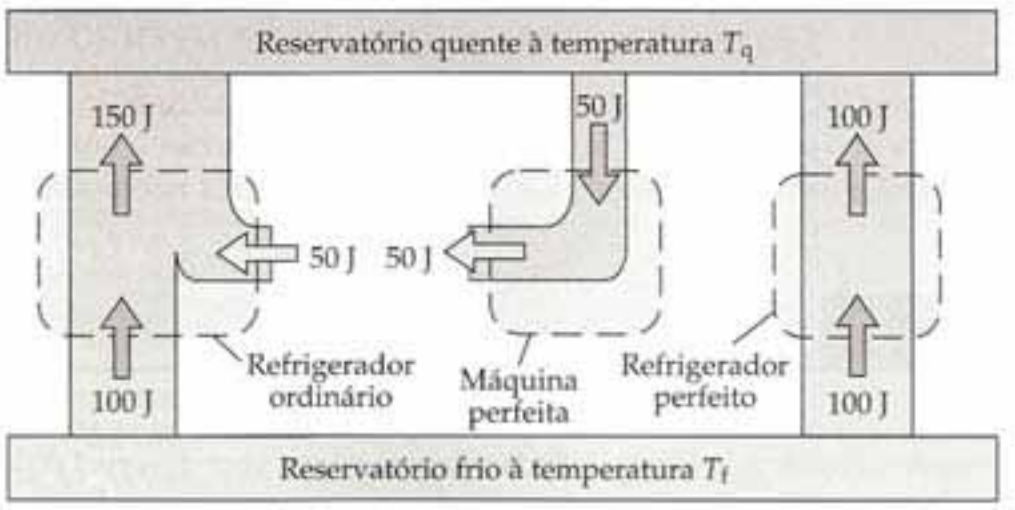
PROBLEMA PRÁTICO 19-2 Um refrigerador tem um coeficiente de desempenho de 4,0. Quanto calor, por ciclo, é absorvido pelo reservatório quente, se 200 kJ de calor são liberados pelo reservatório frio a cada ciclo?

EQUIVALÊNCIA ENTRE OS ENUNCIADOS PARA MÁQUINAS TÉRMICAS E PARA REFRIGERADORES

Os enunciados para máquinas térmicas e para refrigeradores (isto é, os enunciados de Kelvin e de Clausius, respectivamente) da segunda lei da termodinâmica parecem bem diferentes mas são, na verdade, equivalentes. O enunciado para máquinas térmicas é: "É impossível para uma máquina térmica, operando em um ciclo, produzir como *único efeito* o de retirar calor de um único reservatório e realizar uma quantidade equivalente de trabalho", enquanto o enunciado para refrigeradores é: "É impossível para um refrigerador, operando em um ciclo, produzir como *único efeito* o de retirar calor de um corpo frio e liberar a mesma quantidade de calor para um corpo quente". Podemos provar a equivalência destes enunciados mostrando que, se cada enunciado é considerado falso, então o outro também deverá ser falso. Usaremos um exemplo numérico para mostrar que, se o enunciado para máquinas térmicas é falso, então o enunciado para refrigeradores é falso.

A Figura 19-6*a* mostra um refrigerador comum que usa 50 J de trabalho para absorver 100 J de calor de um reservatório frio e liberar 150 J de calor para um reservatório quente. Suponha que o enunciado da segunda lei para máquinas térmicas não seja verdadeiro. Então, uma máquina térmica "perfeita" poderia absorver 50 J de calor do reservatório quente e realizar 50 J de trabalho, com 100 por cento de rendimento. Poderíamos usar esta máquina térmica perfeita para absorver 50 J de calor do reservatório quente e realizar 50 J de trabalho (Figura 19-6*b*) sobre um refrigerador ordinário. Então, a combinação da máquina térmica perfeita com o refrigerador ordinário seria um refrigerador perfeito, transferindo 100 J de calor do reservatório frio para o reservatório quente sem necessidade de qualquer trabalho, como ilustrado na Figura 19-6*c*. Isto viola o enunciado da segunda lei para refrigeradores. Portanto, se o enunciado para máquinas térmicas é falso, o enunciado para refrigeradores também é falso. De maneira similar, se existisse um refrigerador

FIGURA 19-6 Demonstração da equivalência entre os enunciados da segunda lei da termodinâmica para máquinas térmicas e para refrigeradores.



(*a*) Um refrigerador ordinário retira 100 J de um reservatório frio, recebendo 50 J de trabalho.

(*b*) Uma máquina térmica perfeita viola o enunciado da segunda lei da termodinâmica para máquinas térmicas, absorvendo 50 J do reservatório quente e convertendo-os inteiramente em trabalho.

(*c*) Colocando os dois juntos, temos um refrigerador perfeito que viola o enunciado da segunda lei da termodinâmica para os refrigeradores, retirando 100 J do reservatório frio e liberando a mesma quantidade de calor para o reservatório quente, sem nenhum outro efeito.

Destas considerações, e dos nossos enunciados da segunda lei da termodinâmica, podemos listar algumas condições que são necessárias para que um processo seja reversível:

1. Nenhuma energia mecânica é transformada em energia térmica interna pelo atrito, por forças viscosas ou por outras forças dissipadoras.
2. Energia é transferida na forma de calor apenas entre corpos com uma diferença infinitesimal de temperatura.
3. O processo deve ser quase-estático para que o sistema esteja sempre em (ou infinitesimalmente próximo de) um estado de equilíbrio.

CONDIÇÕES PARA REVERSIBILIDADE

Qualquer processo que viole qualquer uma das condições precedentes é irreversível. A maioria dos processos que observamos na natureza é irreversível. Para se ter um processo reversível é preciso tomar muito cuidado para eliminar forças de atrito e outras forças dissipadoras e para realizar o processo de forma quase-estática. Como isto nunca pode ser satisfeito completamente, um processo reversível é uma idealização semelhante ao do movimento sem atrito nos problemas de mecânica. A reversibilidade pode, entretanto, ser obtida de forma aproximada na prática.

Podemos, agora, entender as características do ciclo de Carnot, que é um ciclo reversível entre dois reservatórios térmicos. Como toda transferência de calor deve ser feita isotermicamente, para que o processo seja reversível, o calor absorvido do reservatório quente deve ser absorvido isotermicamente. O próximo passo é uma expansão adiabática quase-estática para a temperatura mais baixa do reservatório frio. Depois, calor é liberado isotermicamente para o reservatório frio. Finalmente, há uma compressão adiabática quase-estática para a temperatura mais elevada do reservatório quente. Assim, o ciclo de Carnot consiste em quatro etapas reversíveis:

1. Uma absorção quase-estática e isotérmica de calor de um reservatório quente
2. Uma expansão quase-estática e adiabática para uma temperatura menor
3. Uma liberação quase-estática e isotérmica de calor para um reservatório frio
4. Uma compressão quase-estática e adiabática de volta ao estado original

ETAPAS DE UM CICLO DE CARNOT

Uma maneira de calcular o rendimento de uma máquina de Carnot é escolher como substância de trabalho um material sobre o qual temos algum conhecimento — um gás ideal — e, então, calcular explicitamente o trabalho realizado sobre ele em um ciclo de Carnot (Figura 19-8*a* e Figura 19-8*b*). Como todos os ciclos de Carnot têm o mesmo rendimento, independentemente da substância de trabalho, nosso resultado terá validade geral.

O rendimento do ciclo de Carnot (Equação 19-2) é

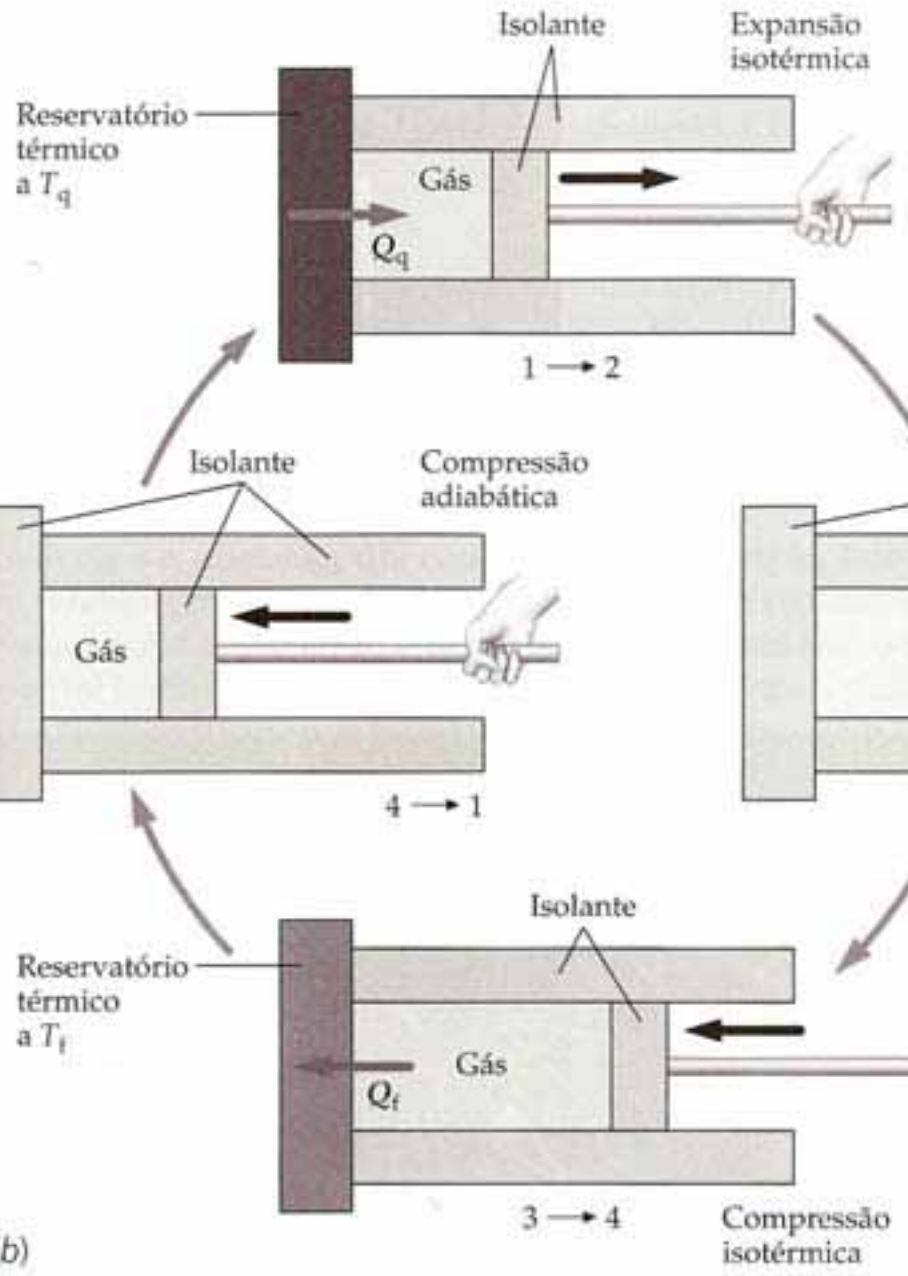
$$\varepsilon = 1 - \frac{Q_f}{Q_q}$$

O calor Q_q é absorvido durante a expansão isotérmica do estado 1 para o estado 2. A primeira lei da termodinâmica é $\Delta E_{int} = Q_{para} + W_{sobre}$. Para uma expansão isotérmica de um gás ideal, $\Delta E_{int} = 0$. Aplicando a primeira lei à expansão isotérmica do estado 1 para o estado 2, temos $Q_q = Q_{para}$, logo Q_q é igual ao trabalho realizado pelo gás:

$$Q_q = W_{\text{pelo gás}} = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_q}{V} dV = nRT_q \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT_q \ln \frac{V_2}{V_1}$$

De maneira semelhante, o calor entregue ao reservatório frio é igual ao trabalho realizado sobre o gás durante a compressão isotérmica, à temperatura T_f, do estado 3 para o estado 4. Este trabalho tem a mesma magnitude do trabalho realizado pelo gás se ele expandir do estado 4 para o estado 3. O calor rejeitado é, portanto,

$$Q_f = W_{\text{sobre o gás}} = nRT_f \ln \frac{V_3}{V_4}$$



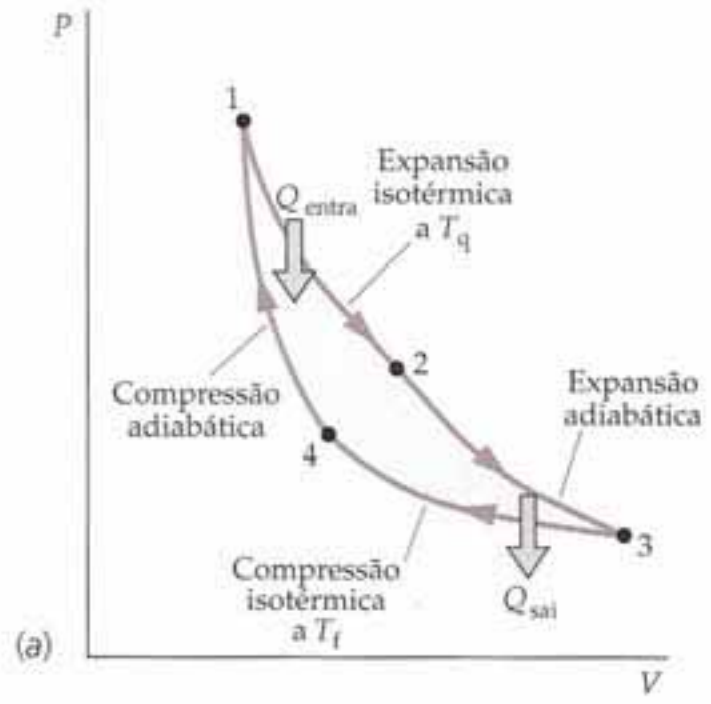


FIGURA 19-8 (*a*) Ciclo de Carnot para um gás ideal: *Etapa 1*: Calor é retirado de um reservatório quente à temperatura T_q durante uma expansão isotérmica do estado 1 para o estado 2. *Etapa 2*: O gás expande adiabaticamente do estado 2 para o estado 3, reduzindo sua temperatura para T_f. *Etapa 3*: O gás libera calor para o reservatório frio e é comprimido isotermicamente até T_f, do estado 3 para o estado 4. *Etapa 4*: O gás é comprimido adiabaticamente até que sua temperatura seja, novamente, T_q. (*b*) Trabalho é realizado pelo gás nas etapas de 1 até 2 e até 3, e trabalho é realizado sobre o gás nas etapas de 3 até 4 e até 1. O trabalho resultante realizado durante o ciclo é representado pela área sombreada. Todos os processos são reversíveis. Todas as etapas são quase-estáticas.

Planta na Nova Zelândia que converte energia geotérmica em eletricidade. *(Jean-Pierre Horlin/The Image Bank.)*

A razão entre estes valores é

$$\frac{Q_f}{Q_q} = \frac{T_f \ln \dfrac{V_3}{V_4}}{T_q \ln \dfrac{V_2}{V_1}} \qquad 19\text{-}4$$

Podemos relacionar as razões V_2/V_1 e V_3/V_4 usando a Equação 18-37 para a expansão adiabática quase-estática. Para a expansão do estado 2 para o estado 3, temos

$$T_q V_2^{\gamma-1} = T_f V_3^{\gamma-1}$$

De maneira similar, para a compressão adiabática do estado 4 para o estado 1, temos

$$T_q V_1^{\gamma-1} = T_f V_4^{\gamma-1}$$

Dividindo a primeira destas duas equações pela segunda, obtemos

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

Um gerador elétrico experimental acionado pelo vento no Laboratório Nacional de Sandia (EUA). A hélice é projetada para otimizar a transformação da energia eólica em energia mecânica. *(Sandia National Laboratory.)*

Portanto, a Equação 19-4 fornece

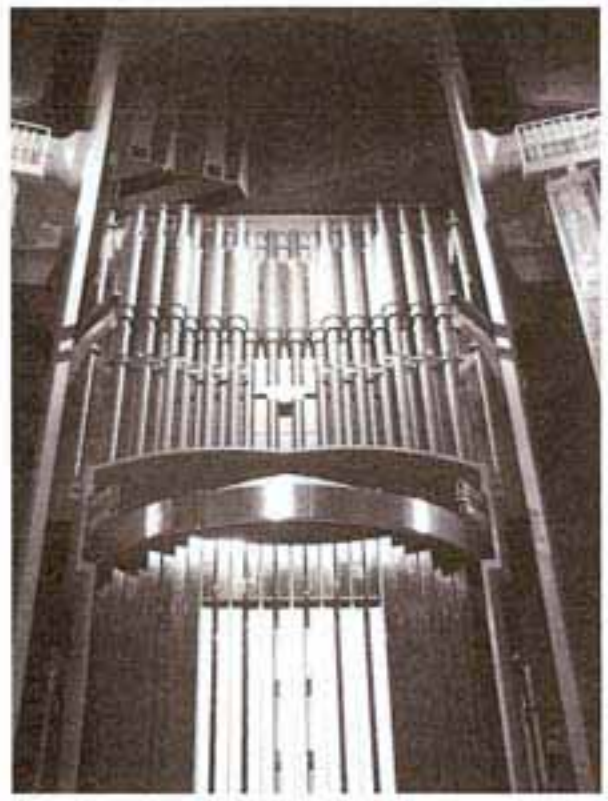
$$\frac{Q_f}{Q_q} = \frac{T_f \ln \frac{V_2}{V_1}}{T_q \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_f}{T_q} \qquad 19\text{-}5$$

O rendimento de Carnot ε_C é, então,

$$\varepsilon_C = 1 - \frac{T_f}{T_q} \qquad 19\text{-}6$$

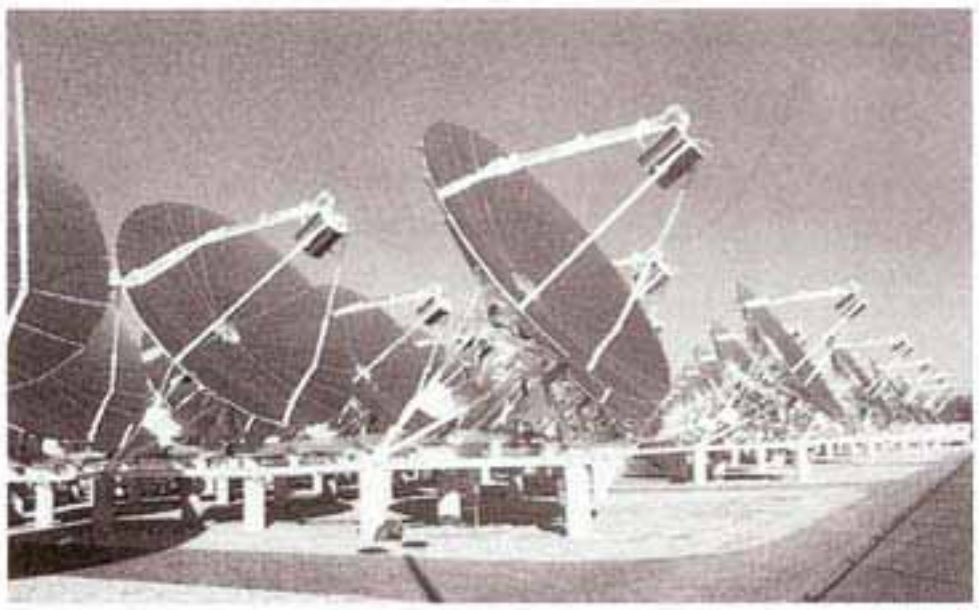
RENDIMENTO DE CARNOT

A Equação 19-6 demonstra que, como o rendimento de Carnot deve ser independente da substância de trabalho de qualquer máquina específica, ele depende apenas das temperaturas dos dois reservatórios.



Bastões de controle são inseridos neste reator nuclear. (© *Akiko Yoshimura/ Dreamstime.com.*)

Planta de geração de energia elétrica à base de carvão. (© *Debra Lau/ Dreamstime.com.*)



Energia solar é focada e coletada individualmente por estes helióstatos, que estão sendo testados no Laboratório Nacional de Sandia (EUA), para produzir eletricidade. *(Sandia National Laboratory.)*

Exemplo 19-4 Rendimento de uma Máquina a Vapor

Uma máquina a vapor trabalha entre um reservatório quente a 100°C (373 K) e um reservatório frio a 0,0°C (273 K). (*a*) Qual é o maior rendimento possível para esta máquina? (*b*) Se a máquina funcionar ao contrário, como um refrigerador, qual será seu maior coeficiente de desempenho?

SITUAÇÃO O rendimento máximo é o de Carnot, dado pela Equação 19-6. Para determinar o CD máximo, usamos a definição de rendimento ($\varepsilon = W/Q_q$), a definição de CD ($CD = Q_f/W$) e, como se trata de um ciclo reversível, $Q_f/Q_q = T_f/T_q$ (Equação 19-5).

SOLUÇÃO

(*a*) O rendimento máximo é o rendimento de Carnot:

$$\varepsilon_{máx} = \varepsilon_C = 1 - \frac{T_f}{T_q} = 1 - \frac{273\ \text{K}}{373\ \text{K}} = 0{,}268 = \boxed{26{,}8\%}$$

(*b*) 1. Escreva a expressão para o CD para um ciclo reverso de funcionamento da máquina: $\text{CD} = \dfrac{Q_f}{W}$

2. O trabalho é igual a $Q_q - Q_f$ (o calor retirado do reservatório de alta temperatura menos o calor liberado para o reservatório de baixa temperatura): $\text{CD} = \dfrac{Q_f}{Q_q - Q_f} = \dfrac{1}{\dfrac{Q_q}{Q_f} - 1}$

3. Substitua Q_q/Q_f usando $Q_f/Q_q = T_f/T_q$ (Equação 19-5) e resolva para o CD: $\text{CD}_{máx} = \dfrac{1}{\dfrac{T_q}{T_f} - 1} = \dfrac{1}{\dfrac{373\ \text{K}}{273\ \text{K}} - 1} = \boxed{2{,}73}$

CHECAGEM Explicitando do resultado da Parte (*a*) a razão entre as temperaturas, substituindo no resultado do passo 3 da Parte (*b*) e rearranjando os termos, obtemos $\text{CD}_{máx} = \varepsilon_C^{-1} - 1$. Substituindo ε_C por 0,268 (o resultado da Parte (*a*)) obtemos $\text{CD}_{máx} = 2{,}73$ (o resultado da Parte (*b*)).

INDO ALÉM Mesmo que um rendimento de 26,8 por cento pareça bastante baixo, é o máximo rendimento possível para qualquer máquina trabalhando entre estas duas temperaturas. Máquinas reais operando entre estas temperaturas terão rendimentos menores devido ao atrito, a fugas de calor e a outros processos irreversíveis. Refrigeradores reais terão coeficientes de desempenho menores do que 2,73. Pode ser mostrado que o coeficiente de desempenho de um refrigerador de Carnot é $T_c/\Delta T$, onde $\Delta T = T_q - T_f$.

O rendimento de Carnot nos fornece um limite superior para os rendimentos possíveis e é, portanto, útil conhecê-lo. Por exemplo, calculamos no Exemplo 19-4 um rendimento de Carnot de 26,8 por cento. Isto significa que, não importa quanto possamos reduzir o atrito e outras perdas irreversíveis, o melhor rendimento obtido entre reservatórios a 373 K e 273 K é 26,8 por cento. Concluímos, então, que uma máquina trabalhando entre estas duas temperaturas com um rendimento de 25 por cento é uma máquina muito boa!

Para uma máquina real, a **perda de trabalho** é o trabalho realizado por uma máquina reversível operando entre as mesmas duas temperaturas menos o trabalho realizado pela máquina real, supondo que as duas máquinas completem um número inteiro de ciclos e retirem a mesma quantidade de calor do reservatório de alta temperatura. A razão entre o trabalho realizado pela máquina real e o trabalho realizado por uma máquina reversível operando entre as mesmas duas temperaturas é chamada de *rendimento da segunda lei*.

Exemplo 19-5 Perda de Trabalho por uma Máquina

Uma máquina retira 200 J de um reservatório quente a 373 K, realiza 48 J e libera 152 J para um reservatório frio a 273 K. Qual é a perda de trabalho devida a processos irreversíveis nesta máquina?

SITUAÇÃO A perda de trabalho é o trabalho realizado por uma máquina reversível operando entre as mesmas duas temperaturas menos os 48 J de trabalho realizados pela máquina, supondo que as duas máquinas retirem a mesma quantidade de calor do reservatório de alta temperatura.

SOLUÇÃO

1. A perda de trabalho é a maior quantidade de trabalho que poderia ser realizado menos o trabalho realmente realizado: $W_{perdido} = W_{máx} - W$

2. A maior quantidade de trabalho que poderia ser realizado é o trabalho realizado por uma máquina de Carnot: $W_{máx} = \varepsilon_C Q_q$

3. O trabalho perdido é, então: $W_{perdido} = \varepsilon_C Q_q - W$

4. O rendimento de Carnot pode ser expresso em termos das temperaturas: $\varepsilon_C = 1 - \dfrac{T_f}{T_q}$

5. Substituindo ε_C, obtemos:
$$W_{perdido} = \left(1 - \frac{T_f}{T_q}\right)Q_q - W = \left(1 - \frac{273\ \text{K}}{373\ \text{K}}\right)(200\ \text{J}) - 48\ \text{J}$$
$$= 53{,}6\ \text{J} - 48{,}0\ \text{J} = \boxed{5{,}6\ \text{J}}$$

CHECAGEM O rendimento de Carnot para estas duas temperaturas é 26,8 por cento. O trabalho realizado pela máquina deste exemplo é de 48,0 J, e 48,0 J são 24 por cento de 200 J. Além disso, os 5,6 J de trabalho perdido correspondem a 2,8 por cento de 200 J. Como 24 por cento mais 2,8 por cento é igual a 26,8 por cento, nossa resposta é plausível.

INDO ALÉM A energia de 5,6 J da resposta não é "perdida" para o universo — a energia total é conservada. Esta energia de 5,6 J, transferida para o reservatório frio pela máquina não-ideal do problema, é perdida apenas no sentido de que ela teria sido convertida em trabalho aproveitável se uma máquina ideal (reversível) tivesse sido utilizada.

Exemplo 19-6 Perda de Trabalho entre Reservatórios Térmicos

Se 200 J de calor são liberados por um reservatório a 373 K e absorvidos por um segundo reservatório a 273 K, quanta capacidade de trabalho é "perdida" neste processo?

SITUAÇÃO Nenhum trabalho é realizado durante a transferência dos 200 J. Portanto, a perda é de 100 por cento do trabalho que poderia ser realizado por uma máquina reversível operando entre os mesmos dois reservatórios e que retirasse 200 J do reservatório de alta temperatura.

SOLUÇÃO

1. A perda de trabalho é o trabalho realizado por uma máquina reversível menos o trabalho realizado pelo processo aqui descrito. Este processo é a transferência de 200 J de calor do reservatório de alta temperatura para o reservatório de baixa temperatura; logo, o trabalho realizado é zero: $W_{\text{perdido}} = W_{\text{rev}} - W = W_{\text{rev}} - 0$
2. O trabalho realizado por uma máquina reversível operando entre os mesmos dois reservatórios, com a absorção de 200 J do reservatório de alta temperatura, é: $W_{\text{rev}} = \varepsilon Q_q = \left(1 - \frac{T_f}{T_q}\right) Q_q = \left(1 - \frac{273\ \text{K}}{373\ \text{K}}\right)(200\ \text{J}) = 53{,}6\ \text{J}$
3. Calcule a perda de trabalho: $W_{\text{perdido}} = W_{\text{rev}} = \boxed{53{,}6\ \text{J}}$

CHECAGEM No Exemplo 19-4, calculamos o rendimento de uma máquina reversível operando entre 273 K e 373 K como 26,8 por cento. Nosso resultado para o passo 3 é plausível, porque 53,6 J são 26,8 por cento dos 200 J absorvidos do reservatório.

PROBLEMA PRÁTICO 19-3 Uma máquina reversível trabalha entre reservatórios térmicos a 500 K e a 300 K. (*a*) Qual é o seu rendimento? (*b*) Se, em cada ciclo, a máquina absorve 200 kJ de calor do reservatório quente, qual é o trabalho que ela realiza por ciclo?

PROBLEMA PRÁTICO 19-4 Uma máquina real trabalha entre reservatórios térmicos a 500 K e 300 K. Ela absorve 500 kJ de calor do reservatório quente e realiza 150 kJ de trabalho em cada ciclo. Qual é o seu rendimento?

A ESCALA DE TEMPERATURA TERMODINÂMICA OU ABSOLUTA

No Capítulo 17, a escala de temperatura do gás ideal foi definida em termos das propriedades dos gases que têm baixa massa específica. Como o rendimento de Carnot depende apenas das temperaturas dos dois reservatórios, ele pode ser usado para definir a razão entre as temperaturas dos reservatórios, independentemente das propriedades de qualquer substância. *Definimos* a razão entre as temperaturas termodinâmicas dos reservatórios frio e quente como

$$\frac{T_f}{T_q} = \frac{Q_f}{Q_q} \qquad 19\text{-}7$$

DEFINIÇÃO DE TEMPERATURA TERMODINÂMICA

onde Q_q é a energia extraída do reservatório quente e Q_f é a energia liberada para o reservatório frio por uma máquina de Carnot operando num ciclo e trabalhando entre os dois reservatórios. Portanto, para determinar a razão entre as temperaturas dos dois reservatórios, consideramos uma máquina reversível operando entre eles e medimos a energia transferida em forma de calor para ou de cada um dos reservató-

rios durante um ciclo. A **temperatura termodinâmica** é completamente especificada pela Equação 19-7 *e* pela escolha de um ponto fixo. Se o ponto fixo é definido como 273,16 K para o ponto triplo da água, então a escala de temperatura termodinâmica coincide com a escala de temperatura do gás ideal para o intervalo de temperaturas no qual um termômetro a gás pode ser usado. Qualquer escala que indica zero no zero absoluto é chamada de *escala de temperatura absoluta*.

19-4 BOMBAS TÉRMICAS

Uma **bomba térmica** é um refrigerador com um objetivo diferente. Tipicamente, o objetivo de um refrigerador é resfriar um corpo ou uma região de interesse. O objetivo de uma bomba térmica, entretanto, é o de aquecer um corpo ou uma região de interesse. Por exemplo, se você usa uma bomba térmica para aquecer sua casa, você transfere calor do ar frio de fora da casa para o ar mais aquecido dentro dela. Seu objetivo é aquecer o interior da casa. Se um trabalho W é realizado sobre uma bomba térmica para absorver calor Q_f de um reservatório frio e liberar calor Q_q para um reservatório quente, o coeficiente de desempenho para uma bomba térmica é definido como

$$CD_{BT} = \frac{Q_q}{W} \qquad 19\text{-}8$$

DEFINIÇÃO: COEFICIENTE DE DESEMPENHO (BOMBA TÉRMICA)

Este coeficiente de desempenho difere daquele para o refrigerador, que é Q_f/W (Equação 19-3). Usando $W = Q_q - Q_f$, isto pode ser escrito como

$$CD_{BT} = \frac{Q_q}{Q_q - Q_f} = \frac{1}{1 - \dfrac{Q_f}{Q_q}} \qquad 19\text{-}9$$

O coeficiente de desempenho máximo é obtido usando-se uma bomba térmica de Carnot. Então, Q_f se relaciona com Q_q pela Equação 19-5. Substituindo $Q_f/Q_q = T_f/T_q$ na Equação 19-9, obtemos para o coeficiente de desempenho máximo

$$CD_{BT\,máx} = \frac{1}{1 - \dfrac{T_f}{T_q}} = \frac{T_q}{T_q - T_f} = \frac{T_q}{\Delta T} \qquad 19\text{-}10$$

onde ΔT é a diferença de temperatura entre os reservatórios quente e frio. Bombas térmicas reais têm coeficientes de desempenho menores do que $CD_{BT\,máx}$ devido ao atrito, a perdas de calor e a outros processos irreversíveis.

Os dois CDs estão relacionados. Usando $Q_q = Q_f + W$, podemos relacionar as Equações 19-3 e 19-10:

$$CD_{BT} = \frac{Q_q}{W} = \frac{Q_f + W}{W} = 1 + \frac{Q_f}{W} = 1 + CD \qquad 19\text{-}11$$

onde CD é o coeficiente de desempenho de um refrigerador.

Exemplo 19-7 Uma Bomba Térmica Ideal

Uma bomba térmica ideal é usada para bombear calor do ar externo, a −5°C, para o reservatório de ar quente do sistema de aquecimento em uma casa, que está a 40°C. Quanto trabalho é necessário para bombear 1,0 kJ de calor para dentro da casa?

SITUAÇÃO Use a Equação 19-11, com $CD_{BT\,máx}$ calculado da Equação 19-10 para $T_f = -5°C = 268$ K e $\Delta T = 45$ K.

SOLUÇÃO

1. Usando a definição de CD_{BT} ($CD_{BT} = Q_q/W$), relacione o trabalho realizado com o calor liberado: $CD_{BT} = \dfrac{Q_q}{W}$

2. Relacione o CD_{BT} ideal, ou máximo, com as temperaturas (Equação 19-10): $$CD_{BT} = CD_{BT\,máx} = \frac{T_q}{\Delta T}$$

3. Resolva para o trabalho: $$W = \frac{Q_q}{CD_{BT}} = Q_q \frac{\Delta T}{T_q} = (1{,}0\ \text{kJ})\frac{45\ \text{K}}{313\ \text{K}}$$

$$W = \boxed{0{,}14\ \text{kJ}}$$

CHECAGEM Nossa expressão para o trabalho, no passo 3, garante que o trabalho tem as mesmas dimensões do calor. (A razão $\Delta T/T_q$ é adimensional.)

INDO ALÉM Encontramos $CD_{BT\,máx} = T_q/\Delta T = 7{,}0$. Isto é, a quantidade de calor liberada no interior da casa pela bomba térmica é 7 vezes maior do que o trabalho realizado sobre a bomba térmica. (Apenas 0,14 kJ de trabalho são necessários para bombear 1,0 kJ de calor para o reservatório de ar quente da casa.)

19-5 IRREVERSIBILIDADE, DESORDEM E ENTROPIA

Existem muitos processos irreversíveis que não podem ser descritos pelos enunciados da segunda lei para máquinas térmicas e para refrigeradores, tais como um copo caindo no chão e se quebrando ou um balão estourando. Entretanto, todos os processos irreversíveis têm algo em comum — o sistema e seu ambiente vão para um estado menos ordenado.

Seja uma caixa, de massa desprezível, contendo um gás de massa M a uma temperatura T e se movendo sobre uma mesa sem atrito com uma velocidade v_{cm} (Figura 19-9*a*). A energia cinética total do gás tem duas componentes: aquela associada ao movimento do seu centro de massa $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$, e a energia cinética do movimento de suas moléculas com relação ao centro de massa. A energia do centro de massa, $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$, é a energia mecânica ordenada que poderia ser inteiramente convertida em trabalho. (Por exemplo, se um peso fosse preso à caixa em movimento por uma corda passando por uma polia, essa energia poderia ser usada para levantar o peso.) A energia relativa é a energia térmica interna do gás, que está relacionada à sua temperatura T. Ela é aleatória, não ordenada e não pode ser convertida inteiramente em trabalho.

Suponha, agora, que a caixa colida com uma parede fixa e pare (Figura 19-9*b*). Esta colisão inelástica é, claramente, um processo irreversível. A energia mecânica ordenada do gás, $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$, é transformada em energia interna aleatória e a temperatura do gás aumenta. O gás ainda tem a mesma energia total mas, agora, toda a energia está associada ao movimento aleatório de suas moléculas com relação ao centro de massa, que agora está em repouso. Assim, o gás tornou-se menos ordenado (mais desordenado) e perdeu parte de sua capacidade de realizar trabalho.

Existe uma função termodinâmica chamada de **entropia** S que é uma medida do grau de desordem de um sistema. A entropia S, assim como a pressão P, o volume V, a temperatura T e a energia interna E_{int}, é uma função do estado de um sistema. Como nos casos da energia potencial e da energia interna, é a *variação* da entropia

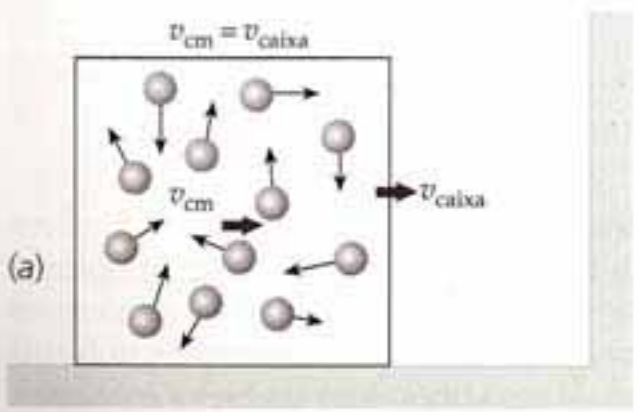


FIGURA 19-9 (*a*) Uma caixa de massa desprezível contém um gás. A caixa e o centro de massa do gás se movem em direção à parede com a mesma rapidez. (*b*) Um curto intervalo de tempo após a caixa ter sofrido uma colisão perfeitamente inelástica com a parede, tanto a caixa como o centro de massa do gás estão em repouso e o gás está a uma temperatura mais elevada.

que é importante. A variação dS da entropia de um sistema, quando ele passa de um estado para outro, é definida como

$$dS = \frac{dQ_{rev}}{T} \qquad 19\text{-}12$$

DEFINIÇÃO: VARIAÇÃO DA ENTROPIA

onde dQ_{rev} é o calor absorvido pelo sistema em um processo *reversível*. Se dQ_{rev} é negativo, então a variação da entropia do sistema tem um valor negativo, significando que a entropia do sistema diminuiu.

O termo dQ_{rev} não significa que uma transferência de calor reversível deva ocorrer para que a entropia de um sistema varie. De fato, há muitas situações nas quais a entropia de um sistema varia enquanto não há nenhuma transferência de calor como, por exemplo, no caso da caixa de gás que colide com a parede na Figura 19-9. A Equação 19-12 simplesmente nos dá um método para *calcular* a diferença de entropia entre dois estados de um sistema. Como a entropia é uma função de estado, a variação da entropia quando o sistema se move de um estado inicial para um estado final depende apenas dos estados inicial e final do sistema, e não do processo através do qual a variação ocorreu. Isto é, se S_1 é a entropia do sistema quando ele está no estado 1 e se S_2 é a entropia do sistema quando ele está no estado 2, então calculamos a diferença de entropia $S_2 - S_1$ através da integral $\int_1^2 dQ/T$ para *qualquer* caminho (processo) reversível que leve o sistema do estado 1 para o estado 2.

ENTROPIA DE UM GÁS IDEAL

Podemos verificar que dQ_{rev}/T é, de fato, a diferencial de uma função de estado para um gás ideal (mesmo que dQ_{rev} não o seja). Seja um processo reversível quase-estático arbitrário no qual um sistema constituído por um gás ideal absorve uma quantidade de calor dQ_{rev}. De acordo com a primeira lei, dQ_{rev} se relaciona com a variação da energia interna dE_{int} do gás e com o trabalho realizado sobre o gás ($dW_{sobre\ o\ gás} = -P\,dV$) por

$$dE_{int} = dQ_{rev} + dW_{sobre\ o\ gás} = dQ_{rev} - P\,dV$$

Para um gás ideal, podemos escrever dE_{int} em termos da capacidade térmica, $dE_{int} = C_v\,dT$, e podemos substituir P por nRT/V, da equação de estado. Então,

$$C_v\,dT = dQ_{rev} - nRT\frac{dV}{V} \qquad 19\text{-}13$$

A Equação 19-13 não pode ser integrada diretamente, a menos que conheçamos como T depende de V e como C_v depende de T. Esta é apenas outra maneira de dizer que dQ_{rev} não é a diferencial de uma função de estado Q_{rev}. Mas, se dividirmos cada termo por T, obtemos

$$C_v\frac{dT}{T} = \frac{dQ_{rev}}{T} - nR\frac{dV}{V} \qquad 19\text{-}14$$

Como C_v depende apenas de T, o termo da esquerda pode ser integrado, assim como o termo da direita.* Assim, dQ_{rev}/T é a diferencial de uma função, a função entropia S:

$$dS = \frac{dQ_{rev}}{T} = C_v\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V} \qquad 19\text{-}15$$

Por simplicidade, consideraremos C_v constante. Integrando a Equação 19-15 do estado 1 para o estado 2, obtemos

$$\Delta S = \int\frac{dQ_{rev}}{T} = C_v\ln\frac{T_2}{T_1} + nR\ln\frac{V_2}{V_1} \qquad 19\text{-}16$$

VARIAÇÃO DA ENTROPIA PARA UM GÁS IDEAL

Veja o **Tutorial Matemático** *para mais informações sobre*
Integrais

* Matematicamente, o fator $1/T$ é chamado de fator de integração para a Equação 19-13.

A Equação 19-16 dá a variação da entropia de um gás ideal que se dirige de um estado inicial de volume V_1 e temperatura T_1 para um estado final de volume V_2 e temperatura T_2.

VARIAÇÃO DA ENTROPIA PARA VÁRIOS PROCESSOS

ΔS para uma expansão isotérmica de um gás ideal Se um gás ideal sofre uma expansão isotérmica, então $T_2 = T_1$ e a variação de entropia é

$$\Delta S = \int \frac{dQ_{rev}}{T} = 0 + nR \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad 19\text{-}17$$

A variação da entropia do gás é positiva porque V_2 é maior do que V_1. Durante este processo, uma quantidade de calor Q_{rev} é liberada pelo reservatório e é absorvida pelo gás. Este calor é igual ao trabalho realizado pelo gás:

$$Q_{rev} = W_{pelo\ gás} = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad 19\text{-}18$$

A variação da entropia do gás é $+Q_{rev}/T$. Como a mesma quantidade de calor é liberada pelo reservatório à temperatura T, a variação da entropia do reservatório é $-Q_{rev}/T$. A variação resultante de entropia, do gás mais do reservatório, é zero. Vamos nos referir ao sistema em estudo, junto com sua vizinhança, como "universo". Este exemplo ilustra um resultado geral:

> Durante um processo reversível, a variação da entropia do universo é zero.

ΔS para uma expansão livre de um gás ideal Na expansão livre de um gás, discutida na Seção 18-4, o gás está, inicialmente, confinado em um compartimento de um reservatório que está conectado por uma válvula a um outro compartimento que está evacuado. O sistema como um todo tem paredes rígidas e está isolado termicamente de sua vizinhança, de maneira que calor nem pode ser absorvido nem liberado pelo sistema, e nenhum trabalho pode ser realizado sobre ele (ou por ele) (Figura 19-10). Quando a válvula é aberta, rapidamente o gás entra na câmara vazia. O gás acaba atingindo o equilíbrio térmico. Como nenhum trabalho é realizado sobre o gás e nenhum calor é absorvido ou liberado por ele, a energia interna final deve ser igual à energia interna inicial. Se considerarmos o gás como ideal, então sua energia interna depende apenas da temperatura T e, portanto, sua temperatura final será igual à temperatura inicial.

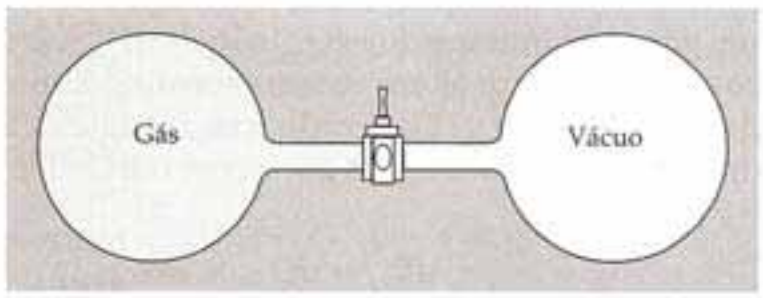


FIGURA 19-10 Expansão livre adiabática de um gás. Quando a válvula é aberta, o gás se expande rapidamente para a câmara vazia. As energias internas inicial e final do gás são iguais, porque nenhum trabalho é realizado sobre o gás durante a expansão, já que o sistema inteiro está isolado de sua vizinhança, e porque as capacidades térmicas das câmaras e da válvula são desprezíveis.

Poderíamos pensar que não há variação da entropia do gás, porque não há transferência de calor. Mas este processo não é reversível e, portanto, $\int dQ/T$ não pode ser usado para determinar a variação da entropia do gás. Entretanto, os estados inicial e final do gás na expansão livre são os mesmos que para o gás na expansão isotérmica que acabamos de discutir. *Como a variação da entropia de um sistema, para qualquer processo, depende apenas dos estados inicial e final do sistema, a variação da entropia do gás para a expansão livre é a mesma que para a expansão isotérmica.* Se V_1 é o volume inicial do gás e V_2 é seu volume final, a variação da entropia do gás é dada pela Equação 19-17, ou

$$\Delta S_{gás} = nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Neste caso, não há variações na vizinhança e, portanto, a variação da entropia do gás também é a variação da entropia do universo:

$$\Delta S_u = nR \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad 19\text{-}19$$

Observe que, como V_2 é maior do que V_1, a variação da entropia do universo para este processo irreversível é positiva; isto é, a entropia do universo aumenta. Isto também é um resultado geral:

> Durante um processo irreversível, a entropia do universo aumenta.

Se o volume final durante a expansão livre fosse menor do que o volume inicial, então a entropia do universo diminuiria — mas isto não acontece durante expansões livres. Isto é, um gás não se contrai livremente para um volume menor.* Isto nos leva ainda a outro enunciado para a segunda lei da termodinâmica:

> Para qualquer processo, a entropia do universo nunca diminui.

Exemplo 19-8 Expansão Livre de um Gás Ideal

Determine a variação da entropia para a expansão livre de 0,75 mol de um gás ideal, de $V_1 = 1{,}5$ L para $V_2 = 3{,}0$ L.

SITUAÇÃO Na expansão livre de um gás ideal as temperaturas inicial e final são iguais. Assim, a variação da entropia ΔS para a expansão livre, de V_1 até V_2, é a mesma que para um processo isotérmico de V_1 até V_2. Para o processo isotérmico, $\Delta E_{int} = 0$, logo $Q = W_{\text{pelo gás}}$. Primeiro calculamos Q e, então, igualamos $\Delta S = Q/T$.

SOLUÇÃO

1. A variação da entropia é a mesma que para uma expansão isotérmica reversível de V_1 até V_2:
$$\Delta S = \Delta S_{\text{isotérmica}} = \int_1^2 \frac{dQ_{rev}}{T} = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ_{rev} = \frac{Q}{T}$$

2. O calor Q que seria absorvido pelo gás em uma expansão isotérmica à temperatura T é igual ao trabalho realizado pelo gás durante a expansão:
$$Q = W_{\text{pelo gás}} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

3. Substitua este valor de Q para calcular ΔS:
$$\Delta S = \frac{Q}{T} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} = (0{,}75 \text{ mol})(8{,}31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}) \ln 2$$
$$= \boxed{4{,}3 \text{ J/K}}$$

CHECAGEM No passo 3, os moles se cancelam, restando joules por kelvin como unidade, o que é correto para variações de entropia porque, por definição, $\Delta S = \int dQ/T$.

ΔS para processos à pressão constante Se uma substância é aquecida da temperatura T_1 até a temperatura T_2 à pressão constante, o calor absorvido dQ está relacionado à variação de temperatura dT por

$$dQ = C_p\, dT$$

Podemos reproduzir com boa aproximação a transferência de calor reversível se tivermos um grande número de reservatórios térmicos com temperaturas variando desde um valor levemente maior do que T_1 até T_2, em incrementos muito pequenos. Podemos colocar a substância, com temperatura inicial T_1, em contato com o primeiro reservatório, a uma temperatura levemente maior do que T_1, e deixar a substância absorver uma pequena quantidade de calor. Como a transferência de calor de cada reservatório é aproximadamente isotérmica, o processo é aproximadamente reversível. Colocamos, então, a substância em contanto com o próximo reservatório, a uma temperatura levemente maior, e assim por diante, até que a temperatura final T_2 seja atingida. Se o calor dQ é absorvido de maneira reversível, a variação da entropia da substância é

$$dS = \frac{dQ}{T} = C_p \frac{dT}{T}$$

Integrando de T_1 até T_2, obtemos a variação total da entropia da substância:

$$\Delta S = C_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} \qquad 19\text{-}20$$

Este resultado fornece a variação da entropia de uma substância que é aquecida de T_1 até T_2 por qualquer processo, reversível ou irreversível, contanto que a pressão final

CHECAGEM CONCEITUAL 19-1

Um organismo vivo consiste em matéria altamente organizada. O crescimento de um organismo vivo constitui uma violação da segunda lei da termodinâmica? Isto é, durante este processo, a entropia do universo aumenta ou diminui?

* O que realmente acontece é que a probabilidade de um gás contrair-se livremente para um volume menor é minúscula (exceto quando o gás contém apenas um número extremamente pequeno de moléculas).

seja igual à pressão inicial e que C_p seja constante. Ele também fornece a variação da entropia de uma substância que é resfriada. No caso de resfriamento, T_2 é menor do que T_1 e $\ln(T_2/T_1)$ é negativo, o que dá uma variação negativa de entropia.

PROBLEMA PRÁTICO 19-5

Determine a variação da entropia de 1,00 kg de água que é aquecida, à pressão constante, de 0°C até 100°C.

PROBLEMA PRÁTICO 19-6

Deduza a Equação 19-20 diretamente da Equação 19-16.

Exemplo 19-9 Variações de Entropia durante uma Transferência de Calor

Suponha que uma quantidade de 1,00 kg de água, a uma temperatura $T_1 = 30{,}0°C$, seja adicionada a uma quantidade de 2,00 kg de água, a $T_2 = 90{,}0°C$, em um calorímetro isolado de capacidade térmica desprezível, à pressão constante de 1,00 atm. (*a*) Determine a variação da entropia do sistema. (*b*) Determine a variação da entropia do universo.

SITUAÇÃO Quando as duas quantidades de água são combinadas, elas atingirão uma temperatura final de equilíbrio, T_f, que pode ser determinada igualando-se o calor liberado ao calor absorvido. Para calcular a variação da entropia de cada quantidade de água consideramos um aquecimento reversível isobárico (pressão constante) da quantidade de 1,00 kg de água de 30°C até T_f, e um resfriamento reversível isobárico da quantidade de 2,00 kg de água de 90°C até T_f, usando a Equação 19-20. A variação da entropia do sistema é a soma das variações de entropia de cada parte. A variação da entropia do universo é a variação da entropia do sistema mais a variação da entropia da vizinhança. Para determinar a variação da entropia da vizinhança, suponha que uma quantidade desprezível de calor é absorvida ou liberada pelo calorímetro durante o tempo em que a água leva para atingir sua temperatura final.

SOLUÇÃO

(*a*) 1. Calcule T_f, igualando o calor liberado ao calor absorvido:

$$T_f = 70°C = 343\ K$$

2. Use seu resultado para T_f e a Equação 19-20 para calcular ΔS_1 e ΔS_2:

$$\Delta S_1 = \int_1^f \frac{dQ_{rev}}{T} = \int_{T_1}^{T_f} \frac{C_p\,dT}{T} = C_p \int_{T_1}^{T_f} \frac{dT}{T} = C_p \ln\frac{T_f}{T_1} = m_1 c_p \ln\frac{T_f}{T_1}$$

$$= (1{,}00\ kg)(4{,}184\ kJ/kg \cdot K)\ln\frac{343\ K}{303\ K} = 0{,}519\ kJ/K$$

$$\Delta S_2 = (2{,}00\ kg)(4{,}184\ kJ/kg \cdot K)\ln\frac{343\ K}{363\ K} = -0{,}474\ kJ/K$$

3. Some ΔS_1 com ΔS_2 para determinar a variação da entropia total do sistema:

$$\Delta S_{sistema} = \boxed{+0{,}045\ kJ/K}$$

(*b*) 1. O calorímetro está isolado, logo a vizinhança permanece inalterada:

$$\Delta S_{vizinhança} = 0$$

2. Some $\Delta S_{sistema}$ com $\Delta S_{vizinhança}$ para determinar a variação da entropia do universo:

$$\Delta S_u = \boxed{+0{,}045\ kJ/K}$$

CHECAGEM O resultado da Parte (*b*) é um número positivo, como esperado. (O processo é irreversível e a variação da entropia do universo nunca é negativa.)

ΔS para uma colisão perfeitamente inelástica Como energia mecânica é convertida em energia térmica interna durante uma colisão inelástica, este processo é, claramente, irreversível. A entropia do universo deve, portanto, aumentar. Seja um bloco de massa m caindo de uma altura h e sofrendo uma colisão perfeitamente inelástica com o solo. Suponha que o bloco, o solo e a atmosfera estejam à mesma temperatura T, que não varia significativamente durante o processo. Se considerarmos o bloco, o solo e a atmosfera como o nosso sistema termicamente isolado, não há absorção ou liberação de calor pelo sistema. O estado do sistema variou porque sua energia interna aumentou de uma quantidade igual a mgh. Esta é a mesma variação

que ocorreria se somássemos calor $Q = mgh$ ao sistema à temperatura constante T. Para calcular a variação da entropia do sistema consideramos, então, um processo reversível em que calor $Q_{rev} = mgh$ é absorvido à temperatura constante T. De acordo com a Equação 19-12, a variação da entropia do sistema é, portanto,

$$\Delta S = \frac{Q_{rev}}{T} = \frac{mgh}{T}$$

Esta variação positiva de entropia é, também, a variação da entropia do universo.

ΔS para transferência de calor de um reservatório para outro Transferência de calor também é um processo irreversível e, portanto, esperamos que a entropia do universo aumente quando isto ocorre. Considere o caso simples de calor Q transferido de um reservatório quente, à temperatura T_q, para um reservatório frio, à temperatura T_f. O estado de um reservatório térmico é determinado apenas pela sua temperatura e pela sua energia interna. A variação da entropia de um reservatório, devida à transferência de calor, independe de se a transferência é reversível ou não. Se uma quantidade de calor Q é absorvida por um reservatório à temperatura T, então a entropia do reservatório aumenta de Q/T, e se uma quantidade de calor Q é liberada por um reservatório à temperatura T, então a entropia do reservatório varia de $-Q/T$. No caso de transferência de calor, o reservatório quente libera calor, logo sua variação de entropia é

$$\Delta S_q = -\frac{Q}{T_q}$$

O reservatório frio absorve calor, logo sua variação de entropia é

$$\Delta S_f = +\frac{Q}{T_f}$$

A variação resultante da entropia do universo é

$$\Delta S_u = \Delta S_f + \Delta S_q = \frac{Q}{T_f} - \frac{Q}{T_q} \qquad 19\text{-}21$$

Observe que, como o calor é transferido de um reservatório quente para um reservatório frio, a variação da entropia do universo é positiva.

ΔS para um ciclo de Carnot Como o ciclo de Carnot é, por definição, reversível, a variação da entropia do universo depois de cumprido um ciclo deve ser zero. Demonstramos isto mostrando que a variação da entropia dos reservatórios de uma máquina de Carnot é zero. (Como uma máquina de Carnot trabalha em um ciclo, a variação da entropia da própria máquina é zero, logo a variação da entropia do universo é apenas a soma das variações de entropia dos reservatórios.) A variação da entropia do reservatório quente é $\Delta S_q = -(Q_q/T_q)$ e a variação da entropia do reservatório frio é $\Delta S_f = +(Q_f/T_f)$. As quantidades de calor Q_q e Q_f estão relacionadas às temperaturas T_q e T_f pela definição de temperatura termodinâmica (Equação 19-7):

$$\frac{T_f}{T_q} = \frac{Q_f}{Q_q} \qquad \left(\text{ou} \quad \frac{Q_q}{T_q} = \frac{Q_f}{T_f}\right)$$

A variação da entropia do universo é, portanto,

$$\Delta S_u = \Delta S_{\text{máquina}} + \Delta S_h + \Delta S_c = 0 - \frac{Q_h}{T_h} + \frac{Q_c}{T_c} = 0$$

A variação da entropia do universo é zero, como esperado.

Observe que desprezamos qualquer variação de entropia associada à energia transferida como trabalho da máquina de Carnot para sua vizinhança. Se este trabalho é usado para elevar um peso ou para algum outro processo ordenado, então não há variação de entropia. Entretanto, se este trabalho é usado para empurrar um bloco sobre uma mesa ou outra superfície onde o atrito está envolvido, então há um aumento adicional de entropia associado a este trabalho.

Exemplo 19-10 Variações de Entropia em um Ciclo de Carnot

Durante cada ciclo, uma máquina de Carnot absorve 100 J de um reservatório a 400 K, realiza trabalho e libera calor para um reservatório a 300 K. Calcule a variação da entropia de cada reservatório em cada ciclo e mostre, explicitamente, que a variação da entropia do universo é zero para este processo reversível.

SITUAÇÃO Como a máquina trabalha durante um ciclo, sua variação de entropia é zero. Calculamos, então, a variação da entropia de cada reservatório e somamos os valores para obter a variação da entropia do universo.

SOLUÇÃO

1. A variação da entropia do universo é igual à soma das variações de entropia dos reservatórios: $\Delta S_u = \Delta S_{400} + \Delta S_{300}$
2. Calcule a variação da entropia do reservatório quente: $\Delta S_{400} = -\dfrac{Q_q}{T_q} = -\dfrac{100\text{ J}}{400\text{ K}} = \boxed{-0{,}250\text{ J/K}}$
3. A variação da entropia do reservatório frio é Q_f dividido por T_f, onde $Q_f = Q_q - W$: $\Delta S_{300} = \dfrac{Q_f}{T_f} = \dfrac{Q_q - W}{T_f}$
4. Usamos $W = \varepsilon_C Q_q$ (Equação 19-2) para relacionar W com Q_q. O rendimento é o rendimento de Carnot (Equação 19-6): $W = \varepsilon Q_q$, em que $\varepsilon = \varepsilon_C = 1 - (T_f/T_q)$, logo $W = \left(1 - \dfrac{T_f}{T_q}\right)Q_q$
5. Calcule a variação da entropia do reservatório frio: $\Delta S_{300} = \dfrac{Q_q - W}{T_f} = \dfrac{Q_q - Q_q\left(1 - \dfrac{T_f}{T_q}\right)}{T_f} = \dfrac{Q_q}{T_q} = \dfrac{100\text{ J}}{400\text{ K}} = \boxed{0{,}250\text{ J/K}}$
6. Substitua estes resultados no passo 1 para determinar a variação da entropia do universo: $\Delta S_u = \Delta S_{400} + \Delta S_{300}$, $\Delta S_u = -0{,}250\text{ J/K} + 0{,}250\text{ J/K} = \boxed{0{,}000\text{ J/K}}$

CHECAGEM A variação da entropia do universo é positiva, como exigido pela segunda lei da termodinâmica.

INDO ALÉM Suponha que uma máquina comum, não-reversível, retire 100 J do reservatório quente. Como seu rendimento deve ser menor do que o da máquina de Carnot, ela realizará um trabalho menor e liberará mais calor para o reservatório frio. Então, o aumento da entropia do reservatório frio será maior do que a diminuição da entropia do reservatório quente, e a variação da entropia do universo será positiva.

Exemplo 19-11 O Diagrama *ST* — *Conceitual*

Como a entropia é uma função de estado, os processos termodinâmicos podem ser representados por diagramas *ST*, *SV* ou *SP*, além dos diagramas *PV* que utilizamos até agora. Esboce o ciclo de Carnot em um diagrama *ST*.

SITUAÇÃO O ciclo de Carnot consiste, na seqüência, em uma expansão isotérmica reversível, de uma expansão adiabática reversível, de uma compressão isotérmica reversível e, finalmente, de uma compressão adiabática reversível. Durante os processos isotérmicos, calor é absorvido ou liberado de maneira reversível e, portanto, S aumenta ou diminui, mas T permanece constante. Durante os processos adiabáticos, a temperatura varia mas, como $\Delta Q_{rev} = 0$, S é constante.

SOLUÇÃO

1. Durante a expansão isotérmica reversível (1 até 2, na Figura 19-11*a*), calor é absorvido de maneira reversível, logo S aumenta e T permanece constante:

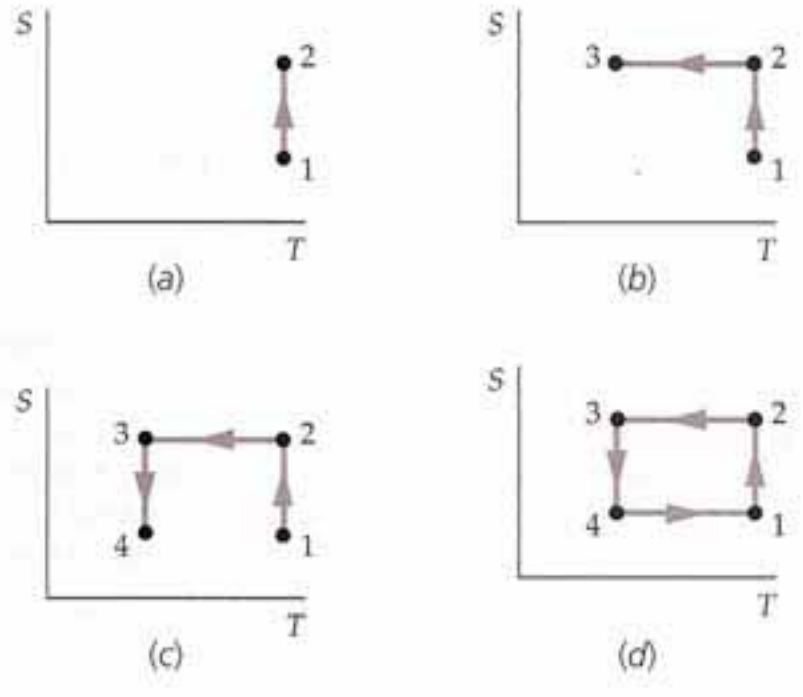


FIGURA 19-11 Um diagrama *S versus T* para um ciclo de Carnot usando um gás ideal.

2. Durante a expansão adiabática reversível (2 até 3, na Figura 19-11*b*), S permanece constante enquanto T diminui:
3. Durante a compressão isotérmica reversível (3 até 4, na Figura 19-11*c*), calor é liberado de maneira reversível, logo S diminui e T permanece constante:
4. Durante a compressão adiabática reversível (4 até 1, na Figura 19-11*d*), S permanece constante enquanto T aumenta:

CHECAGEM O diagrama S *versus* T é uma curva fechada, como esperado. Isto é esperado para um ciclo completo, pois tanto S quanto T são funções de estado.

INDO ALÉM O ciclo de Carnot é um retângulo em um diagrama S *versus* T.

19-6 ENTROPIA E A DISPONIBILIDADE DE ENERGIA

Quando ocorre um processo irreversível a energia é conservada, mas parte dela torna-se indisponível para a realização de trabalho e é "perdida". Considere um bloco caindo no chão. A variação da entropia do universo, para este processo, é mgh/T. Quando o bloco estava a uma altura h, sua energia potencial mgh poderia ter sido usada para realizar trabalho. Porém, depois da colisão inelástica do bloco com o chão, esta energia não estará mais totalmente disponível para a realização de trabalho aproveitável, porque ela terá se transformado em energia interna desordenada do bloco e de sua vizinhança.

A energia que se tornou indisponível (perdida) é igual a $mgh = T\,\Delta S_u$. Este é um resultado geral:

> Durante um processo irreversível, uma quantidade de energia igual a $T\,\Delta S_u$ torna-se indisponível para a realização de trabalho, onde T é a temperatura do reservatório mais frio disponível.

Por simplicidade, chamaremos a energia que se tornou indisponível para a realização de trabalho de "trabalho perdido":

$$W_{\text{perdido}} = T\,\Delta S_u \qquad 19\text{-}22$$

Exemplo 19-12 Uma Caixa Deslizando Revisitada

Suponha que a caixa mostrada nas Figuras 19-9*a* e 19-9*b* tenha 2,4 kg de massa e deslize com uma rapidez $v = 3{,}0$ m/s antes de colidir com uma parede fixa e parar. A temperatura T de caixa, mesa e vizinhança é 293 K e não varia apreciavelmente enquanto a caixa atinge o repouso. Determine a variação da entropia do universo.

SITUAÇÃO A energia mecânica inicial da caixa, $\frac{1}{2}Mv^2$, é convertida em energia interna do sistema caixa–parede–vizinhança. A variação da entropia é equivalente à que ocorreria se uma quantidade de calor $Q = \frac{1}{2}Mv^2$ fosse absorvida, de maneira reversível, pelo sistema caixa–parede.

SOLUÇÃO

1. A variação da entropia do universo é Q/T:

$$\Delta S_u = \frac{Q}{T} = \frac{\frac{1}{2}Mv^2}{T} = \frac{\frac{1}{2}(2{,}4\text{ kg})(3{,}0\text{ m/s})^2}{293\text{ K}}$$

$$\Delta S_u = \boxed{37\text{ mJ/K}}$$

CHECAGEM O resultado é maior do que zero, como é sempre o caso para um processo irreversível.

INDO ALÉM A energia é conservada, mas a energia $T\,\Delta S_u = \frac{1}{2}Mv^2$ não está mais disponível para a realização de trabalho.

Durante a expansão livre discutida anteriormente, a capacidade de realização de trabalho foi totalmente perdida. Naquele caso, a variação da entropia do universo foi de $nR \ln(V_2/V_1)$, de forma que o trabalho perdido foi de $nRT \ln(V_2/V_1)$. Esta é a quantidade de trabalho que poderia ter sido realizado se o gás tivesse sofrido uma expansão quase-estática e isotérmica de V_1 até V_2, como dado pela Equação 19-17.

Se todo o calor Q liberado por um reservatório quente é absorvido por um reservatório frio, a variação da entropia do universo é dada pela Equação 19-21 e o trabalho perdido é

$$W_{\text{perdido}} = T_f \Delta S_u = T_f\left(\frac{Q}{T_f} - \frac{Q}{T_q}\right) = Q\left(1 - \frac{T_f}{T_q}\right)$$

Podemos ver que este é exatamente o trabalho que poderia ter sido realizado por uma máquina de Carnot funcionando entre estes reservatórios, retirando calor Q do reservatório quente e realizando trabalho $W = \varepsilon_C Q$, onde $\varepsilon_C = 1 - T_f/T_q$.

19-7 ENTROPIA E PROBABILIDADE

A entropia, que é uma medida do grau de desordem de um sistema, está relacionada à probabilidade. Essencialmente, um estado mais ordenado tem uma probabilidade relativamente baixa, enquanto um estado menos ordenado tem uma probabilidade relativamente alta. Portanto, durante um processo irreversível o universo se desloca de um estado de probabilidade relativamente baixa para outro de probabilidade relativamente alta.

Vamos considerar uma expansão livre na qual um gás se expande de um volume inicial V_1 para um volume final $V_2 = 2V_1$. A variação da entropia do universo, para este processo, é dada pela Equação 19-19:

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1} = nR \ln 2$$

Por que este processo é irreversível? Por que o gás não se contrai, espontaneamente, de volta ao seu volume original? Tal contração não violaria a primeira lei da termodinâmica, já que não há variação de energia envolvida. A razão pela qual o gás não se contrai até o seu volume original é meramente porque uma tal contração é extremamente *improvável*.

Exemplo 19-13 A Probabilidade de uma Contração Livre

Considere um gás constituído por apenas 10 moléculas que ocupam um cubo. Qual é a probabilidade de que todas as 10 moléculas estejam na metade esquerda do cubo, em um dado instante?

SITUAÇÃO A probabilidade de que qualquer uma das moléculas esteja na metade esquerda do recipiente, em determinado instante, é $\frac{1}{2}$. Usando esta informação, podemos calcular a probabilidade de que todas as 10 moléculas estejam, em determinado instante, na metade esquerda.

SOLUÇÃO

1. A probabilidade de que qualquer uma das moléculas esteja na metade esquerda é a mesma para que ela esteja na metade direita:

   A probabilidade de que uma dada molécula esteja na metade esquerda do recipiente, em determinado instante, é $\frac{1}{2}$.

2. A probabilidade de que as moléculas 1 e 2 estejam ambas na metade esquerda (em determinado instante) é a probabilidade de que a molécula 1 esteja na metade esquerda vezes a probabilidade de que a molécula 2 esteja na metade esquerda:

   A probabilidade de que duas determinadas moléculas estejam, ambas, na metade esquerda (em determinado instante) é $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. A probabilidade é a mesma para que as moléculas 1 e 2 estejam ambas na metade esquerda, ambas na metade direita, para que a molécula 1 esteja na metade esquerda e a molécula 2 esteja na metade direita, e para que a molécula 2 esteja na metade esquerda e a molécula 1 esteja na metade direita. A probabilidade para qualquer uma destas opções é $\frac{1}{4}$.

3. A probabilidade de que as moléculas 1, 2 e 3 estejam todas na metade esquerda, em determinado instante, é igual à probabilidade de que as moléculas 1 e 2 estejam, ambas, na metade esquerda vezes a probabilidade de que a molécula 3 esteja na metade esquerda:

   A probabilidade de que três determinadas moléculas estejam na metade esquerda (em determinado instante) é $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

4. Continuando com esta linha de raciocínio para determinar a probabilidade de que todas as 10 moléculas estejam na metade esquerda, obtemos:

   A probabilidade de que todas as 10 moléculas estejam na metade esquerda (em determinado instante) é $\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}}$

CHECAGEM Sabemos, intuitivamente, que a probabilidade de que todas as 10 moléculas estejam no lado esquerdo em um dado instante é muito pequena. Ela é a mesma para que uma moeda lançada caia com a cara para cima 10 vezes em seqüência.

Apesar de a probabilidade de encontrar todas as 10 moléculas do Exemplo 19-13 em um dos lados do recipiente ser pequena, não ficaríamos completamente surpresos ao ver isto acontecer. Se olhássemos o gás uma vez a cada segundo, poderíamos esperar ver isto acontecer uma vez a cada 1024 segundos, ou aproximadamente uma vez a cada 17 minutos. Se começamos com as 10 moléculas distribuídas aleatoriamente e, depois, encontramos todas elas na metade esquerda do volume original, a entropia do universo terá *diminuído* de $nR \ln 2$. Entretanto, este decréscimo é extremamente pequeno porque o número n de moles correspondente a 10 moléculas é apenas cerca de 10^{-23}. Além disso, isto violaria o enunciado da segunda lei da termodinâmica para a entropia que afirma que, para qualquer processo, a entropia do universo nunca diminui. Assim, se desejamos aplicar a segunda lei da termodinâmica a sistemas microscópicos como o constituído por um pequeno número de moléculas, devemos considerar a segunda lei como um enunciado *probabilístico*.

Podemos relacionar a probabilidade de um gás contrair-se espontaneamente para um volume menor com a variação da sua entropia. Se o volume original é V_1, a probabilidade p de encontrar N moléculas em um volume menor V_2 é

$$p = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^N$$

Tomando o logaritmo natural dos dois lados desta equação, obtemos

$$\ln p = N \ln \frac{V_2}{V_1} = nN_A \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad 19\text{-}23$$

onde n é o número de moles e N_A é o número de Avogadro. A variação da entropia do gás é

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad 19\text{-}24$$

Substituindo $n \ln(V_2/V_1)$ na Equação 19-24, vemos que

$$\Delta S = \frac{R}{N_A} \ln p = k \ln p \qquad 19\text{-}25$$

onde $k = R/N_A$ é a constante de Boltzmann.

Pode ser intrigante aprender que processos irreversíveis, tais como a contração espontânea de um gás ou a transferência espontânea de calor de um corpo frio para um corpo quente, não são impossíveis — eles são apenas improváveis. Como acabamos de ver, há uma probabilidade razoável de que um processo irreversível ocorra em um sistema constituído por um número muito pequeno de moléculas; entretanto, *a própria termodinâmica é aplicável apenas a sistemas macroscópicos*, isto é, a sistemas que têm um número muito grande de moléculas. Imagine a tentativa de se medir a pressão de um gás constituído por apenas 10 moléculas. A pressão variaria muito, dependendo de se nenhuma molécula, 2 moléculas ou 10 moléculas estivessem colidindo contra a parede do recipiente no instante da medida. As variáveis macroscópicas de pressão e temperatura não são aplicáveis a um sistema microscópico com apenas 10 moléculas.

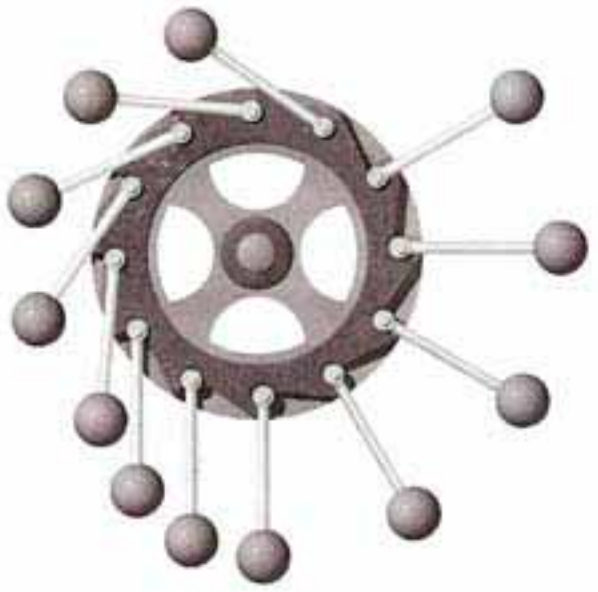
Quando aumentamos o número de moléculas de um sistema, a probabilidade de ocorrência de um processo para o qual a entropia do universo diminua decai dramaticamente. Por exemplo, se tivermos 50 moléculas em um recipiente, a probabilidade de que todas elas estejam na metade esquerda do recipiente é $(\frac{1}{2})^{50} \approx 10^{-15}$. Assim, se olharmos o gás uma vez a cada segundo, poderemos esperar ver todas as 50 moléculas na metade esquerda do volume aproximadamente uma vez a cada 10^{15} segundos, ou uma vez a cada 36 milhões de anos! Para 1 mol (6×10^{23} moléculas), a probabilidade de que todas ocupem uma metade do volume é extremamente pequena, essencialmente zero. Para sistemas macroscópicos, então, a probabilidade de um processo resultar em um decréscimo da entropia do universo é tão extremamente pequena que a distinção entre improvável e impossível deixa de ter significado.

Física em Foco

A Perpétua Batalha sobre o Movimento Perpétuo

Algumas pessoas sonham obter trabalho de graça. Máquinas com movimento perpétuo, que realizem trabalho efetivo sem consumo de energia, ou que sejam completamente eficientes, são o foco desses sonhos. O movimento perpétuo não pode funcionar. Os físicos classificam as máquinas de movimento perpétuo em duas categorias, dependendo de qual lei da termodinâmica elas violam.

As máquinas da primeira categoria violam a primeira lei da termodinâmica — elas criariam energia do nada ou criariam mais energia do que usam. As primeiras tentativas conhecidas de movimento perpétuo envolveram o movimento rotatório e a gravidade. Uma roda desbalanceada possuía bastões articulados que poderiam, supostamente, fazer a roda girar perpetuamente em um dos sentidos. Outro projeto, criado por Leonardo da Vinci, envolvia uma roda d'água que alimentava, simultaneamente, um moinho e uma bomba que bombeava a água até uma altura suficiente para alimentar a própria roda.* Nenhuma destas tentativas levou em consideração a energia necessária para mover os bastões articulados com relação à roda maior, ou a energia perdida em girar a própria roda d'água.



A roda apenas parece estar desequilibrada. Entretanto, observe que há mais bolas à esquerda do eixo do que à direita. Um cálculo do centro de massa mostrará que ele se encontra diretamente abaixo do eixo. (Reduzir o número de bolas para quatro torna este cálculo relativamente simples.)

Mais tarde, o empuxo e o movimento rotatório foram parte de tentativas populares de alcançar o movimento perpétuo.† Projetos com rodas e esteiras, baseados no empuxo, incluíam reservatórios de ar, correntes e mangueiras conectadas.‡ Nenhum desses projetos levou em consideração o trabalho necessário para encher os reservatórios de ar, nem o trabalho necessário para mover os pesos internos.

As máquinas da segunda categoria violam a segunda lei da termodinâmica. Essas máquinas não se propõem a criar energia. Elas são máquinas movidas a calor ou a vapor, com rendimento impossível. Uma dessas máquinas mais famosas foi o Zeromotor, proposto por John Gamgee em 1880 para acionar hélices de navios.# O Zeromotor era um motor de amônia especialmente projetado. Como a amônia ferve a uma temperatura próxima de 0°C, amônia líquida seria injetada em um cilindro com um pistão. A amônia se expandiria e empurraria o pistão. A ação de empurrar o pistão resfriaria a amônia o suficiente para que ela se condensasse, se expandisse novamente e repetisse todo o ciclo sem absorver ou liberar calor. Isto contradiz diretamente o trabalho de Carnot. O Zeromotor de Gamgee não funcionou, é claro. Nem qualquer uma das outras máquinas baseadas na violação da segunda lei da termodinâmica. O vapor nunca se condensa e a máquina térmica nunca completa um único ciclo completo.

A Academia Francesa de Ciências proclamou que insistir na procura do movimento perpétuo era uma perda de tempo quando decidiu, em 1775, não mais considerar patentes de máquinas de movimento perpétuo.° Em 1856, os escritórios de patentes americano e britânico já não recomendavam a submissão de patentes de máquinas de movimento perpétuo.§ Entretanto, algumas pessoas ainda querem trabalho de graça. É possível encontrar alegações recentes de máquinas que criam mais energia do que usam.¶ Também é possível encontrar cientistas frustrados com mais uma patente recusada** pelo escritório americano de patentes.†† A batalha perpétua sobre o movimento perpétuo se intensifica, mas os físicos são agora capazes de explicar por que ele não é possível.

---

* Leonardo3, "Pompe Meccaniche e a Moto Perpetuo," *Codex Atlanticus*, Milan: Leonardo3 srl, 2005.
† "Austin's Perpetual Motion," *Scientific American*, Mar. 27, 1847, Vol. 2, No. 27, 209.
‡ Diamond, David, "Gravity-Actuated Fluid Displacement Power Generator," United States Patent 3,934,964, Jan. 27, 1976.
# Park, Robert, *Voodoo Science*. Oxford: Oxford University Press, 2000, 129–130.
° Ward, James, *Naturalism and Agnosticism, Vol I*. London: Black, 1906.
§ "Patent Correspondence," *Scientific American*, Sep. 1856, Vol. 20, No. 1, 343.
¶ Wine, Byron, "Energy Information." http://byronw.www1host.com/as of July, 2006.
** Voss, David, "'New Physics' Finds a Haven at the Patent Office," *Science*, May 21, 1999, Vol. 284, No. 5418, 1252–1254.
†† Collins, G. P., "There's No Stopping Them," *Scientific American*, Oct. 22, 2002, 41.

Resumo

A segunda lei da termodinâmica é uma lei fundamental da natureza.

	TÓPICO	EQUAÇÕES RELEVANTES E OBSERVAÇÕES	
1.	**Rendimento de uma Máquina Térmica**	Se a máquina absorve Q_q de um reservatório quente, realiza trabalho W e libera calor Q_f para um reservatório frio, seu rendimento é $$\varepsilon = \frac{W}{Q_q} = \frac{Q_q - Q_f}{Q_q} = 1 - \frac{Q_f}{Q_q}$$	19-2
2.	**Coeficiente de Desempenho de um Refrigerador**	$$CD = \frac{Q_f}{W}$$	19-3
3.	**Coeficiente de Desempenho de uma Bomba Térmica**	$$CD_{BT} = \frac{Q_q}{W}$$	19-8
4.	**Enunciados Equivalentes da Segunda Lei da Termodinâmica**		
	O enunciado de Kelvin	Nenhum sistema pode absorver calor de um único reservatório e convertê-lo inteiramente em trabalho sem que resultem outras variações do sistema e do ambiente que o cerca.	
	O enunciado para máquinas térmicas	É impossível para uma máquina térmica, operando em um ciclo, produzir como *único efeito* o de retirar calor de um único reservatório e realizar uma quantidade equivalente de trabalho.	
	O enunciado de Clausius	Um processo cujo único resultado efetivo seja o de retirar calor de um reservatório frio e liberar a mesma quantidade de calor para um reservatório quente é impossível.	
	O enunciado para refrigeradores	É impossível para um refrigerador, operando em um ciclo, produzir como *único efeito* o de retirar calor de um corpo frio e liberar a mesma quantidade de calor para um corpo quente.	
	O enunciado para a entropia	A entropia do universo (sistema mais vizinhança) nunca pode diminuir.	
5.	**Condições para um Processo Reversível**	1. Nenhuma energia mecânica é transformada em energia térmica interna pelo atrito, por forças viscosas ou por outras forças dissipadoras. 2. Energia é transferida na forma de calor apenas entre corpos com uma diferença infinitesimal de temperatura. 3. O processo deve ser quase-estático para que o sistema esteja sempre em (ou infinitesimalmente próximo de) um estado de equilíbrio.	
6.	**Máquina de Carnot**	Uma máquina de Carnot é uma máquina reversível que trabalha entre dois reservatórios térmicos. Ela opera em um ciclo de Carnot, que consiste em:	
	Ciclo de Carnot	1. Uma absorção quase-estática e isotérmica de calor de um reservatório quente 2. Uma expansão quase-estática e adiabática para uma temperatura menor 3. Uma liberação quase-estática e isotérmica de calor para um reservatório frio 4. Uma compressão quase-estática e adiabática de volta ao estado original	
	Rendimento de Carnot	$$\varepsilon_C = 1 - \frac{Q_f}{Q_q} = 1 - \frac{T_f}{T_q}$$	19-6
7.	**Temperatura Termodinâmica**	A razão entre as temperaturas termodinâmicas de dois reservatórios é definida como a razão entre o calor liberado e o calor absorvido por uma máquina de Carnot operando entre os reservatórios: $$\frac{T_f}{T_q} = \frac{Q_f}{Q_q}$$	19-7
		Além disso, o ponto triplo da água tem uma temperatura termodinâmica de 273,16 K.	

TÓPICO	EQUAÇÕES RELEVANTES E OBSERVAÇÕES
8. **Entropia**	A entropia é uma medida da desordem de um sistema. A diferença de entropia entre dois estados próximos é dada por $$dS = \frac{dQ_{rev}}{T}$$ 19-12 onde dQ_{rev} é o calor absorvido durante um processo reversível que leva o sistema de um estado para o outro. A variação da entropia de um sistema pode ser positiva ou negativa.
Entropia e perda da capacidade de realizar trabalho	Durante um processo irreversível, a entropia do universo S_u aumenta e uma quantidade de energia $$W_{perdido} = T\,\Delta S_u$$ 19-22 torna-se indisponível para a realização de trabalho.
Entropia e probabilidade	A entropia está relacionada à probabilidade. Um sistema altamente ordenado é pouco provável e tem baixa entropia. Um sistema isolado tende para um estado de maior probabilidade, menor ordem e maior entropia.

Resposta da Checagem Conceitual

19-1 Não. O desenvolvimento de um organismo vivo acontece à custa de um grande aumento de desordem em algum outro lugar. Boa parte desta desordem pode ser rastreada até o Sol, onde reações nucleares geram um aumento da desordem e, portanto, um aumento da entropia.

Respostas dos Problemas Práticos

19-1 (*a*) 52,5 J, (*b*) 97,5 J
19-2 250 kJ
19-3 (*a*) 40%, (*b*) 80 kJ
19-4 30%
19-5 ΔS = 1,31 kJ/K

Problemas

Em alguns problemas, você recebe mais dados do que necessita; em alguns outros, você deve acrescentar dados de seus conhecimentos gerais, fontes externas ou estimativas bem fundamentadas.

Interprete como significativos todos os algarismos de valores numéricos que possuem zeros em seqüência sem vírgulas decimais.

• Um só conceito, um só passo, relativamente simples
•• Nível intermediário, pode requerer síntese de conceitos
••• Desafiante, para estudantes avançados
Problemas consecutivos sombreados são problemas pareados.

PROBLEMAS CONCEITUAIS

1 • **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** Motores modernos de automóveis a gasolina possuem rendimento de cerca de 25%. Qual é, aproximadamente, a porcentagem de calor de combustão não usada para o trabalho, mas liberada como calor? (*a*) 25%, (*b*) 50%, (*c*) 75%, (*d*) 100%, (*e*) os dados fornecidos não são suficientes para responder.

2 • Se uma máquina térmica realiza 100 kJ de trabalho a cada ciclo, enquanto libera 400 kJ de calor, qual é o seu rendimento? (*a*) 20%, (*b*) 25%, (*c*) 80%, (*d*) 400%, (*e*) os dados fornecidos não são suficientes para responder.

3 • Se o calor absorvido por uma máquina térmica é de 600 kJ a cada ciclo, e ela libera 480 kJ de calor em cada ciclo, qual é o seu rendimento? (*a*) 20%, (*b*) 80%, (*c*) 100%, (*d*) os dados fornecidos não são suficientes para responder.

4 • Explique o que distingue um refrigerador de uma "bomba térmica".

5 • O CD de um aparelho de ar condicionado é matematicamente idêntico ao de um refrigerador, isto é, $CD_{AC} = CD_{ref} = Q_f/W$. Entretanto, o CD de uma bomba térmica é definido de forma diferente, como $CD_{BT} = Q_q/W$. Explique claramente *por que* os dois CDs são definidos de maneira diferente. *Dica: Pense no uso a que se destinam os três diferentes aparelhos.*

6 • Explique por que você não pode refrigerar sua cozinha deixando a porta do refrigerador aberta em um dia quente. (Por que ligar um aparelho de ar condicionado em uma sala resfria a sala, mas abrir um refrigerador não resfria?)

7 • **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** Por que os projetistas de plantas de energia a vapor tentam aumentar o máximo possível a temperatura do vapor?

8 • Para aumentar o rendimento de uma máquina de Carnot, você deve (*a*) diminuir a temperatura do reservatório quente, (*b*) aumentar a temperatura do reservatório frio, (*c*) aumentar a temperatura do reservatório quente, (*d*) mudar a razão entre o volume máximo e o volume mínimo.

9 •• Explique por que a seguinte afirmativa é verdadeira: Para aumentar o rendimento de uma máquina de Carnot você deve aumentar o máximo possível a diferença entre as duas temperaturas de operação; mas, para aumentar o rendimento de um ciclo de um *refrigerador* de Carnot, você deve diminuir o máximo possível a diferença entre as duas temperaturas de operação.

10 •• Uma máquina de Carnot opera entre um reservatório frio,

a 27°C, e um reservatório quente, a 127°C. Seu rendimento é (*a*) 21%, (*b*) 25%, (*c*) 75%, (*d*) 79%.

11 •• A máquina de Carnot do Problema 10 funciona no sentido inverso, como um refrigerador. Seu CD é (*a*) 0,33, (*b*) 1,3, (*c*) 3,0, (*d*) 4,7.

12 •• Em um dia úmido, vapor d'água se condensa sobre uma superfície fria. Durante a condensação, a entropia da água (*a*) aumenta, (*b*) permanece constante, (*c*) diminui, (*d*) pode diminuir ou permanecer constante. Explique sua resposta.

13 •• Um gás ideal é levado, de maneira reversível, de um estado inicial P_i, V_i, T_i, para um estado final P_f, V_f, T_f. Dois caminhos possíveis são (A) uma expansão isotérmica seguida de uma compressão adiabática, e (B) uma compressão adiabática seguida de uma expansão isotérmica. Para estes dois caminhos, (*a*) $\Delta E_{\text{int A}} > \Delta E_{\text{int B}}$, (*b*) $\Delta S_A > \Delta S_B$, (*c*) $\Delta S_A < \Delta S_B$, (*d*) nenhuma das anteriores.

14 •• A Figura 19-12 mostra um ciclo termodinâmico para um gás ideal em um diagrama *ST*. Identifique este ciclo e esboce-o em um diagrama *PV*.

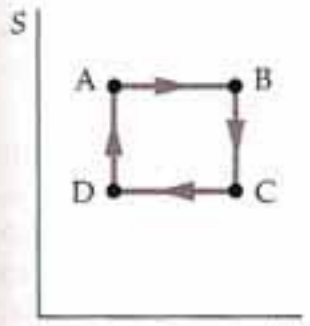


FIGURA 19-12 Problemas 14 e 72

15 •• A Figura 19-13 mostra um ciclo termodinâmico para um gás ideal em um diagrama *SV*. Identifique o tipo de máquina representada por este diagrama.

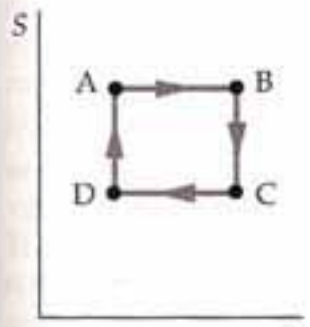


FIGURA 19-13 Problema 15

16 •• Esboce um diagrama *ST* para o ciclo Otto. (O ciclo Otto é discutido na Seção 19-1.)

17 •• Esboce um diagrama *SV* para o ciclo de Carnot com um gás ideal.

18 •• Esboce um diagrama *SV* para o ciclo Otto. (O ciclo Otto é discutido na Seção 19-1.)

19 •• A Figura 19-14 mostra um ciclo termodinâmico, para um gás ideal, em um diagrama *SP*. Faça um esboço deste ciclo em um diagrama *PV*.

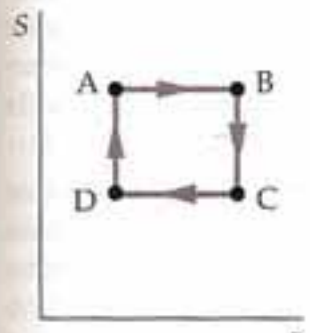


FIGURA 19-14 Problema 19

20 •• **RICO EM CONTEXTO** Numa bela tarde, a mãe de um de seus amigos entra no quarto dele e encontra aquela bagunça. Ela pergunta ao seu amigo como que o quarto chegou aquele estado, e ele responde: "Bem, é o destino natural de qualquer sistema fechado degenerar para níveis cada vez maiores de entropia. É isso aí, Mãe." A resposta dela é clara: "De qualquer forma, é melhor você arrumar seu quarto." Seu amigo responde: "Mas isto não é possível. Isto violaria a segunda lei da termodinâmica." Critique a resposta do seu amigo. A mãe dele está correta, ao mandá-lo arrumar o quarto, ou a arrumação é realmente impossível?

ESTIMATIVA E APROXIMAÇÃO

21 • Estime a variação do CD do seu *freezer* elétrico, quando ele é removido da cozinha para sua nova localização no porão, que está 8°C mais frio do que a cozinha.

22 •• Estime a probabilidade de que todas as moléculas de seu quarto estejam localizadas dentro do armário (aberto), que ocupa aproximadamente 10% do volume total do quarto.

23 •• Estime o rendimento máximo de um motor de automóvel que tenha uma razão de compressão de 8,0:1,0. Suponha que a máquina opere no ciclo Otto e que $\gamma = 1{,}4$. (O ciclo Otto é discutido na Seção 19-1.)

24 •• **RICO EM CONTEXTO** Você está trabalhando, durante o verão, como vendedor de eletrodomésticos. Um dia, sua professora de física vem à sua loja para comprar um novo refrigerador. Desejando comprar o refrigerador mais eficiente possível, ela lhe pergunta sobre os rendimentos dos modelos disponíveis. Ela decide retornar no outro dia, para comprar o refrigerador mais eficiente. Para realizar a venda, você precisa fornecer a ela as seguintes estimativas: (*a*) o maior CD possível para um refrigerador doméstico, e (*b*) a maior taxa possível de liberação de calor pelo interior do refrigerador, se ele consome uma potência elétrica de 600 W. Estime estas quantidades.

25 •• A temperatura média da superfície do Sol é de aproximadamente 5400 K e a temperatura média da superfície da Terra é de aproximadamente 290 K. A constante solar (a intensidade da luz solar que atinge a atmosfera terrestre) é de aproximadamente 1,37 kW/m². (*a*) Estime a potência total da luz solar que chega à Terra. (*b*) Estime a taxa efetiva na qual a entropia da Terra está aumentando, em razão desta radiação solar.

26 ••• Uma caixa de 1,0 L contém N moléculas de um gás ideal, e as posições das moléculas são observadas 100 vezes por segundo. Calcule o tempo médio que deve decorrer antes que se possa observar todas as N moléculas na metade esquerda da caixa, se N é igual a (*a*) 10, (*b*) 100, (*c*) 1000 e (*d*) 1,0 mol. (*e*) O melhor vácuo que se conseguiu até hoje tem pressões de cerca de 10^{-12} torr. Se uma câmara de vácuo tem o mesmo volume que a caixa, quanto tempo um físico teria que esperar para ver todas as moléculas na câmara de vácuo ocupando apenas sua metade esquerda? Compare com a vida média esperada do universo, que é de aproximadamente 10^{10} anos.

MÁQUINAS TÉRMICAS E REFRIGERADORES

27 • Uma máquina térmica, com 20 por cento de rendimento, realiza 0,100 kJ de trabalho em cada ciclo. (*a*) Quanto calor é absorvido do reservatório quente, a cada ciclo? (*b*) Quanto calor é liberado para o reservatório frio, a cada ciclo?

28 • Uma máquina térmica absorve 0,400 kJ de calor e realiza 0,120 kJ de trabalho em cada ciclo. (*a*) Qual é o rendimento da máquina? (*b*) Quanto calor é liberado para o reservatório frio, a cada ciclo?

29 • Uma máquina térmica absorve 100 J de calor do reservatório quente e libera 60 J de calor para o reservatório frio, em cada

ciclo. (*a*) Qual é o seu rendimento? (*b*) Se cada ciclo leva 0,50 s, determine a potência da máquina.

30 • Um refrigerador absorve 5,0 kJ de calor de um reservatório frio e libera 8,0 kJ para um reservatório quente. (*a*) Determine o coeficiente de desempenho do refrigerador. (*b*) O refrigerador é reversível. Se ele funcionar ao contrário, como uma máquina térmica entre os mesmos dois reservatórios, qual será o seu rendimento?

31 •• A substância de trabalho de uma máquina térmica é 1,00 mol de um gás monoatômico ideal. O ciclo inicia a $P_1 = 1{,}00$ atm e $V_1 = 24{,}6$ L. O gás é aquecido a volume constante até $P_2 = 2{,}00$ atm. Depois, ele se expande, à pressão constante, até 49,2 L. O gás é, então, resfriado a volume constante até sua pressão atingir, novamente, 1,00 atm. Ele é, depois, comprimido à pressão constante até seu estado original. Todas as etapas são quase-estáticas e reversíveis. (*a*) Mostre este ciclo em um diagrama *PV*. Para cada etapa do ciclo, determine o trabalho realizado pelo gás, o calor absorvido pelo gás e a variação da energia interna do gás. (*b*) Determine o rendimento do ciclo.

32 •• A substância de trabalho de uma máquina é 1,00 mol de um gás ideal diatômico. A máquina opera em um ciclo que consiste em três etapas: (1) uma expansão adiabática de um volume inicial de 10,0 L para uma pressão de 1,00 atm e um volume de 20,0 L, (2) uma compressão, à pressão constante, até seu volume original de 10,0 L, e (3) aquecimento, a volume constante, até sua pressão original. Determine o rendimento deste ciclo.

33 •• Uma máquina, usando 1,00 mol de um gás ideal, inicialmente em um volume de 24,6 L e a uma temperatura de 400 K, realiza um ciclo que consiste em quatro etapas: (1) uma expansão isotérmica à temperatura de 400 K, até o dobro de seu volume inicial, (2) um resfriamento, a volume constante, até a temperatura de 300 K, (3) uma compressão isotérmica até seu volume original, e (4) um aquecimento, a volume constante, até sua temperatura original de 400 K. Considere $C_v = 21{,}0$ J/K. Esboce o ciclo em um diagrama *PV* e determine o seu rendimento.

34 •• A Figura 19-15 mostra o ciclo seguido por 1,00 mol de um gás monoatômico ideal com um volume inicial $V_1 = 25{,}0$ L. Todos os processos são quase-estáticos. Determine (*a*) a temperatura de cada estado numerado do ciclo, (*b*) o calor transferido em cada etapa do ciclo e (*c*) o rendimento do ciclo.

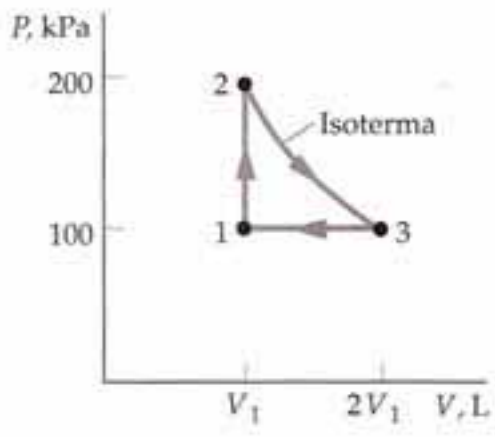


FIGURA 19-15
Problema 34

35 •• Um gás diatômico ideal segue o ciclo mostrado na Figura 19-16. A temperatura do estado 1 é 200 K. Determine (*a*) as temperaturas dos outros três estados numerados do ciclo e (*b*) o rendimento do ciclo.

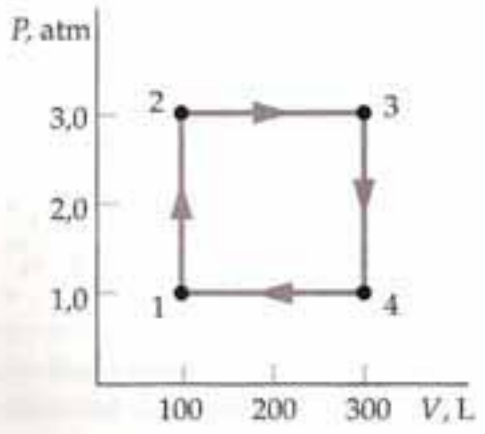


FIGURA 19-16
Problema 35

36 ••• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** Recentemente, um antigo projeto de máquina térmica, conhecida como a *máquina de Stirling*, foi anunciado como uma maneira de se produzir potência a partir da energia solar. O ciclo de uma máquina de Stirling é o seguinte: (1) compressão isotérmica do gás, (2) aquecimento do gás a volume constante, (3) expansão isotérmica do gás e (4) resfriamento do gás a volume constante. (*a*) Esboce os diagramas *PV* e *ST* para o ciclo de Stirling. (*b*) Determine a variação da entropia do gás, em cada etapa do ciclo, e mostre que a soma dessas variações de entropia é igual a zero.

37 ••• **APLICAÇÃO BIOLÓGICA** "Até onde sabemos, a Natureza nunca desenvolveu uma máquina térmica" — Steven Vogel, *Dispositivos da Vida* (*Life's Devices*, Princeton University Press, 1988). (*a*) Calcule o rendimento de uma máquina térmica operando entre a temperatura do corpo (98,6°F) e uma temperatura externa típica (70°F), e compare-o com o rendimento do corpo humano ao converter energia química em trabalho (aproximadamente 20 por cento). Esta comparação entre os rendimentos contradiz a segunda lei da termodinâmica? (*b*) A partir do resultado da Parte (*a*), e de um conhecimento geral sobre as condições nas quais a maioria dos organismos de sangue quente existe, dê uma razão pela qual nenhum desses organismos desenvolveu uma máquina térmica para aumentar sua energia interna.

38 ••• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** O *ciclo diesel*, mostrado na Figura 19-17, representa, aproximadamente, o comportamento de um motor diesel. O processo *ab* é uma compressão adiabática, o processo *bc* é uma expansão à pressão constante, o processo *cd* é uma expansão adiabática e o processo *da* é um resfriamento a volume constante. Determine o rendimento deste ciclo, em termos dos volumes V_a, V_b e V_c.

FIGURA 19-17 Problema 38

SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA

39 •• Um refrigerador retira 500 J de calor de um reservatório frio e libera 800 J para um reservatório quente. Suponha falso o enunciado para máquinas térmicas da segunda lei da termodinâmica e mostre como uma máquina perfeita, trabalhando junto com este refrigerador, pode violar o enunciado para refrigeradores da segunda lei da termodinâmica.

40 •• Se duas curvas que representam processos adiabáticos quase-estáticos pudessem se interceptar em um diagrama *PV*, um ciclo poderia ser completado através de um caminho isotérmico entre as duas curvas adiabáticas, como mostrado na Figura 19-18. Mostre que tal ciclo viola a segunda lei da termodinâmica.

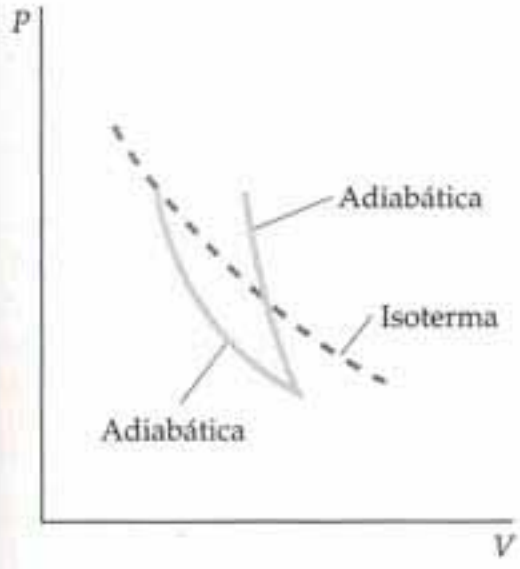


FIGURA 19-18
Problema 40

CICLOS DE CARNOT

41 • Uma máquina de Carnot trabalha entre dois reservatórios de calor a temperaturas $T_q = 300$ K e $T_f = 200$ K. (*a*) Qual é o seu rendimento? (*b*) Se ela absorve 100 J de calor do reservatório quente a cada ciclo, quanto trabalho ela realiza, em cada ciclo? (*c*) Quanto calor ela libera, em cada ciclo? (*d*) Qual é o CD desta máquina, quando ela trabalha como um refrigerador entre os mesmos dois reservatórios?

42 • Uma máquina absorve 250 J de calor de um reservatório a 300 K e libera 200 J de calor para um reservatório a 200 K, a cada ciclo. (*a*) Qual é o seu rendimento? (*b*) Quanto trabalho adicional, por ciclo, poderia ser feito se a máquina fosse reversível?

43 •• Uma máquina reversível, trabalhando entre dois reservatórios a temperaturas T_q e T_f, tem um rendimento de 30 por cento. Trabalhando como uma máquina térmica, ela libera 140 J de calor para o reservatório frio a cada ciclo. Uma segunda máquina, trabalhando entre os mesmos dois reservatórios, também libera 140 J para o reservatório frio, a cada ciclo. Mostre que, se a segunda máquina tem um rendimento maior do que 30 por cento, as duas máquinas, trabalhando juntas, violam o enunciado da segunda lei para máquinas térmicas.

44 •• Uma máquina reversível, trabalhando entre dois reservatórios a temperaturas T_q e T_f, tem um rendimento de 20 por cento. Trabalhando como uma máquina térmica, ela libera 100 J de calor para o reservatório frio, a cada ciclo. Uma segunda máquina, trabalhando entre os mesmos dois reservatórios, também libera 100 J a cada ciclo. Mostre que, se o rendimento da segunda máquina é maior do que 20 por cento, as duas máquinas trabalhando juntas violam o enunciado da segunda lei para refrigeradores.

45 •• Uma máquina de Carnot trabalha entre dois reservatórios de calor como um refrigerador. Durante cada ciclo, 100 J de calor são absorvidos do reservatório frio e 150 J de calor são liberados para o reservatório quente. (*a*) Qual é o rendimento da máquina de Carnot, quando ela trabalha como uma máquina térmica entre os mesmos dois reservatórios? (*b*) Mostre que nenhuma outra máquina, trabalhando como um refrigerador entre os mesmos dois reservatórios, pode ter um CD maior do que 2,00.

46 •• Uma máquina de Carnot trabalha entre dois reservatórios de calor com temperaturas $T_q = 300$ K e $T_f = 77{,}0$ K. (*a*) Qual é o seu rendimento? (*b*) Se ela absorve 100 J de calor do reservatório quente a cada ciclo, quanto trabalho ela realiza? (*c*) Quanto calor ela libera para o reservatório de baixa temperatura, a cada ciclo? (*d*) Qual é o coeficiente de desempenho desta máquina, quando ela trabalha como um refrigerador entre os dois reservatórios?

47 •• No ciclo mostrado na Figura 19-19, 1,00 mol de um gás ideal diatômico está inicialmente a uma pressão de 1,00 atm e a uma temperatura de 0,0°C. O gás é aquecido a volume constante até $T_2 =$ 150°C e é, então, expandido adiabaticamente até que a pressão seja, novamente, de 1,00 atm. Ele é, depois, comprimido à pressão constante de volta ao seu estado original. Determine (*a*) a temperatura depois da expansão adiabática, (*b*) o calor absorvido ou liberado pelo sistema durante cada etapa, (*c*) o rendimento deste ciclo e (*d*) o rendimento de um ciclo de Carnot operando entre os extremos de temperatura deste ciclo.

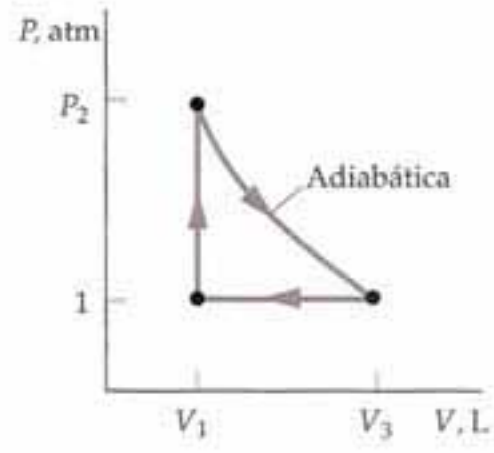


FIGURA 19-19
Problema 47

48 •• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA, RICO EM CONTEXTO** Você faz parte de uma equipe que está completando um projeto de engenharia mecânica. Sua equipe constrói uma máquina térmica que utiliza vapor superaquecido a 270°C e libera do cilindro vapor condensado a 50,0°C. Vocês mediram o rendimento da máquina e encontraram 30,0 por cento. (*a*) Como este rendimento se compara com o máximo rendimento possível para sua máquina? (*b*) Se a potência útil de saída da máquina é igual a 200 kW, quanto calor a máquina libera para a vizinhança em 1,00 h?

*BOMBAS TÉRMICAS

49 • **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA, RICO EM CONTEXTO** Como engenheiro, você está projetando uma bomba térmica capaz de liberar calor, para uma casa, a uma taxa de 20 kW. A casa está localizada onde, no inverno, a temperatura média externa é de −10°C. A temperatura do ar no reservatório dentro da casa deve ser de 40°C. (*a*) Qual é o maior CD possível para uma bomba térmica operando entre estas temperaturas? (*b*) Qual é a menor potência necessária para o motor elétrico que alimenta a bomba térmica? (*c*) Na verdade, o CD da bomba térmica será de apenas 60 por cento do valor ideal. Qual é a menor potência necessária para o motor elétrico, quando o CD é 60 por cento do valor ideal?

50 • A potência de um refrigerador é de 370 W. (*a*) Qual é a maior quantidade de calor que ele pode absorver do compartimento de alimentos em 1,00 min, se a temperatura do compartimento é 0,0°C e o calor é liberado para uma sala a 20,0°C? (*b*) Se o CD do refrigerador é 70 por cento do de um refrigerador reversível, quanto calor ele pode absorver do compartimento de alimentos em 1,00 min, nestas condições?

51 •• A potência de um refrigerador é de 370 W. (*a*) Qual é a maior quantidade de calor que ele pode absorver do compartimento de alimentos em 1,00 min, se a temperatura do compartimento é 0,0°C e ele libera calor para uma sala a 35°C? (*b*) Se o CD do refrigerador é 70 por cento do de uma bomba reversível, quanto calor ele pode absorver do compartimento de alimentos em 1,00 min? O CD do refrigerador é maior quando a temperatura da sala é de 35°C ou de 20°C? Explique.

52 ••• **RICO EM CONTEXTO** Você está instalando uma bomba térmica cujo CD é a metade do CD de uma bomba térmica reversível. Você planeja usar a bomba nas noites geladas de inverno, para aumentar a temperatura do ar em seu quarto. As dimensões de seu quarto são 5,00 m × 3,50 m × 2,50 m. A temperatura do ar deve aumentar de 63°F para 68°F. A temperatura externa é 35°F e a temperatura do reservatório de ar do quarto é 112°F. Se o consumo elétrico da bomba é de 750 W, por quanto tempo você terá que esperar para que o ar de seu quarto aqueça, se o calor específico do ar vale 1,005 kJ/(kg · °C)? Suponha que você tenha boas cortinas e bom isolamento

nas paredes, de maneira a poder desprezar a liberação de calor através de janelas, paredes, teto e chão. Suponha, também, que a capacidade térmica de chão, teto, paredes e mobília seja desprezível.

VARIAÇÕES DE ENTROPIA

53 • Você deixa, inadvertidamente, uma panela de água fervendo no fogão. Você retorna no exato instante em que a última gota é convertida em vapor. A panela tinha, inicialmente, 1,00 L de água fervendo. Qual é a variação da entropia da água, associada à variação de seu estado de líquido para gasoso?

54 • Qual é a variação da entropia de 1,00 mol de água líquida, a 0,0°C ao se transformar em gelo a 0,0°C?

55 •• Considere o congelamento de 50,0 g de água colocada no congelador de um refrigerador. Suponha as paredes do congelador mantidas a −10°C. A água, inicialmente líquida a 0,0°C, é congelada e resfriada até −10°C. Mostre que, mesmo que a entropia da água diminua, a entropia total do universo aumenta.

56 • Neste problema, 2,00 moles de um gás ideal a 400 K expandem, quase-estática e isotermicamente, de um volume inicial de 40,0 L para um volume final de 80,0 L. (*a*) Qual é a variação da entropia do gás? (*b*) Qual é a variação da entropia do universo para este processo?

57 •• Um sistema completa um ciclo que consiste em seis etapas quase-estáticas, realizando um trabalho total de 100 J. Durante a etapa 1 o sistema absorve 300 J de calor de um reservatório a 300 K, durante a etapa 3 o sistema absorve 200 J de calor de um reservatório a 400 K e durante a etapa 5 ele absorve calor de um reservatório à temperatura T_3. (Durante as etapas 2, 4 e 6 o sistema sofre processos adiabáticos nos quais a temperatura do sistema passa da temperatura de um dos reservatórios para a do seguinte.) (*a*) Qual é a variação da entropia do sistema para o ciclo completo? (*b*) Se o ciclo é reversível, qual é a temperatura T_3?

58 •• Neste problema, 2,00 moles de um gás têm, inicialmente, uma temperatura de 400 K e um volume de 40,0 L. O gás sofre uma expansão livre adiabática até o dobro de seu volume inicial. Quais são (*a*) a variação da entropia do gás e (*b*) a variação da entropia do universo?

59 •• Um bloco de 200 kg de gelo, a 0,0°C, é colocado em um grande lago. A temperatura do lago é levemente superior a 0,0°C e o gelo se funde lentamente. (*a*) Qual é a variação da entropia do gelo? (*b*) Qual é a variação da entropia do lago? (*c*) Qual é a variação da entropia do universo (gelo mais lago)?

60 •• Um pedaço de gelo de 100 g, a 0,0°C, é colocado em um calorímetro isolado de capacidade térmica desprezível, contendo 100 g de água a 100°C. (*a*) Qual é a temperatura final da água, depois de atingido o equilíbrio térmico? (*b*) Determine a variação da entropia do universo para este processo.

61 •• Um bloco de 1,00 kg de cobre, a 100°C, é colocado em um calorímetro isolado de capacidade calorífica desprezível, contendo 4,00 L de água líquida a 0,0°C. Determine a variação da entropia (*a*) do bloco de cobre, (*b*) da água e (*c*) do universo.

62 •• Se um pedaço de 2,00 kg de chumbo, a 100°C, é largado em um lago a 10°C, determine a variação da entropia do universo.

ENTROPIA E TRABALHO PERDIDO

63 •• Um reservatório, a 300 K, absorve 500 J de calor de um segundo reservatório a 400 K. (*a*) Qual é a variação da entropia do universo e (*b*) quanto trabalho é perdido durante o processo?

64 •• Neste problema, 1,00 mol de um gás ideal, a 300 K, sofre uma expansão livre adiabática de $V_1 = 12{,}3$ L para $V_2 = 24{,}6$ L. Ele é, então, comprimido isotermicamente e de maneira reversível de volta ao seu estado original. (*a*) Qual é a variação da entropia do universo para o ciclo completo? (*b*) Quanto trabalho é perdido neste ciclo? (*c*) Mostre que o trabalho perdido é $T\Delta S_u$.

PROBLEMAS GERAIS

65 • Uma máquina térmica, com 200 W de saída, tem um rendimento de 30 por cento. Ela opera a 10,0 ciclos/s. (*a*) Quanto trabalho é realizado pela máquina, durante cada ciclo? (*b*) Quanto calor é absorvido do reservatório quente e quanto é liberado para o reservatório frio, durante cada ciclo?

66 • Durante cada ciclo, uma máquina térmica operando entre dois reservatórios absorve 150 J do reservatório a 100°C e libera 125 J para o reservatório a 20°C. (*a*) Qual é o rendimento desta máquina? (*b*) Qual é a razão entre este rendimento e o de uma máquina de Carnot operando entre os mesmos reservatórios? (Esta razão é chamada de *rendimento da segunda lei*.)

67 • Uma máquina absorve 200 kJ de calor, a cada ciclo, de um reservatório a 500 K e libera calor para um reservatório a 200 K. O rendimento da máquina é 85 por cento do rendimento da máquina de Carnot trabalhando entre os mesmos reservatórios. (*a*) Qual é o rendimento desta máquina? (*b*) Quanto trabalho é realizado a cada ciclo? (*c*) Quanto calor é liberado para o reservatório de baixa temperatura, em cada ciclo?

68 • Estime a variação da entropia do universo associada a um mergulhador olímpico saltando na água a partir de uma plataforma de 10 m de altura.

69 • Para manter a temperatura no interior de uma casa em 20°C, o consumo de energia elétrica dos aquecedores é de 30,0 kW em um dia em que a temperatura externa é de −7°C. A que taxa esta casa contribui para o aumento da entropia do universo?

70 •• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** Uma planta nuclear gera 1,00 GW de potência. Nesta planta, sódio líquido circula entre o núcleo do reator e um trocador de calor imerso no vapor superaquecido que alimenta a turbina. O sódio líquido retira calor do núcleo e libera calor para o vapor superaquecido. A temperatura do vapor superaquecido é de 500 K. Calor é rejeitado para um rio, cuja água corre a 25°C. (*a*) Qual é o máximo rendimento que esta planta pode ter? (*b*) Quanto calor é rejeitado para o rio, a cada segundo? (*c*) Quanto calor deve ser liberado pelo núcleo, para fornecer 1,00 GW de potência elétrica? (*d*) Suponha que novas leis ambientais foram aprovadas para preservar espécies animais raras do rio. Como conseqüência, a planta está proibida de aquecer o rio em mais de 0,50°C. Qual é o fluxo mínimo que a água do rio deverá ter?

71 •• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA, RICO EM CONTEXTO** Um inventor o procura para explicar sua nova invenção. Trata-se de uma nova máquina térmica usando vapor d'água como substância de trabalho. Ele alega que o vapor d'água absorve calor a 100°C, realiza trabalho a uma taxa de 125 W e libera calor para o ar a uma taxa de apenas 25,0 W, quando a temperatura do ar é 25°C. (*a*) Explique a ele por que ele não pode estar correto. (*b*) Depois de uma análise cuidadosa dos dados fornecidos, você conclui que ele cometeu um erro na medida do calor liberado. Qual é a taxa mínima de exaustão de calor que faria você pensar em acreditar nele?

72 •• O ciclo representado na Figura 19-12 (junto ao Problema 19-14) é para 1,00 mol de um gás monoatômico ideal. As temperaturas nos pontos A e B são 300 e 750 K, respectivamente. Qual é o rendimento do processo cíclico ABCDA?

73 •• (*a*) Qual, destes dois processos, desperdiça a maior quantidade de trabalho? (1) Um bloco que se move com 0,50 J de energia cinética sendo levado ao repouso pelo atrito cinético, quando a temperatura ambiente é de 300 K, ou (2) um reservatório a 400 K liberando 1,00 kJ de calor para um reservatório a 300 K? Explique sua escolha. *Dica: Quanto do 1,00 kJ de calor seria convertido em trabalho por*

um processo cíclico ideal? (*b*) Qual é a variação da entropia do universo para cada processo?

74 •• Hélio, um gás monoatômico, tem inicialmente uma pressão de 16 atm, um volume de 1,0 L e uma temperatura de 600 K. Ele sofre uma expansão quase-estática à temperatura constante, até que seu volume seja 4,0 L e, então, é comprimido quase-estaticamente, à pressão constante, até que seu volume e temperatura sejam tais que uma compressão adiabática quase-estática o reconduz ao seu estado original. (*a*) Esboce este ciclo em um diagrama *PV*. (*b*) Determine o volume e a temperatura depois da compressão a pressão constante. (*c*) Determine o trabalho realizado durante cada etapa do ciclo. (*d*) Determine o rendimento do ciclo.

75 •• Uma máquina térmica, que realiza o trabalho de encher um balão à pressão de 1,00 atm, absorve 4,00 kJ de um reservatório a 120°C. O volume do balão aumenta em 4,00 L e calor é liberado para um reservatório à temperatura T_f, onde $T_f < 120°C$. Se o rendimento da máquina térmica é 50 por cento do rendimento da máquina de Carnot trabalhando entre estes mesmos dois reservatórios, determine a temperatura T_f.

76 •• Mostre que o coeficiente de desempenho de uma máquina de Carnot funcionando como refrigerador está relacionado ao rendimento de uma máquina de Carnot operando entre as mesmas duas temperaturas por $\varepsilon_C \times CD_C = T_f/T_q$.

77 •• Um congelador tem uma temperatura $T_f = -23°C$. O ar na cozinha está a uma temperatura $T_q = 27°C$. O congelador não está perfeitamente isolado e há fuga de calor pelas paredes a uma taxa de 50 W. Determine a potência do motor que é necessária para manter a temperatura do congelador.

78 •• Em uma máquina térmica, 2,00 moles de um gás diatômico são conduzidos pelo ciclo ABCA, como mostrado na Figura 19-20. (O diagrama *PV* não está desenhado em escala.) Em A, a pressão e a temperatura são 5,00 atm e 600 K. O volume em B é o dobro do volume em A. O segmento BC é uma expansão adiabática e o segmento CA é uma compressão isotérmica. (*a*) Qual é o volume do gás em A? (*b*) Quais são o volume e a temperatura do gás em B? (*c*) Qual é a temperatura do gás em C? (*d*) Qual é o volume do gás em C? (*e*) Quanto trabalho é realizado pelo gás em cada um dos três segmentos do ciclo? (*f*) Quanto calor é absorvido ou liberado pelo gás em cada segmento do ciclo?

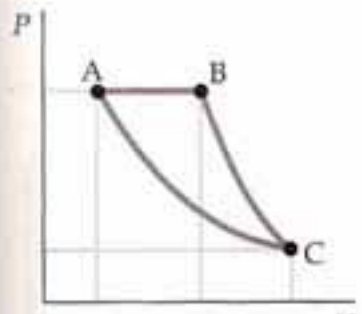


FIGURA 19-20 Problemas 78 e 80

79 •• Em uma máquina térmica, 2,00 moles de um gás diatômico percorrem o ciclo ABCDA mostrado na Figura 19-21. (O diagrama *PV* não está desenhado em escala.) O segmento AB representa uma expansão isotérmica e o segmento BC é uma expansão adiabática. A pressão e a temperatura em A são 5,00 atm e 600 K. O volume em B é o dobro do volume em A. A pressão em D é 1,00 atm. (*a*) Qual é a pressão em B? (*b*) Qual é a temperatura em C? (*c*) Determine o trabalho total realizado pelo gás em um ciclo.

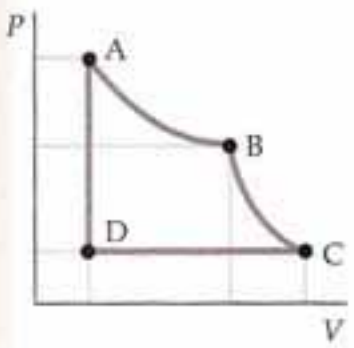


FIGURA 19-21 Problemas 79 e 81

80 •• Em uma máquina térmica, 2,00 moles de um gás monoatômico percorrem o ciclo ABCA mostrado na Figura 19-20. (O diagrama *PV* não está desenhado em escala.) Em A, a pressão e a temperatura são 5,00 atm e 600 K. O volume em B é o dobro do volume em A. O segmento BC é uma expansão adiabática e o segmento CA é uma compressão isotérmica. (*a*) Qual é o volume do gás em A? (*b*) Quais são o volume e a temperatura do gás em B? (*c*) Qual é a temperatura do gás em C? (*d*) Qual é o volume do gás em C? (*e*) Quanto trabalho é realizado pelo gás em cada um dos três segmentos do ciclo? (*f*) Quanto calor é absorvido pelo gás em cada segmento do ciclo?

81 •• Em uma máquina térmica, 2,00 moles de um gás monoatômico percorrem o ciclo ABCDA mostrado na Figura 19-21. (O diagrama *PV* não está desenhado em escala.) O segmento AB representa uma expansão isotérmica e o segmento BC é uma expansão adiabática. A pressão e a temperatura em A são 5,00 atm e 600 K. O volume em B é o dobro do volume em A. A pressão em D é 1,00 atm. (*a*) Qual é a pressão em B? (*b*) Qual é a temperatura em C? (*c*) Determine o trabalho total realizado pelo gás em um ciclo.

82 •• Compare o rendimento do ciclo de Otto com o rendimento do ciclo de Carnot operando entre as mesmas temperaturas máxima e mínima. (O ciclo de Otto é discutido na Seção 19-1.)

83 ••• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** Um ciclo prático comum, freqüentemente usado em refrigeração, é o *ciclo de Brayton*, que envolve (1) uma compressão adiabática, (2) uma expansão isobárica (pressão constante), (3) uma expansão adiabática e (4) uma compressão isobárica de volta ao estado original. Suponha que o sistema comece a compressão adiabática a uma temperatura T_1 e sofra transições para as temperaturas T_2, T_3 e T_4 após cada etapa do ciclo. (*a*) Esboce este ciclo em um diagrama *PV*. (*b*) Mostre que o rendimento do ciclo completo é dado por $\varepsilon = 1 - (T_4 - T_1)/(T_3 - T_2)$. (*c*) Mostre que este rendimento pode ser escrito como $\varepsilon = 1 - r^{(1-\gamma)/\gamma}$, onde r é a razão de pressões P_{alta}/P_{baixa} (a razão entre as pressões máxima e mínima no ciclo).

84 ••• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** Considere a máquina do ciclo de Brayton (Problema 83) funcionando ao contrário, como refrigerador, em sua cozinha. Neste caso, o ciclo inicia à temperatura T_1 e expande à pressão constante até a temperatura T_4. O gás é, então, comprimido adiabaticamente até que sua temperatura seja T_3. Depois, ele é comprimido à pressão constante até atingir a temperatura T_2. Finalmente, ele se expande adiabaticamente até retornar ao estado original à temperatura T_1. (*a*) Esboce este ciclo em um diagrama *PV*. (*b*) Mostre que o coeficiente de desempenho é

$$CD_B = \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2 - T_4 + T_1)}$$

(*c*) Suponha seu "refrigerador em ciclo de Brayton" funcionando da seguinte maneira. O cilindro contendo o refrigerante (um gás monoatômico) tem um volume e uma pressão iniciais de 60 mL e 1,0 atm. Depois da expansão à pressão constante, o volume e a temperatura são 75 mL e −25°C. A razão de pressões $r = P_{alta}/P_{baixa}$ para o ciclo é 5,0. Qual é o coeficiente de desempenho do seu refrigerador? (*d*) Para absorver calor do compartimento de alimentos a uma taxa de 120 W, qual é a taxa na qual deve ser fornecida energia elétrica para o motor do refrigerador? (*e*) Supondo que o motor do refrigerador funcione efetivamente apenas 4,0 h por dia, quanto ele acrescenta à sua conta mensal de energia elétrica? Suponha 15 centavos por kWh de energia elétrica e 30 dias por mês.

85 •• Usando $\Delta S = C_v \ln(T_2/T_1) - nR \ln(V_2/V_1)$ (Equação 19-16) para a variação da entropia de um gás ideal, mostre explicitamente que a variação da entropia é zero para uma expansão adiabática quase-estática do estado (V_1, T_1) para o estado (V_2, T_2).

86 ••• (*a*) Mostre que, se o enunciado da segunda lei da termodinâmica para refrigeradores não fosse verdadeiro, então a entropia do universo poderia diminuir. (*b*) Mostre que, se o enunciado da segunda lei da termodinâmica para máquinas térmicas não fosse verdadeiro, então a entropia do universo poderia diminuir. (*c*) Um outro enunciado da segunda lei é que a entropia do universo não pode diminuir. Você acaba de provar que este enunciado é equivalente aos enunciados para refrigeradores e para máquinas térmicas.

87 ••• Sejam duas máquinas térmicas conectadas em série, de tal forma que o calor liberado pela primeira máquina seja absorvido pela segunda, como mostrado na Figura 19-22. Os rendimentos das máquinas são ε_1 e ε_2, respectivamente. Mostre que o rendimento da combinação é dado por $\varepsilon_{res} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2$.

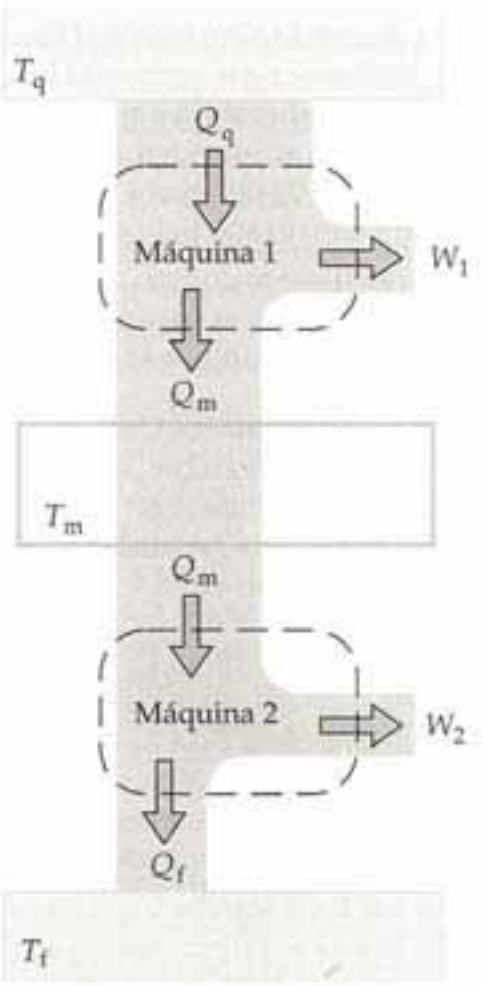


FIGURA 19-22 Problemas 87 e 88

88 ••• Sejam duas máquinas térmicas conectadas em série, de tal forma que o calor liberado pela primeira máquina é absorvido pela segunda, como mostrado na Figura 19-22. Suponha que cada máquina seja uma máquina térmica ideal e reversível. A Máquina 1 opera entre as temperaturas T_q e T_m e a Máquina 2 opera entre T_m e T_f, com $T_q > T_m > T_f$. Mostre que o rendimento resultante da combinação é dado por $\varepsilon_{res} = 1 - (T_f/T_q)$. (Observe que este resultado significa que as duas máquinas térmicas, operando "em série", são equivalentes a uma máquina térmica reversível operando entre o reservatório mais quente e o reservatório mais frio.)

89 ••• O matemático e filósofo inglês Bertrand Russell (1872–1970) disse uma vez que, se um milhão de macacos recebessem um milhão de máquinas de escrever e digitassem aleatoriamente por um milhão de anos, eles poderiam produzir toda a obra de Shakespeare. Vamos nos limitar ao seguinte fragmento da obra de Shakespeare (*Júlio César* III:ii):

Friends, Romans, countrymen! Lend me your ears.
I come to bury Caesar, not to praise him.
The evil that men do lives on after them,
The good is oft interred with the bones.
So let it be with Caesar.
The noble Brutus hath told you that Caesar was ambitious,
And, if so, it were a grievous fault,
And grievously hath Caesar answered it…

(Concidadãos, romanos, bons amigos! Concedei-me atenção.
Eu vim para sepultar César, não para louvá-lo.
Aos homens sobrevive o mal que fazem,
Mas o bem geralmente é enterrado com os ossos.
Então, assim seja com César.
O nobre Bruto vos disse que César era ambicioso,
Se ele o foi, realmente, grave falta foi esta a sua,
E César gravemente a expiou…)

Mesmo para este pequeno fragmento, levaria um tempo muito maior do que um milhão de anos! Qual é o fator aproximado de erro para a estimativa de Russel? Faça as hipóteses que achar razoáveis. (Você pode, até mesmo, considerar que os macacos sejam imortais.)

perfeito, ele poderia ser usado em conjunto com uma máquina térmica ordinária para construir uma máquina térmica perfeita. Portanto, se o enunciado para refrigeradores é falso, o enunciado para máquinas térmicas também é falso. Segue, então, que se um dos enunciados é verdadeiro, o outro também é verdadeiro. Assim, os enunciados para máquinas térmicas e para refrigeradores são equivalentes.

19-3 A MÁQUINA DE CARNOT

De acordo com a segunda lei da termodinâmica, é impossível que uma máquina térmica, trabalhando entre dois reservatórios térmicos, seja 100 por cento eficiente. Qual é, então, o maior rendimento possível para esta máquina? Um jovem engenheiro francês, Sadi Carnot, respondeu a esta questão em 1824, antes que a primeira ou a segunda leis da termodinâmica tivessem sido estabelecidas. Carnot descobriu que uma *máquina reversível* é a máquina mais eficiente que pode operar entre quaisquer dois reservatórios. Este resultado é conhecido como o teorema de Carnot:

> Nenhuma máquina trabalhando entre dois dados reservatórios térmicos pode ser mais eficiente do que uma máquina reversível trabalhando entre os dois reservatórios.
>
> TEOREMA DE CARNOT

Uma máquina reversível operando em um ciclo entre dois reservatórios térmicos é chamada de **máquina de Carnot**, e seu ciclo é chamado de **ciclo de Carnot**. A Figura 19-7 ilustra o teorema de Carnot com um exemplo numérico desenvolvido na legenda da figura.

Se nenhuma máquina pode ter um rendimento maior do que o da máquina de Carnot, segue que todas as máquinas de Carnot trabalhando entre os mesmos dois reservatórios têm o mesmo rendimento. Este rendimento, denominado **rendimento de Carnot**, deve ser independente da substância de trabalho da máquina e, portanto, deve depender apenas das temperaturas dos reservatórios.

Vamos analisar o que faz um processo ser reversível ou irreversível. De acordo com a segunda lei, calor é transferido de objetos aquecidos para objetos frios e nunca ao contrário. Portanto, a transferência de calor de um objeto quente para um objeto frio *não é* reversível. Além disso, o atrito pode transformar trabalho em energia térmica interna, mas o atrito jamais pode transformar energia térmica interna em trabalho. A conversão de trabalho em energia térmica interna por atrito *não é* reversível. Atrito e outras forças dissipadoras transformam irreversivelmente energia mecânica em energia térmica. Um terceiro tipo de irreversibilidade ocorre quando um sistema passa por estados de não-equilíbrio, como quando há turbulência em um gás ou quando um gás explode. Para um sistema passar por um processo reversível, ele deve ser capaz de passar pelos mesmos estados de equilíbrio na ordem inversa.

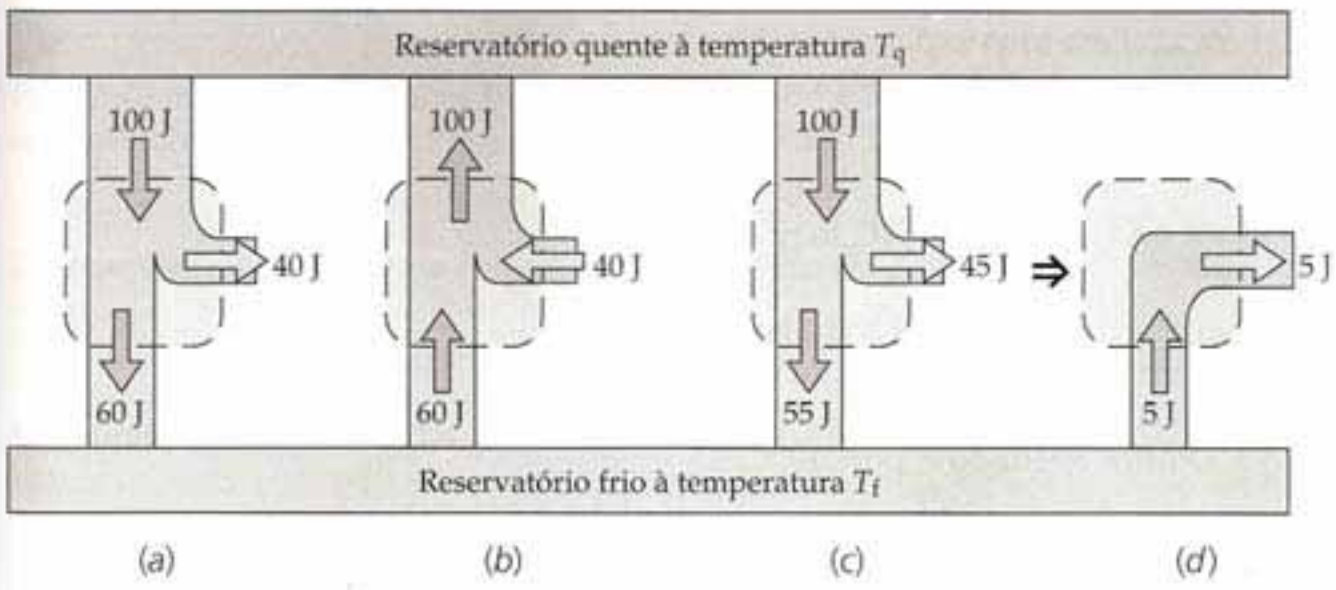


FIGURA 19-7 Ilustração do teorema de Carnot. (*a*) Uma máquina térmica reversível, com 40 por cento de rendimento, retira 100 J de um reservatório quente, realiza 40 J de trabalho e libera 60 J para o reservatório frio. (*b*) Se a mesma máquina funciona ao contrário, como um refrigerador, 40 J de trabalho são realizados para retirar 60 J do reservatório frio e liberar 100 J para o reservatório quente. (*c*) Uma suposta máquina térmica trabalhando entre os mesmos dois reservatórios com um rendimento de 45 por cento, que é maior que o da máquina reversível da Parte(*a*). (*d*) O efeito resultante do funcionamento da máquina da Parte (*c*) em conjunto com o refrigerador da Parte (*b*) é o mesmo que o de uma máquina térmica perfeita que retira 5 J do reservatório frio e converte-os completamente em trabalho sem nenhum outro efeito, violando a segunda lei da termodinâmica. Portanto, a máquina reversível da Parte (*a*) é a máquina mais eficiente que pode operar entre estes dois reservatórios.

CAPÍTULO 20

Propriedades Térmicas e Processos Térmicos

20-1 Expansão Térmica

20-2 A Equação de van der Waals e Isotermas Líquido–Vapor

20-3 Diagramas de Fase

20-4 A Transferência de Calor

O OLEODUTO DO ALASCA TRANSPORTA ÓLEO ATRAVÉS DE 800 MILHAS EM UM DUTO DE AÇO DE 48 IN DE DIÂMETRO. ZIGUEZAGUES FAZEM PARTE DO OLEODUTO PARA PERMITIR A EXPANSÃO TÉRMICA. (OS ZIGUEZAGUES TAMBÉM PERMITEM O MOVIMENTO OCASIONADO POR ATIVIDADE SÍSMICA.) O OLEODUTO FOI PROJETADO PARA SUPORTAR TEMPERATURAS VARIANDO DE −60°F A 145°F (A TEMPERATURA DO OLEODUTO ERA DE −60°F ANTES DE SE INICIAR O FLUXO DE ÓLEO). (© *Pniensen/ Dreamstime.com.*)

? Qual foi a variação do comprimento de uma seção de 720 ft do oleoduto, quando a temperatura variou de −60°F para 145°F? (Veja o Exemplo 20-2.)

Quando um corpo absorve calor, várias mudanças podem ocorrer em suas propriedades físicas. Por exemplo, a temperatura do corpo pode aumentar, ao mesmo tempo em que ele expande ou contrai, ou o corpo pode se fundir ou vaporizar, enquanto sua temperatura permanece constante.

Muitos cientistas e engenheiros industriais precisam levar em consideração as mudanças provocadas nos corpos associadas à temperatura. Engenheiros civis que projetam pontes e rodovias incluem juntas de expansão para permitir pequenas variações de comprimento das rodovias, resultantes de variações da temperatura. Outros engenheiros criam produtos para proteger objetos de variações extremas de temperatura. Materiais são usados para manter a energia térmica em aquecedores de água, fornos e turbinas de navios, bem como para proteger os automóveis e seus ocupantes do aquecimento proveniente do sistema de exaustão do carro.

Neste capítulo examinamos algumas das propriedades térmicas da matéria e alguns processos importantes envolvendo calor.

20-1 EXPANSÃO TÉRMICA

Quando a temperatura de um corpo aumenta, geralmente ele expande. Considere um longo bastão de comprimento L à temperatura T. Quando a temperatura de um sólido varia de ΔT, a variação relativa do comprimento, $\Delta L/L$, é proporcional a ΔT:

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \, \Delta T \qquad 20\text{-}1$$

onde α, chamado de **coeficiente de expansão linear**, é a razão entre a variação relativa do comprimento e a variação da temperatura:

$$\alpha = \frac{\Delta L/L}{\Delta T} \qquad 20\text{-}2$$

A unidade SI para o coeficiente de expansão linear é o inverso do kelvin (1/K), que é igual ao inverso do grau Celsius (1/°C). O valor de α pode variar com a pressão e com a temperatura. A Equação 20-2 fornece o valor médio em um intervalo de temperatura ΔT, com a pressão mantida constante. O coeficiente de expansão linear, a uma dada temperatura T, é determinado tomando-se o limite quando ΔT tende a zero:

$$\alpha = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta L/L}{\Delta T} = \frac{1}{L}\frac{dL}{dT} \qquad 20\text{-}3$$

DEFINIÇÃO: COEFICIENTE DE EXPANSÃO LINEAR

A precisão obtida usando-se o valor médio de α sobre um grande intervalo de temperatura é suficiente para a maior parte dos casos.

Para um líquido ou um sólido, o **coeficiente de expansão volumétrica** β é definido como a razão entre a variação relativa do volume e a variação da temperatura (à pressão constante):

$$\beta = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta V/V}{\Delta T} = \frac{1}{V}\frac{dV}{dT} \qquad 20\text{-}4$$

DEFINIÇÃO: COEFICIENTE DE EXPANSÃO VOLUMÉTRICA

Tanto α quanto β podem variar com a pressão e com a temperatura, mas qualquer variação com a pressão é, tipicamente, desprezível. Valores médios de α e β para várias substâncias são apresentados na Tabela 20-1.

Para um dado material, $\beta = 3\alpha$. Podemos mostrar esta relação considerando uma caixa com dimensões L_1, L_2 e L_3. Seu volume a uma temperatura T é

$$V = L_1 L_2 L_3$$

A taxa de variação do volume com relação à temperatura é

$$\frac{\partial V}{\partial T} = L_1 L_2 \frac{\partial L_3}{dT} + L_1 \frac{\partial L_2}{dT} L_3 + \frac{\partial L_1}{dT} L_2 L_3$$

Dividindo cada lado da equação pelo volume, obtemos

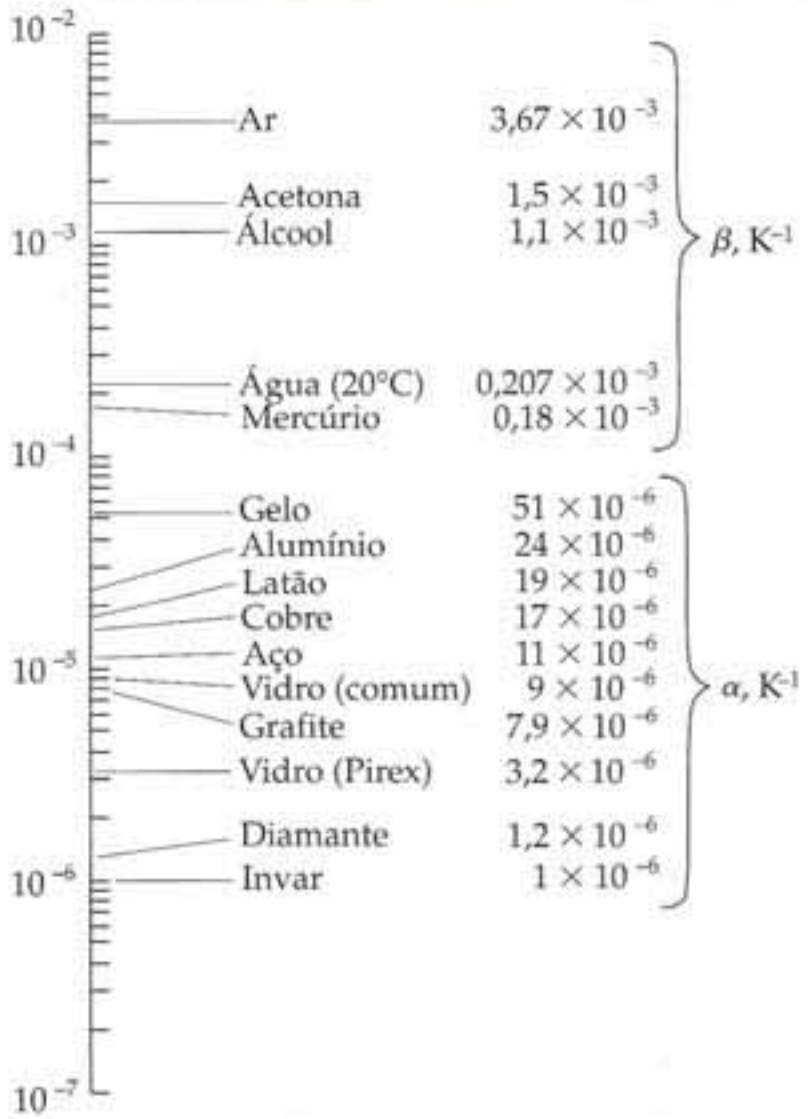
$$\beta = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{1}{L_3}\frac{\partial L_3}{\partial T} + \frac{1}{L_2}\frac{\partial L_2}{\partial T} + \frac{1}{L_1}\frac{\partial L_1}{\partial T}$$

Podemos ver que cada termo do lado direito da equação precedente é igual a α e, portanto, temos

$$\beta = 3\alpha \qquad 20\text{-}5$$

Na dedução da Equação 20-5 consideramos o coeficiente de expansão linear independente da direção. (Esta hipótese é aproximadamente verdadeira para a maioria dos materiais e será usada para os cálculos neste livro.) Uma dedução semelhante mostra que o coeficiente de expansão superficial é o dobro do coeficiente de expansão linear.

Tabela 20-1 Valores Aproximados para os Coeficientes de Expansão Térmica de Várias Substâncias



Exemplo 20-1 Buracos se Expandem? *Conceitual*

Seja um objeto de aço com um orifício circular. Se a temperatura do objeto aumenta, o metal se expande. O diâmetro do orifício aumenta ou diminui?

SITUAÇÃO O aumento de tamanho de qualquer parte de um objeto, para um dado aumento de temperatura, é proporcional ao tamanho original daquela parte do objeto (de acordo com a Equação 20-2). Como objeto, considere uma régua de aço com um orifício de 1 cm de diâmetro centrado na marca de 3,5 cm.

SOLUÇÃO

1. Como objeto, considere uma régua de aço com um orifício de 1 cm de diâmetro centrado na marca de 3,5 cm: — Se a régua de aço tem um orifício de 1 cm de diâmetro centrado na marca de 3,5 cm, então a borda do orifício tocará as marcas de 3 cm e de 4 cm.
2. Quando a temperatura da régua aumenta de uma determinada quantidade, ela se expande uniformemente: — A distância entre as marcas de 3 cm e de 4 cm aumentará.
3. A borda do orifício continuará tocando as marcas de 3 cm e de 4 cm enquanto a régua se expande: — Se a distância entre as marcas de 3 cm e de 4 cm aumenta, então

o diâmetro do orifício aumenta.

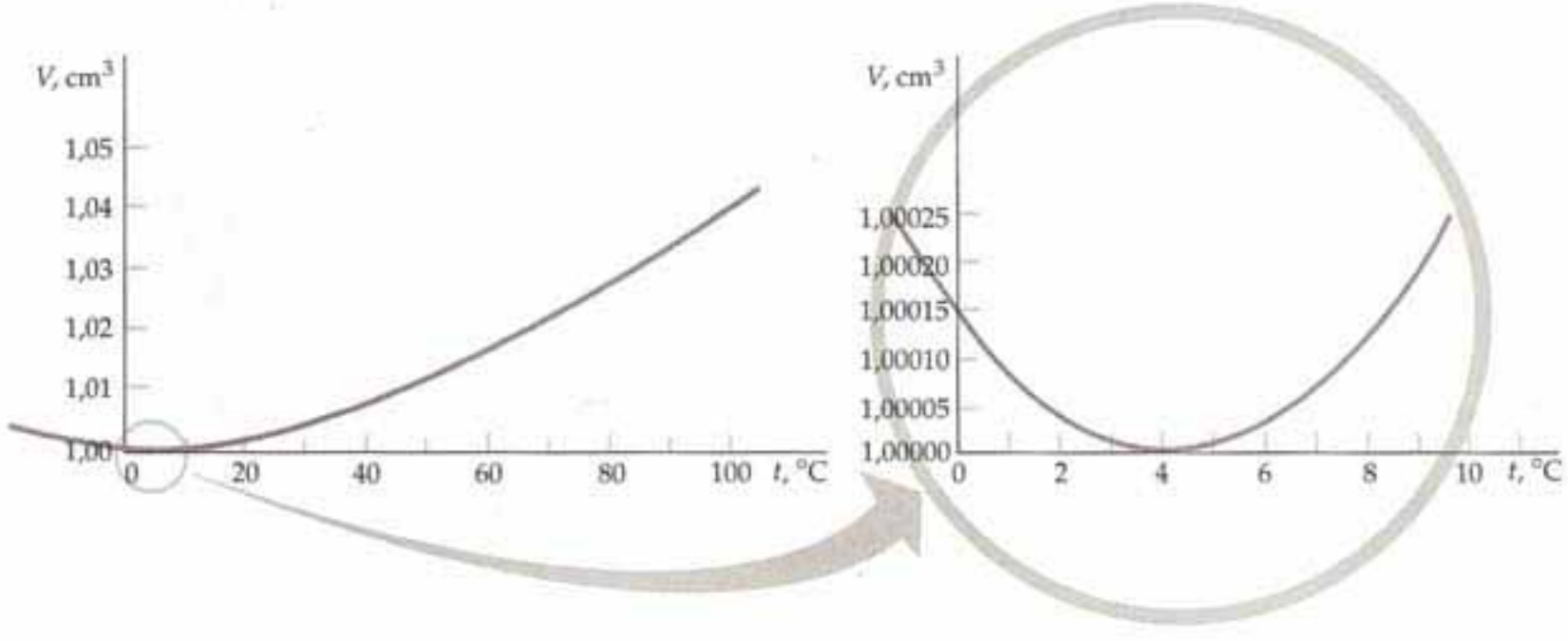
CHECAGEM Na perfuração para feitura do orifício, o material removido seria um disco de aço de 1 cm de diâmetro. Se a temperatura deste disco fosse elevada tanto quanto a temperatura da régua, então o disco encaixaria no orifício perfeitamente.

INDO ALÉM Um dispositivo para demonstrar que um orifício expande quando aquecido é mostrado na Figura 20-1.

FIGURA 20-1 Quando a bola e o anel estão à temperatura ambiente, a bola é grande demais para passar pelo anel. O anel se expande quando aquecido e, enquanto o anel está quente, a bola, que se manteve à temperatura ambiente, passa através do orifício. *(Richard Megna/ Fundamental Photographs.)*

A maioria dos materiais se expande quando aquecida e se contrai quando resfriada. A água, entretanto, é uma importante exceção. A Figura 20-2 mostra o volume ocupado por 1 g de água como função da temperatura. O volume mínimo e, portanto, a massa específica máxima, está a 4,00°C. Assim, quando a água a 4,00°C é resfriada, ela se expande em vez de se contrair. Esta propriedade da água tem conseqüências importantes para a ecologia de lagos. A temperaturas acima de 4,00°C, a água em um lago se torna mais densa enquanto é resfriada e, portanto, afunda. Porém, ao ser resfriada abaixo de 4,00°C, ela se torna menos densa e sobe à superfície. Esta é a razão pela qual o gelo se forma primeiro na superfície de um lago. A água também se expande quando congela. Como o gelo é menos denso do que a água líquida, ele permanece na superfície e atua como uma camada isolante para a água que está abaixo. Se a água se comportasse como a maioria das substâncias e contraísse enquanto congela, então o gelo afundaria e deixaria mais água exposta na superfície, para ser congelada. Os lagos se encheriam de gelo do fundo para cima e seria muito provável que congelassem completamente no inverno.

FIGURA 20-2 Volume de 1 g de água à pressão atmosférica *versus* temperatura. O volume mínimo, que corresponde à máxima massa específica, ocorre a 4,0°C. Para temperaturas abaixo de 0,0°C, a curva mostrada é para água super-resfriada. (Água super-resfriada é água não solidificada abaixo do ponto de congelamento normal.)



Exemplo 20-2 Uma Expansão

Uma seção retilínea com 720 ft (219 m) de comprimento do oleoduto do Alasca estava a uma temperatura de −60°F antes de ser cheia de óleo com uma temperatura máxima de 145°F. O oleoduto é coberto com uma camada isolante, para que o óleo e o duto de aço tenham a mesma temperatura. (*a*) Qual foi o valor da expansão desta seção, quando a temperatura variou de −60°F para 145°F? (*b*) As seções do oleoduto que estão acima do solo têm um comprimento de 420 mi (676 km). Se a temperatura de uma seção inteira de 420 mi aumentasse de −60°F para 145°F, de quanto ela se expandiria?

SITUAÇÃO Use $\alpha = 11 \times 10^{-6}\,\text{K}^{-1}$, da Tabela 20-1, e calcule ΔL com a Equação 20-1.

SOLUÇÃO

(*a*) 1. A variação de comprimento para uma dada variação de temperatura é o produto de α, L e ΔT:

$$\Delta L = \alpha L\,\Delta T$$

2. A variação da temperatura é 205°F. Converta esta variação de graus Fahrenheit para kelvins (multiplicando por 5/9):

$$\Delta T = \frac{5\,\text{K}}{9°\text{F}}(205°\text{F}) = 114\,\text{K}$$

3. Calcule a variação do comprimento:

$$\Delta L = \alpha L\,\Delta T = (11 \times 10^{-6}\,\text{K}^{-1})(720\,\text{ft})(114\,\text{K})$$
$$= \boxed{0{,}90\,\text{ft} = 11\,\text{in}}$$

(*b*) A variação do comprimento é proporcional ao comprimento. Use isto para calcular a variação do comprimento da seção de 420 mi que está acima do solo:

$$\frac{\Delta L_2}{L_2} = \frac{\Delta L_1}{L_1} \Rightarrow \Delta L_2 = \frac{L_2}{L_1}\Delta L_1$$
$$\Delta L_2 = \frac{(420\,\text{mi})(5280\,\text{ft/mi})}{720\,\text{ft}}(0{,}90\,\text{ft}) = 2800\,\text{ft} \approx \boxed{0{,}5\,\text{mi}}$$

CHECAGEM A variação de 0,5 mi (0,8 km) no comprimento é um pouco maior do que um décimo de 1 por cento do comprimento de 420 mi. Isto parece razoável, para uma variação tão ampla de temperatura e para um comprimento tão grande.

INDO ALÉM As extremidades das seções do oleoduto que estão acima do solo não se movem com variações de temperatura porque o ziguezague (Figura 20-3) resulta em movimentos laterais que "absorvem a expansão."

FIGURA 20-3 O ziguezague do oleoduto permite a expansão térmica dos dutos. *(Paul A. Souders/Corbis.)*

Podemos calcular a tensão que resultaria em uma ponte de aço com 1000 m de comprimento sem juntas de expansão (Figura 20-4) usando o módulo de Young (Equação 12-1):

$$Y = \frac{\text{Tensão}}{\text{Deformação relativa}} = \frac{F/A}{\Delta L/L}$$

Então,

$$\frac{F}{A} = Y\frac{\Delta L}{L} = Y\alpha\,\Delta T$$

Para $\Delta T = 30\,\text{K}$, $\Delta L/L = \alpha\Delta T = (11 \times 10^{-6}\,\text{K}^{-1})(30\,\text{K}) = 3{,}3 \times 10^{-4} = 0{,}33\,\text{m}/1000\,\text{m}$. Então, usando $Y = 2{,}0 \times 10^{11}\,\text{N/m}^2$ (da Tabela 12-1),

$$\frac{F}{A} = Y\frac{\Delta L}{L} = (2{,}0 \times 10^{11}\,\text{N/m}^2)\frac{0{,}33\,\text{m}}{1000\,\text{m}} = 6{,}6 \times 10^{7}\,\text{N/m}^2$$

Esta tensão é aproximadamente um terço da tensão de ruptura para o aço sob compressão. Uma tensão de compressão desta magnitude provocaria uma dobra na ponte de aço, que ficaria permanentemente deformada.

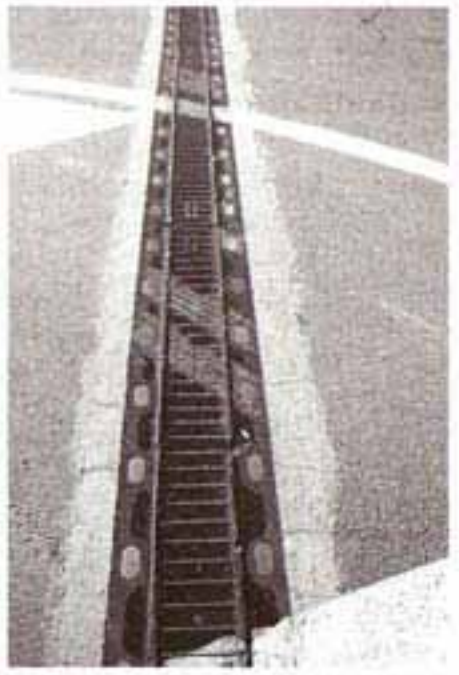


FIGURA 20-4 Juntas de expansão, como esta, permitem que as pontes se expandam com o aumento da temperatura. *(© Photobeps/Dreamstime.com.)*

Exemplo 20-3 Um Copo Completamente Cheio

Trabalhando no laboratório, você enche um frasco de vidro pirex de 1,000 L até a borda, com água a 10°C. Você aumenta a temperatura da água e do frasco para 30°C. Quanta água derramará do frasco?

SITUAÇÃO A água e o frasco expandem quando aquecidos, mas 1,000 L de água expande mais do que 1,000 L de vidro e, portanto, alguma água será derramada. Calculamos a quantidade de água derramada através das variações de volume para $\Delta T = 20$ K usando $\Delta V_{\text{água}} = \beta V_i \Delta T$, com $\beta = 0{,}207 \times 10^{-3}\ \text{K}^{-1}$ para a água (da Tabela 20-1), e $\Delta V_{\text{vidro}} = \beta V_i \Delta T = 3\alpha V \Delta T$, com $\alpha = 3{,}25 \times 10^{-6}\ \text{K}^{-1}$ para o vidro Pirex, onde $V_i = 1{,}000$ L. A diferença entre estas variações de volume é igual ao volume da água derramada.

SOLUÇÃO

1. O volume de água derramada $V_{\text{derramada}}$ é a diferença entre as variações de volume da água e do vidro: $V_{\text{derramada}} = \Delta V_{\text{água}} - \Delta V_{\text{vidro}}$
2. Determine o aumento do volume da água: $\Delta V_{\text{água}} = \beta_{\text{água}} V_i \Delta T$
3. Determine o aumento do volume do frasco de vidro: $\Delta V_{\text{vidro}} = \beta_{\text{vidro}} V_i \Delta T = 3\alpha_{\text{Pirex}} V_i \Delta T$
4. Subtraia para determinar a quantidade de água derramada:

$$\begin{aligned} V_{\text{derramada}} &= \Delta V_{\text{água}} - \Delta V_{\text{vidro}} = \beta_{\text{água}} V_i \Delta T - \beta_{\text{vidro}} V_i \Delta T \\ &= (\beta_{\text{água}} - \beta_{\text{vidro}}) V_i \Delta T = (\beta_{\text{água}} - 3\alpha_{\text{Pirex}}) V_i \Delta T \\ &= [0{,}207 \times 10^{-3}\ \text{K}^{-1} - 3(3{,}25 \times 10^{-6}\ \text{K}^{-1})](1{,}000\ \text{L})(20\ \text{K}) \\ &= 3{,}95 \times 10^{-3}\ \text{L} = \boxed{4{,}0\ \text{mL}} \end{aligned}$$

CHECAGEM O derramamento de 4,0 mL representa apenas 0,4 por cento do volume inicial de 1,000 L. É plausível que esta pequena quantidade resulte de um aumento de temperatura de 20 K.

INDO ALÉM O frasco expande, o que torna maior o seu interior, como se o frasco fosse um pedaço sólido de vidro Pirex.

Exemplo 20-4 Quebrando o Cobre *Rico em Contexto*

Durante um projeto de encanamento doméstico, você aquece um pedaço de cano de cobre até a 300°C. Então, você prende o cano entre dois pontos fixos de maneira a evitar que ele contraia. Se a tensão de ruptura do cobre é 230 MN/m², para qual temperatura a barra quebrará enquanto esfria?

SITUAÇÃO Enquanto o cano de cobre esfria, a variação de comprimento ΔL que ocorreria se ele pudesse contrair é compensada pelo alongamento devido à tensão de tração no cano. A tensão F/A está relacionada ao alongamento ΔL por $Y = (F/A)(\Delta L/L)$, onde o módulo de Young para o cobre é $Y = 110\ \text{GN/m}^2$ (da Tabela 12-1). O alongamento máximo permitido ocorrerá quando F/A for igual a 230 MN/m². Determinamos, então, a variação de temperatura que produzirá esta contração máxima.

SOLUÇÃO

1. Calcule a variação do comprimento ΔL_1 que ocorreria se o cano pudesse contrair enquanto esfria: $\Delta L_1 = \alpha L \Delta T$
2. Uma tensão de tração F/A alonga o cano de ΔL_2: $Y = \dfrac{F/A}{\Delta L_2/L}$ logo $\Delta L_2 = L\dfrac{F/A}{Y}$
3. Substitua os resultados do passo 1 e do passo 2 em $\Delta L_1 + \Delta L_2 = 0$ e resolva para ΔT, com a tensão igual ao valor de ruptura:

$$\Delta L_1 + \Delta L_2 = 0$$

$$\alpha L \Delta T + L\frac{F/A}{Y} = 0$$

$$\text{logo} \quad \Delta T = -\frac{F/A}{\alpha Y} = -\frac{230 \times 10^6\ \text{N/m}^2}{(17 \times 10^{-6}\ \text{K}^{-1})(110 \times 10^9\ \text{N/m}^2)}$$

$$= -123\ \text{K} = -123°\text{C}$$

4. Some este resultado à temperatura original para determinar a temperatura final na qual o cano quebrará: $t_f = t_i + \Delta t = 300°\text{C} - 123°\text{C} = 177°\text{C} = \boxed{180°\text{C}}$

CHECAGEM Se você observar um encanamento de cobre, verá que os canos não estão presos de maneira rígida. Além disso, no encanamento doméstico o aquecedor de água é geralmente ajustado para que a temperatura da água não exceda 60°C (140°F) e a água fria deve estar no mínimo a 0°C, caso contrário ocorrerá congelamento. Portanto, não ocorrem variações de temperatura maiores do que 60°C em encanamentos domésticos. Não deve ser surpreendente que os canos projetados para encanamento doméstico podem não resistir se expansão ou contração forem impedidas de ocorrer, e se as variações de temperatura forem muito maiores do que as esperadas em uma casa.

20-2 A EQUAÇÃO DE VAN DER WAALS E ISOTERMAS LÍQUIDO–VAPOR

A pressões ordinárias, a maioria dos gases se comporta como um gás ideal. Entretanto, este comportamento ideal deixa de existir quando a pressão é alta o suficiente ou a temperatura é baixa o suficiente para que a massa específica do gás seja alta e as moléculas estejam, em média, mais próximas entre si. Uma equação de estado chamada de **equação de van der Waals** descreve o comportamento da maioria dos gases reais em uma ampla faixa de pressões de maneira mais precisa do que a equação de estado dos gases ideais ($PV = nRT$). A equação de van der Waals para n moles de gás é

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - bn) = nRT \qquad 20\text{-}6$$

A EQUAÇÃO DE ESTADO DE VAN DER WAALS

A constante b nesta equação surge porque as moléculas do gás não são partículas pontuais, mas objetos com tamanho finito; portanto, o volume disponível para cada molécula é reduzido. A magnitude de b é o volume de um mol de moléculas de gás. O termo an^2/V^2 surge da atração entre as moléculas. Quando uma molécula se aproxima da parede do recipiente, ela é puxada de volta pelas moléculas da vizinhança com uma força que é proporcional à massa específica dessas moléculas, n/V. Como o número de moléculas que atinge a parede em um dado intervalo de tempo também é proporcional à massa específica das moléculas, a diminuição de pressão devida à atração das moléculas é proporcional ao quadrado da massa específica e, portanto, a n^2/V^2. A constante a depende do gás e é pequena para gases inertes, que apresentam interações químicas muito fracas. Os termos bn e an^2/V^2 são desprezíveis quando o volume V é grande e, assim, para pequenas massas específicas a equação de van der Waals se aproxima da lei dos gases ideais. Para grandes massas específicas, a equação de van der Waals fornece uma descrição muito melhor para o comportamento de gases reais do que a lei dos gases ideais.

A Figura 20-5 mostra curvas PV isotermas para uma substância em várias temperaturas. Exceto para a região na qual o líquido e o vapor coexistem, estas curvas são descritas com boa precisão pela equação de van der Waals e podem ser usadas para determinar as constantes a e b. Por exemplo, os valores destas constantes que melhor ajustam as curvas experimentais para o nitrogênio são $a = 1{,}370\ \text{L}^2 \cdot \text{atm/mol}^2$ e $b = 38{,}7\ \text{mL/mol}$. Este volume de 38,7 mL/mol é aproximadamente 0,2 por cento do volume de 22,4 L ocupado por 1 mol de gás ideal em condições normais. Como a massa molar do nitrogênio é 28,02 g/mol, se 1 mol de moléculas de nitrogênio fosse colocado em um volume de 38,7 mL, então a massa específica seria

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{28{,}0\ \text{g}}{38{,}7\ \text{mL}} = 0{,}724\ \text{g/mL} = 0{,}724\ \text{kg/L}$$

que é aproximadamente a mesma massa específica do nitrogênio líquido, 0,80 kg/L.

O valor da constante b pode ser usado para estimar o tamanho de uma molécula. Como 1 mol (N_A moléculas) de nitrogênio ocupa um volume de 38,7 cm^3, o volume

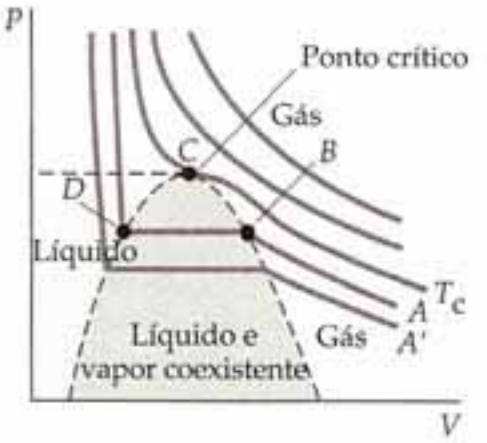


FIGURA 20-5 Isotermas no diagrama PV para uma substância. Para temperaturas acima da temperatura crítica T_c, a substância permanece gasosa para todos os valores de pressão. Exceto para a região onde o líquido e o vapor coexistem, estas curvas são muito bem descritas pela equação de van der Waals. A pressão para as porções horizontais das curvas na região sombreada é a pressão de vapor, na qual o vapor e o líquido estão em equilíbrio. Na região sombreada mais clara, à esquerda da região sombreada mais escura, a substância é um líquido e praticamente incompressível.

de uma molécula de nitrogênio é

$$V = \frac{b}{N_A} = \frac{38{,}7\ \text{cm}^3/\text{mol}}{6{,}02 \times 10^{23}\ \text{moléculas/mol}}$$
$$= 6{,}43 \times 10^{-23}\ \text{cm}^3/\text{molécula}$$

Se supomos que cada molécula ocupa um cubo de lado d, obtemos

$$d^3 = 6{,}43 \times 10^{-23}\ \text{cm}^3$$

ou

$$d = 4{,}0 \times 10^{-8}\ \text{cm} = 0{,}4\ \text{nm}$$

que é uma estimativa plausível para o "diâmetro" de uma molécula de nitrogênio.

Valores para as constantes a e b que resultam do melhor ajuste de curvas experimentais estão listados na Tabela 20-2.

Tabela 20-2 Os Coeficientes a e b de van der Waals para Vários Gases

	a ($L^2 \cdot atm/mol^2$)	b (mL/mol)
He	0,0346	23,80
Ne	0,211	17,1
Ar	1,34	32,2
Kr	2,32	39,8
Xe	4,19	51,0
H_2	0,244	26,6
N_2	1,370	38,70
O_2	1,382	31,86
H_2O	5,46	30,5
CO_2	3,59	42,7

Exemplo 20-5 Hélio em Alta Massa Específica

Um tanque de 20,0 L contém 300 moles de hélio a uma pressão de 400 atm. (*a*) Qual é o valor de an^2/V^2, e a que fração da pressão ele corresponde? (*b*) Qual é o valor de bn, e a que fração do volume do recipiente ele corresponde? (*c*) Qual é a temperatura do hélio?

SITUAÇÃO Para determinar a temperatura, use a equação de van der Waals (Equação 20-6). Os coeficientes a e b para o hélio são encontrados na Tabela 20-2.

SOLUÇÃO

(*a*) Calcule an^2/V^2 e compare com 400 atm:

$$\frac{an^2}{V^2} = \frac{(0{,}0346\ \text{L}^2 \cdot \text{atm/mol}^2)(300\ \text{mol})^2}{(20{,}0\ \text{L})^2}$$
$$= 7{,}785\ \text{atm} = \boxed{7{,}79\ \text{atm}}$$

(7,785 atm é aproximadamente 2 por cento de 400 atm)

(*b*) Calcule bn e compare com 20 L:

$$bn = (0{,}0238\ \text{L/mol})(300\ \text{mol}) = \boxed{7{,}14\ \text{L}}$$

(7,14 L é aproximadamente 36 por cento de 20 L)

(*c*) 1. A equação de van der Waals pode ser resolvida para a temperatura:

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - bn) = nRT$$

2. Obtenha os coeficientes a e b para o hélio na Tabela 20-2:

$$a = 0{,}0346\ \text{L}^2 \cdot \text{atm/mol}^2$$
$$b = 0{,}0238\ \text{L/mol}$$

3. Substitua os valores e resolva para a temperatura. Com a pressão em atmosferas e o volume em litros, usamos $R = 0{,}082057\ \text{L} \cdot \text{atm}/(\text{mol} \cdot \text{K})$:

$$T = \frac{\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - bn)}{nR} = \frac{\left(400 + \frac{0{,}0346 \times 300^2}{20{,}0^2}\right)(20{,}0 - 0{,}0238 \times 300)}{300 \times 0{,}082057}$$
$$= \boxed{213\ \text{K}}$$

CHECAGEM Na equação de van der Waals, a correção de 2 por cento para o termo de pressão [Parte (*a*)] é muito pequena em comparação à correção de 36 por cento para o termo de volume [Parte (*b*)]. Isto está de acordo com o esperado. A correção para o termo de pressão é particularmente pequena para o hélio, porque a interação de atração entre os átomos de hélio é mais fraca do que para a maioria dos outros átomos.

A temperaturas abaixo de T_c, a equação de van der Waals descreve as partes das isotermas que estão fora da região sombreada da Figura 20-5, mas não aquelas dentro da região sombreada. Seja um gás a uma temperatura abaixo de T_c que, inicialmente, tem uma baixa pressão e um grande volume. Começamos a comprimir o gás mantendo a temperatura constante (isoterma A, na figura). Inicialmente a pressão aumenta,

Nuvem se formando atrás de uma aeronave enquanto ela rompe a barreira do som. Enquanto a aeronave se move no ar, uma região de baixa pressão se forma atrás dela. Quando a pressão desta parcela de ar cai abaixo da pressão de vapor d'água no estado gasoso, a água no ar se condensa para formar a nuvem. Diferentes condições atmosféricas fazem com que o fenômeno ocorra para diferentes velocidades da aeronave. (© *Steve Skinner/Dreamstime.com.*)

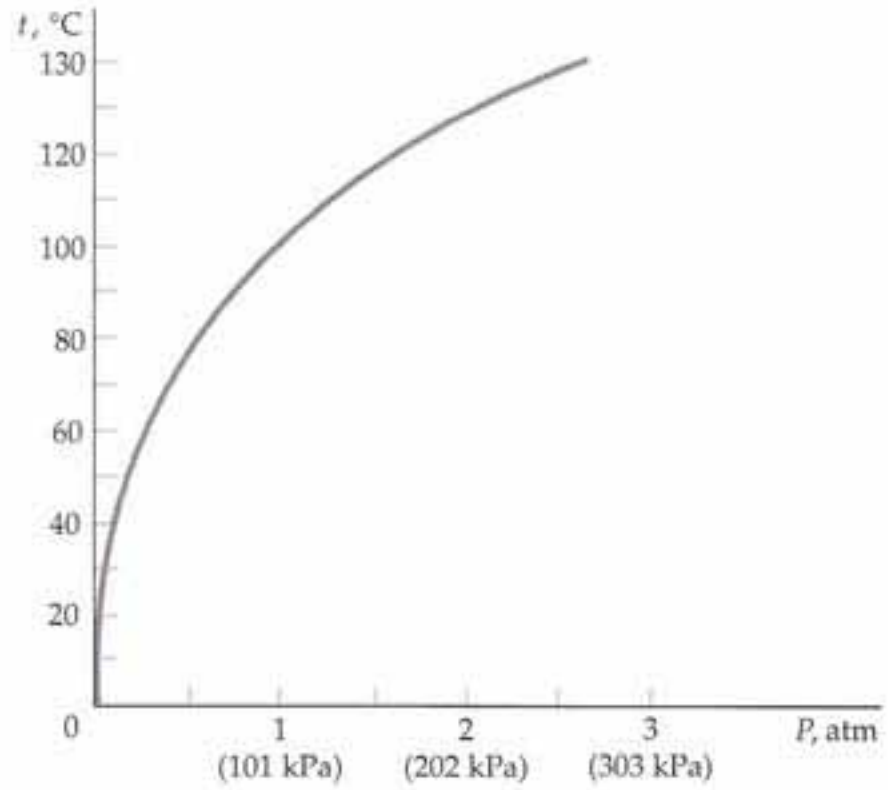


FIGURA 20-6 Ponto de ebulição da água *versus* pressão.

mas, quando atingimos o ponto *B* da curva tracejada, a pressão deixa de aumentar e o gás começa a se liquefazer à pressão constante. Ao longo da linha horizontal *BD*, na figura, gás e líquido estão em equilíbrio. Se continuamos comprimindo o gás, cada vez mais gás será liquefeito, até o ponto *D* da curva tracejada, onde teremos apenas líquido. Se tentamos, então, comprimir a substância ainda mais, a pressão aumentará rapidamente porque um líquido é aproximadamente incompressível.

Considere, agora, a injeção de um líquido, como água, em um recipiente selado a vácuo. Como parte da água evapora, moléculas de vapor d'água preenchem o espaço previamente vazio no recipiente. Algumas dessas moléculas colidirão com a superfície do líquido e se religarão à água líquida durante um processo chamado de *condensação*. A taxa de evaporação será inicialmente maior do que a taxa de condensação mas, finalmente, equilíbrio será atingido. A pressão na qual um líquido está em equilíbrio com seu próprio vapor é chamada de **pressão de vapor**. Se, agora, aquecemos o recipiente levemente, o líquido entrará em ebulição, mais líquido evaporará e um novo equilíbrio será estabelecido em uma pressão de vapor maior. A pressão de vapor depende, portanto, da temperatura. Podemos ver isto na Figura 20-5. Se tivéssemos começado a comprimir o gás a uma temperatura mais baixa, como na isoterma *A'* da Figura 20-5, a pressão de vapor seria menor, como indicado pela linha horizontal de pressão constante para *A'*, a um valor menor de pressão. A temperatura na qual a pressão de vapor para uma substância é igual a 1 atm é o **ponto normal de ebulição** daquela substância. Por exemplo, a temperatura na qual a pressão de vapor d'água é 1,00 atm é 373 K (= 100°C); logo, esta temperatura é o ponto normal de ebulição da água. A altitudes maiores, tal como no topo de uma montanha, a pressão é menor do que 1,00 atm e, portanto, a água ferve a uma temperatura menor do que 373 K. A Figura 20-6 fornece as pressões de vapor d'água para várias temperaturas.

A temperaturas maiores do que a temperatura crítica T_c, um gás não condensará para nenhuma pressão. A temperatura crítica para o vapor d'água é 647 K (374°C). O ponto no qual a isoterma crítica intercepta a curva tracejada (ponto *C*) é chamado de **ponto crítico**.

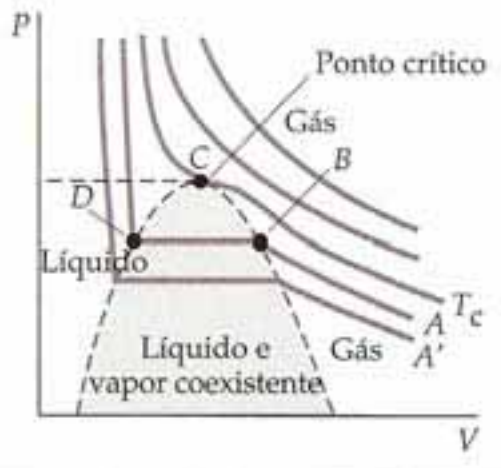


FIGURA 20-5 (*repetida*) Isotermas no diagrama *PV* para uma substância.

20-3 DIAGRAMAS DE FASE

A Figura 20-7 é um gráfico de pressão *versus* temperatura, a volume constante, para a água. Este tipo de gráfico é chamado de **diagrama de fase**. A porção do diagrama

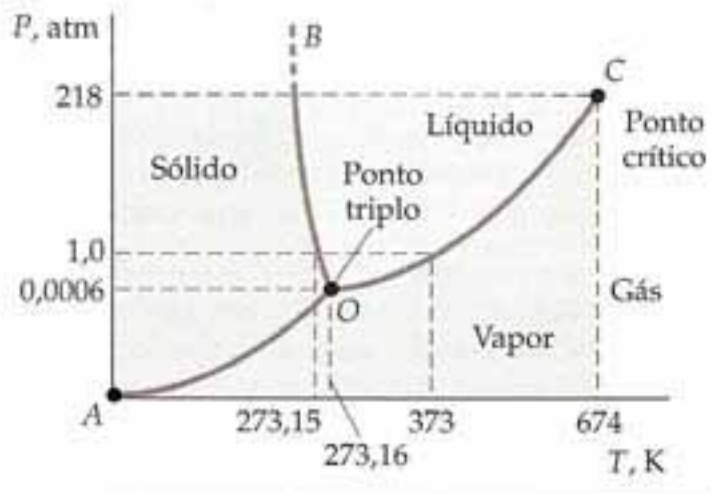


FIGURA 20-7 Diagrama de fase para a água. As escalas de pressão e de temperatura não são lineares e estão comprimidas para mostrar os pontos de interesse. A curva *OC* é a curva de pressão de vapor *versus* temperatura. A curva *OB* é a curva de fusão e a curva *OA* é a curva de sublimação.

entre os pontos *O* e *C* mostra a pressão de vapor *versus* temperatura. À medida que aquecemos o recipiente, a massa específica do líquido diminui e a massa específica do vapor aumenta. No ponto *C* do diagrama, estas massas específicas são iguais. O ponto *C* é chamado de *ponto crítico*. Neste ponto, e acima dele, não há distinção entre o líquido e o gás. Temperaturas de ponto crítico T_c, para várias substâncias, são listadas na Tabela 20-3. A temperaturas maiores do que a temperatura crítica, um gás não condensará para nenhum valor de pressão.

Se, agora, resfriamos nosso recipiente, parte do vapor condensa em líquido enquanto voltamos pela curva *OC* da Figura 20-7 até que a substância atinja o ponto *O*. Neste ponto, o líquido começa a se solidificar. O ponto *O* é o **ponto triplo**, no qual as fases de vapor, líquido e sólido de uma substância podem coexistir em equilíbrio. Toda substância tem um ponto triplo único em valores específicos de temperatura e de pressão. A temperatura de ponto triplo para a água é 273,16 K (0,01°C) e a pressão de ponto triplo é 4,58 mmHg.

A temperaturas e pressões abaixo do ponto triplo, o líquido não pode existir. A curva *OA* do diagrama de fase da Figura 20-7 identifica as pressões e as temperaturas para as quais o sólido e o vapor coexistem em equilíbrio. A mudança direta de um sólido para um vapor é chamada de **sublimação**. Você pode observar a sublimação colocando pequenos cubos de gelo soltos no compartimento do congelador de um refrigerador que tenha a função de autodescongelamento. Com o tempo, o tamanho dos cubos de gelo diminuirá e, finalmente, eles desaparecerão devido à sublimação. Isto acontece porque a pressão atmosférica está muito acima da pressão do ponto triplo da água e, assim, o equilíbrio nunca é estabelecido entre o gelo e o vapor d'água. A temperatura e a pressão do ponto triplo do dióxido de carbono (CO_2) são 216,55 K e 3880 mmHg (5,1 atm), o que significa que só pode existir CO_2 líquido a pressões acima de 5,1 atm. Portanto, a pressões atmosféricas normais, CO_2 líquido não pode existir em nenhuma temperatura. Quando o sólido CO_2 se "funde", ele sublima diretamente para CO_2 gasoso, sem passar pela fase líquida, justificando o termo "gelo seco".

A curva *OB* da Figura 20-7 é a curva de fusão separando as fases líquida e sólida. Para uma substância como a água, para a qual a temperatura de fusão diminui com o aumento da pressão, a inclinação da curva *OB* é para cima e para a esquerda, a partir do ponto triplo, como na figura. Para a maioria das outras substâncias, a temperatura de fusão aumenta com o aumento da pressão. Para tais substâncias, a inclinação da curva *OB* é para cima e para a direita, a partir do ponto triplo.

Para que uma molécula escape (evapore) de uma substância no estado líquido, é necessário energia para romper as atrações intermoleculares na superfície do líquido. A vaporização resfria o líquido que ficou para trás. Se uma caneca de água é aquecida até ferver, sobre uma placa aquecida, este efeito de resfriamento mantém a temperatura do líquido constante no ponto de ebulição. Esta é a razão pela qual o ponto de ebulição de uma substância pode ser usado para calibrar termômetros. Entretanto, a água também pode chegar à ebulição sem aquecimento, evacuando-se o ar acima dela e diminuindo-se, portanto, a pressão aplicada. A energia necessária para a vaporização é, então, obtida da água que restou. Como resultado, a água resfriará, podendo mesmo chegar ao ponto de se formar gelo no topo da água fervente!

Tabela 20-3 Temperaturas Críticas T_c para Várias Substâncias

20-4 A TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Calor é a transferência de energia devida a uma diferença de temperatura. Esta transferência de uma posição para outra acontece através de três processos distintos: condução, convecção e radiação.

Durante a **condução**, a energia é transferida através de interações entre átomos ou moléculas, onde os átomos ou moléculas não são, eles próprios, transportados. Por exemplo, se uma extremidade de um bastão maciço é aquecida, os átomos na extremidade quente vibram com maior energia do que os da extremidade fria. A interação dos átomos mais energéticos com os menos energéticos faz com que esta energia seja transportada ao longo do bastão.*

* Se o sólido é um metal, a transferência de calor é facilitada por elétrons *não localizados*, que podem se mover através do metal.

Durante a **convecção**, o calor é transferido por transporte direto de matéria. Por exemplo, o ar aquecido em uma região de uma sala se expande, sua massa específica diminui e a força de empuxo exercida sobre ele pelo ar da vizinhança faz com que ele suba. A energia é, assim, transportada para cima com as moléculas de ar aquecido.

Durante a **radiação**, a energia é transferida através do espaço na forma de ondas eletromagnéticas que se movem com a rapidez da luz. Ondas de infravermelho, ondas de luz visível, ondas de rádio, ondas de televisão e raios X são, todas, formas de radiação eletromagnética que diferem entre si nos seus comprimentos de onda e freqüências.

Durante todos os mecanismos de transferência de calor, a taxa de resfriamento de um corpo é aproximadamente proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e sua vizinhança. Este resultado é conhecido como **lei de Newton para o resfriamento**.

Em muitas situações reais, todos os três mecanismos de transferência de energia ocorrem simultaneamente, apesar de um mecanismo poder ser dominante sobre os outros. Por exemplo, um aquecedor de ambiente comum usa tanto a radiação quanto a convecção. Se o elemento aquecedor é quartzo, então o mecanismo principal de transferência é a radiação. Se o elemento aquecedor é metálico (que não irradia de maneira tão eficiente quanto o quartzo), então a convecção é o mecanismo principal pelo qual a energia é transferida, com o ar aquecido subindo para ser substituído pelo ar mais frio. Geralmente, os aquecedores possuem ventiladores para acelerar o processo de convecção.

CONDUÇÃO

A Figura 20-8*a* mostra um bastão maciço uniforme e isolado, com seção reta de área A. Se mantemos uma extremidade do bastão a uma temperatura elevada e a outra extremidade a uma temperatura baixa, a energia será conduzida através do bastão da extremidade quente para a extremidade fria. Em regime estacionário, a temperatura varia linearmente da extremidade quente até a extremidade fria. A taxa de variação da temperatura ao longo da barra, dT/dx, é chamada de **gradiente de temperatura**.*

Seja dT a diferença de temperatura ao longo de um pequeno segmento de comprimento dx (Figura 20-8*b*). Se dQ é a quantidade de calor conduzida através de uma seção reta do segmento durante um intervalo de tempo dt, então a taxa de condução de calor dQ/dt é chamada de **corrente térmica** I. Foi observado experimentalmente que a corrente térmica é proporcional ao gradiente de temperatura e à área de seção reta A:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -kA\frac{dT}{dx} \qquad 20\text{-}7$$

DEFINIÇÃO: CORRENTE TÉRMICA

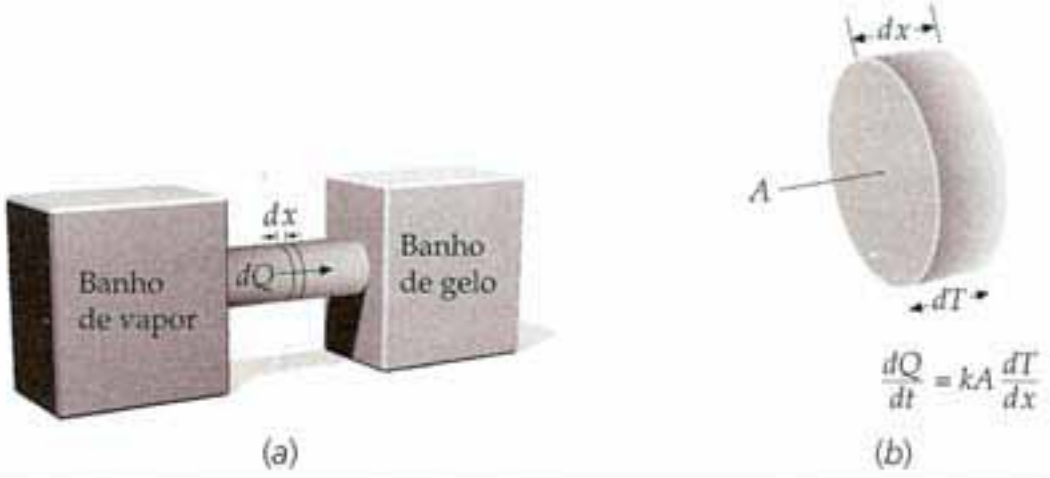


FIGURA 20-8 (*a*) Um bastão condutor isolado com suas extremidades a duas temperaturas diferentes. (*b*) Um segmento do bastão de comprimento dx. A taxa na qual o calor é conduzido através de uma seção reta do segmento é proporcional à área de seção reta do bastão e à queda de temperatura dT ao longo do segmento, e é inversamente proporcional ao comprimento do segmento.

Calor transporta energia de uma região de maior temperatura para uma região de menor temperatura; logo, a corrente térmica é no sentido da diminuição da temperatura.

* O gradiente de temperatura é, na verdade, um vetor. A orientação deste vetor é no sentido do aumento mais rápido da temperatura, e a magnitude deste vetor é a taxa de variação da temperatura em relação à distância, ao longo dessa orientação.

A constante de proporcionalidade k, chamada de *condutividade térmica*, depende da composição do bastão.[†] O calor é transferido no sentido da diminuição da temperatura. Isto é, se a temperatura aumenta com o aumento de x, então a transferência de calor é no sentido negativo da direção x, e vice-versa. No SI, a corrente térmica é expressa em watts e a condutividade térmica é expressa em W/(m · K).[‡] Em cálculos práticos realizados nos Estados Unidos, a corrente térmica geralmente é expressa em Btu por hora, a área é expressa em pés quadrados, o comprimento (ou espessura) é expresso em polegadas e a temperatura é expressa em graus Fahrenheit. A condutividade térmica é, então, dada em Btu · in/(h · ft² · °F). A Tabela 20-4 fornece a condutividade térmica para vários materiais.

Se resolvemos a Equação 20-7 para a diferença de temperatura, obtemos

$$|\Delta T| = I\frac{|\Delta x|}{kA} \qquad 20\text{-}8$$

ou

$$\Delta T = IR \qquad 20\text{-}9$$

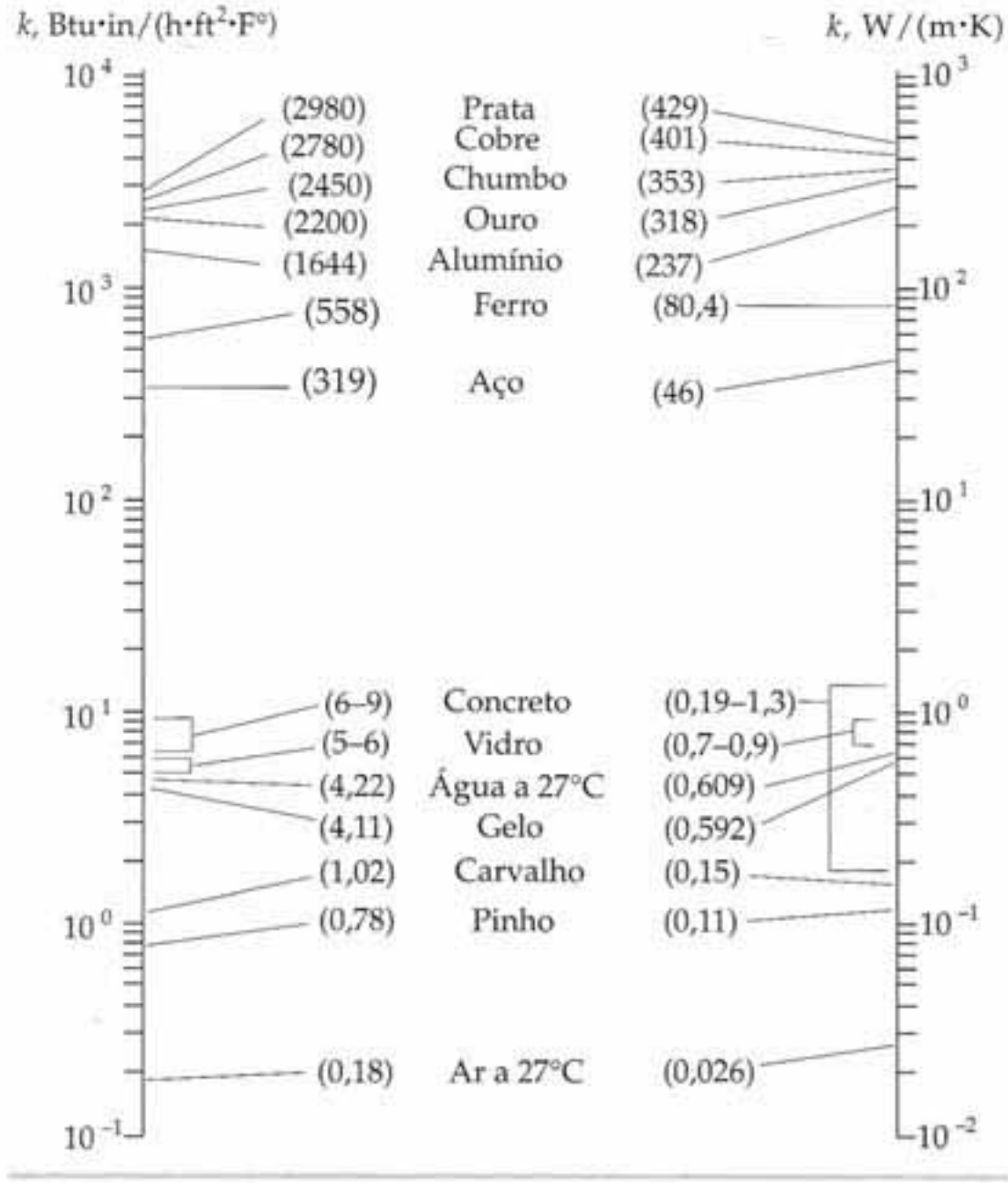
QUEDA DE TEMPERATURA *VERSUS* CORRENTE

onde ΔT é a *queda de temperatura* no sentido da corrente térmica e $|\Delta x|/(kA)$ é a **resistência térmica** R:

$$R = \frac{|\Delta x|}{kA} \qquad 20\text{-}10$$

DEFINIÇÃO: RESISTÊNCIA TÉRMICA

Tabela 20-4 Condutividades Térmicas k para Vários Materiais



PROBLEMA PRÁTICO 20-1

Calcule a resistência térmica de uma barra de alumínio de 15,0 cm² de área de seção reta e 2,00 cm de espessura.

PROBLEMA PRÁTICO 20-2

Que espessura seria necessária para uma barra de prata ter a mesma resistência térmica de uma camada, de mesma área, de 1,00 cm de espessura de ar?

CHECAGEM CONCEITUAL 20-1

Em uma sala refrigerada, o tampo de uma mesa metálica parece mais frio ao ser tocado do que uma superfície de madeira, mesmo tendo a mesma temperatura. Por quê?

Em muitos problemas práticos, estamos interessados na taxa de transferência de calor através de dois ou mais condutores (ou isolantes) em série. Por exemplo, podemos desejar saber o efeito de adicionar um material isolante de certas espessura e condutividade térmica no espaço entre duas camadas de uma parede. A Figura 20-9 mostra duas barras de materiais condutores térmicos com seção reta de mesma área, mas feitas de materiais diferentes e com espessuras diferentes. Seja T_1 a temperatura no lado mais quente, T_2 a temperatura na interface entre as barras e T_3 a temperatura no lado mais frio. Em condições estacionárias de transferência de calor, a corrente térmica I através de cada barra deve ser a mesma. Isto é conseqüência da conservação da energia; para transferência estacionária, a taxa na qual a energia entra em qualquer região deve ser igual à taxa na qual ela sai da região.

Se R_1 e R_2 são as resistências térmicas das duas barras, aplicando a Equação 20-9 obtemos, para cada barra,

$$T_1 - T_2 = IR_1$$

FIGURA 20-9 Duas barras condutoras térmicas de materiais diferentes, ligadas em série. A resistência térmica equivalente das barras em série é a soma das resistências térmicas individuais. A corrente térmica é a mesma em ambas.

[†] Não confunda a condutividade térmica com a constante de Boltzmann, que também é representada por k.
[‡] Em algumas tabelas, a energia pode ser dada em calorias ou em quilocalorias e a espessura em centímetros.

e

$$T_2 - T_3 = IR_2$$

Somando estas equações obtemos

$$\Delta T = T_1 - T_3 = I(R_1 + R_2) = IR_{eq}$$

ou

$$I = \frac{\Delta T}{R_{eq}} \qquad 20\text{-}11$$

onde R_{eq} é a **resistência equivalente**. Portanto, para resistências térmicas em série, a resistência equivalente é a soma das resistências individuais:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots \qquad 20\text{-}12$$

RESISTÊNCIAS TÉRMICAS EM SÉRIE

Este resultado pode ser estendido a qualquer número de resistências em série. No Capítulo 25 (Volume 2) veremos que a mesma fórmula se aplica a resistências elétricas em série.

Para calcular a taxa na qual a energia está saindo de uma sala por meio de condução de calor, precisamos saber quanto calor é liberado através das paredes, das janelas, do chão e do teto. Para este tipo de problema, no qual há vários caminhos para a transferência de calor, dizemos que as resistências estão em **paralelo**. A diferença de temperatura é a mesma para cada caminho, mas a corrente térmica é diferente. A corrente térmica total é a soma das correntes térmicas através de cada um dos caminhos paralelos:

$$I_{total} = I_1 + I_2 + \cdots = \frac{\Delta T}{R_1} + \frac{\Delta T}{R_2} + \cdots = \Delta T\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots\right)$$

ou

$$I_{total} = \frac{\Delta T}{R_{eq}} \qquad 20\text{-}13$$

onde a resistência térmica equivalente é dada por

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots \qquad 20\text{-}14$$

RESISTÊNCIAS TÉRMICAS EM PARALELO

Encontraremos esta equação novamente no Capítulo 25 (Volume 2), ao estudarmos a condução elétrica através de resistências em paralelo. Observe que, para resistores em série (Equação 20-11) e para resistores em paralelo (Equação 20-13), I é proporcional a ΔT, o que está de acordo com a lei de Newton para o resfriamento.

ESTRATÉGIA PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Calculando a Corrente Térmica

SITUAÇÃO Verifique se os objetos para os quais você está procurando a corrente térmica total estão em série ou em paralelo.

SOLUÇÃO

1. Usando $R = |\Delta x|/(kA)$ (Equação 20-10), determine a resistência térmica de cada objeto.
2. Para os objetos em série, use $R_{eq} = R_1 + R_2 + \ldots$ (Equação 20-12) para calcular a resistência equivalente.
3. Para os objetos em paralelo, use $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots$ (Equação 20-14) para determinar a resistência equivalente.

4. Repita os passos 2 e 3 até que você tenha calculado a resistência equivalente de todo o sistema de objetos condutores.
5. Usando $\Delta T = I_{total} R_{eq}$ (Equação 20-9), calcule a corrente térmica total.

CHECAGEM Para cada combinação de objetos em paralelo certifique-se de que a resistência equivalente é menor do que a resistência do objeto de menor resistência. Para cada combinação de objetos em série certifique-se de que a resistência equivalente é maior do que a resistência do objeto de maior resistência.

Exemplo 20-6 Duas Barras Metálicas em Série

Duas barras metálicas isoladas, cada uma com 5,0 cm de comprimento e seção reta retangular com lados de 2,0 cm e de 3,0 cm, estão calçadas entre duas paredes, uma mantida a 100°C e a outra a 0,0°C (Figura 20-10). As barras são feitas de chumbo e de prata. Determine (*a*) a corrente térmica total através da combinação das duas barras e (*b*) a temperatura na interface.

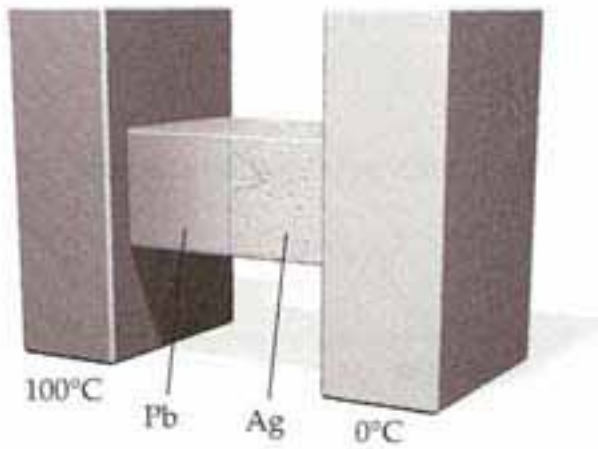


FIGURA 20-10 Duas barras de materiais condutores térmicos diferentes ligadas em série.

SITUAÇÃO As barras são resistores térmicos conectados em série. (*a*) Você pode determinar a corrente térmica total a partir de $I = R_{eq}/\Delta T$, onde a resistência equivalente R_{eq} é a soma das resistências individuais. Usando a Equação 20-10 e as condutividades térmicas dadas na Tabela 20-4, as resistências individuais podem ser determinadas. (*b*) Você pode determinar a temperatura na interface aplicando $I = R_1/\Delta T$, apenas à barra de chumbo, e resolvendo para ΔT em termos do valor de I encontrado na Parte (*a*).

SOLUÇÃO

(*a*) 1. Use $\Delta T = IR$ (Equação 20-13) para relacionar a corrente térmica com a diferença de temperatura:

$$I = \frac{\Delta T}{R}$$

2. Usando $R = |\Delta x|/(kA)$ (Equação 20-10), escreva cada resistência térmica em termos das condutividades térmicas individuais e dos parâmetros geométricos:

$$R_{Pb} = \frac{|\Delta x_{Pb}|}{k_{Pb} A_{Pb}} \qquad R_{Ag} = \frac{|\Delta x_{Ag}|}{k_{Ag} A_{Ag}}$$

$$R_{Pb} = \frac{0{,}050\ \text{m}}{353\ \text{W/(m}\cdot\text{K)} \times (0{,}020\ \text{m} \times 0{,}030\ \text{m})} = 0{,}236\ \text{K/W}$$

$$R_{Ag} = \frac{0{,}050\ \text{m}}{429\ \text{W/(m}\cdot\text{K)} \times (0{,}020\ \text{m} \times 0{,}030\ \text{m})} = 0{,}194\ \text{K/W}$$

3. Determine R_{eq} usando a fórmula para resistores em série:

$$R_{eq} = R_{Pb} + R_{Ag} = 0{,}236 + 0{,}194 = 0{,}430\ \text{K/W}$$

4. Use $\Delta T = IR$ (Equação 20-13) para determinar a corrente térmica:

$$I = \frac{\Delta T}{R_{eq}} = \frac{100\ \text{K}}{0{,}430\ \text{K/W}} = 232\ \text{W} = \boxed{0{,}23\ \text{kW}}$$

(*b*) 1. Calcule a diferença de temperatura através da barra de chumbo usando a corrente e a resistência térmica determinadas na Parte (*a*):

$$\Delta T_{Pb} = IR_{Pb} = 232\ \text{W} \times 0{,}236\ \text{K/W} = 54{,}9\ \text{K} = 54{,}9°\text{C}$$

2. Use o resultado obtido no passo anterior para determinar a temperatura na interface:

$$T_{if} = 100°\text{C} - \Delta T_{Pb} = \boxed{45°\text{C}}$$

CHECAGEM Conferimos o resultado para a Parte (*b*) calculando a queda de temperatura ao longo da barra de prata. Isto é, $\Delta T_{Ag} = IR_{Ag} = 232\ \text{W} \times 0{,}194\ \text{K/W} = 45°\text{C}$, que está de acordo com o resultado da Parte (*b*). Observe que a resistência equivalente (0,43 K/W) é maior do que as resistências individuais (0,24 K/W e 0,19 K/W).

Exemplo 20-7 As Barras Metálicas em Paralelo

As barras metálicas do Exemplo 20-6 são, agora, dispostas como mostrado na Figura 20-11. Determine (*a*) a corrente térmica em cada barra, (*b*) a corrente térmica total e (*c*) a resistência térmica equivalente do sistema de duas barras.

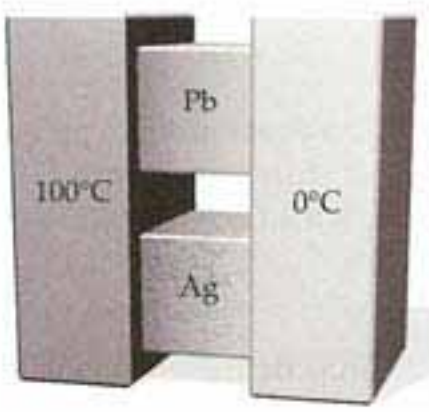


FIGURA 20-11

SITUAÇÃO A corrente em cada barra é determinada por $I = \Delta T/R$, onde R é a resistência térmica da barra (determinada no Exemplo 20-6). A corrente total é a soma das correntes. A resistência equivalente pode ser encontrada a partir da Equação 20-14 ou de $I_{total} = \Delta T/R_{eq}$.

SOLUÇÃO

(*a*) Calcule a corrente térmica para cada barra:

$$I_{Pb} = \frac{\Delta T}{R_{Pb}} = \frac{100\ \text{K}}{0{,}236\ \text{K/W}} = 424\ \text{W} = \boxed{0{,}42\ \text{kW}}$$

$$I_{Ag} = \frac{\Delta T}{R_{Ag}} = \frac{100\ \text{K}}{0{,}194\ \text{K/W}} = 515\ \text{W} = \boxed{0{,}52\ \text{kW}}$$

(*b*) Some os resultados para determinar a corrente térmica total:

$$I_{total} = I_{Pb} + I_{Ag} = 424\ \text{W} + 515\ \text{W} = 938\ \text{W} = \boxed{0{,}94\ \text{kW}}$$

(*c*) 1. Use a Equação 20-14 para calcular a resistência equivalente das duas barras em paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_{Pb}} + \frac{1}{R_{Ag}} = \frac{1}{0{,}236\ \text{K/W}} + \frac{1}{0{,}194\ \text{K/W}}$$

$$\text{logo} \quad R_{eq} = 0{,}107\ \text{K/W} = \boxed{0{,}11\ \text{K/W}}$$

2. Confira seu resultado usando $I_{total} = \Delta T/R_{eq}$:

$$I_{total} = \frac{\Delta T}{R_{eq}}$$

$$R_{eq} = \frac{\Delta T}{I_{total}} = \frac{100\ \text{K}}{938\ \text{W}} = \boxed{0{,}11\ \text{K/W}}$$

CHECAGEM Com as barras em paralelo, a diferença de temperatura é de 100 K para cada uma delas e, portanto, a corrente térmica através de cada uma é muito maior do que a corrente térmica através de cada barra do Exemplo 20-6, onde as barras estavam em série, o que fazia com que a diferença de temperatura em cada barra fosse consideravelmente menor do que 100 K. Além disso, no Exemplo 20-7 a corrente total é igual à soma das correntes nas barras, enquanto no Exemplo 20-6 a corrente total é igual à corrente em cada uma das barras. Assim, é plausível que a corrente total (938 W) no caso das barras em paralelo seja mais do que quatro vezes maior do que a corrente total (232 W) no caso das barras em série.

INDO ALÉM Observe que a resistência equivalente é menor do que cada uma das resistências individuais. Este é sempre o caso para resistores em paralelo.

Na indústria da construção, a resistência térmica de um material com uma área de seção reta de um pé quadrado é chamada de **fator *R***, R_f. Considere uma lâmina de 32 ft² de um material isolante com espessura Δx e com R_f valendo 7,2. Isto é, cada pé quadrado tem uma resistência térmica de 7,2°F/(Btu/h). Os 32 pés quadrados estão em paralelo, de forma que a resistência resultante R_{res} é calculada usando-se a Equação 20-14, o que dá

$$\frac{1}{R_{res}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots = \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_f} + \cdots = \frac{32}{R_f} \quad \text{logo} \quad R_{total} = \frac{R_f}{32}$$

Assim, a resistência térmica total R, em °F/(Btu/h), é igual ao fator R dividido pela área A em pés quadrados. Isto é,

$$R_{res} = \frac{R_f}{A}$$

Como a resistência resultante (total) R_{res} está relacionada à condutividade k por $R_{res} = |\Delta x|/(kA)$ (Equação 20-10), podemos expressar o fator R como

$$R_f = R_{res} A = \frac{|\Delta x|}{k} \qquad 20\text{-}15$$

DEFINIÇÃO: FATOR *R*

onde $|\Delta x|$ é a espessura em polegadas e k é a condutividade em Btu · in/(h · ft² · °F). A Tabela 20-5 lista os fatores R para vários materiais. Em termos do fator R, a Equação 20-9 para a corrente térmica é escrita como

$$\Delta T = IR_{res} = \frac{I}{A} R_f \qquad 20\text{-}16$$

Para lâminas de material isolante de mesma área e em série, R_f é substituído pelo fator R equivalente, $R_{f\,eq}$,

$$R_{f\,eq} = R_{f1} + R_{f2} + \cdots$$

FIGURA 20-12 Para uma polegada de espessura deste material, $R_t = 7.2$. *(Cortesia de Eugene Mosca.)*

Tabela 20-5 Fatores R, $\Delta x/k$, para Vários Materiais de Construção

Material	Espessura, in	R_t, h · ft² · F°/Btu
Chapa divisória		
Gesso ou estuque	0,375	0,32
Madeira compensada (pinho)	0,5	0,62
Painel de madeira ou de compensado	0,75	0,93
Aglomerado de massa específica média	1,0	1,06
Materiais de acabamento para piso		
Forração e revestimento fibroso	1,0	2,08
Piso cerâmico		0,5
Madeira de qualidade	0,75	0,68
Isolamento de telhado	1,0	2,8
Material para telhado		
Manta asfáltica para telhado		0,15
Telha revestida de asfalto		0,44
Janelas		
Vidraça simples		0,9
Vidraça dupla		1,8

Para placas paralelas, calculamos a corrente térmica através de cada camada e somamos todas essas correntes para obter a corrente total.

Exemplo 20-8 Perda de Calor Através do Telhado — *Rico em Contexto*

Você está auxiliando a família de seu amigo a colocar novas telhas revestidas de asfalto no telhado do chalé de inverno. O telhado, de 60 ft × 20 ft (18 m × 6 m), é feito de chapas de madeira de pinho, de 1,0 in (20 cm) de espessura, cobertas com telhas revestidas de asfalto. Há um espaço disponível de 8,0 in para isolamento do telhado e a família de seu amigo está se perguntando qual seria a diferença, na conta de energia, se eles instalassem uma camada de duas polegadas de isolamento. Sabendo que você estuda física, eles pedem sua opinião.

SITUAÇÃO Para avaliar a situação, primeiro você calcula o fator R para cada camada de telhado. Como as camadas estão em série, o fator R equivalente é apenas a soma dos fatores R individuais. O objetivo é calcular o fator R equivalente do telhado com e sem o isolamento. Os fatores R para as telhas revestidas de asfalto e para o isolamento de telhado são encontrados na Tabela 20-5. O fator R para o pinho é calculado a partir de sua condutividade térmica, que é encontrada na Tabela 20-4. Observe que, quando você cobre um telhado, as telhas se sobrepõem, o que faz com que haja duas camadas de telhas revestidas de asfalto no telhado.

SOLUÇÃO

1. Para uma combinação em série, o fator R equivalente é a soma dos fatores R individuais:

$$R_{f\,eq} = R_{f\,pin} + R_{f\,asf} + R_{f\,isol}$$

2. O fator R para a dupla camada de telhas é o dobro do fator R para uma camada:
$$R_{f\,asf} = 2(0{,}44\ \text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot{}^\circ\text{F/Btu}) = 0{,}88\ \text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot{}^\circ\text{F/Btu}$$

3. O fator R para um isolamento de telhado de 2,0 in (5,0 cm) é o dobro do de 1,0 in (2,5 cm):
$$R_{f\,isol} = 2(2{,}8\ \text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot{}^\circ\text{F/Btu}) = 5{,}6\ \text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot{}^\circ\text{F/Btu}$$

4. O fator R para uma espessura de 1,0 in de pinho é obtido da condutividade:
$$R_{f\,p} = \frac{\Delta x_p}{k_p} = \frac{1{,}0\ \text{in}}{0{,}78\ \text{Btu}\cdot\text{in}/(\text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot{}^\circ\text{F})} = 1{,}28\ \text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot{}^\circ\text{F/Btu}$$

5. O fator R equivalente sem o isolamento é:
$$R'_{f\,eq} = R_{f\,pin} + R_{f\,asf} = 1{,}28\ \text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot{}^\circ\text{F/Btu} + 0{,}88\ \text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot{}^\circ\text{F/Btu}$$
$$= 2{,}16\ \text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot{}^\circ\text{F/Btu} = 2{,}2\ \text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot{}^\circ\text{F/Btu}$$

6. O fator R equivalente com isolamento é:
$$R_{f\,eq} = R_{f\,pin} + R_{f\,asf} + R_{f\,isol} = R'_{f\,eq} + R_{f\,isol}$$
$$= 2{,}16\ \text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot{}^\circ\text{F/Btu} + 5{,}6\ \text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot{}^\circ\text{F/Btu}$$
$$= 7{,}76\ \text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot{}^\circ\text{F/Btu}$$

7. Comparamos os dois fatores R equivalentes escrevendo a razão entre eles:
$$\frac{R'_{f\,eq}}{R_{f\,eq}} = \frac{2{,}16}{7{,}76} = 0{,}28$$

8. Adicionando-se o isolamento, a taxa de perda de calor por pé quadrado é reduzida em 72 por cento. Trata-se de 72 por cento de uma grande perda de calor ou de uma pequena perda de calor? Usando a Equação 20-16, calculamos a corrente térmica I' através de todo o telhado:
$$\Delta T = IR_{res} = \frac{I}{A}R_f$$
$$I' = \frac{A}{R'_{f\,eq}}\Delta T = \frac{(60\ \text{ft})(20\ \text{ft})}{2{,}16\ \text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot{}^\circ\text{F/Btu}}\Delta T = [556\ (\text{Btu/h})/{}^\circ\text{F}]\Delta T$$
$$= [5{,}6\times10^2\ (\text{Btu/h})/{}^\circ\text{F}]\Delta T$$

9. Para completar o cálculo, estimamos que a temperatura no interior do chalé seja mantida a 70°F e que a temperatura no lado de fora durante o inverno seja, tipicamente, 40°F mais fria:
$$I' = [556\ (\text{Btu/h})/{}^\circ\text{F}]\Delta T$$
$$= [556\ (\text{Btu/h})/{}^\circ\text{F}](40{}^\circ\text{F}) = 22200\ \text{Btu/h}$$
e $I = 0{,}28I' = 0{,}28(22200\ \text{Btu/h}) = 6200\ \text{Btu/h}$
logo, a redução causada pelo isolamento é
$$I' - I = 22200\ \text{Btu/h} - 6200\ \text{Btu/h} = 16\times10^3\ \text{Btu/h}$$

10. A instalação do isolamento do telhado com 2,0 in de espessura reduz a perda de calor através do telhado em 16.000 Btu/h. O chalé é aquecido com propano e o conteúdo de energia do propano é de 92.000 Btu/galão. O isolamento do telhado reduz o consumo em aproximadamente 4,2 galões de propano a cada 24 h de uso.

O propano custa cerca de $3,00 o galão; logo, isto representa uma economia de aproximadamente $12,60 por dia, ou $376 por mês durante os meses frios. A família de seu amigo está impressionada com o potencial de economia (e as vantagens de seus conhecimentos em física). Eles decidem instalar a camada de 2,0 in de isolamento no telhado.

CHECAGEM Não deve ser surpreendente o fato de que a instalação de algum isolamento reverte em uma economia significativa.

INDO ALÉM Estas estimativas de custo não incluem o custo de aquisição e instalação do isolamento.

PROBLEMA PRÁTICO 20-3 Que economia adicional seria possível acrescendo-se mais isolamento ao telhado?

A condutividade térmica do ar é muito pequena, se comparada à de materiais sólidos, o que faz do ar um isolante térmico muito bom. Entretanto, quando há um grande espaço com ar — digamos, entre uma janela externa de proteção e uma janela interna — a eficiência do isolamento do ar é enormemente reduzida pela convecção. Sempre que houver uma diferença de temperatura entre diferentes partes do espaço contendo ar, correntes de convecção rapidamente equalizarão a temperatura e, portanto, a condutividade efetiva aumentará significativamente. Para janelas externas de proteção, espaçamentos de ar de cerca de 1 a 2 cm são o mais indicado. Espaçamentos maiores de ar acabam por reduzir a resistência térmica de uma janela dupla, devido à convecção.

As propriedades isolantes do ar são aproveitadas de maneira mais eficiente quando o ar é aprisionado em pequenos bolsões que previnem a ocorrência da convecção. Este é o princípio por trás das excelentes propriedades isolantes das penas de ganso e do isopor.

Se você tocar a superfície interior de uma janela de vidro quando está frio no lado de fora, você observará que a superfície está consideravelmente mais fria do que

o ar no interior. A resistência térmica das janelas é devida, principalmente, a filmes finos de ar isolante que aderem a cada um dos lados da superfície de vidro. A espessura do vidro tem pouco efeito sobre a resistência térmica total. Os filmes de ar tipicamente adicionam um fator R de cerca de 0,45 para cada lado. Assim, o fator R de uma janela com N vidraças separadas é aproximadamente $0{,}90N$, devido aos dois lados de cada vidraça. Quando venta, o filme de ar do lado de fora pode ser significativamente reduzido, reduzindo o fator R da janela.

CONVECÇÃO

Convecção é a transferência de calor por transporte do próprio meio material. Esta propriedade térmica é responsável pelas grandes correntes dos oceanos, como também pela circulação global da atmosfera. No caso mais simples, a convecção surge quando um fluido (gás ou líquido) é aquecido embaixo. O fluido aquecido então se expande e sobe, enquanto o fluido mais frio desce. A descrição matemática da convecção é muito complexa, porque o fluxo depende da diferença de temperatura em diferentes partes do fluido e esta diferença de temperatura também é afetada pelo próprio fluxo.

O calor transferido de um objeto para sua vizinhança, por convecção, é aproximadamente proporcional à área do objeto e à diferença de temperatura entre o objeto e o fluido que o cerca. É possível escrever uma equação para o calor transferido por convecção e definir um coeficiente de convecção, mas as análises de problemas práticos envolvendo convecção são bastante complexas e não são discutidas aqui.

RADIAÇÃO

Todos os objetos emitem e absorvem radiação eletromagnética. Quando um objeto está em equilíbrio térmico com sua vizinhança, ele emite e absorve radiação na mesma taxa. A taxa na qual um objeto irradia energia é proporcional à área de sua superfície e à quarta potência de sua temperatura absoluta. Este resultado, determinado empiricamente por Josef Stefan em 1879 e deduzido teoricamente por Ludwig Boltzmann cerca de cinco anos mais tarde, é chamado de **lei de Stefan–Boltzmann**:

$$P_r = e\sigma AT^4 \qquad \text{20-17}$$

LEI DE STEFAN–BOLTZMANN

onde P_r é a potência irradiada, A é a área da superfície, σ é uma constante universal chamada de constante de Stefan, que vale

$$\sigma = 5{,}6703 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2 \cdot K^4)} \qquad \text{20-18}$$

e e é a **emissividade** da superfície que irradia, uma quantidade adimensional entre 0 e 1 que é dependente da composição da superfície do objeto.

Quando a radiação eletromagnética atinge um objeto opaco, parte da radiação é refletida e parte é absorvida. Objetos coloridos refletem a maior parte da radiação visível, enquanto objetos escuros absorvem a maior parte dela. A taxa na qual um objeto absorve radiação é dada por

$$P_a = e\sigma AT_0^4 \qquad \text{20-19}$$

onde T_0 é a temperatura da fonte de radiação e e é a emissividade da superfície do objeto que está absorvendo.

Seja um corpo a uma temperatura T cercado por corpos a uma temperatura T_0. Se o corpo emite energia radiante a uma taxa maior do que absorve, então ele se resfria enquanto sua vizinhança absorve radiação e se aquece. Se o corpo absorve energia radiante a uma taxa maior do que emite, então ele se aquece e sua vizinhança se resfria. A potência resultante irradiada por um corpo a uma temperatura T em um ambiente a uma temperatura T_0 é

$$P_{res} = e\sigma A(T^4 - T_0^4) \qquad \text{20-20}$$

Quando um corpo está em equilíbrio térmico com sua vizinhança, $T = T_0$ e o corpo emite e absorve radiação à mesma taxa.

Um corpo que absorve toda a radiação incidente sobre ele tem uma emissividade igual a 1 e é chamado de **corpo negro**. Um corpo negro é, também, um radiador ideal.

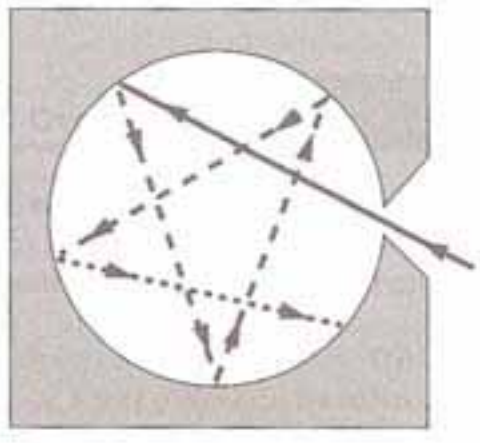


FIGURA 20-13 Um orifício em uma cavidade se aproxima de um corpo negro ideal. A radiação que entra na cavidade tem pouca chance de sair dela antes de ser completamente absorvida. A radiação emitida pelo orifício (não mostrada) é, portanto, característica da temperatura das paredes da cavidade.

O conceito de corpo negro é importante porque as características da radiação emitida por este tipo de corpo ideal podem ser calculadas teoricamente. Materiais como o veludo preto estão muito próximos de serem corpos negros ideais. A melhor aproximação prática de um corpo negro ideal é um pequeno orifício em uma cavidade, como um buraco de fechadura na porta de um armário (Figura 20-13). A radiação incidente sobre o orifício tem pouca chance de ser refletida para fora antes que as paredes a absorvam. Assim, a radiação emitida pelo orifício é característica da temperatura das paredes da cavidade.

A radiação emitida por um corpo a temperaturas abaixo de aproximadamente 600°C não é visível a olho nu. A radiação de corpos à temperatura ambiente está concentrada em comprimentos de onda muito maiores do que os da luz visível. Quando um corpo é aquecido, a taxa de emissão de energia aumenta e a energia irradiada atinge freqüências maiores (e menores comprimentos de onda). Entre 600°C e 700°C, aproximadamente, uma quantidade suficiente da energia irradiada está no espectro visível e o corpo brilha com uma coloração vermelho-escura. A temperaturas mais elevadas, ele pode emitir um vermelho mais vivo ou, até mesmo, um "branco quente". A Figura 20-14 mostra a potência irradiada por um corpo negro como função do comprimento de onda, para três temperaturas diferentes. O comprimento de onda para o qual a potência é máxima varia inversamente com a temperatura, um resultado conhecido como lei do deslocamento de Wien:

$$\lambda_{máx} = \frac{2{,}898\ \text{mm} \cdot \text{K}}{T} \qquad 20\text{-}21$$

LEI DO DESLOCAMENTO DE WIEN

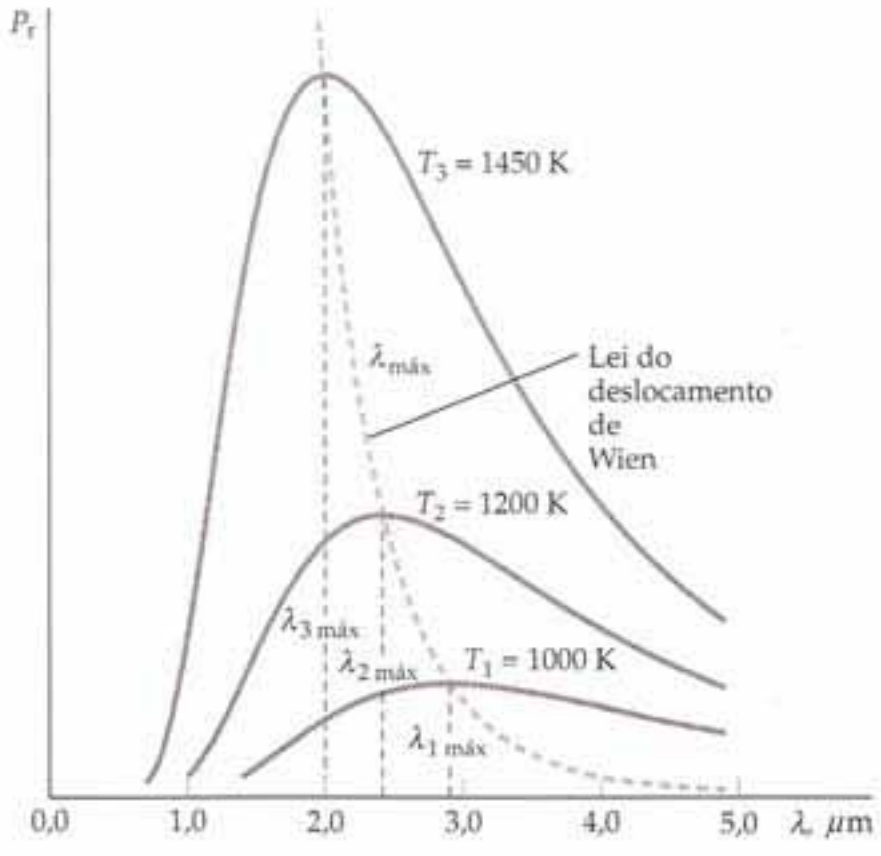


FIGURA 20-14 Potência irradiada *versus* comprimento de onda para a radiação emitida por um corpo negro. A temperatura da superfície emissora está indicada em cada curva do gráfico. O comprimento de onda $\lambda_{máx}$ para o qual a potência emitida é máxima varia inversamente com a temperatura absoluta T da superfície do corpo negro.

Esta lei é usada para determinar a temperatura das superfícies de estrelas pela análise de sua radiação. Ela também pode ser usada para mapear a variação de temperatura em diferentes regiões da superfície de um corpo. Tal mapa é chamado de termograma. Os termogramas podem ser usados para detectar câncer, pois o tecido canceroso provoca um aumento da circulação, o que produz um pequeno aumento da temperatura da pele.

As curvas de distribuição espectral mostradas na Figura 20-14 desempenharam um papel importante na história da física. Foi a discrepância entre os cálculos teóricos (usando termodinâmica clássica) usados para gerar as distribuições espectrais de corpo negro e as medidas experimentais das distribuições espectrais que conduziram às primeiras idéias de Max Planck sobre a quantização da energia em 1900.

Exemplo 20-9 A Radiação do Sol

(*a*) A radiação emitida pela superfície do Sol tem uma potência máxima em um comprimento de onda de 500 nm. Supondo que o Sol seja um emissor do tipo corpo negro, qual é a temperatura de sua superfície? (*b*) Calcule $\lambda_{máx}$ para um corpo negro à temperatura ambiente, $T = 300$ K.

SITUAÇÃO A temperatura da superfície e o comprimento de onda de máxima emissão de potência estão relacionados por $\lambda_{máx} = 2{,}898\ \text{mm} \cdot \text{K}/T$ (Equação 20-21).

SOLUÇÃO

(*a*) Podemos determinar T, conhecendo $\lambda_{máx}$ e usando a lei do deslocamento de Wien: $\lambda_{máx} = \dfrac{2{,}898\ \text{mm} \cdot \text{K}}{T}$ logo

$$T = \frac{2{,}898\ \text{mm} \cdot \text{K}}{\lambda_{máx}} = \frac{2{,}898\ \text{mm} \cdot \text{K}}{500\ \text{nm}} = \boxed{5800\ \text{K}}$$

(*b*) Podemos determinar $\lambda_{máx}$ para $T = 300$ K, usando a lei do deslocamento de Wien: $\lambda_{máx} = \dfrac{2{,}898\ \text{mm} \cdot \text{K}}{300\ \text{K}} = 9{,}66 \times 10^{-6}\ \text{m} = \boxed{9{,}66\ \mu\text{m}}$

CHECAGEM O resultado da Parte (*b*) para $\lambda_{máx}$ é 19 vezes maior do que 500 nm (o valor de $\lambda_{máx}$ para o Sol) e o resultado da Parte (*a*), de 5800 K para a temperatura da superfície do Sol, é 19 vezes maior do que 300 K, a temperatura da superfície do corpo na Parte (*b*). A lei de Wien diz que $\lambda_{máx}$ é inversamente proporcional à temperatura do emissor; logo, os resultados calculados estão de acordo com o esperado.

INDO ALÉM O comprimento de onda do pico para o Sol está no espectro visível. O espectro de radiação de corpo negro descreve o espectro de radiação do Sol muito bem; logo o Sol é, de fato, um bom exemplo de corpo negro.

Para $T = 300$ K, o espectro tem um pico no infravermelho, em comprimentos de onda muito maiores do que os comprimentos de onda visíveis. As superfícies que não são negras aos nossos olhos podem se comportar como corpos negros para irradiação e absorção no infravermelho. Por exemplo, foi experimentalmente verificado que a pele de todos os seres humanos absorve toda a radiação no infravermelho; assim, a emissividade da pele é 1,00 para este processo de radiação.

Exemplo 20-10 Radiação do Corpo Humano — *Tente Você Mesmo*

Calcule a taxa resultante de calor perdido como energia de radiação para uma pessoa nua em uma sala a 20°C, supondo que a pessoa seja um corpo negro com uma área superficial de 1,4 m² e uma temperatura superficial de 33°C (= 306 K). (A temperatura superficial do corpo humano é levemente menor do que a temperatura interna de 37°C, por causa da resistência térmica da pele.)

SITUAÇÃO Use $P_{res} = e\sigma A(T^4 - T_0^4)$ com $e = 1$, $T = 306$ K e $T_0 = 293$ K, para determinar a diferença entre as potências emitida e absorvida.

SOLUÇÃO

Cubra a coluna da direita e tente por si só antes de olhar as respostas.

Passos	Respostas
Use $P_{res} = e\sigma A(T^4 - T_0^4)$ com $e = 1$, $T = 306$ K e $T_0 = 293$ K.	$P_{res} = 111$ W = 0,11 kW

CHECAGEM Uma taxa de 0,11 kW é igual a 2300 kcal/dia. Esta é a ordem de grandeza correta.

INDO ALÉM Esta grande perda de energia é aproximadamente igual à taxa metabólica basal de cerca de 120 W. Nós nos protegemos desta grande perda de energia usando roupas que, devido à sua baixa condutividade térmica, têm uma temperatura externa muito menor e, portanto, uma taxa muito menor de radiação térmica.

Quando a temperatura T de um corpo não é tão diferente da temperatura T_0 de sua vizinhança, o corpo ao irradiar obedece à lei de Newton para o resfriamento. Podemos ver isto escrevendo a Equação 20-20 como

$$\begin{aligned} P_{res} &= e\sigma A(T^4 - T_0^4) = e\sigma A(T^2 + T_0^2)(T^2 - T_0^2) \\ &= e\sigma A(T^2 + T_0^2)(T + T_0)(T - T_0) \end{aligned}$$

Quando $T - T_0$ é pequeno, podemos substituir T por T_0 nas duas somas, sem mudar muito o resultado. Então,

$$P_{res} \approx e\sigma A(T_0^2 + T_0^2)(T_0 + T_0)(T - T_0) = 4e\sigma AT_0^3 \Delta T$$

A potência resultante irradiada é aproximadamente proporcional à variação da temperatura, em concordância com a lei de Newton para o resfriamento. Este resultado também pode ser obtido usando-se a aproximação diferencial:

$$\Delta P_r \approx \left.\frac{dP_r}{dT}\right|_{T=T_0} (T - T_0)$$

onde $P_r = e\sigma A(T^4 - T_0^4)$. Para uma pequena variação da temperatura $T - T_0$, temos

$$\Delta P_r = e\sigma A\, 4T^3\Big|_{T=T_0} (T - T_0) = 4e\sigma AT_0^3 \Delta T$$

Ilhas Urbanas de Calor: Noites Quentes na Cidade

Em 1820, Luke Howard publicou registros com listagens da temperatura de Londres e de seus subúrbios durante o dia e a noite, ao longo de vários anos. Seus registros mostraram que Londres era mais quente do que sua vizinhança suburbana e de áreas rurais, e que esta diferença era mais pronunciada durante a noite. Ele descobriu que Londres era, em média, 2,1°C mais quente à noite do que a área rural dos arredores.* Em 2004, observações mostraram que, no verão, Fênix (nos EUA) poderia estar 10°C mais quente à noite do que sua vizinhança.† Londres e Fênix são ilhas urbanas de calor. Em geral, as cidades com ruas pavimentadas e muitos edifícios são mais quentes do que sua vizinhança rural.

Os lados dos edifícios opostos ao Sol aparecem mais escuros, neste termograma de Atlanta, na Geórgia. Isso acontece porque esses lados são mais resfriados do que aqueles que recebem diretamente a luz do Sol. As regiões mais claras correspondem às temperaturas mais altas. *(Nasa/Goddard Space Flight Center Scientific Visualization Studio.)*

Um fator importante na formação dessas ilhas urbanas é a falta de árvores e de outras plantas. Durante o dia, as plantas resfriam a área ao seu redor, devido à quantidade de água que elas liberam, que tem um grande calor latente. Nas áreas rurais, e mesmo em áreas verdes dentro das cidades, muita energia é usada para suprir o calor latente da água, em vez de aumentar a temperatura da superfície.‡ Além disso, as plantas refletem boa parte dos comprimentos de onda na região do infravermelho (calor) da radiação solar, enquanto o asfalto, o aço, o vidro, o concreto e o alumínio absorvem e retêm os comprimentos de onda do infravermelho. Outro fator é a geometria de uma cidade. Cânions urbanos, formados por edifícios altos nos dois lados das ruas, refletem o infravermelho para outras superfícies absorventes.# Áreas abertas permitem que o calor seja irradiado do solo e das estruturas próximas.

Além do calor irradiado, a água das chuvas em áreas urbanas pode ser aquecida por condução, ao escoar. Em agosto de 2001, uma tempestade no estado de Iowa, nos Estados Unidos, aumentou a temperatura de um rio em 10,5°C em uma hora, o que matou muitos peixes.° A água da chuva, enquanto caía, estava mais fria do que a do rio, mas a maior parte da água que entrava no rio naquela primeira hora tinha escoado sobre pavimento quente. Aumentos súbitos de temperatura desse tipo têm sido observados em rios urbanos em Minnesota, Wisconsin, Oregon,§ e Califórnia.¶

Em 1996, para dar suporte às Olimpíadas, um esforço de medidas meteorológicas sem precedentes ocorreu próximo de Atlanta, na Geórgia (EUA).** Uma revelação interessante deste esforço foi que ocorreram mais precipitações na área da cidade que não recebia diretamente o vento, em virtude das alterações de padrões climáticos causadas por convecções típicas de ilhas urbanas de calor.†† Fenômenos semelhantes também foram observados em outras cidades.‡‡ Estas alterações são complexas, mas seus efeitos são mensuráveis.

Planejadores urbanos estão implementando maneiras de resfriar as ilhas urbanas de calor.§§ Em Chicago (EUA), a prefeitura agora tem um "telhado verde" com plantas e calçadas refletoras. A temperatura do teto é monitorada e comparada com o teto asfaltado de um edifício próximo. A temperatura do teto com plantas pode ser mais de 33°C menor que a do teto asfaltado.¤¤ Muitas cidades estimulam o plantio de árvores¶¶ e outras estimulam o uso de superfícies refletoras,‖‖ pavimentos permeáveis e telhados verdes.*** Ilhas urbanas de calor estão sendo controladas por tecnologias frias.

---

* Howard, Luke, *The Climate of London, Deduced from Meteorological Observations Made in the Metropolis and Various Places around It*, 2nd ed. London: Harvey and Darton, 1833.

† Fast, J. D, Torcolini, J. C., and Redman, R., "Pseudovertical Temperature Profiles and the Urban Heat Island Measured by a Temperature Dataloger Network in Phoenix, Arizona," *Journal of Applied Meteorology*, Jan. 2005, Vol. 44, No. 1, 3–13.

‡ Souch, C., and Grimmond, S., "Applied Climatology: Urban Climate," *Progress in Physical Geography*, Feb. 2006, Vol. 30, No. 2, 270–279.

Kusaka, H., and Kimura, F., "Thermal Effects of Urban Canyon Structure on the Nocturnal Heat Island: Numerical Experiment Using a Mesoscale Model Coupled with an Urban Canopy Model," *Journal of Applied Meteorology*, Dec. 2004, Vol. 43, No. 12, 1899–1910.

° Boshart, R., "Urban Trout Stream Still in Works—DNR Targeting McLoud Run in C. R., Despite Recent Fish Kill," *The Gazette*, Aug. 9, 2001, B1+.

§ Frazer, Lance, "Paving Paradise: The Perils of Impervious Surfaces," *Environmental Health Perspective*, Jul. 2005, Vol. 113, No. 7, 456–462.

¶ Fowler, B., and Rasmus, J., "Seaside Solution," *Civil Engineering*, Dec. 2005, 44–49.

** Skindrud, Erik, "Georgia on Their Minds," *Science News*, Jul. 13, 1996. http://www.sciencenews.org/

†† Dixon, P. G., and Mote, T. L., "Patterns and Causes of Atlanta's Urban Heat Island-Initiated Precipitation," *Journal of Applied Meteorology*, Sept. 2003, Vol. 42, No. 9, 1273–1284.

‡‡ Shepard, J., Pierce, H., and Negri, A., "Rainfall Modification by Major Urban Areas: Observations from Spaceborne Rain Radar on the TRMM Satellite," *Journal of Applied Meteorology*, Jul. 2002, Vol. 41, No. 7, 689–701 e "Urban-related Weather Anomalies," *Science News*, Mar. 5, 1977, Vol. 111, No. 10, 152.

§§ Wade, B., "Putting the Freeze on Heat Islands," *American City & County*, Feb. 2000, 30–40.

¤¤ "Monitoring the Rooftop Garden's Benefits," City of Chicago Department of Environment. http://chicagorooftops.notlong.com

¶¶ Duncan, H., "Trees, Please: More Cities Enacting Tree Ordinances, but Enforcement Is the Age-Old Problem," *Macon Telegraph*, July 6, 2006, A1.

‖‖ "NASA Assesses Strategies to 'Turn Off the Heat' in New York City," *Engineered Systems*, April 2006, 79–80.

*** Hoffman, L., "Green Roof Storm Water Modeling," *BioCycle*, Feb. 2006, 38–40.

Resumo

TÓPICO	EQUAÇÕES RELEVANTES E OBSERVAÇÕES	
1. Expansão Térmica		
Coeficiente de expansão linear	$\alpha = \frac{\Delta L/L}{\Delta T}$	20-2
Coeficiente de expansão volumétrica	$\beta = \frac{\Delta V/V}{\Delta T} = 3\alpha$	20-4, 20-5
2. A Equação de Estado de van der Waals	A equação de estado de van der Waals descreve o comportamento de gases reais em um amplo intervalo de temperatura e pressão, levando em conta o espaço ocupado pelas próprias moléculas do gás e a atração entre elas. $\left(P + \frac{an^2}{v^2}\right)(V - bn) = nRT$	20-6
3. Pressão de Vapor	A pressão de vapor é a pressão na qual as fases líquida e gasosa de uma substância estão em equilíbrio a uma dada temperatura. O líquido ferve na temperatura para a qual a pressão externa é igual à pressão de vapor.	
4. O Ponto Triplo	O ponto triplo é um dos valores únicos de temperatura e pressão nos quais as fases gasosa, líquida e sólida de uma substância podem coexistir em equilíbrio. Em temperaturas e pressões abaixo do ponto triplo, a fase líquida de uma substância não pode existir.	
5. Transferência de Calor	Os três mecanismos pelos quais energia é transferida devido à diferença de temperatura são radiação, condução e convecção.	
Lei de Newton para o resfriamento	Para todos os mecanismos de transferência de calor, se a diferença de temperatura entre um corpo e sua vizinhança for pequena, a taxa de resfriamento do corpo é aproximadamente proporcional à diferença de temperatura.	
6. Condução de Calor		
Corrente	A taxa de condução de calor é dada por $I = \frac{dQ}{dt} = -kA\frac{dT}{dx}$ onde I é a corrente térmica, k é o coeficiente de condutividade térmica e dT/dx é o gradiente de temperatura.	20-7
Resistência térmica	$\Delta T = IR$ onde ΔT é o decréscimo da temperatura no sentido da corrente térmica e R é a resistência térmica: $R = \frac{\lvert\Delta x\rvert}{kA}$	20-9 20-10
Resistência equivalente:		
em série	$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots$	20-12
em paralelo	$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots$	20-14
Fator R	O fator R é a resistência térmica em unidades de in · ft² · °F/(Btu/h) para um pé quadrado de uma lâmina de um material $R_f = R_{res}A = \frac{\lvert\Delta x\rvert}{k}$	20-15
7. Radiação Térmica		
Taxa de potência irradiada	$P_r = e\sigma AT^4$ onde $\sigma = 5{,}6703 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2 \cdot K^4}$ é a constante de Stefan e e é a emissividade, que varia entre 0 e 1 (dependendo da composição da superfície do corpo). Materiais que são bons absorvedores de calor também são bons irradiadores de calor.	20-17

TÓPICO	EQUAÇÕES RELEVANTES E OBSERVAÇÕES	
Potência resultante irradiada por um corpo à temperatura T para a sua vizinhança à temperatura T_0	$P_{res} = e\sigma A(T^4 - T_0^4)$	20-20
Corpo negro	Um corpo negro tem uma emissividade de 1. Ele é um radiador perfeito e absorve toda a radiação que sobre ele incide.	
Lei de Wien	O espectro de potência da energia eletromagnética irradiada por um corpo negro tem um máximo em um comprimento de onda $\lambda_{máx}$ que varia inversamente com a temperatura absoluta do corpo:	
	$\lambda_{máx} = \frac{2{,}898 \text{ mm} \cdot \text{K}}{T}$	20-21

Resposta da Checagem Conceitual

20-1 A madeira é um mau condutor de calor e o metal é um bom condutor de calor. Quando seu dedo toca o metal, este retira calor de seu dedo mais rapidamente; logo, o dedo é resfriado a uma taxa maior do que se você tocasse a madeira.

Respostas dos Problemas Práticos

20-1 0,0563 K/W = 56,3 mK/W

20-2 Δx = (1 cm)(429)/(0,026) = 16500 cm = 165 m

20-3 A corrente térmica é de 6200 Btu/h com 2,0 in de isolamento. Assim, a economia máxima adicional é de 6200 Btu/h, o que economizaria um gasto adicional de $146 por mês, durante os meses frios.

Problemas

Em alguns problemas, você recebe mais dados do que necessita; em alguns outros, você deve acrescentar dados de seus conhecimentos gerais, fontes externas ou estimativas bem fundamentadas.

Interprete como significativos todos os algarismos de valores numéricos que possuem zeros em seqüência sem vírgulas decimais.

• Um só conceito, um só passo, relativamente simples
•• Nível intermediário, pode requerer síntese de conceitos
••• Desafiante, para estudantes avançados
Problemas consecutivos sombreados são problemas pareados.

PROBLEMAS CONCEITUAIS

1 • Por que o nível de mercúrio de um termômetro primeiro diminui levemente quando o termômetro é colocado em água aquecida?

2 • Uma grande lâmina de metal tem um orifício no meio. Quando a lâmina é aquecida, a área do orifício (*a*) permanecerá inalterada, (*b*) sempre aumentará, (*c*) sempre diminuirá, (*d*) aumentará se o orifício não estiver exatamente no centro da lâmina, (*e*) diminuirá apenas se o orifício estiver exatamente no centro da lâmina.

3 • Por que é uma má idéia colocar no congelador uma garrafa de vidro fechada, completamente cheia d'água, para fazer gelo?

4 • As janelas de seu laboratório de física são deixadas abertas durante a noite, quando a temperatura exterior cai bem abaixo do ponto de congelamento. Uma régua de aço e uma régua de madeira foram deixadas no peitoril da janela e, quando você chega pela manhã, elas estão, ambas, muito frias. O coeficiente de expansão linear da madeira é de aproximadamente $5 \times 10^{-6}\,K^{-1}$. Qual das réguas você deveria usar para realizar medidas mais precisas de comprimento? Explique sua resposta.

5 • **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** Tiras bimetálicas são usadas em termostatos e em disjuntores de circuitos elétricos. Elas consistem de um par de finas tiras de metais de diferentes coeficientes de expansão térmica, coladas para formar uma única tira com o dobro da espessura. Suponha que uma tira bimetálica seja construída com uma tira de aço e uma tira de cobre, e que ela seja curvada para formar um arco circular, com a tira de aço no lado externo. Se a temperatura diminui, a tira bimetálica tenderá a se retificar ou a se curvar mais ainda?

6 • O metal A tem um coeficiente de expansão linear três vezes maior do que o coeficiente de expansão linear do metal B. Como se comparam os coeficientes de expansão volumétrica β? (*a*) $\beta_A = \beta_B$, (*b*) $\beta_A = 3\beta_B$, (*c*) $\beta_A = 6\beta_B$, (*d*) não é possível responder com os dados fornecidos.

7 • O topo do Monte Rainier está 14 410 ft (4392 m) acima do nível do mar. Os alpinistas dizem que lá não é possível cozinhar um ovo. Esta afirmação é verdadeira porque, no topo do Monte Rainier, (*a*) a temperatura do ar é muito baixa para ferver a água, (*b*) a pressão do ar é muito baixa para que o álcool do fogareiro queime, (*c*) a temperatura de ebulição da água não é alta o suficiente para cozinhar o ovo, (*d*) a quantidade de oxigênio no ar é muito baixa para que haja combustão, (*e*) os ovos sempre quebram nas mochilas dos alpinistas.

8 • Quais os gases da Tabela 20-3 que não podem ser condensados aplicando-se pressão a 20°C? Explique sua resposta.

9 •• Do diagrama de fase da Figura 20-15 podemos tirar a informação de como variam, com a altitude, os pontos de ebulição e de fusão da água. (*a*) Explique como esta informação pode ser obtida. (*b*) Como esta informação pode influenciar os procedimentos de cozimento nas montanhas?

10 •• Esboce um diagrama de fase para o dióxido de carbono, usando informações da Seção 20-3.

11 •• Explique por que o dióxido de carbono em Marte encontra-se no estado sólido nas regiões polares, mesmo sabendo que a

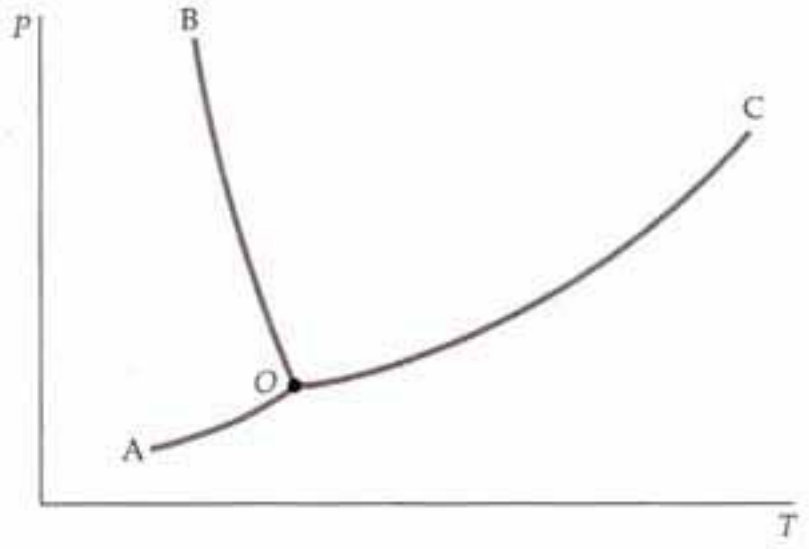


FIGURA 20-15 Problema 9

pressão atmosférica na superfície de Marte é apenas cerca de 1 por cento da pressão atmosférica na superfície da Terra.

12 •• Explique por que diminuir a temperatura de sua casa à noite, no inverno, pode economizar os gastos com aquecimento. Por que o custo do combustível consumido para reaquecer a casa, pela manhã, não é igual à economia feita mantendo-a fria durante a noite?

13 •• Dois cilindros maciços, feitos dos materiais A e B, têm o mesmo comprimento; seus diâmetros estão relacionados por $d_A = 2d_B$. Quando a mesma diferença de temperatura é mantida entre as extremidades dos cilindros, eles conduzem calor com a mesma taxa. As condutividades deles estão, portanto, relacionadas por: (*a*) $k_A = k_B/4$, (*b*) $k_A = k_B/2$, (*c*) $k_A = k_B$, (*d*) $k_A = 2k_B$, (*e*) $k_A = 4k_B$.

14 •• Dois cilindros maciços, feitos dos materiais A e B, têm o mesmo diâmetro; seus comprimentos estão relacionados por $L_A = 2L_B$. Quando a mesma diferença de temperatura é mantida entre as extremidades dos cilindros, eles conduzem calor com a mesma taxa. As condutividades deles estão, portanto, relacionadas por: (*a*) $k_A = k_B/4$, (*b*) $k_A = k_B/2$, (*c*) $k_A = k_B$, (*d*) $k_A = 2k_B$, (*e*) $k_A = 4k_B$.

15 •• Se você tocar a superfície de uma vidraça simples voltada para o interior de uma sala durante um dia muito frio, ela estará fria, mesmo se a temperatura da sala for confortável. Supondo a temperatura da sala igual a 20,0°C e a temperatura no exterior igual a 5,0°C, construa um gráfico de temperatura *versus* posição, iniciando em um ponto 5,0 m atrás da vidraça (no interior da sala) e terminando em um ponto 5,0 m em frente à vidraça. Explique os mecanismos de transferência de calor que ocorrem ao longo deste caminho.

16 •• A reforma de casas antigas em um local de clima frio revelou espaços de 3,5 in (9,0 cm) de espessura entre as paredes e o revestimento externo cheios apenas de ar (sem isolamento). O preenchimento desses espaços com um material isolante certamente reduz os custos com aquecimento e refrigeração, apesar de o material isolante ser melhor condutor de calor do que o ar. Explique por que o uso do isolante térmico é uma boa idéia.

ESTIMATIVA E APROXIMAÇÃO

17 •• Você está fervendo água para preparar uma massa. A receita diz que devem ser usados pelo menos 4,0 L de água. Você coloca os 4,0 L de água à temperatura ambiente dentro da panela e observa que esta quantidade atinge a borda da panela. Conhecendo física, você conta com a expansão volumétrica da panela de aço para manter toda a água dentro, enquanto ela é aquecida até ferver. Sua hipótese está correta? Explique. Se sua hipótese não está correta, quanta água transborda da panela durante a expansão térmica da água?

18 •• Hélio líquido é armazenado em reservatórios contendo um "superisolamento" de 7,00 cm de espessura, que consiste em várias camadas de lâminas de Mylar aluminizadas muito finas. A taxa de evaporação do hélio líquido em um reservatório de 200 L é de aproximadamente 0,700 L por dia, quando o reservatório é armazenado à temperatura ambiente (20°C). A massa específica do hélio líquido é 0,125 kg/L e o calor latente de vaporização é 21,0 kJ/kg. Estime a condutividade térmica do superisolamento.

19 •• **Aplicação Biológica** Estime a condutividade térmica da pele humana.

20 •• Visitando a Finlândia com um colega de faculdade, alguns amigos finlandeses os convidam para participar de um tradicional exercício finlandês, que consiste em sair da sauna, vestindo apenas a roupa de banho, e sair correndo no frio do inverno finlandês. Estime a taxa na qual você inicialmente perde energia para o ar frio. Compare esta taxa de perda inicial de energia com a taxa metabólica de repouso de um ser humano típico, em condições normais de temperatura. Explique a diferença.

21 •• Estime a taxa de condução de calor através de uma porta de madeira de 2,0 in de espessura, em um dia de inverno rigoroso. Inclua a maçaneta de latão. Qual é a razão entre o calor que escapa pela maçaneta e o calor que escapa através de toda a porta? Qual é o fator R total para a porta, incluindo a maçaneta? A condutividade térmica do latão é 85 W/(m · K).

22 •• Estime a emissividade efetiva da Terra a partir da seguinte informação. A constante solar, que é a intensidade de radiação solar incidente na Terra, é cerca de 1,37 kW/m². Setenta por cento desta energia são absorvidos pela Terra, e a temperatura média da superfície da Terra é 288 K. (Suponha que a área efetiva que absorve a luz seja πR^2, onde R é o raio da Terra, enquanto a área de emissão de corpo negro é $4\pi R^2$.)

23 •• Buracos negros são remanescentes altamente condensados de estrelas. Alguns buracos negros, junto com uma estrela normal, formam sistemas binários. Em tais sistemas, o buraco negro e a estrela normal orbitam em torno do centro de massa do sistema. Uma maneira de se detectar buracos negros a partir da Terra é através da observação do calor gerado pelo atrito dos gases atmosféricos da estrela normal que caem no buraco negro. Esses gases podem atingir temperaturas maiores do que $1{,}0 \times 10^6$ K. Supondo que o gás que está caindo no buraco negro possa ser visto como um corpo negro radiador, estime o $\lambda_{máx}$ usado na detecção astronômica de um buraco negro. (Esta região está na faixa dos raios X do espectro eletromagnético.)

24 ••• **Aplicação em Engenharia, Rico em Contexto** Seu chalé de inverno tem paredes de toras de pinho com espessura média de cerca de 20 cm. Você decide melhorar o acabamento do interior do chalé, por questão de aparência e para aumentar o isolamento das paredes externas. Você compra um isolamento com um fator R de 31 para recobrir as paredes. Além disso, você reveste o isolamento com uma lâmina de gesso de 1,0 in (2,5 cm) de espessura. Supondo que a transferência de calor ocorra apenas devido à condução, estime a razão entre a corrente térmica através das paredes, durante uma noite fria de inverno antes da reforma, e a corrente térmica através das paredes depois da reforma.

25 ••• **Rico em Contexto** Você está encarregado de cruzar o país transportando um fígado para uma cirurgia de transplante. O fígado é mantido frio em uma caixa de isopor inicialmente cheia com 1,0 kg de gelo. É crucial que a temperatura do fígado nunca ultrapasse os 5,0°C. Supondo que a viagem do hospital de origem até o hospital de destino leve 7,0 h, estime o fator R que as paredes da caixa de isopor devem ter.

EXPANSÃO TÉRMICA

26 •• Você herdou o relógio de pêndulo do avô de seu avô, que foi calibrado quando a temperatura da sala era 20°C. O pêndulo consiste em um fino bastão de latão, de massa desprezível, com um disco maciço e pesado na extremidade. (*a*) Durante um dia quente, quando a temperatura é 30°C, o relógio anda mais rápido ou anda

mais devagar? Explique. (*b*) Quanto que ele adianta ou atrasa, durante este dia?

27 •• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** Você precisa encaixar um anel de cobre firmemente em torno de uma haste de aço com 6,0000 cm de diâmetro a 20°C. O diâmetro interno do anel, nesta temperatura, é 5,9800 cm. Qual deve ser a temperatura do anel de cobre, para que ele encaixe na haste sem folga, supondo que ela permaneça a 20°C?

28 •• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** Você tem um anel de cobre e uma haste de aço. A 20°C, o anel tem um diâmetro interno de 5,9800 cm e a haste de aço tem um diâmetro de 6,0000 cm. O anel de cobre foi aquecido. Quando seu diâmetro interno excedeu os 6,0000 cm, ele foi encaixado na haste, tendo ficado firmemente preso a ela, depois de retornar à temperatura ambiente. Agora, muitos anos depois, você precisa remover o anel da haste. Para isto, você aquece ambos até conseguir fazer deslizar o anel para fora da haste. Que temperatura deve ter o anel para começar a deslizar pela haste?

29 •• Um recipiente é preenchido até a borda com 1,4 L de mercúrio a 20°C. Enquanto a temperatura do recipiente e do mercúrio aumenta até 60°C, um total de 7,5 mL de mercúrio transborda do recipiente. Determine o coeficiente de expansão linear do material de que é feito o recipiente.

30 •• Um carro, com um tanque de gasolina de aço com capacidade de 60,0 L, é abastecido até a borda com 60,0 L de gasolina quando a temperatura externa é 10°C. Quanta gasolina é derramada do tanque quando a temperatura externa aumenta para 25°C? Leve em conta a expansão do tanque de aço.

31 ••• Qual é a tensão de tração no anel de cobre do Problema 27 quando sua temperatura volta aos 20°C?

A EQUAÇÃO DE VAN DER WAALS, ISOTERMAS LÍQUIDO-VAPOR E DIAGRAMAS DE FASE

32 • (*a*) Calcule o volume de 1,00 mol de um gás ideal à temperatura de 100°C e à pressão de 1,00 atm. (*b*) Calcule a temperatura na qual 1,00 mol de vapor à pressão de 1,00 atm tem o volume calculado na Parte (*a*). Use $a = 0{,}550\ \text{Pa} \cdot \text{m}^6/\text{mol}^2$ e $b = 30{,}0\ \text{cm}^3/\text{mol}$.

33 •• Usando a Figura 20-16, determine as seguintes quantidades. (*a*) A temperatura de ebulição da água em uma montanha onde a pressão atmosférica é 70,0 kPa, (*b*) a temperatura de ebulição da água em um recipiente onde a pressão interna é 0,500 atm e (*c*) a pressão na qual a água ferve a 115°C.

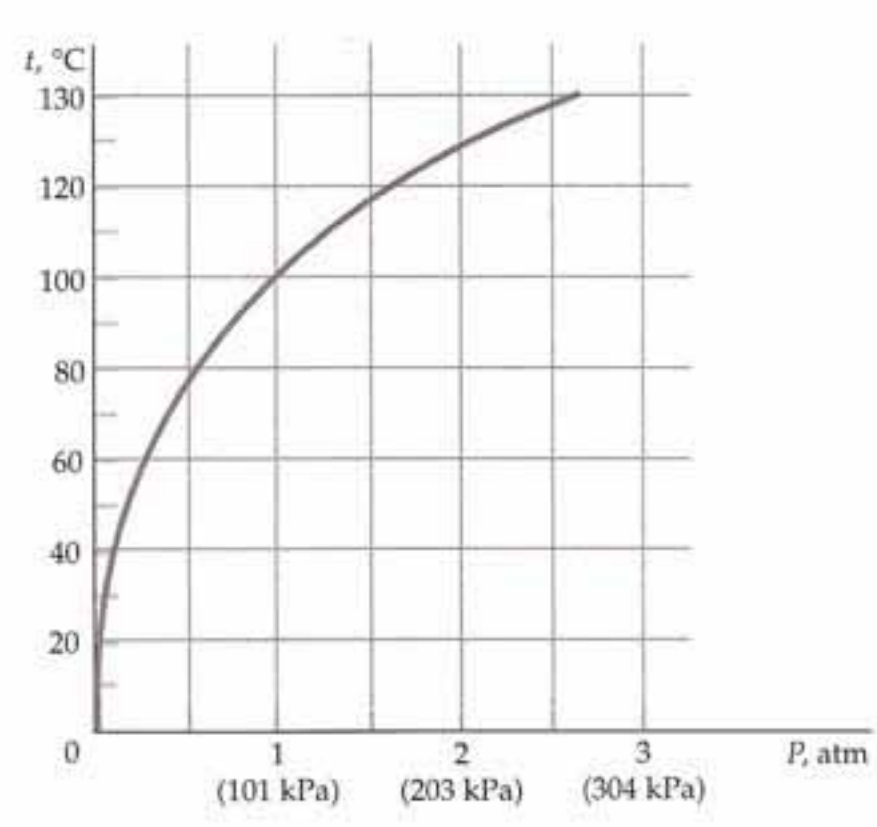


FIGURA 20-16 Problema 33

34 •• As constantes de van der Waals para o hélio são $a = 0{,}03412\ \text{L}^2 \cdot \text{atm/mol}^2$ e $b = 0{,}0237\ \text{L/mol}$. Use estes dados para determinar o volume ocupado por um átomo de hélio, em centímetros cúbicos. Estime, então, o raio do átomo de hélio.

CONDUÇÃO

35 • Uma lâmina de isolamento, de 20 ft × 30 ft (6 m × 9 m), tem um fator *R* igual a 11. A que taxa o calor é conduzido através da lâmina, se a temperatura em um lado é constante e igual a 68°F e, no outro lado, é constante e igual a 30°F?

36 •• Um cubo de cobre e um cubo de alumínio, cada um com 3,00 cm de aresta, são dispostos como mostrado na Figura 20-17. Determine (*a*) a resistência térmica de cada cubo, (*b*) a resistência térmica da combinação dos dois cubos, (*c*) a corrente térmica *I* e (*d*) a temperatura na interface entre os dois cubos.

FIGURA 20-17
Problema 36

37 •• Dois cubos metálicos, um de cobre e um de alumínio, cada um com 3,00 cm de aresta, estão dispostos em paralelo, como mostra a Figura 20-18. Determine (*a*) a corrente térmica em cada cubo, (*b*) a corrente térmica total e (*c*) a resistência térmica da combinação dos dois cubos.

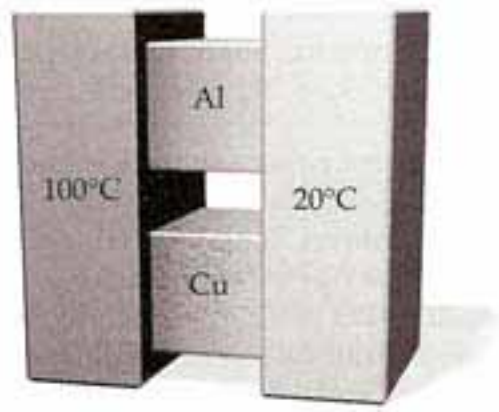


FIGURA 20-18
Problema 37

38 •• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** O custo com a refrigeração de uma casa é aproximadamente proporcional à taxa na qual o calor é absorvido pela casa, de suas vizinhanças, dividida pelo coeficiente de desempenho do aparelho de ar condicionado. Seja ΔT a diferença de temperatura entre o interior da casa e o exterior. Supondo que a taxa na qual o calor é absorvido por uma casa seja proporcional a ΔT e que o aparelho de ar condicionado esteja operando em condições ideais, mostre que o custo com a refrigeração é proporcional a $(\Delta T)^2$ dividido pela temperatura no interior da casa.

39 •• Uma casca esférica de condutividade *k* tem um raio interno r_1 e um raio externo r_2 (Figura 20-19). O interior da casca é mantido a uma temperatura T_1 e o exterior é mantido a uma temperatura T_2, com $T_1 < T_2$. Neste problema, você deve mostrar que a corrente térmica através da casca é dada por

$$I = -\frac{4\pi k r_1 r_2}{r_2 - r_1}(T_2 - T_1)$$

onde *I* é positivo se o calor é transferido no sentido $+r$. Eis uma sugestão de procedimento para chegar a este resultado: (1) obtenha uma expressão para a corrente térmica *I* através de uma fina casca

esférica de raio r e espessura dr quando há uma diferença de temperatura dT ao longo da espessura da casca; (2) explique por que a corrente térmica é a mesma através de qualquer dessas cascas finas; (3) expresse a corrente térmica I através de um desses elementos de casca em termos da área $A = 4\pi r^2$, da espessura dr e da diferença de temperatura dT através do elemento; e (4) separe as variáveis (resolva para dT em termos de r e dr) e integre.

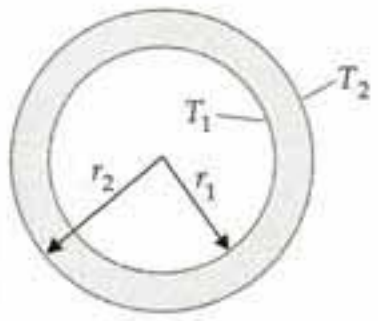


FIGURA 20-19
Problema 39

RADIAÇÃO

40 • **APLICAÇÃO BIOLÓGICA** Calcule $\lambda_{máx}$ (o comprimento de onda no qual a potência emitida é máxima) para a pele humana. Suponha que a pele humana seja um emissor do tipo corpo negro com uma temperatura de 33°C.

41 • O universo está permeado de uma radiação que se acredita ter sido emitida no *Big Bang*. Supondo que todo o universo seja um corpo negro a uma temperatura de 2,3 K, quanto vale o $\lambda_{máx}$ (o comprimento de onda no qual a potência da radiação é máxima) desta radiação?

42 • Qual é a faixa de temperaturas nas superfícies das estrelas para a qual $\lambda_{máx}$ (o comprimento de onda no qual a potência da radiação emitida é máxima) está no intervalo visível?

43 • Os fios de aquecimento de um aquecedor elétrico de 1,00 kW ficam vermelhos a uma temperatura de 900°C. Supondo que 100 por cento do calor liberado seja de radiação e que os fios sejam emissores do tipo corpo negro, qual é a área efetiva da superfície que irradia? (Suponha uma temperatura ambiente de 20°C.)

44 •• Uma esfera maciça de cobre escurecida, com raio igual a 4,0 cm, é mantida suspensa em um reservatório evacuado cujas paredes estão a uma temperatura de 20°C. Se a esfera está inicialmente a 0°C, determine a taxa inicial na qual sua temperatura varia, supondo que o calor seja transferido apenas por radiação. (Considere a esfera como um emissor do tipo corpo negro.)

45 •• A temperatura da superfície do filamento de uma lâmpada incandescente é 1300°C. Se a potência elétrica de alimentação for duplicada, qual será a nova temperatura? *Dica: Mostre que você pode desprezar a temperatura do ambiente.*

46 •• Hélio líquido é armazenado no seu ponto de ebulição (4,2 K) em um recipiente esférico que está separado, por uma região evacuada, de um revestimento que é mantido à temperatura de nitrogênio líquido (77 K). Se o recipiente tem 30 cm de diâmetro e é escurecido no lado externo para que atue como um emissor do tipo corpo negro, quanto hélio ferve por hora?

PROBLEMAS GERAIS

47 • Uma fita de aço é colocada em volta da Terra no equador quando a temperatura é 0°C. Qual será a distância entre a fita e o solo (considerada uniforme) se a temperatura da fita aumentar para 30°C? Despreze a expansão da Terra.

48 •• Mostre que a variação da massa específica ρ de um material isotrópico, devida a um aumento de temperatura ΔT, é dada por $\Delta\rho = -\beta\rho\Delta T$.

49 •• A constante solar é a potência recebida do Sol por unidade de área perpendicular aos raios do Sol, na configuração de distância média entre Terra e Sol. Seu valor, na atmosfera superior da Terra, é de aproximadamente 1,37 kW/m². Calcule a temperatura efetiva do Sol, se ele irradia como um corpo negro. (O raio do Sol é $6{,}96 \times 10^8$ m.)

50 •• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** Trabalhando nas férias como estagiário em uma fábrica de isolamento, você deve terminar o fator R de um certo material isolante. Este material vem em lâminas de $\frac{1}{2}$ in (1,27 cm). Com ele, você constrói um cubo oco de 12 in (30,5 cm) de aresta. Você coloca um termômetro e um aquecedor de 100 W no interior da caixa. Depois de atingido o equilíbrio térmico, a temperatura no interior da caixa é 90°C e a temperatura fora da caixa é 20°C. Determine o fator R do material.

51 • (*a*) Da definição de β, o coeficiente de expansão volumétrica (à pressão constante), mostre que $\beta = 1/T$ para um gás ideal. (*b*) O valor experimental de β para o gás N_2 a 0°C é 0,003673 K^{-1}. Qual é a diferença percentual entre este valor medido de β e o valor obtido supondo o N_2 um gás ideal?

52 •• Um bastão de comprimento L_A, feito do material A, é colocado próximo a um bastão de comprimento L_B, feito do material B. Os bastões permanecem em equilíbrio térmico entre si. (*a*) Mostre que, mesmo que os comprimentos de cada bastão variem com a variação da temperatura ambiente, a diferença entre os dois comprimentos permanecerá constante se os comprimentos L_A e L_B forem escolhidos de maneira tal que $L_A/L_B = \alpha_B/\alpha_A$, onde α_A e α_B são os respectivos coeficientes de expansão linear. (*b*) Se o material B é o aço, se o material A é o latão e se $L_A = 250$ cm a 0°C, qual é o valor de L_B?

53 •• Na média, a temperatura da crosta da Terra aumenta 1,0°C para cada 30 m de profundidade. A condutividade térmica média do material da crosta terrestre é 0,74 J/(m · s · K). Qual é a perda de calor da Terra, por segundo, devida à condução a partir do núcleo? Como esta perda de calor se compara com a potência média recebida do Sol?

54 •• Uma panela de fundo de cobre, contendo 0,800 L de água fervendo, seca em 10,0 min. Supondo que todo o calor seja transferido através do fundo de cobre, que tem um diâmetro de 15,0 cm e uma espessura de 3,00 mm, calcule a temperatura externa à base de cobre enquanto ainda há alguma água na panela.

55 •• **APLICAÇÃO EM ENGENHARIA** Um tanque cilíndrico de aço, com água quente, tem um diâmetro interno de 0,550 m e uma altura interna de 1,20 m. O tanque está envolvido por uma camada isolante de lã de vidro de 5,00 cm de espessura, cuja condutividade térmica é 0,0350 W/(m · K). O isolamento é coberto por uma fina camada metálica. O tanque de aço e a camada metálica têm condutividades térmicas muito maiores do que a da lã de vidro. Quanta potência elétrica deve ser fornecida a este tanque para manter a temperatura da água em 75,0°C, quando a temperatura externa é 1,0°C?

56 •• O diâmetro d de um bastão cônico de comprimento L é dado por $d = d_0(1 + ax)$, onde a é uma constante e x é a distância até uma das extremidades. Se a condutividade térmica do material é k, qual é a resistência térmica do bastão?

57 ••• Um disco maciço, de raio r e massa m, está girando sem atrito em torno de um eixo que passa perpendicularmente pelo seu centro de massa, com velocidade angular ω_1 a uma temperatura T_1. A temperatura do disco diminui para T_2. Expresse a velocidade angular ω_2, a energia cinética rotacional K_2 e a quantidade de movimento angular L_2 em termos de seus valores à temperatura T_1 e do coeficiente de expansão linear α do disco.

58 ••• **PLANILHA ELETRÔNICA** Escreva um programa de **planilha eletrônica** para traçar um gráfico da temperatura média da superfície da Terra como função da emissividade, usando os resultados do Problema 22. De quanto a emissividade deve variar para que a temperatura média aumente de 1 K? Este resultado pode ser pensado como um modelo para o efeito das crescentes concentrações de gases de efeito estufa, como o metano e o CO_2, na atmosfera da Terra.

59 ••• Um pequeno lago tem uma camada de gelo de 1,00 cm de espessura em sua superfície. (*a*) Se a temperatura do ar é −10°C em um dia com brisa, determine a taxa, em centímetros por hora, na qual gelo é acrescentado ao fundo da camada. A massa específica do gelo é 0,917 g/cm³. (*b*) Quanto tempo você e seus amigos devem esperar para que uma camada de 20,0 cm se forme, permitindo que vocês joguem hóquei?

60 ••• Um cubo de cobre escurecido, com 1,00 cm de aresta, é aquecido até uma temperatura de 300°C e, então, colocado em uma câmara evacuada com paredes a uma temperatura de 0°C. Na câmara de vácuo o cubo resfria por irradiação. (*a*) Mostre que a temperatura (absoluta) T do cubo obedece à equação diferencial: $(dT/dt) = -(e\sigma A/C)(T^4 - T_0^4)$, onde C é a capacidade térmica do cubo, A é a área de sua superfície, e é a emissividade e T_0 é a temperatura da câmara de vácuo. (*b*) Usando o método de Euler (Seção 5-4 do Capítulo 5), resolva numericamente a equação diferencial para determinar $T(t)$ e mostre sua resposta em um gráfico. Suponha $e = 1{,}00$. Quanto tempo leva para que o cubo resfrie a uma temperatura de 15°C?

Tutorial Matemático

M-1 Algarismos Significativos
M-2 Equações
M-3 Proporções Diretas e Inversas
M-4 Equações Lineares
M-5 Equações Quadráticas e Fatoração
M-6 Expoentes e Logaritmos
M-7 Geometria
M-8 Trigonometria
M-9 A Expansão Binomial
M-10 Números Complexos
M-11 Cálculo Diferencial
M-12 Cálculo Integral

Neste tutorial, revisamos alguns dos resultados básicos de álgebra, geometria, trigonometria e cálculo. Em muitos casos, meramente enunciamos resultados sem prova. A Tabela M-1 lista alguns símbolos matemáticos.

M-1 ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

Muitos dos números com que trabalhamos, em ciência, são o resultado de medidas e, portanto, conhecidos apenas dentro de um certo grau de incerteza. Esta incerteza deve ser refletida no número de algarismos utilizados. Por exemplo, se você tem uma régua de 1 metro, graduada em centímetros, você sabe que pode medir a altura de uma caixa com a precisão de um quinto de centímetro, mais ou menos. Usando esta régua, você pode encontrar um comprimento da caixa de 27,0 cm. Se a graduação de sua régua for em milímetros, talvez você possa medir a altura da caixa como 27,03 cm. No entanto, se sua régua é graduada em milímetros, talvez você não seja capaz de medir a altura com uma precisão maior do que 27,03 cm, porque a altura pode variar uns 0,01 cm, dependendo de qual parte da caixa você toma para fazer a medida. Quando você escreve que a altura da caixa é 27,03 cm, está afirmando que sua melhor estimativa do comprimento é 27,03 cm, mas não está alegando que ele vale exatamente 27,030000... cm. Os quatro algarismos em 27,03 cm são chamados de **algarismos significativos**. Seu comprimento medido, 2,703 m, possui quatro algarismos significativos.

O número de algarismos significativos no resultado de um cálculo dependerá do número de algarismos significativos dos dados. Quando você trabalha com números que têm incertezas, deve cuidar para não incluir mais algarismos do que a certeza da medida garante. Cálculos *aproximados* (estimativas de ordens de grandeza) sempre resultam em respostas que têm apenas um algarismo significativo, ou nenhum. Ao multiplicar, dividir, somar ou subtrair números, você deve considerar a precisão dos resultados. A seguir, estão listadas algumas regras que o ajudarão a determinar o número de algarismos significativos de seus resultados.

1. Ao multiplicar ou dividir quantidades, o número de algarismos significativos do resultado final não deve ser maior do que o da quantidade com o menor número de algarismos significativos.
2. Ao somar ou subtrair quantidades, o número de casas decimais do resultado deve ser igual ao da quantidade com o menor número de casas decimais.
3. Valores exatos possuem um número ilimitado de algarismos significativos. Por exemplo, um valor a que se chegou por contagem, como 2 mesas, não apresenta incerteza e é um valor exato. Além disso, o fator de conversão 0,0254000... m/in é um valor exato, porque 1,000... polegada é exatamente igual a 0,0254000...

Tabela M-1 Símbolos Matemáticos

$=$	é igual a
$\neq$	é diferente de
$\approx$	é aproximadamente igual a
$\sim$	é da ordem de
$\propto$	é proporcional a
$>$	é maior do que
$\geq$	é maior ou igual a
$\gg$	é muito maior do que
$<$	é menor do que
$\leq$	é menor ou igual a
$\ll$	é muito menor do que
Δx	variação de x
$\lvert x \rvert$	valor absoluto de x
Σ	soma
lim	limite
$\Delta t \to 0$	Δt tende a zero
$\frac{dx}{dt}$	derivada de x em relação a t
$\frac{\partial x}{\partial t}$	derivada parcial de x em relação a t
$\int$	integral

metros. (A jarda é, por definição, igual a exatamente 0,9144 metros, e 0,9144 dividido por 36 é exatamente igual a 0,0254.)

4. Às vezes os zeros são significativos, outras vezes não. Se um zero está antes do primeiro algarismo não-nulo, então o zero é não significativo. Por exemplo, o número 0,00890 possui três algarismos significativos. Os primeiros três zeros não são algarismos significativos, e indicam apenas a posição da vírgula decimal. Note que o zero após o nove é significativo.
5. Zeros entre algarismos não-nulos são significativos. Por exemplo, 5603 possui quatro algarismos significativos.
6. O número de algarismos significativos em números com zeros em seqüência sem vírgula decimal é ambíguo. Por exemplo, 31000 pode ter cinco algarismos significativos, ou dois algarismos significativos. Para evitar ambigüidade, você deve informar valores usando notação científica, ou uma vírgula decimal.

Exemplo M-1 Determinando a Média de Três Números

Determine a média de 19,90; −7,524 e −11,8179.

SITUAÇÃO Você somará três números, e depois dividirá o resultado por três. Os primeiros dois números possuem quatro algarismos significativos e o terceiro possui seis.

SOLUÇÃO

1. Some os três números. $19{,}90 + (-7{,}524) + (-11{,}8179) = 0{,}5581$
2. Se o problema tivesse pedido apenas a soma dos três números, arredondaríamos o resultado até o menor número de casas decimais dos três números que estão sendo somados. No entanto, devemos dividir este resultado intermediário por 3, de forma que usamos o resultado intermediário com os dois algarismos extras (em itálico). $\frac{0{,}5581}{3} = 0{,}1860333\ldots$
3. Apenas dois dos algarismos na resposta intermediária, 0,1860333..., são algarismos significativos, e então devemos arredondar este número para obter o resultado final. O número 3 no denominador é um número inteiro e tem um número ilimitado de algarismos significativos. Então, a resposta final possui o mesmo número de algarismos significativos que o numerador, que é 2. A resposta final é $\boxed{0{,}19}$.

CHECAGEM A soma no passo 1 tem dois algarismos significativos após a vírgula decimal, o mesmo que o número a ser somado que possui o menor número de algarismos significativos após a vírgula decimal.

PROBLEMAS PRÁTICOS

1. $\frac{5{,}3\ \text{mol}}{22{,}4\ \text{mol/L}}$
2. 57,8 m/s − 26,24 m/s

M-2 EQUAÇÕES

Uma **equação** é uma assertiva escrita usando números e símbolos para indicar que duas quantidades, escritas uma de cada lado de um sinal de igualdade (=), são iguais. As quantidades de cada lado do sinal de igualdade podem consistir em um único termo, ou da soma ou diferença de dois ou mais **termos**. Por exemplo, a equação $x = 1 - (ay + b)/(cx - d)$ contém três termos, x, 1 e $(ay + b)/(cx - d)$.

Você pode realizar as seguintes operações com equações:

1. A mesma quantidade pode ser somada a ou subtraída de cada lado de uma equação.
2. Cada lado de uma equação pode ser multiplicado ou dividido pela mesma quantidade.
3. Cada lado de uma equação pode ser elevado à mesma potência.

Estas operações devem ser aplicadas a cada *lado* da equação, e não a cada termo. (Como a multiplicação é distributiva em relação à adição, a operação 2 — e somente a operação 2 — também se aplica termo-a-termo.)

Cuidado: *A divisão por zero é proibida em* cada *passo da solução de uma equação; isto tornaria os resultados (se existentes) inválidos.*

Somando ou Subtraindo a Mesma Quantidade
Para determinar x quando $x - 3 = 7$, some 3 aos dois lados da equação: $(x - 3) + 3 = 7 + 3$; assim, $x = 10$.

Multiplicando ou Dividindo pela Mesma Quantidade
Se $3x = 17$, determine x dividindo os dois lados da equação por 3; assim, $x = \frac{17}{3}$, ou 5,7.

Exemplo M-2 Simplificando Inversos em uma Equação

Determine x, para a seguinte equação:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

Equações contendo inversos de incógnitas ocorrem na óptica geométrica ou em análise de circuitos elétricos — por exemplo, na determinação da resistência equivalente para resistores em paralelo.

SITUAÇÃO Nesta equação, o termo que contém x está do mesmo lado da equação em que se encontra um termo que não contém x. Além disso, x está no denominador de uma fração.

SOLUÇÃO

1. Subtraia $\frac{1}{4}$ de cada lado: $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$
2. Simplifique o lado direito da equação usando o mínimo denominador comum: $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$ logo $\frac{1}{x} = \frac{1}{12}$
3. Multiplique os dois lados da equação por $12x$ para determinar o valor de x: $12x\frac{1}{x} = \cancel{12}x\frac{1}{\cancel{12}}$

$$\boxed{12} = x$$

CHECAGEM Substitua x por 12 no lado esquerdo da equação original.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

PROBLEMAS PRÁTICOS Resolva para x cada uma das seguintes equações.

3. $(7{,}0\ \text{cm}^3)x = 18\ \text{kg} + (4{,}0\ \text{cm}^3)x$
4. $\frac{4}{x} + \frac{1}{3} = \frac{3}{x}$

M-3 PROPORÇÕES DIRETAS E INVERSAS

Quando dizemos que as variáveis x e y são **diretamente proporcionais** estamos dizendo que, quando x e y variam, a razão x/y permanece constante. Dizer que duas quantidades são proporcionais é dizer que elas são diretamente proporcionais. Quando dizemos que as variáveis x e y são **inversamente proporcionais** estamos dizendo que, quando x e y variam, o produto xy é constante.

Relações de proporções diretas e inversas são comuns em física. Corpos que se movem com a mesma velocidade possuem as quantidades de movimento linear diretamente proporcionais às suas massas. A lei dos gases ideais ($PV = nRT$) estabelece que a pressão P é diretamente proporcional à temperatura (absoluta) T, quando o volume V permanece constante, e é inversamente proporcional ao volume, quando a temperatura permanece constante. A lei de Ohm ($V = IR$) afirma que a tensão V através de um resistor é diretamente proporcional à corrente elétrica no resistor quando a resistência R permanece constante.

CONSTANTE DE PROPORCIONALIDADE

Quando duas quantidades são diretamente proporcionais, elas se relacionam através de uma *constante de proporcionalidade*. Se você recebe, por um trabalho regular, R reais por dia, por exemplo, o valor v que você recebe é diretamente proporcional ao tempo t que você trabalha; a taxa R é a constante de proporcionalidade que relaciona o valor recebido em reais com o tempo trabalhado em dias, t:

$$\frac{v}{t} = R \qquad \text{ou} \qquad v = Rt$$

Se você recebe 400 reais em 5 dias, o valor de R é R\$400/(5 dias) = R\$80/dia. Para determinar o valor que você recebe em 8 dias, basta fazer o cálculo

$$v = (\text{R\$80/dia})(8 \text{ dias}) = \$640$$

Às vezes, a constante de proporcionalidade pode ser ignorada em problemas de proporção. Como o valor que você recebe em 8 dias é $\frac{8}{5}$ vezes o valor que você recebe em 5 dias, esse valor é

$$v = \frac{8}{5}(\text{R\$400}) = \text{R\$640}$$

Exemplo M-3 Pintando Cubos

Você precisa de 15,4 mL de tinta para pintar um lado de um cubo. A área de um lado do cubo é 426 cm². Qual é a relação entre o volume da tinta necessária e a área a ser recoberta? Quanta tinta é necessária para pintar um lado de um cubo cujo lado possui uma área de 503 cm²?

SITUAÇÃO Para determinar a quantidade de tinta para um lado cuja área é 503 cm², você precisa estabelecer uma proporção.

SOLUÇÃO

1. O volume V da tinta necessária cresce proporcionalmente à área A a ser pintada. — V e A são diretamente proporcionais.

   Isto é, $\frac{V}{A} = k$ ou $V = kA$

   onde k é a constante de proporcionalidade

2. Determine o valor da constante de proporcionalidade, usando os dados fornecidos $V_1 = 15{,}4$ mL e $A_1 = 426$ cm²: $k = \frac{V_1}{A_1} = \frac{15{,}4 \text{ mL}}{426 \text{ cm}^2} = 0{,}0361 \text{ mL/cm}^2$

3. Determine o volume necessário de tinta para pintar um lado de um cubo cuja área vale 503 cm², usando a constante de proporcionalidade do passo 1: $V_2 = kA_2 = (0{,}0361 \text{ mL/cm}^2)(503 \text{ cm}^2) =$ **18,2 mL**

CHECAGEM Nosso valor para V_2 é maior do que o valor de V_1, como esperado. A quantidade de tinta necessária para recobrir uma área igual a 503 cm² deve ser maior do que a quantidade de tinta necessária para recobrir uma área de 426 cm², porque 503 cm² é maior do que 426 cm².

PROBLEMAS PRÁTICOS

5. Um recipiente cilíndrico contém 0,384 L de água, quando cheio. Quanta água poderia conter o recipiente, se seu raio fosse dobrado e sua altura permanecesse a mesma?
   Dica: O volume de um cilindro circular reto é dado por $V = \pi r^2 h$, onde r é seu raio e h é sua altura. Assim, V é diretamente proporcional a r^2 quando h permanece constante.
6. Quanta água poderia conter o recipiente do Problema Prático 5, se tanto sua altura quanto seu raio fossem dobrados?

M-4 EQUAÇÕES LINEARES

Uma **equação linear** é uma equação da forma $x + 2y - 4z = 3$. Isto é, uma equação é linear se cada termo ou é constante ou é o produto de uma constante por uma variável elevada à primeira potência. Tais equações são ditas lineares porque são representadas graficamente por linhas retas ou planos. As relações de proporção direta entre duas variáveis são equações lineares.

GRÁFICO DE UMA LINHA RETA

Uma equação linear que relaciona y com x pode sempre ser colocada na forma padrão

$$y = mx + b \qquad \text{M-1}$$

onde m e b são constantes que podem ser positivas ou negativas. A Figura M-1 mostra um gráfico dos valores de x e y que satisfazem à Equação M-1. A constante b é a **interseção com o eixo y**, o valor de y em $x = 0$. É o chamado coeficiente linear. A constante m é a **inclinação** da reta, que é igual à razão entre a variação de y e a correspondente variação de x. É o chamado coeficiente angular. Na figura, indicamos dois pontos sobre a reta, (x_1, y_1) e (x_2, y_2), e as variações $\Delta x = x_2 - x_1$ e $\Delta y = y_2 - y_1$. A inclinação m, então, vale

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Se x e y são ambos incógnitas na equação $y = mx + b$, não há valores únicos de x e y que sejam soluções da equação. Qualquer par de valores (x_1, y_1) sobre a reta da Figura M-1 irá satisfazer à equação. Se tivermos duas equações, cada uma com as mesmas duas incógnitas x e y, as equações podem ser resolvidas simultaneamente para as duas incógnitas. O Exemplo M-4 mostra como equações lineares simultâneas podem ser resolvidas.

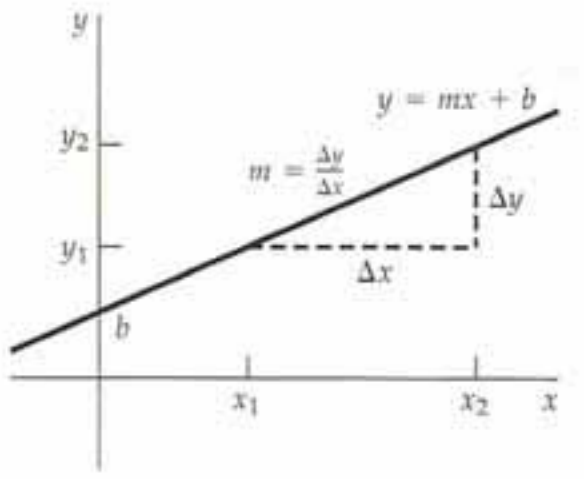


FIGURA M-1 Gráfico da equação linear $y = mx + b$, onde b é a interseção com o eixo y e $m = \Delta y/\Delta x$ é a inclinação.

Exemplo M-4 Usando Duas Equações para Determinar Duas Incógnitas

Determine todos os valores de x e y que satisfaçam, simultaneamente, a

$$3x - 2y = 8 \qquad \text{M-2}$$

e

$$y - x = 2 \qquad \text{M-3}$$

SITUAÇÃO A Figura M-2 mostra um gráfico das duas equações. No ponto de interseção das duas retas, os valores de x e y satisfazem às duas equações. Podemos resolver duas equações simultâneas primeiro explicitando, em uma das equações, uma das variáveis em termos da outra variável, e depois substituindo o resultado na outra equação.

SOLUÇÃO

1. Explicite y na Equação M-3: $y = x + 2$
2. Substitua este valor de y na Equação M-2: $3x - 2(x + 2) = 8$
3. Simplifique a equação e determine x:
$$3x - 2x - 4 = 8$$
$$x - 4 = 8$$
$$x = \boxed{12}$$
4. Use sua solução para x, e uma das equações dadas, para determinar o valor de y:
$$y - x = 2, \quad \text{onde } x = 12$$
$$y - 12 = 2$$
$$y = 2 + 12 = \boxed{14}$$

CHECAGEM Um método alternativo é o de multiplicar uma das equações por uma constante que faça com que um termo que contenha uma incógnita seja eliminado quando as equações são somadas ou subtraídas. Podemos multiplicar a Equação M-3 por 2

$$2(y - x) = 2(2)$$
$$2y - 2x = 4$$

e somar o resultado à Equação M-2 para determinar x:

$$\begin{array}{r} 2y - 2x = 4 \\ 3x - 2y = 8 \\ \hline 3x - 2x = 12 \Rightarrow x = 12 \end{array}$$

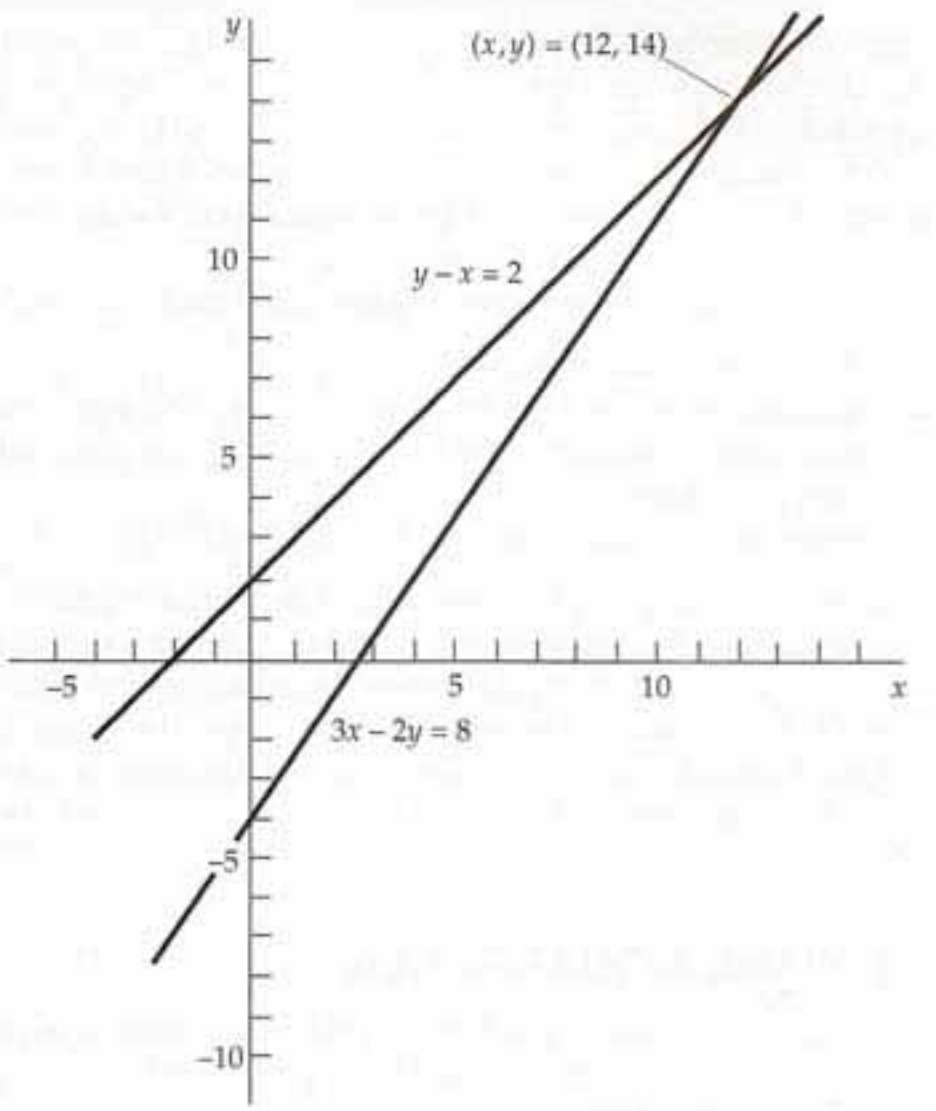


FIGURA M-2 Gráfico das Equações M-2 e M-3. No ponto de interseção das linhas, os valores de x e de y satisfazem às duas equações.

Substitua na Equação M-3 e determine y:

$$y - 12 = 2 \Rightarrow y = 14$$

PROBLEMAS PRÁTICOS

7. Verdadeiro ou falso: $xy = 4$ é uma equação linear.
8. No tempo $t = 0{,}0$ s, a posição de uma partícula que se move no eixo x com velocidade constante é $x = 3{,}0$ m. Em $t = 2{,}0$ s, a posição é $x = 12{,}0$ m. Escreva uma equação linear mostrando a relação entre x e t.
9. Resolva o seguinte par de equações simultâneas para x e y:

$$\frac{5}{4}x + \frac{1}{3}y = 30$$
$$y - 5x = 20$$

M-5 EQUAÇÕES QUADRÁTICAS E FATORAÇÃO

Uma **equação quadrática** é uma equação com a forma $ax^2 + bxy + cy^2 + ex + fy + g = 0$, onde x e y são variáveis e a, b, c, e, f e g são constantes. Em cada termo da equação as potências das variáveis são inteiros cuja soma vale 2, 1 ou 0. A designação *equação quadrática* usualmente se aplica a uma equação de uma variável que possa ser escrita na forma padrão

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{M-4}$$

onde a, b e c são constantes. A equação quadrática possui duas soluções ou **raízes** — valores de x para os quais a equação é verdadeira.

FATORAÇÃO

Podemos resolver algumas equações quadráticas por **fatoração**. Muito freqüentemente, os termos de uma equação podem ser agrupados ou organizados em outros termos. Quando fatoramos termos, procuramos por multiplicadores e multiplicandos — que, agora, chamamos de **fatores** — que produzirão dois ou mais novos termos em um produto.Por exemplo, podemos encontrar as raízes da equação quadrática $x^2 - 3x + 2 = 0$ fatorando o lado esquerdo, obtendo $(x - 2)(x - 1) = 0$. As raízes são $x = 2$ e $x = 1$.

A fatoração é útil para simplificar equações e para compreender as relações entre quantidades. Você deve estar familiarizado com a multiplicação dos fatores $(ax + by)(cx + dy) = acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2$.

Você reconhecerá facilmente algumas típicas combinações fatoráveis:

1. Fator comum: $2ax + 3ay = a(2x + 3y)$
2. Quadrado perfeito: $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$ (Se a expressão do lado esquerdo de uma equação quadrática na forma padrão é um quadrado perfeito, então as duas raízes são iguais.)
3. Diferença de quadrados: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

Você também deve procurar por fatores que sejam números primos (2, 5, 7 etc.), pois esses fatores podem ajudá-lo a rapidamente fatorar e simplificar termos. Por exemplo, a equação $98x^2 - 140 = 0$ pode ser simplificada, pois 98 e 140 possuem o fator comum 2. Isto é, $98x^2 - 140 = 0$ se torna $2(49x^2 - 70) = 0$ e temos, portanto, $49x^2 - 70 = 0$.

Este resultado ainda pode ser simplificado, porque 49 e 70 possuem o fator comum 7. Assim, $49x^2 - 70 = 0$ se torna $7(7x^2 - 10) = 0$, de forma que ficamos com $7x^2 - 10 = 0$.

A FÓRMULA QUADRÁTICA

Nem todas as equações quadráticas podem ser resolvidas por fatoração. No entanto, *qualquer* equação quadrática na forma padrão $ax^2 + bx + c = 0$ pode ser resolvida pela **fórmula quadrática**,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} \qquad \text{M-5}$$

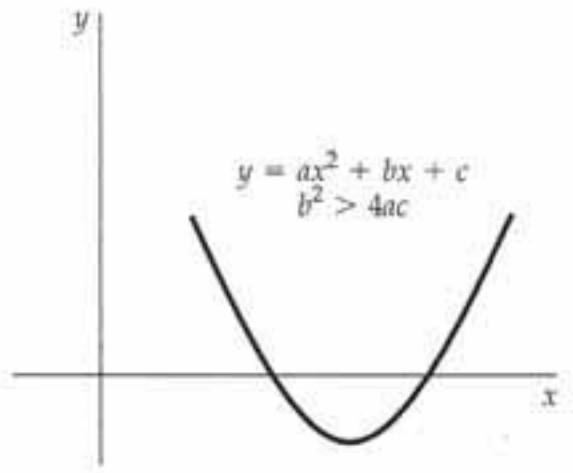


FIGURA M-3 Gráfico de y *versus* x para $y = ax^2 + bx + c$ no caso $b^2 > 4ac$. Os dois valores de x para os quais $y = 0$ satisfazem à equação quadrática (Equação M-4).

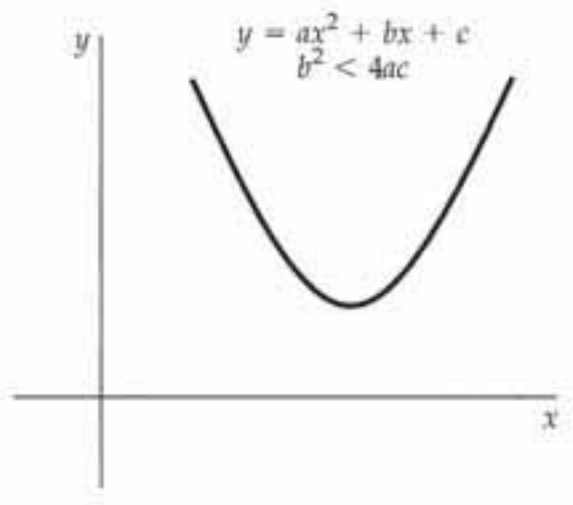


FIGURA M-4 Gráfico de y *versus* x para $y = ax^2 + bx + c$ no caso $b^2 < 4ac$. Neste caso, não há valores reais de x para os quais $y = 0$.

Quando b^2 é maior do que $4ac$, há duas soluções, correspondentes aos sinais + e −. A Figura M-3 mostra um gráfico de y *versus* x para $y = ax^2 + bx + c$. A curva, uma **parábola**, cruza duas vezes o eixo x. (A representação mais simples de uma parábola em coordenadas (x, y) é uma equação da forma $y = ax^2 + bx + c$.) As duas raízes desta equação são os valores para os quais $y = 0$; isto é, as *interseções com o eixo x*.

Quando b^2 é menor do que $4ac$, o gráfico de y *versus* x não cruza o eixo x, como mostra a Figura M-4; ainda existem duas raízes, mas elas não são números reais (veja a discussão sobre números complexos, adiante). Quando $b^2 = 4ac$, o gráfico de y *versus* x é tangente ao eixo x no ponto $x = -b/2a$; as duas raízes são ambas iguais a $-b/2a$.

Exemplo M-5 Fatorando um Polinômio de Segundo Grau

Fatore a expressão $6x^2 + 19xy + 10y^2$.

SITUAÇÃO Examinamos os coeficientes dos termos para verificar se a expressão pode ser fatorada sem o recurso de métodos mais avançados. Lembre-se da multiplicação $(ax + by)(cx + dy) = acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2$.

SOLUÇÃO

1. O coeficiente de x^2 é 6, que pode ser fatorado de duas maneiras:

   $ac = 6$

   $3 \cdot 2 = 6$ ou $6 \cdot 1 = 6$

2. O coeficiente de y^2 é 10, que também pode ser fatorado de duas maneiras:

   $bd = 10$

   $5 \cdot 2 = 10$ ou $10 \cdot 1 = 10$

3. Liste as possibilidades para a, b, c e d em uma tabela. Inclua uma coluna para $ad + bc$.

   Se $a = 3$, então $c = 2$, e vice-versa. Também, se $a = 6$, então $c = 1$, e vice-versa. Para cada valor de a existem quatro valores de b.

a	b	c	d	$ad + bc$
3	5	2	2	16
3	2	2	5	**19**
3	10	2	1	23
3	1	2	10	32
2	5	3	2	**19**
2	2	3	5	16
2	10	3	1	32
2	1	3	10	23
6	5	1	2	17
6	2	1	5	32
6	10	1	1	16
6	1	1	10	61
1	5	6	2	32
1	2	6	5	**17**
1	10	6	1	61
1	1	6	10	16

4. Encontre uma combinação tal que $ad + bc = 19$. Como você pode ver na tabela, há duas dessas combinações, ambas dando os mesmos resultados:

   $ad + bc = 19$

   $3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 19$

5. Use a combinação da legunda linha da tabela para fatorar a expressão:

   $6x^2 + 19xy + 10y^2 = (3x + 2y)(2x + 5y)$

CHECAGEM Para checar, expanda $(3x + 2y)(2x + 5y)$.

$$(3x + 2y)(2x + 5y) = 6x^2 + 15xy + 4xy + 10y^2 = 6x^2 + 19xy + 10y^2$$

A combinação da quinta linha da tabela também fornece o resultado do passo 4.

PROBLEMAS PRÁTICOS

10. Mostre que a combinação da quinta linha da tabela também fornece o resultado do passo 4.
11. Fatore $2x^2 - 4xy + 2y^2$.
12. Fatore $2x^4 + 10x^3 + 12x^2$.

M-6 EXPOENTES E LOGARITMOS

EXPOENTES

A notação x^n significa a quantidade obtida multiplicando-se x por ele mesmo n vezes. Por exemplo, $x^2 = x \cdot x$ e $x^3 = x \cdot x \cdot x$. A quantidade n é a **potência**, ou o **expoente**, de x (a **base**). Segue uma lista de algumas regras que o ajudarão a simplificar termos que possuem expoentes.

1. Quando duas potências de x são multiplicadas, os expoentes são somados:

$$(x^m)(x^n) = x^{m+n} \qquad \text{M-6}$$

   Exemplo: $x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = (x \cdot x)(x \cdot x \cdot x) = x^5$.

2. Qualquer número (exceto 0) elevado à potência 0 é, por definição, igual a 1:

$$x^0 = 1 \qquad \text{M-7}$$

3. Com base na regra 2,

$$x^n x^{-n} = x^0 = 1$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad \text{M-8}$$

4. Quando duas potências são divididas, os expoentes são subtraídos:

$$\frac{x^n}{x^m} = x^n x^{-m} = x^{n-m} \qquad \text{M-9}$$

5. Quando uma potência é elevada a outra potência, os expoentes são multiplicados:

$$(x^n)^m = x^{nm} \qquad \text{M-10}$$

6. Quando expoentes são escritos como frações, eles representam raízes da base. Por exemplo,

$$x^{1/2} \cdot x^{1/2} = x$$

   logo,

$$x^{1/2} = \sqrt{x} \qquad (x > 0)$$

Exemplo M-6 Simplificando uma Quantidade com Expoentes

Simplifique $\frac{x^4 x^7}{x^8}$.

SITUAÇÃO De acordo com a regra 1, quando duas potências de x são multiplicadas, os expoentes são somados. A regra 4 estabelece que, quando duas potências são divididas, os expoentes são subtraídos.

SOLUÇÃO

1. Simplifique o numerador x^4x^7 usando a regra 1: $x^4 x^7 = x^{4+7} = x^{11}$
2. Simplifique $\frac{x^{11}}{x^8}$ usando a regra 4: $\frac{x^{11}}{x^8} = x^{11} x^{-8} = x^{11-8} = x^3$

CHECAGEM Use o valor $x = 2$ para verificar se sua resposta é correta.

$$\frac{2^4 2^7}{2^8} = 2^3 = 8$$

$$\frac{2^4 2^7}{2^8} = \frac{(16)(128)}{256} = \frac{2048}{256} = 8$$

PROBLEMAS PRÁTICOS

13. $(x^{1/18})^9$
14. $x^6 x^0 =$

LOGARITMOS

Qualquer número positivo pode ser expresso como alguma potência de qualquer outro número positivo, exceto um. Se y se relaciona com x por $y = a^x$, então o número x é dito o **logaritmo** de y na **base** a, e a relação é escrita

$$x = \log_a y$$

Assim, logaritmos são *expoentes*, e as regras para trabalhar com logaritmos correspondem a leis similares para expoentes. Segue uma lista de algumas regras que o ajudarão a simplificar termos que possuem logaritmos.

1. Se $y_1 = a^n$ e $y_2 = a^m$, então

$$y_1 y_2 = a^n a^m = a^{n+m}$$

Correspondentemente,

$$\log_a y_1 y_2 = \log_a a^{n+m} = n + m = \log_a a^n + \log_a a^m = \log_a y_1 + \log_a y_2 \qquad \text{M-11}$$

Segue, então, que

$$\log_a y^n = n \log_a y \qquad \text{M-12}$$

2. Como $a^1 = a$ e $a^0 = 1$,

$$\log_a a = 1 \qquad \text{M-13}$$

e

$$\log_a 1 = 0 \qquad \text{M-14}$$

Existem duas bases de uso comum: logaritmos na base 10 são chamados de **logaritmos comuns**, e logaritmos na base e (onde $e = 2{,}718\ldots$) são chamados de **logaritmos naturais**.

Neste texto, o símbolo ln é usado para logaritmos naturais e o símbolo log, sem subscrito, é usado para logaritmos comuns. Assim,

$$\log_e x = \ln x \quad \text{e} \quad \log_{10} x = \log x \qquad \text{M-15}$$

e $y = \ln x$ implica

$$x = e^y \qquad \text{M-16}$$

Logaritmos podem ser transformados de uma base para outra. Suponha que

$$z = \log x \qquad \text{M-17}$$

Então,

$$10^z = 10^{\log x} = x \qquad \text{M-18}$$

Tomando o logaritmo natural dos dois lados da Equação M-18, obtemos

$$z \ln 10 = \ln x$$

Substituindo $\log x$ por z (veja a Equação M-17), fica

$$\ln x = (\ln 10)\log x \qquad \text{M-19}$$

Exemplo M-7 Mudando Logaritmos de Base

Os passos que levam à Equação M-19 mostram que, em geral, $\log_b x = (\log_b a)\log_a x$ e, portanto, a mundança de base de logaritmos requer apenas a multiplicação por uma constante. Descreva a relação matemática entre a constante para passar logaritmos comuns para logaritmos naturais e a constante para passar logaritmos naturais para logaritmos comuns.

SITUAÇÃO Temos uma regra matemática geral para transformar logaritmos de uma base para outra. Procuramos a relação matemática trocando a por b ou vice-versa, na fórmula.

SOLUÇÃO

1. Você tem uma fórmula para mudar logaritmos da base a para a base b: $\log_b x = (\log_b a)\log_a x$
2. Para mudar da base b para a base a, troque a por b e vice-versa: $\log_a x = (\log_a b)\log_b x$

3. Divida os dois lados da equação do passo 1 por $\log_a x$: $\dfrac{\log_b x}{\log_a x} = \log_b a$

4. Divida os dois lados da equação do passo 2 por $(\log_a b)\log_a x$: $\dfrac{1}{\log_a b} = \dfrac{\log_b x}{\log_a x}$

5. Os resultados mostram que os fatores $\log_b a$ e $\log_a b$ são um o inverso do outro: $\dfrac{1}{\log_a b} = \log_b a$

CHECAGEM Para o valor de $\log_{10} e$, sua calculadora dará 0,43429. Para ln 10, sua calculadora dará 2,3026. Multiplique 0,43429 por 2,3026; você obterá 1,0000.

PROBLEMAS PRÁTICOS

15. Calcule $\log_{10} 1000$.
16. Calcule $\log_2 5$.

M-7 GEOMETRIA

As propriedades das mais comuns **figuras geométricas** — formas limitadas em duas ou três dimensões cujos comprimentos, áreas ou volumes são regulados por razões específicas — são uma ferramenta analítica básica na física. Por exemplo, as razões características em triângulos nos dão as leis da *trigonometria* (veja a próxima seção deste tutorial) que, por sua vez, nos dá a teoria dos vetores, essencial na análise do movimento em duas ou mais dimensões. Círculos e esferas são essenciais para a compreensão, entre outros conceitos, da quantidade de movimento angular e das densidades de probabilidade da mecânica quântica.

FÓRMULAS BÁSICAS NA GEOMETRIA

Círculo A razão entre a circunferência de um círculo e o seu diâmetro é o número π, que vale aproximadamente

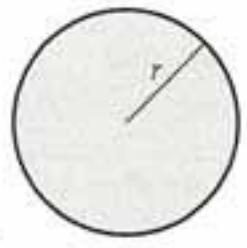
$$\pi = 3{,}141\,592$$

A circunferência C de um círculo relaciona-se, portanto, com o seu diâmetro d e o seu raio r por

$$C = \pi d = 2\pi r \qquad \text{circunferência do círculo} \qquad \text{M-20}$$

A área de um círculo é (Figura M-5)

$$A = \pi r^2 \qquad \text{área do círculo} \qquad \text{M-21}$$

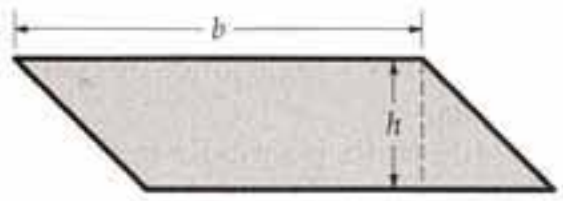


Área do círculo $A = \pi r^2$

FIGURA M-5 Área de um círculo.

Paralelograma A área de um paralelograma é a base b vezes a altura h (Figura M-6):

$$A = bh$$

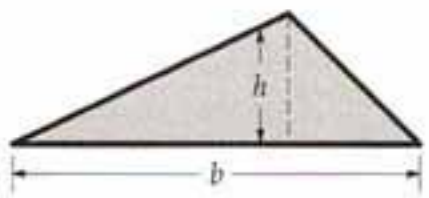


Área do paralelogramo
$A = bh$

FIGURA M-6 Área de um paralelogramo.

A área de um triângulo é a metade da base vezes a altura (Figura M-7):

$$A = \frac{1}{2}bh$$



Área do triângulo
$A = \frac{1}{2}bh$

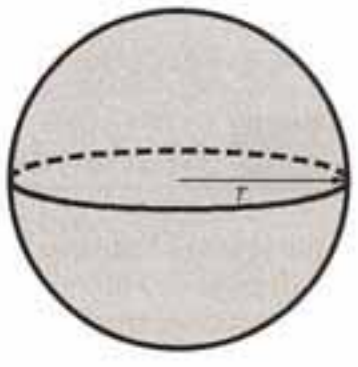
FIGURA M-7 Área de um triângulo.

Esfera Uma esfera de raio r (Figura M-8) tem uma área superficial dada por

$$A = 4\pi r^2 \qquad \text{superfície esférica} \qquad \text{M-22}$$

e um volume dado por

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \text{volume da esfera} \qquad \text{M-23}$$



Área da superfície esférica
$A = 4\pi r^2$
Volume da esfera
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

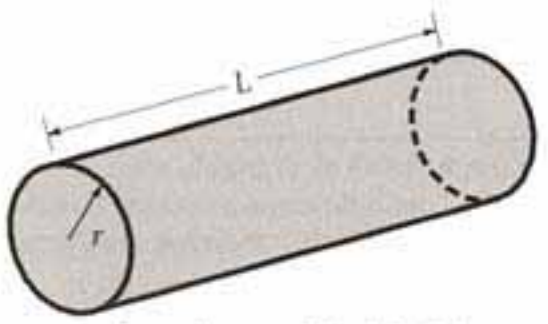
FIGURA M-8 Área superficial e volume de uma esfera.

Cilindro Um cilindro de raio r e comprimento L (Figura M-9) tem uma área superficial (não incluindo as bases) de

$$A = 2\pi rL \qquad \text{superfície cilíndrica} \qquad \text{M-24}$$

e um volume de

$$V = \pi r^2 L \qquad \text{volume do cilindro} \qquad \text{M-25}$$



Área da superfície cilíndrica
$A = 2\pi rL$
Volume do cilindro
$V = \pi r^2 L$

FIGURA M-9 Área superficial (não incluindo as bases) e volume de um cilindro.

Exemplo M-8 Calculando o Volume de uma Casca Esférica

Uma casca esférica de alumínio possui um diâmetro externo de 40,0 cm e um diâmetro interno de 39,0 cm. Determine o volume do alumínio nesta casca.

SITUAÇÃO O volume do alumínio na casca esférica é o volume que resta quando subtraímos o volume da esfera interna com $d_i = 2r_i = 39{,}0$ cm do volume da esfera externa com $d_e = 2r_e = 40{,}0$ cm.

SOLUÇÃO

1. Subtraia o volume da esfera de raio r_i do volume da esfera de raio r_e: $V = \frac{4}{3}\pi r_e^3 - \frac{4}{3}\pi r_i^3 = \frac{4}{3}\pi(r_e^3 - r_i^3)$
2. Substitua r_e por 20,0 cm e r_i por 19,5 cm: $V = \frac{4}{3}\pi[(20{,}0\text{ cm})^3 - (19{,}5\text{ cm})^3] = \boxed{2{,}45 \times 10^3\text{ cm}^3}$

CHECAGEM Espera-se que o volume da casca possua a mesma ordem de grandeza do volume de um cubo oco com uma aresta externa de 40,0 cm e uma aresta interna de 39,0 cm. O volume deste cubo é $(40{,}0\text{ cm})^3 - (39{,}0\text{ cm})^3 = 4{,}68 \times 10^3\text{ cm}^3$. O resultado do passo 2 satisfaz a expectativa de que o volume da casca tenha a mesma ordem de grandeza do volume desse cubo oco.

PROBLEMAS PRÁTICOS

17. Determine a razão entre o volume V e a superfície A de uma esfera de raio r.
18. Qual é a área de um cilindro que tem um raio igual a 1/3 de seu comprimento?

M-8 TRIGONOMETRIA

Trigonometria, palavra de raízes gregas que significam "triângulo" e "medida", é o estudo de algumas importantes funções matemáticas, chamadas de **funções trigonométricas**. Estas funções são mais simplesmente definidas como razões entre lados de triângulos retângulos. No entanto, estas definições com base em triângulos retângulos são de utilidade limitada, por serem válidas apenas para ângulos entre zero e 90°. Mas a validade das definições baseadas em triângulos retângulos pode ser estendida definindo-se as funções trigonométricas em termos da razão entre as coordenadas de pontos sobre um círculo de raio unitário traçado com seu centro na origem do plano xy.

Em física, a primeira vez em que encontramos a trigonometria é quando usamos vetores para analisar o movimento em duas dimensões. Funções trigonométricas também são essenciais na análise de qualquer espécie de comportamento periódico, tais como o movimento circular, o movimento oscilatório e a mecânica ondulatória.

ÂNGULOS E SUA MEDIDA: GRAUS E RADIANOS

O tamanho de um ângulo formado por duas linhas retas que se cruzam é conhecido como sua **medida**. A maneira padrão de encontrar a medida de um ângulo é colocá-lo

de forma que seu **vértice**, o ponto de interseção das duas linhas retas que o formam, esteja no centro de um círculo localizado na origem de um gráfico de coordenadas cartesianas com uma das linhas se estendendo para a direita como eixo x positivo. A distância percorrida *no sentido anti-horário* sobre a circunferência, a partir do eixo x positivo, até se atingir a interseção da circunferência com a outra reta, define a medida do ângulo. (Viajar no sentido horário até a segunda reta simplesmente daria uma medida negativa; para ilustrar os conceitos básicos, posicionamos o ângulo de forma que a menor rotação será a do sentido anti-horário.)

A unidade mais familiar usada para expressar a medida de um ângulo é o **grau**, que equivale a 1/360 do percurso completo em torno da circunferência do círculo. Para melhor precisão, ou para ângulos menores, podemos usar graus, minutos (′) e segundos (″), com $1' = 1°/60$ e $1'' = 1'/60 = 1°/360$; ou indicar os graus como um número decimal comum.

Em trabalhos científicos, uma medida de ângulo mais útil é o **radiano** (rad). Novamente, coloque o ângulo com seu vértice no centro de um círculo e meça a rotação anti-horária na circunferência. A medida do ângulo em radianos é, então, definida como o comprimento do arco circular entre as duas linhas retas dividido pelo raio do círculo (Figura M-10). Se s é o comprimento do arco e r é o raio do círculo, o ângulo θ medido em radianos é

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{M-26}$$

Como o ângulo medido em radianos é a razão de dois comprimentos, ele é adimensional. A relação entre radianos e graus é

$$360° = 2\pi \text{ rad}$$

ou

$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = 57{,}3°$$

A Figura M-11 mostra algumas relações úteis com ângulos.

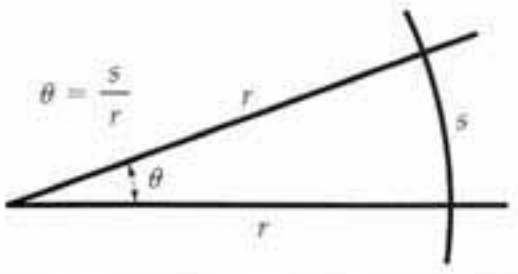


FIGURA M-10 O ângulo θ em radianos é definido como a razão s/r, onde s é o comprimento do arco interceptado em um círculo de raio r.

FIGURA M-11 Algumas relações úteis com ângulos.

AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

A Figura M-12 mostra um triângulo retângulo formado pelo traçado da linha BC perpendicularmente à linha AC. Os comprimentos dos lados são designados por a, b e c. As definições baseadas no triângulo retângulo, para as funções trigonométricas sen θ (o **seno**), cos θ (o **cosseno**) e tan θ (a **tangente**) para um ângulo agudo θ, são

$$\text{sen}\,\theta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Lado oposto}}{\text{Hipotenusa}} \qquad \text{M-27}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Lado adjacente}}{\text{Hipotenusa}} \qquad \text{M-28}$$

$$\tan\theta = \frac{a}{b} = \frac{\text{Lado oposto}}{\text{Lado adjacente}} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \qquad \text{M-29}$$

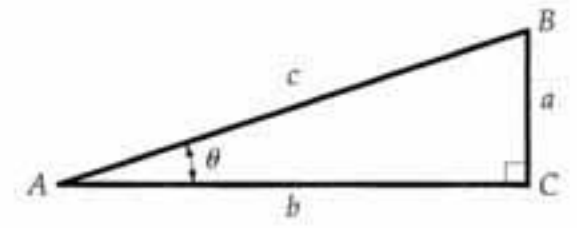


FIGURA M-12 Um triângulo retângulo com lados de comprimentos a e b e hipotenusa de comprimento c.

(**Ângulos agudos** são ângulos que correspondem a uma rotação positiva ao longo da circunferência do círculo menor do que 90°, ou $\pi/2$.) Três outras funções trigonométricas — a **secante** (sec), a **co-secante** (csc) e a **co-tangente** (cot), definidas como os inversos dessas funções — são

$$\sec\theta = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \text{M-30}$$

$$\csc\theta = \frac{c}{a} = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} \qquad \text{M-31}$$

$$\cot\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} \qquad \text{M-32}$$

O ângulo θ cujo seno é x é dito arco-seno e é representado por arcsen x ou $\text{sen}^{-1}\,x$. Isto é, se

$$\text{sen}\,\theta = x$$

então

$$\theta = \text{arcsen}\,x = \text{sen}^{-1}\,x \qquad \text{M-33}$$

O arco-seno é a função inversa do seno. As funções inversas do cosseno e da tangente são definidas de forma similar. O ângulo cujo cosseno é y é o arco-cosseno de y. Isto é, se

$$\cos\theta = y$$

então

$$\theta = \arccos y = \cos^{-1} y \qquad \text{M-34}$$

O ângulo cuja tangente é z é o arco-tangente de z. Isto é, se

$$\tan\theta = z$$

então

$$\theta = \arctan z = \tan^{-1} z \qquad \text{M-35}$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Podemos deduzir várias fórmulas, chamadas de **identidades trigonométricas**, examinando relações entre as funções trigonométricas. As Equações M-30 a M-32 são três das identidades mais óbvias, fórmulas que expressam algumas funções trigonométricas como inversas de outras. Quase tão fáceis de perceber são as identidades deduzidas a partir do **teorema de Pitágoras**,

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \text{M-36}$$

(A Figura M-13 ilustra uma prova gráfica deste teorema.) Manipulações algébricas simples da Equação M-36 nos dão mais três identidades. Primeiro, se dividirmos cada termo da Equação M-36 por c^2, obtemos

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

ou, das definições de sen θ (que é a/c) e de cos θ (que é b/c),

$$\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \text{M-37}$$

De forma similar, podemos dividir cada termo da Equação M-36 por a^2 ou b^2, para obter

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta \qquad \text{M-38}$$

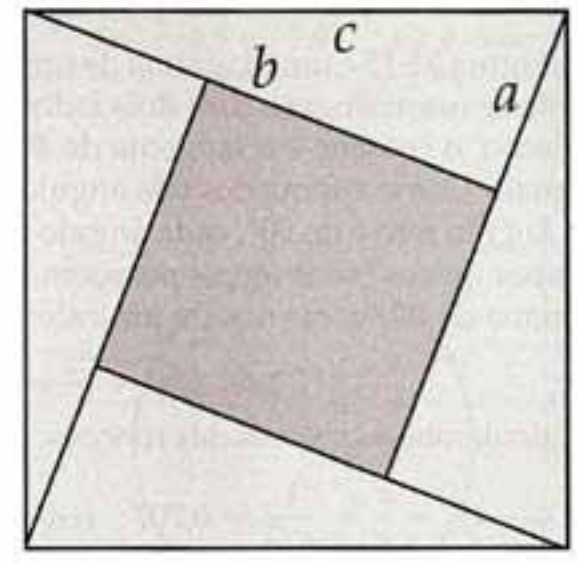


FIGURA M-13 Quando esta figura foi publicada pela primeira vez, não havia as letras e ela estava acompanhada pela única palavra "Veja!". Usando o desenho, demonstre o teorema de Pitágoras ($a^2 + b^2 = c^2$).

Tabela M-2 Identidades Trigonométricas

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

$$\operatorname{sen} A \pm \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(A \pm B)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(A \mp B)\right]$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left[\frac{1}{2}(A + B)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(A - B)\right]$$

$$\cos A - \cos B = 2\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(A + B)\right]\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(B - A)\right]$$

$$\tan A \pm \tan B = \frac{\operatorname{sen}(A \pm B)}{\cos A \cos B}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1;\ \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1;\ \csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}};\ \cos\frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}};\ \tan\frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$$

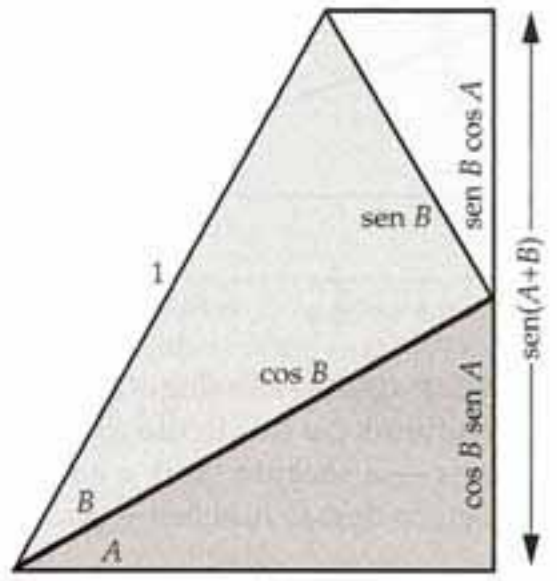


FIGURA M-14 Usando este desenho, prove a identidade $\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B$. Você também pode usá-lo para provar a identidade $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$. Tente.

e

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad \text{M-39}$$

A Tabela M-2 lista estas últimas três identidades trigonométricas, além de muitas outras. Note que elas caem em quatro categorias: funções de somas ou difereças de ângulos, somas ou diferenças de quadrados de funções, funções de ângulos duplos (2θ) e funções de meios ângulos ($\frac{1}{2}\theta$). Note, também, que algumas dessas fórmulas contêm alternativas pareadas, expressas pelos sinais $\pm$ ou $\mp$; em tais fórmulas, lembre-se de sempre aplicar a fórmula ou com todas as alternativas "superiores" ou com todas as alternativas "inferiores". A Figura M-14 mostra uma prova gráfica das primeiras duas identidades de soma de ângulos.

ALGUNS VALORES IMPORTANTES DAS FUNÇÕES

A Figura M-15 é um diagrama de um triângulo retângulo *isósceles* (um triângulo isósceles é um triângulo com dois lados iguais), a partir do qual podemos determinar o seno, o cosseno e a tangente de 45°. Os dois ângulos agudos deste triângulo são iguais. Como a soma dos três ângulos de um triângulo deve ser igual a 180°, e como o ângulo reto é de 90°, cada ângulo agudo deve valer 45°. Por conveniência, vamos supor que os lados iguais possuem, cada um, um comprimento de 1 unidade. O teorema de Pitágoras nos dá um valor para a hipotenusa de

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ unidades}$$

Calculamos os valores das funções:

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \quad \cos 45° = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \quad \tan 45° = \frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1$$

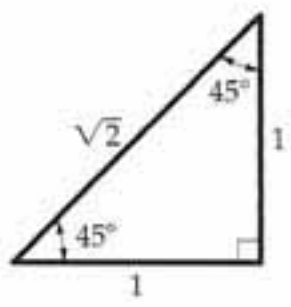


FIGURA M-15 Um triângulo retângulo isósceles.

Outro triângulo comum, um triângulo retângulo 30°–60°, é mostrado na Figura M-16. Como este triângulo retângulo particular é, com efeito, a metade de um *triângulo equilátero* (um triângulo 60°–60°–60°, ou um triângulo com os três lados e os três ângulos iguais), podemos ver que o seno de 30° deve valer exatamente 0,5 (Figura M-17). O triângulo equilátero deve ter todos os lados iguais a c, a hipotenusa do tri-

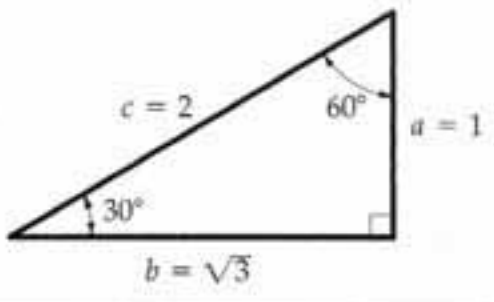


FIGURA M-16 Um triângulo retângulo 30°–60°.

ângulo retângulo 30°–60°. Então, o lado a vale a metade do comprimento da hipotenusa, e logo

$$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$$

Para determinar as outras razões no triângulo retângulo 30°–60°, vamos atribuir um valor 1 ao lado oposto ao ângulo de 30°. Então,

$$c = \frac{1}{0{,}5} = 2 \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\cos 30° = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866 \qquad \tan 30° = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577$$

$$\text{sen } 60° = \frac{b}{c} = \cos 30° = 0{,}866 \qquad \cos 60° = \frac{a}{c} = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = 1{,}732$$

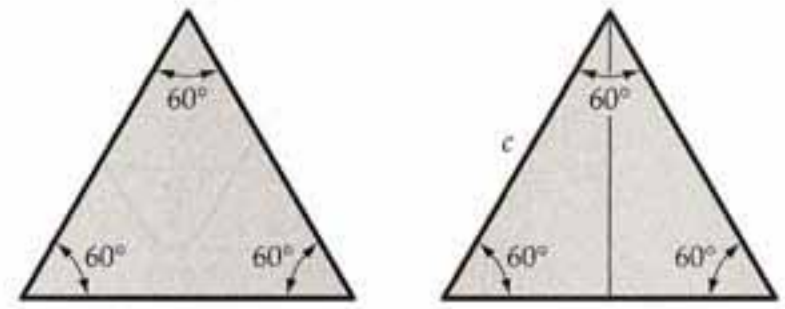


FIGURA M-17 (*a*) Um triângulo equilátero. (*b*) Um triângulo equilátero dividido em dois triângulos retângulos 30°–60°.

APROXIMAÇÃO PARA ÂNGULOS PEQUENOS

Para pequenos ângulos, o comprimento a é quase igual ao comprimento de arco s, como pode ser visto na Figura M-18. O ângulo $\theta = s/c$ é, portanto, quase igual a sen $\theta = a/c$:

$$\text{sen } \theta \approx \theta \qquad \text{para valores pequenos de } \theta \qquad \text{M-40}$$

De forma similar, os comprimentos c e b são quase iguais, e logo $\tan \theta = a/b$ é quase igual a θ e a sen θ para pequenos valores de θ:

$$\tan \theta \approx \text{sen } \theta \approx \theta \qquad \text{para valores pequenos de } \theta \qquad \text{M-41}$$

As Equações M-40 e M-41 valem apenas se θ for medido em radianos. Como $\cos \theta = b/c$, e como estes comprimentos são quase iguais para pequenos valores de θ, temos

$$\cos \theta \approx 1 \qquad \text{para valores pequenos de } \theta \qquad \text{M-42}$$

A Figura M-19 mostra gráficos de θ, sen θ e $\tan \theta$ *versus* θ para pequenos valores de θ. Se é necessária uma precisão de alguns pontos percentuais, a aproximação para ângulos pequenos só pode ser usada para ângulos da ordem de um quarto de um radiano (ou cerca de 15°) ou menos. Abaixo deste valor, quando o ângulo se torna menor, a aproximação $\theta \approx \text{sen } \theta \approx \tan \theta$ é ainda mais precisa.

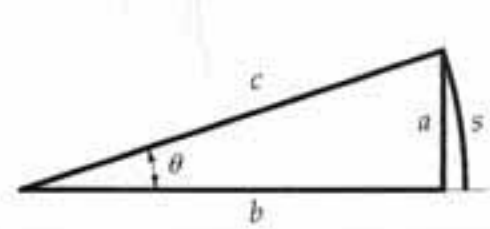


FIGURA M-18 Para ângulos pequenos, sen $\theta = a/c$, $\tan \theta = a/b$ e o ângulo $\theta = s/c$ são todos aproximadamente iguais.

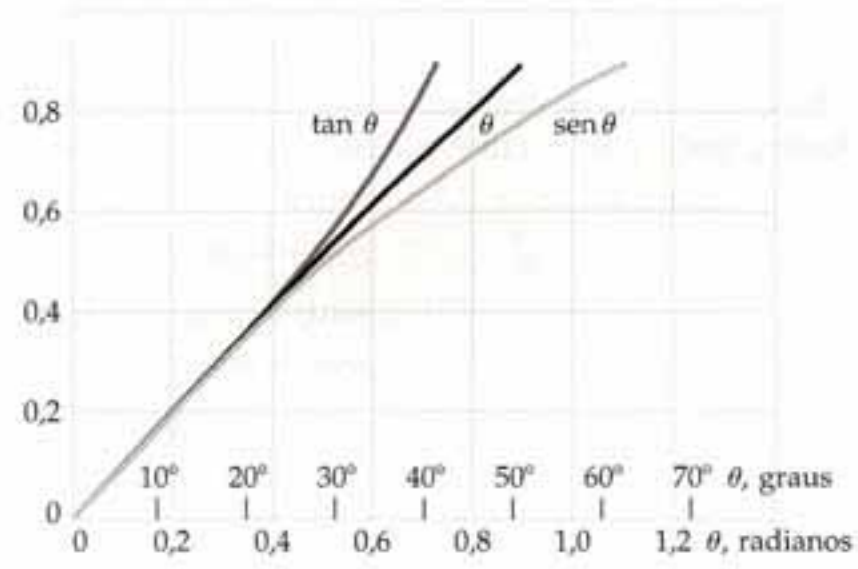


FIGURA M-19 Gráficos de tan θ, θ e sen θ *versus* θ para pequenos valores de θ.

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COMO FUNÇÕES DE NÚMEROS REAIS

Até agora, ilustramos as funções trigonométricas como propriedades de ângulos. A Figura M-20 mostra um ângulo *obtuso* com o vértice na origem e um dos lados ao longo do eixo x. As funções trigonométricas para um ângulo "genérico" como este são definidas por

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{c} \qquad \text{M-43}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{c} \qquad \text{M-44}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \qquad \text{M-45}$$

É importante lembrar que os valores de x à esquerda do eixo vertical e que os valores de y abaixo do eixo horizontal são negativos; na figura, c é sempre visto como positivo. A Figura M-21 mostra gráficos das funções genéricas seno, cosseno e tangente, *versus* θ. A função seno tem um período de 2π rad. Assim, para qualquer valor de θ, $\text{sen}(\theta + 2\pi) = \text{sen } \theta$, e assim por diante. Isto é, quando um ângulo varia de 2π rad,

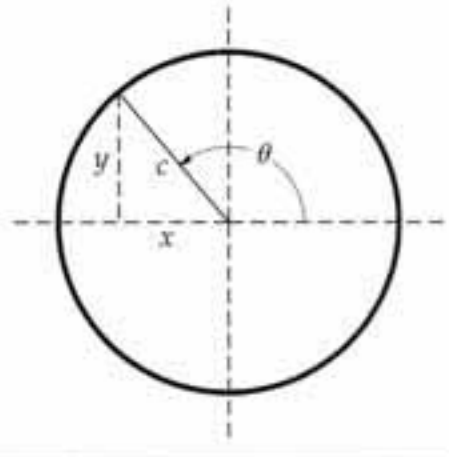


FIGURA M-20 Diagrama para a definição das funções trigonométricas de um ângulo obtuso.

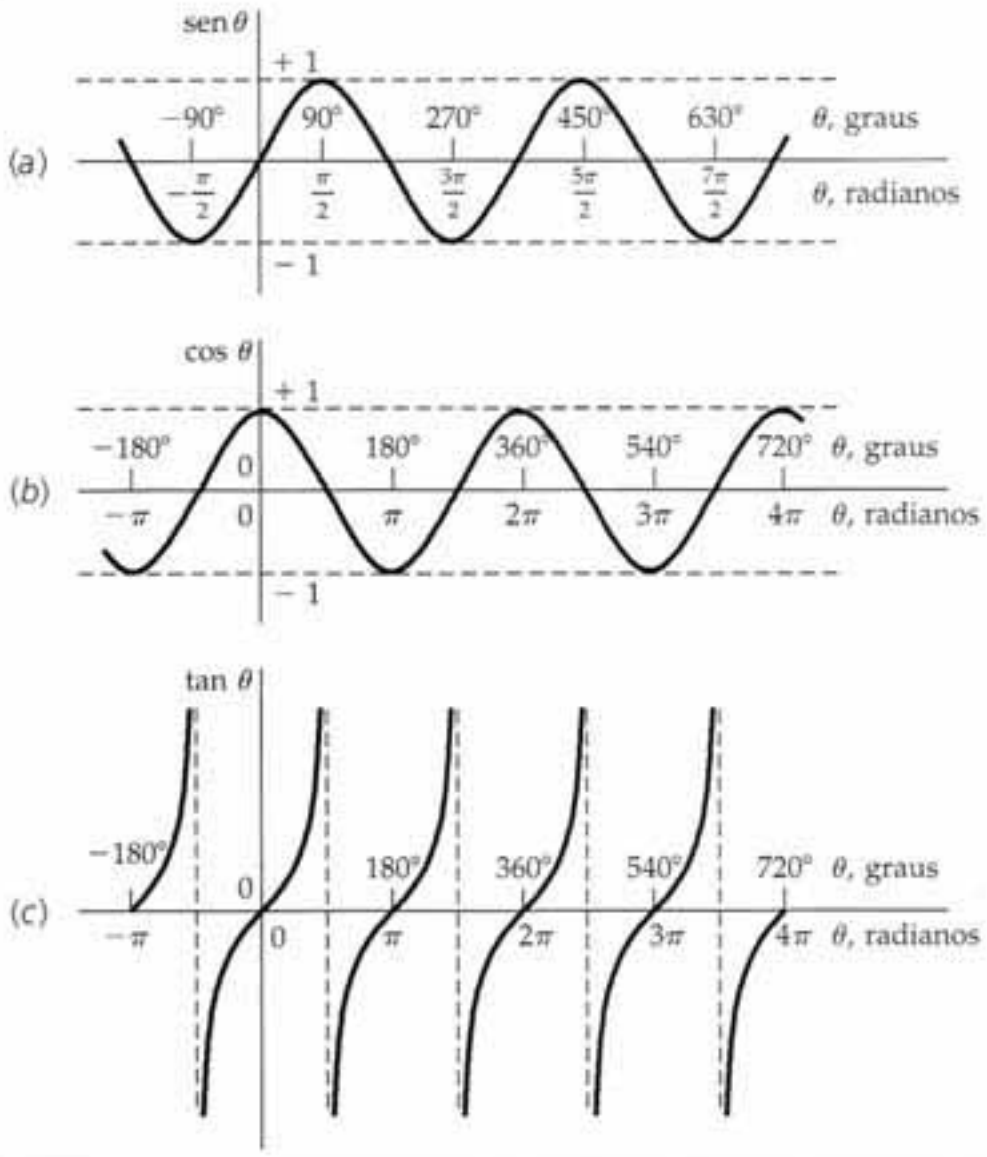


FIGURA M-21 As funções trigonométricas sen θ, cos θ e tan θ *versus* θ.

a função retorna ao seu valor original. A função tangente tem um período de π rad. Assim, $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$, e assim por diante. Algumas outras relações úteis são

$$\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta \qquad \text{M-46}$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \qquad \text{M-47}$$

$$\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi - \theta) = \cos\theta \qquad \text{M-48}$$

$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta \qquad \text{M-49}$$

Como o radiano é adimensional, não é difícil ver, dos gráficos da Figura M-21, que as funções trigonométricas são funções de todos os números reais. As funções também podem ser expressas como séries de potências de θ. As séries para sen θ e cos θ são

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots \qquad \text{M-50}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \qquad \text{M-51}$$

Quando θ é pequeno, boas aproximações são obtidas usando-se apenas alguns dos primeiros termos das séries.

Exemplo M-9 Cosseno de uma Soma

Usando uma adequada identidade trigonométrica da Tabela M-2, determine o cos(135° + 22°). Dê sua resposta com quatro algarismos significativos.

SITUAÇÃO Desde que todos os ângulos são dados em graus, não há necessidade de convertê-los para radianos, já que todas as operações são valores numéricos das funções. Verifique, no entanto, se sua calculadora está no modo grau. A identidade adequada é $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$, onde os sinais superiores são os apropriados.

SOLUÇÃO

1. Escreva a identidade trigonométrica para o cosseno de uma soma, com $A = 135°$ e $B = 22°$: $\cos(135° + 22°) = (\cos 135°)(\cos 22°) - (\text{sen } 135°)(\text{sen } 22°)$
2. Usando uma calculadora, determine cos 135°, sen 135°, cos 22° e sen 22°: $\cos 135° = -0{,}7071$ $\quad \text{sen } 135° = 0{,}7071$ $\quad \cos 22° = 0{,}9272$ $\quad \text{sen } 22° = 0{,}3746$
3. Entre com os valores na fórmula e calcule o resultado: $\cos(135° + 22°) = (-0{,}7071)(0{,}9272) - (0{,}7071)(0{,}3746) = -0{,}9205$

CHECAGEM A calculadora fornece $\cos(135° + 22°) = \cos(157°) = -0{,}9205$.

PROBLEMAS PRÁTICOS

19. Determine sen θ e cos θ para o triângulo retângulo da Figura M-12, com $a = 4$ cm e $b = 7$ cm. Qual é o valor de θ?
20. Determine sen θ, para $\theta = 8{,}2°$. Sua resposta é consistente com a aproximação para ângulos pequenos?

M-9 A EXPANSÃO BINOMIAL

Um **binômio** é uma expressão que consiste em dois termos ligados por um sinal de mais ou de menos. O **teorema binomial** estabelece que um binômio elevado a uma potência pode ser escrito, ou *expandido*, como uma série de termos. Se elevarmos o binômio $(1 + x)$ à potência n, o teorema binomial toma a forma

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad \text{M-52}$$

A série é válida para qualquer valor de n se $|x|$ é menor do que 1. A expansão binomial é muito útil em aproximações de expressões algébricas, porque quando $|x| < 1$ os termos de ordens superiores na soma são pequenos. (A ordem de um termo é a potência de x no termo. Assim, os termos mostrados explicitamente na Equação M-52 são de ordens 0, 1, 2 e 3.) A série é particularmente útil em situações onde $|x|$ é pequeno em comparação com 1; então, cada termo é *muito* menor do que o termo anterior e podemos descartar todos os termos além dos primeiros dois ou três termos da expansão. Se $|x|$ é muito menor do que 1, temos

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx, \qquad |x| \ll 1 \qquad \text{M-53}$$

A expansão binomial é usada na dedução de muitas fórmulas de cálculo que são importantes em física. Um bem conhecido uso da aproximação na Equação M-53, em física, é a prova de que a energia cinética relativística se reduz à fórmula clássica quando a velocidade de uma partícula é muito pequena em comparação com a velocidade da luz c.

Exemplo M-10 Usando a Expansão Binomial para Encontrar uma Potência de um Número

Use a Equação M-53 para encontrar um valor aproximado da raiz quadrada de 101.

SITUAÇÃO O número 101 sugere, imediatamente, um binômio, qual seja, (100 + 1). Para encontrar um resultado aproximado, usando a expansão binomial, precisamos manipular a expressão para obter um binômio consistindo de 1 e de um termo menor do que 1.

SOLUÇÃO

1. Escreva $(101)^{1/2}$ em termos de uma expressão $(1 + x)^n$, com x muito menor do que 1: $(101)^{1/2} = (100 + 1)^{1/2} = (100)^{1/2}(1 + 0{,}01)^{1/2} = 10(1 + 0{,}01)^{1/2}$
2. Use a Equação M-53 com $n = \frac{1}{2}$ e $x = 0{,}01$ para expandir $(1 + 0{,}01)^{1/2}$: $(1 + 0{,}01)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(0{,}01) + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}(0{,}01)^2 + \cdots$

3. Como $|x| \ll 1$, esperamos que as magnitudes dos termos de ordens 2 e superiores sejam significativamente menores do que a magnitude do termo de primeira ordem. Aproxime o binômio (1) mantendo apenas os termos de ordens zero e um, e (2) mantendo apenas os três primeiros termos:

Mantendo apenas os termos de ordens zero e um, temos

$$(1 + 0{,}01)^{1/2} \approx 1 + \tfrac{1}{2}(0{,}01) = 1 + 0{,}005\,000\,0$$
$$= 1{,}005\,000\,0$$

Mantendo apenas os termos de ordens zero, um e dois, temos

$$(1 + 0{,}01)^{1/2} \approx 1 + \tfrac{1}{2}(0{,}01) + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}(0{,}01)^2$$
$$\approx 1 + 0{,}005\,000\,0 - 0{,}000\,012\,5$$
$$= 1{,}004\,987\,5$$

4. Substitua estes resultados na equação do passo 1:

Mantendo apenas os termos de ordens zero e um, temos

$$(101)^{1/2} = 10(1 + 0{,}01)^{1/2} \approx \boxed{10{,}050\,000}$$

Mantendo apenas os termos de ordens zero, um e dois, temos

$$(101)^{1/2} = 10(1 + 0{,}01)^{1/2} \approx \boxed{10{,}049\,875}$$

CHECAGEM Esperamos nossa resposta correta em até cerca de 0,001%. O valor de $(101)^{1/2}$, com até oito algarismos, é 10,049 876. Isto difere de 10,050 000 em 0,000 124, ou cerca de uma parte em 10^5, e difere de 10,049 875 em cerca de uma parte em 10^7.

PROBLEMAS PRÁTICOS No que segue, calcule a resposta mantendo os termos de ordem zero e de primeira ordem na série binomial (Equação M-53), encontre a resposta usando sua calculadora e determine a diferença percentual entre os dois valores:

21. $(1 + 0{,}001)^{-4}$
22. $(1 - 0{,}001)^{40}$

M-10 NÚMEROS COMPLEXOS

Números reais são todos os números, de $-\infty$ a $+\infty$, que podem ser *ordenados*. Sabemos que, dados dois números reais, um deles sempre é igual, maior ou menor do que o outro. Por exemplo, $3 \geq 2$; $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ e $3{,}14 < \pi < 3{,}15$. Um número que *não pode* ser ordenado é $\sqrt{-1}$; não podemos medir o tamanho deste número, e portanto, não tem sentido dizer, por exemplo, que $3 \times \sqrt{-1}$ é maior ou menor do que $2 \times \sqrt{-1}$. Os primeiros matemáticos que lidaram com números contendo $\sqrt{-1}$ se referiam a esses números como números *imaginários*, porque eles não podiam ser usados para medir ou contar alguma coisa. Em matemática, o símbolo i é usado para representar $\sqrt{-1}$.

A Equação M-5, a fórmula quadrática, se aplica a equações da forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

A fórmula mostra que não há raízes reais quando $b^2 < 4ac$. Ainda existem, no entanto, duas raízes. Cada raiz é um número contendo dois termos: um número real e um múltiplo de $i = \sqrt{-1}$. O múltiplo de i é chamado de **número imaginário** e i é chamado de **unidade imaginária**.

Um **número complexo** z pode ser escrito, de forma geral, como

$$z = a + bi \qquad \text{M-54}$$

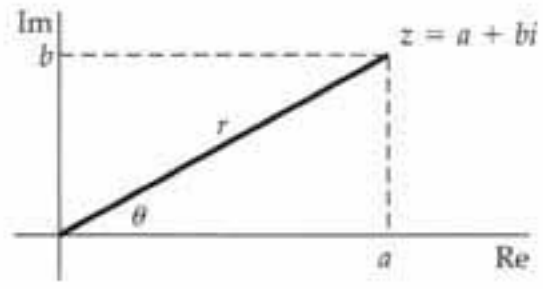
onde a e b são números reais. A quantidade a é a chamada parte real de z, ou $\text{Re}(z)$, e a quantidade b é a chamada parte imaginária de z, ou $\text{Im}(z)$. Podemos representar um número complexo z como um ponto em um plano, chamado de plano complexo, como mostrado na Figura M-22, onde o eixo x é o **eixo real** e o eixo y é o **eixo imaginário**. Podemos, também, usar as relações $a = r\cos\theta$ e $b = r\,\text{sen}\,\theta$, da Figura M-22, para escrever o número complexo z em **coordenadas polares** (um sistema onde um ponto é localizado pelo ângulo de rotação anti-horária θ e pela distância r ao longo da direção θ):

$$z = r\cos\theta + ir\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{M-55}$$

onde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ é a chamada **magnitude** de z.

Quando números complexos são somados ou subtraídos, as partes reais e imaginárias são somadas ou subtraídas separadamente:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \qquad \text{M-56}$$



$$z = a + bi$$
$$= r\cos\theta + (r\,\text{sen}\,\theta)i$$
$$= r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

FIGURA M-22 Representação de um número complexo no plano. A parte real do número complexo é plotada no eixo horizontal, e a parte imaginária é plotada no eixo vertical.

No entanto, quando dois números complexos são multiplicados, cada parte de um número é multiplicada por cada parte do outro número:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + i^2b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1) \\ &= a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned} \qquad \text{M-57}$$

onde usamos $i^2 = -1$.

O **complexo conjugado** z^* de um número complexo z é o número obtido substituindo i por $-i$ em z. Se $z = a + ib$, então

$$z^* = (a + ib)^* = a - ib \qquad \text{M-58}$$

(Quando uma equação quadrática tem raízes complexas, as raízes são **números complexos conjugados**, da forma $a \pm ib$.) O produto de um número complexo por seu complexo conjugado é igual ao quadrado da magnitude do número:

$$zz^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = r^2 \qquad \text{M-59}$$

Uma função de número complexo particularmente útil é a exponencial $e^{i\theta}$. Usando uma expansão para e^x, temos

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots$$

Usando $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$, e assim por diante, e separando as partes reais das partes imaginárias, esta expansão pode ser escrita como

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots\right)$$

Comparando este resultado com as Equações M-50 e M-51, podemos ver que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \qquad \text{M-60}$$

Usando este resultado, podemos expressar um número complexo genérico como uma exponencial:

$$z = a + ib = r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta = re^{i\theta} \qquad \text{M-61}$$

Se $z = x + iy$, onde x e y são variáveis reais, então z é uma **variável complexa**.

VARIÁVEIS COMPLEXAS EM FÍSICA

Variáveis complexas são, com freqüência, usadas em fórmulas que descrevem circuitos de corrente alternada: a impedância de um capacitor ou de um indutor inclui uma parte real (a resistência) e uma parte imaginária (a reatância). (Há formas alternativas, no entanto, de analisar circuitos de corrente alternada — como os vetores girantes chamados de *fasores* — que não requerem atribuição de valores imaginários.) Variáveis complexas são, também, importantes no estudo de ondas harmônicas, através de análise e síntese de Fourier. A equação de Schrödinger dependente do tempo contém uma função da posição e do tempo de valores complexos.

Exemplo M-11 Determinando a Potência de um Número Complexo

Calcule $(1 + 3i)^4$ usando a expansão binomial.

SITUAÇÃO A expressão é da forma $(1 + x)^n$. Como n é um inteiro positivo, a expansão é válida para qualquer valor de x e todos os termos, além daqueles de ordem n ou menor, devem ser iguais a zero.

SOLUÇÃO

1. Desenvolva a expansão $(1 + 3i)^4$ para mostrar os termos de ordem até quatro: $1 + 4 \cdot 3i + \frac{4(3)}{2!}(3i)^2 + \frac{4(3)(2)}{3!}(3i)^3 + \frac{4(3)(2)(1)}{4!}(3i)^4$
2. Calcule cada termo, lembrando que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ e $i^4 = +1$: $1 + 12i - 54 - 108i + 81$
3. Escreva o resultado na forma $a + bi$: $(1 + 3i)^4 = \boxed{28 - 96i}$

CHECAGEM Podemos resolver o problema algebricamente para mostrar que a re- correta. Primeiro, elevamos $1 + 3i$ ao quadrado e, depois, elevamos o re- para obter $(1 + 3i)^4$:

$$(1 + 3i)^2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 3i + (3i)^2 =$$

$$(-8 + 6i)^2 = (-8)(-8) + \quad \text{...} - 36 = 28 - 96i$$

PROBLEMAS PR ... $a + bi$:

23

M-11 CÁLCULO DIFERENCIAL

O **cálculo** é um ramo da matemática que nos permite lidar com taxas instantâneas de variação de funções e variáveis. Da equação de uma função — digamos, x como função de t — podemos sempre determinar x para um dado t, mas com os métodos do cálculo você pode ir muito além. Você pode saber onde x possuirá certas propriedades, tais como um valor máximo ou um valor mínimo, sem ter que testar com um enorme número de valores de t. Com o cálculo, se são fornecidos os dados apropriados, você pode determinar, por exemplo, o ponto de máxima tensão em uma viga, ou a velocidade ou posição de um corpo em queda no instante t, ou a energia que um corpo em queda adquiriu até o momento do impacto. Os princípios do cálculo provêm do exame das funções em nível infinitesimal — analisando como, por exemplo, x variará quando a variação em t se tornar tão pequena quanto se queira. Começamos com o **cálculo diferencial**, onde determinamos o *limite* da taxa de variação de x em relação a t, quando a variação em t tende a zero.

A Figura M-23 é um gráfico de x *versus* t para uma função típica $x(t)$. Para um particular valor $t = t_1$, x tem o valor x_1, como indicado. Para outro valor t_2, x tem o valor x_2. A variação de t, $t_2 - t_1$, é escrita $\Delta t = t_2 - t_1$; e a correspondente variação em x é escrita $\Delta x = x_2 - x_1$. A razão $\Delta x/\Delta t$ é a inclinação da linha reta que liga (x_1, t_1) a (x_2, t_2). Se tomarmos o limite em que t_2 tende a t_1 (enquanto Δt tende a zero), a inclinação da linha que liga (x_1, t_1) a (x_2, t_2) se aproxima da inclinação da linha que é tangente à curva no ponto (x_1, t_1). A inclinação desta linha tangente é igual à **derivada** de x em relação a t e é escrita como dx/dt:

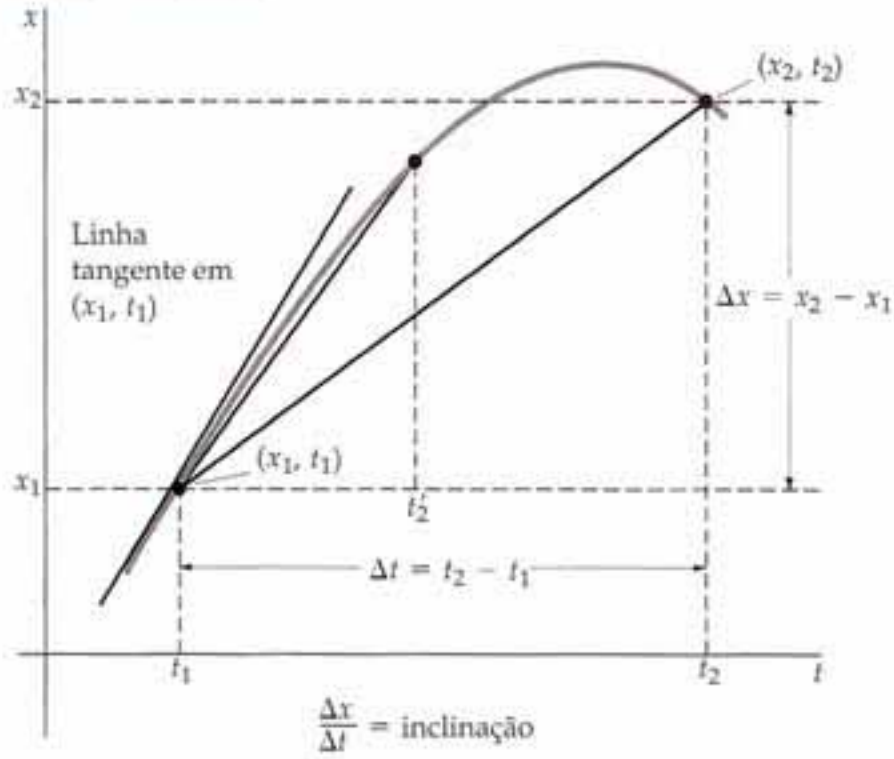


FIGURA M-23 Gráfico de uma função $x(t)$ típica. Os pontos (x_1,t_1) e (x_2,t_2) estão ligados por uma linha reta. A inclinação desta linha é $\Delta x/\Delta t$. Quando o intervalo de tempo que começa em t_1 diminui, a inclinação para esse intervalo se aproxima da inclinação da linha tangente à curva no tempo t_1, que é a derivada de x em relação a t.

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{M-62}$$

(Quando determinamos a derivada de uma função, dizemos que estamos **diferenciando** ou **derivando** a função; e os elementos muito pequenos "dx" e "dt" são as chamadas **diferenciais** de x e de t, respectivamente.) A derivada de uma função de t é outra função de t. Se x é uma constante e não varia, o gráfico de x *versus* t é uma reta horizontal de inclinação zero. A derivada de uma constante é, então, zero. Na Figura M-24, x não é constante mas é proporcional a t:

$$x = Ct$$

Esta função possui uma inclinação constante igual a C. Assim, a derivada de Ct é C. A Tabela M-3 lista algumas propriedades das derivadas e as derivadas de algumas funções particulares que ocorrem com freqüência em física. Ela é seguida de comentários feitos com o intuito de tornar estas propriedades e regras mais claras. Discussões mais detalhadas podem ser encontradas na maioria dos livros-texto de cálculo.

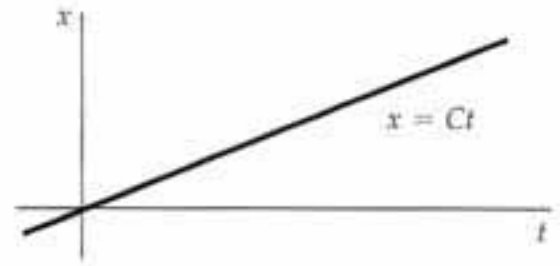


FIGURA M-24 Gráfico da função linear $x = Ct$. Esta função possui uma inclinação constante C.

COMENTÁRIOS SOBRE AS REGRAS 1 A 5

As regras 1 e 2 seguem do fato de que o processo limite é linear. Podemos entender a regra 3, a regra da cadeia, multiplicando $\Delta f/\Delta t$ por $\Delta x/\Delta x$ e reparando que, quando

Tabela M-3 Propriedades das Derivadas e Derivadas de Algumas Funções

Linearidade

1. A derivada de uma constante C vezes uma função $f(t)$ é igual à constante vezes a derivada da função:

$$\frac{d}{dt}[Cf(t)] = C\frac{df(t)}{dt}$$

2. A derivada de uma soma de funções é igual à soma das derivadas das funções:

$$\frac{d}{dt}[f(t) + g(t)] = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

Regra da cadeia

3. Se f é uma função de x e x é, por sua vez, uma função de t, a derivada de f em relação a t é igual ao produto da derivada de f em relação a x pela derivada de x em relação a t:

$$\frac{d}{dt}f(x(t)) = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Derivada de um produto

4. A derivada de um produto de funções $f(t)g(t)$ é igual à primeira função vezes a derivada da segunda mais a segunda função vezes a derivada da primeira:

$$\frac{d}{dt}[f(t)g(t)] = f(t)\frac{dg(t)}{dt} + g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

Inverso de uma derivada

5. A derivada de t em relação a x é o inverso da derivada de x em relação a t, supondo-se que nenhuma das derivadas seja nula:

$$\frac{dt}{dx} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} \quad \text{se} \quad \frac{dt}{dx} \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

Derivadas de algumas funções

6. Se C é uma constante, então $dC/dt = 0$.

7. $\dfrac{d(t^n)}{dt} = nt^{n-1}$ Se n é constante.

8. $\dfrac{d}{dt}\operatorname{sen}\omega t = \omega\cos\omega t$ Se ω é constante.

9. $\dfrac{d}{dt}\cos\omega t = -\omega\operatorname{sen}\omega t$ Se ω é constante.

10. $\dfrac{d}{dt}\tan\omega t = \omega\operatorname{sen}^2\omega t$ Se ω é constante.

11. $\dfrac{d}{dt}e^{bt} = be^{bt}$ Se b é constante.

12. $\dfrac{d}{dt}\ln bt = \dfrac{1}{t}$ Se b é constante.

Δt tende a zero, Δx também tende a zero. Isto é,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta t}\frac{\Delta x}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = \left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$$

onde usamos o fato de que o limite de um produto é igual ao produto dos limites.

A regra 4 não é imediatamente evidente. A derivada de um produto de funções é o limite da razão

$$\frac{f(t + \Delta t)g(t + \Delta t) - f(t)g(t)}{\Delta t}$$

Se somarmos e subtrairmos a quantidade $f(t + \Delta t)g(t)$ ao numerador, podemos escrever esta razão como

$$\frac{f(t + \Delta t)g(t + \Delta t) - f(t + \Delta t)g(t) + f(t + \Delta t)g(t) - f(t)g(t)}{\Delta t}$$
$$= f(t + \Delta t)\left[\frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}\right] + g(t)\left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}\right]$$

Quando Δt tende a zero, os termos entre colchetes se tornam $dg(t)/dt$ e $df(t)/dt$, respectivamente, e o limite da expressão é

$$f(t)\frac{dg(t)}{dt} + g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

A regra 5 segue diretamente da definição:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^{-1} = \left(\frac{dt}{dx}\right)^{-1}$$

COMENTÁRIOS SOBRE A REGRA 7

Podemos obter este importante resultado usando a expansão binomial. Temos

$$f(t) = t^n$$
$$f(t + \Delta t) = (t + \Delta t)^n = t^n\left(1 + \frac{\Delta t}{t}\right)^n$$
$$= t^n\left[1 + n\frac{\Delta t}{t} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^3 + \cdots\right]$$

Então,

$$f(t + \Delta t) - f(t) = t^n\left[n\frac{\Delta t}{t} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2 + \cdots\right]$$

e

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = nt^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}t^{n-2}\Delta t + \cdots$$

O termo seguinte, omitido da última soma, é proporcional a $(\Delta t)^2$, o próximo é proporcional a $(\Delta t)^3$, e assim por diante. Cada termo, exceto o primeiro, tende a zero quando Δt tende a zero. Assim,

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = nt^{n-1}$$

COMENTÁRIOS SOBRE AS REGRAS 8 A 10

Primeiro, escrevemos sen ωt = sen θ, com $\theta = \omega t$, e usamos a regra da cadeia,

$$\frac{d\ \text{sen}\ \theta}{dt} = \frac{d\ \text{sen}\ \theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\ \text{sen}\ \theta}{d\theta}$$

Depois, usamos as fórmulas trigonométricas para o seno da soma dos dois ângulos θ e $\Delta\theta$:

$$\text{sen}(\theta + \Delta\theta) = \text{sen}\ \Delta\theta\ \cos\theta + \cos\Delta\theta\ \text{sen}\ \theta$$

Como $\Delta\theta$ deve tender a zero, podemos usar as aproximações para pequenos ângulos

$$\text{sen}\ \Delta\theta \approx \Delta\theta \qquad \text{e} \qquad \cos\Delta\theta \approx 1$$

Então,

$$\text{sen}(\theta + \Delta\theta) \approx \Delta\theta\cos\theta + \text{sen}\ \theta$$

e

$$\frac{\text{sen}(\theta + \Delta\theta) - \text{sen}\ \theta}{\Delta\theta} \approx \cos\theta$$

Um raciocínio similar pode ser aplicado à função cosseno para obter a regra 9.

A regra 10 é obtida escrevendo $\tan\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$ e aplicando a regra 4, juntamente com as regras 8 e 9:

$$\frac{d}{dt}(\tan\theta) = \frac{d}{dt}(\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)^{-1} = \operatorname{sen}\theta\frac{d}{dt}(\cos\theta)^{-1} + \frac{d(\operatorname{sen}\theta)}{dt}(\cos\theta)^{-1}$$
$$= \operatorname{sen}\theta(-1)(\cos\theta)^{-2}(-\operatorname{sen}\theta) + (\cos\theta)(\cos\theta)^{-1}$$
$$= \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

Para obter a regra 10, faça $\theta = \omega t$ e use a regra da cadeia.

COMENTÁRIOS SOBRE A REGRA 11

Usamos novamente a regra da cadeia

$$\frac{de^{\theta}}{dt} = \frac{b\,de^{\theta}}{b\,dt} = b\frac{de^{\theta}}{d(bt)} = b\frac{de^{\theta}}{d\theta} \qquad \text{com} \qquad \theta = bt$$

e a expansão em série da função exponencial:

$$e^{\theta+\Delta\theta} = e^{\theta}e^{\Delta\theta} = e^{\theta}\left[1 + \Delta\theta + \frac{(\Delta\theta)^2}{2!} + \frac{(\Delta\theta)^3}{3!} + \cdots\right]$$

Então,

$$\frac{e^{\theta+\Delta\theta} - e^{\theta}}{\Delta\theta} = e^{\theta} + e^{\theta}\frac{\Delta\theta}{2!} + e^{\theta}\frac{(\Delta\theta)^2}{3!} + \cdots$$

Quando $\Delta\theta$ tende a zero, o lado direito desta equação tende a e^{θ}.

COMENTÁRIOS SOBRE A REGRA 12

Seja

$$y = \ln bt$$

Logo,

$$e^{y} = bt \Rightarrow t = \frac{1}{b}e^{y}$$

Então, usando a regra 11, obtemos

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{b}e^{y} \therefore \frac{dt}{dy} = t$$

E, usando a regra 5, fica

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{dt}{dy}\right)^{-1} = \frac{1}{t}$$

DERIVADAS DE SEGUNDA ORDEM E DE ORDENS SUPERIORES; ANÁLISE DIMENSIONAL

Uma vez tendo derivado uma função, podemos derivar a derivada resultante, desde que restem termos para serem derivados. Uma função como $x = e^{bt}$ pode ser derivada indefinidamente: $dx/dt = be^{bt}$ (esta função tem como derivada b^2e^{bt}, e assim por diante).

Considere a velocidade e a aceleração. Podemos definir velocidade como a taxa de variação da posição de uma partícula, ou dx/dt, e aceleração como a taxa de variação da velocidade, ou a *segunda* derivada de x em relação a t, escrita como d^2x/dt^2. Se uma partícula se move com velocidade constante, então dx/dt será igual a uma constante. A aceleração, no entanto, será zero: possuir uma velocidade constante equivale a não possuir aceleração, e a derivada de uma constante é zero. Considere, agora, um objeto em queda, sujeito à aceleração constante da gravidade: a velocidade será dependente do tempo, e a *segunda* derivada, d^2x/dt^2, será uma constante.

As *dimensões físicas* de uma derivada em relação a uma variável são as que resultariam se a função original da variável fosse dividida por um valor da variável. Por

exemplo, a dimensão de uma equação na qual um termo é x (posição) é a de comprimento (L); as dimensões da derivada de x em relação ao tempo t são as de velocidade (L/T) e as dimensões de d^2x/dt^2 são as de aceleração (L/T^2).

Exemplo M-12 Posição, Velocidade e Aceleração

Determine a primeira e a segunda derivadas de $x = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$, onde a, b e c são constantes. A função fornece a posição (em m) de uma partícula em uma dimensão, onde t é o tempo (em s), a é a aceleração (em m/s^2), b é a velocidade (em m/s) no tempo $t = 0$ e c é a posição (em m) da partícula em $t = 0$.

SITUAÇÃO A primeira e a segunda derivadas são somas de termos; para cada derivação, tomamos a derivada de cada termo separadamente e somamos os resultados.

SOLUÇÃO

1. Para determinar a primeira derivada, calcule inicialmente a derivada do primeiro termo: $\frac{d(\frac{1}{2}at^2)}{dt} = \left(\frac{1}{2}a\right)2t^1 = at$
2. Calcule a primeira derivada dos segundo e do terceiro termos: $\frac{d(bt)}{dt} = b, \quad \frac{d(c)}{dt} = 0$
3. Some estes resultados: $\frac{dx}{dt} = at + b$
4. Para calcular a segunda derivada, repita o processo para o resultado do passo 3: $\frac{d^2x}{dt^2} = a + 0 = a$

CHECAGEM As dimensões físicas mostram que o resultado é plausível. A função original é uma equação da posição; todos os termos são em metros — as unidades de t^2 e de t cancelam as unidades s^2 e s nas constantes a e b, respectivamente. Na função dx/dt, todos os termos são em m/s: a constante c tem derivada zero, e a unidade de t cancela uma das unidades s na constante a. Na função d^2x/dt^2, apenas a aceleração constante permanece; como esperado, suas dimensões são L/T^2.

PROBLEMAS PRÁTICOS

25. Determine dy/dx para $y = \frac{5}{8}x^3 - 24x - \frac{5}{8}$.
26. Determine dy/dt para $y = ate^{bt}$, onde a e b são constantes.

SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS USANDO NÚMEROS COMPLEXOS

Uma **equação diferencial** é uma equação na qual as derivadas de uma função aparecem como variáveis. É uma equação onde as variáveis estão relacionadas entre si através de suas derivadas. Considere uma equação da forma

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = A\cos\omega t \qquad \text{M-63}$$

que representa um processo físico, como um oscilador harmônico amortecido sujeito a uma força senoidal, ou uma combinação em série *RLC* sujeita a uma diferença de potencial senoidal. Apesar de todos os parâmetros da Equação M-63 serem números reais, o termo em cosseno dependente do tempo sugere que devemos procurar uma solução estacionária para esta equação através da introdução de números complexos. Primeiro, construímos a equação "paralela"

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = A\,\text{sen}\,\omega t \qquad \text{M-64}$$

A Equação M-64 não tem significado físico próprio, e não temos interesse em resolvê-la. No entanto, ela é útil para resolver a Equação M-63. Após multiplicar a Equação M-64 pela unidade imaginária i, somamos as Equações M-63 e M-64 para obter

$$\left(a\frac{d^2x}{dt^2} + ai\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \left(b\frac{dx}{dt} + bi\frac{dy}{dt}\right) + (cx + ciy) = A\cos\omega t + Ai\,\text{sen}\,\omega t$$

Agora, combinamos termos para chegar a

$$a\frac{d^2(x+iy)}{dt^2} + b\frac{d(x+iy)}{dt} + c(x+iy) = A(\cos\omega t + i\,\text{sen}\,\omega t) \qquad \text{M-65}$$

o que é válido, porque a derivada de uma soma é igual à soma das derivadas. Simplificamos nosso resultado definindo $z = x + iy$ e usando a identidade $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\,\text{sen}\,\omega t$. Substituindo na Equação M-65, obtemos

$$a\frac{d^2z}{dt^2} + b\frac{dz}{dt} + cz = Ae^{i\omega t} \qquad \text{M-66}$$

que, agora, resolvemos para z. Uma vez obtido z, podemos determinar x usando $x = \text{Re}(z)$.

Como estamos procurando apenas a solução estacionária da Equação M-65, podemos supor esta solução com a forma $x = x_0\cos(\omega t - \phi)$, onde ϕ é uma constante. Isto equivale a supor que a solução da Equação M-66 tem a forma $z = \eta e^{i\omega t}$, onde η (eta) é um número complexo constante. Então, $dz/dt = i\omega z$, $d^2z/dt^2 = -\omega^2 z$ e $e^{i\omega t} = z/\eta$. A substituição disto na Equação M-65 leva a

$$-a\omega^2 z + i\omega bz + cz = A\frac{z}{\eta}$$

Dividindo os dois lados desta equação por z, e explicitando η, fica

$$\eta = \frac{A}{-a\omega^2 + i\omega b + c}$$

Expressando o denominador em forma polar, temos

$$(-a\omega^2 + c) + i\omega b = \sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2}\, e^{i\phi}$$

onde $\tan\phi = \omega^2 b^2/(-a\omega^2 + c)$. Então,

$$\eta = \frac{A}{\sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2}} e^{-i\phi}$$

logo,

$$z = \eta e^{i\omega t} = \frac{A}{\sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2}} e^{i(\omega t - \phi)}$$

$$= \frac{A}{\sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2}}[\cos(\omega t - \phi) + i\,\text{sen}(\omega t - \phi)] \qquad \text{M-67}$$

Segue que

$$x = \text{Re}(z) = \frac{A}{\sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2}}\cos(\omega t - \phi) \qquad \text{M-68}$$

A FUNÇÃO EXPONENCIAL

Uma **função exponencial** é uma função da forma a^{bx}, onde $a > 0$ e b são constantes. A função é, normalmente, escrita como e^{cx}, onde c é uma constante.

Quando a taxa de variação de uma quantidade é proporcional à própria quantidade, a quantidade aumenta ou diminui exponencialmente, dependendo do sinal da constante de proporcionalidade. Um exemplo de uma função *exponencialmente* decrescente é o decaimento nuclear. Se N é o número de núcleos radioativos em determinado instante, então a variação dN em um intervalo de tempo muito pequeno dt será proporcional a N e a dt:

$$dN = -\lambda N\, dt$$

onde λ é a *constante de decaimento* (não confundir com a taxa de decaimento dN/dt, que decresce exponencialmente). A função N que satisfaz esta equação é

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \qquad \text{M-69}$$

onde N_0 é o valor de N no tempo $t = 0$. A Figura M-25 mostra N *versus* t. Uma característica do decaimento exponencial é que N diminui por um fator constante, em

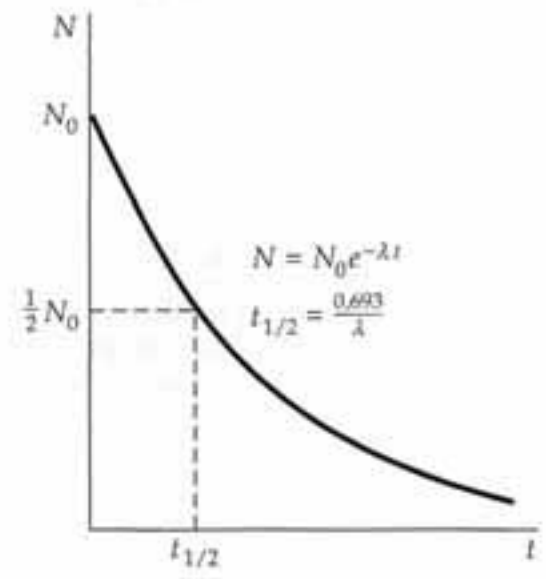


FIGURA M-25 Gráfico de N *versus* t quando N decresce exponencialmente. O tempo $t_{1/2}$ é o tempo que leva para N cair à metade.

dado intervalo de tempo. O intervalo de tempo para N diminuir à metade de seu valor original é sua *meia-vida* $t_{1/2}$. A meia-vida é obtida da Equação M-69 fazendo $N = \frac{1}{2}N_0$ e resolvendo para o tempo. Isto dá

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda} \qquad \text{M-70}$$

Um exemplo de *crescimento exponencial* é o crescimento populacional. Se N é o número de organismos, a variação de N após um intervalo de tempo muito pequeno dt é dada por

$$dN = +\lambda N\, dt$$

onde λ é, agora, a *constante de crescimento*. A função N que satisfaz esta equação é

$$N = N_0 e^{\lambda t} \qquad \text{M-71}$$

(Repare na mudança de sinal do expoente.) Um gráfico desta função é mostrado na Figura M-26. Um crescimento exponencial pode ser caracterizado pelo tempo de duplicação T_2, que se relaciona com λ por

$$T_2 = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda} \qquad \text{M-72}$$

Com freqüência, somos informados sobre o crescimento populacional através de um percentual anual de aumento, e desejamos calcular o tempo de duplicação. Neste caso, determinamos T_2 (em anos) com a equação

$$T_2 = \frac{69{,}3}{r} \qquad \text{M-73}$$

onde r é o percentual anual. Por exemplo, se a população cresce 2 por cento ao ano, ela dobrará a cada $69{,}3/2 \approx 35$ anos. A Tabela M-4 lista algumas relações úteis com as funções exponencial e logaritmo.

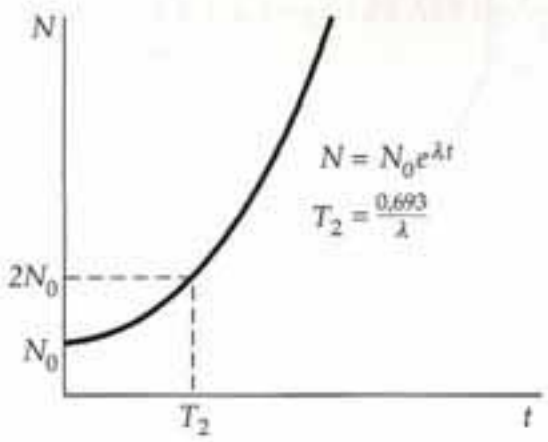


FIGURA M-26 Gráfico de N *versus* t quando N cresce exponencialmente. O tempo T_2 é o tempo que leva para N dobrar.

Tabela M-4 Função Exponencial e Função Logaritmo

$e = 2{,}718\,28$
$e^0 = 1$
Se $y = e^x$, então $x = \ln y$.
$e^{\ln x} = x$
$e^x e^y = e^{(x+y)}$
$(e^x)^y = e^{xy} = (e^y)^x$
$\ln e = 1;\ \ln 1 = 0$
$\ln xy = \ln x + \ln y$
$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
$\ln e^x = x;\ \ln a^x = x \ln a$
$\ln x = (\ln 10) \log x$
$\quad = 2{,}30\,26 \log x$
$\log x = (\log e) \ln x = 0{,}434\,29 \ln x$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$
$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

Exemplo M-13 Decaimento Radioativo do Cobalto-60

A meia-vida do cobalto-60 (^{60}Co) é 5,27 anos. Em $t = 0$, você possui uma amostra de ^{60}Co com 1,20 mg de massa. Em que tempo t (em anos) terão decaído 0,400 mg da amostra de ^{60}Co?

SITUAÇÃO Ao deduzirmos a meia-vida em um decaimento exponencial, fizemos $N/N_0 = 1/2$. Neste exemplo, devemos determinar o tempo em que dois terços de uma amostra permanecem, e portanto, a razão N/N_0 será 0,667.

SOLUÇÃO

1. Expresse a razão N/N_0 em forma exponencial: $\frac{N}{N_0} = 0{,}667 = e^{-\lambda t}$
2. Inverta os dois lados: $\frac{N_0}{N} = 1{,}50 = e^{\lambda t}$
3. Resolva para t: $t = \frac{\ln 1{,}50}{\lambda} = \frac{0{,}405}{\lambda}$
4. A constante de decaimento está relacionada à meia-vida por $\lambda = (\ln 2)/t_{1/2}$ (Equação M-70). Substitua λ por $(\ln 2)/t_{1/2}$ e determine o tempo: $t = \frac{\ln 1{,}5}{\ln 2} t_{1/2} = \frac{\ln 1{,}5}{\ln 2} \times 5{,}27 \text{ a} = 3{,}08 \text{ a}$

CHECAGEM Leva 5,27 anos para a massa de uma amostra de ^{60}Co decair a 50 por cento de sua massa inicial. Assim, esperamos que leve menos do que 5,27 anos para que a amostra perca 33,3 por cento de sua massa. Nosso resultado de 3,08 anos, do passo 4, é menor do que 5,27 anos, como esperado.

PROBLEMAS PRÁTICOS

27. A constante de tempo de descarga τ de um capacitor em um circuito RC é o tempo no qual o capacitor descarrega até atingir e^{-1} (ou 0,368) vezes a sua carga em $t = 0$. Se $\tau = 1$ s para um capacitor, em que tempo (em segundos) ele terá descarregado 50,0 por cento de sua carga inicial?
28. Se a população canina de seu estado cresce a uma taxa de 8,0 por cento a cada década e continua crescendo indefinidamente à mesma taxa, em quantos anos ela atingirá 1,5 vez o nível atual?

M-12 CÁLCULO INTEGRAL

A **integração** pode ser considerada como o inverso da derivação. Se uma função $f(t)$ é *integrada*, uma função $F(t)$ é encontrada tal que $f(t)$ seja a derivada de $F(t)$ em relação a t.

A INTEGRAL COMO UMA ÁREA SOB UMA CURVA; ANÁLISE DIMENSIONAL

O processo de determinação da área sob uma curva em um gráfico ilustra a integração. A Figura M-27 mostra uma função $f(t)$. A área do elemento sombreado é, aproximadamente, $f_i \Delta t_i$, onde f_i é calculado não importando em que ponto do intervalo Δt_i. Esta aproximação é muito boa, se Δt_i é muito pequeno. A área total sob um trecho da curva é determinada somando todos os elementos de área que ela cobre, e tomando o limite quando cada Δt_i tende a zero. Este limite é chamado de **integral** de f em relação a t e é escrito como

$$\int f\,dt = \text{área} = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i f_i \Delta t_i \qquad \text{M-74}$$

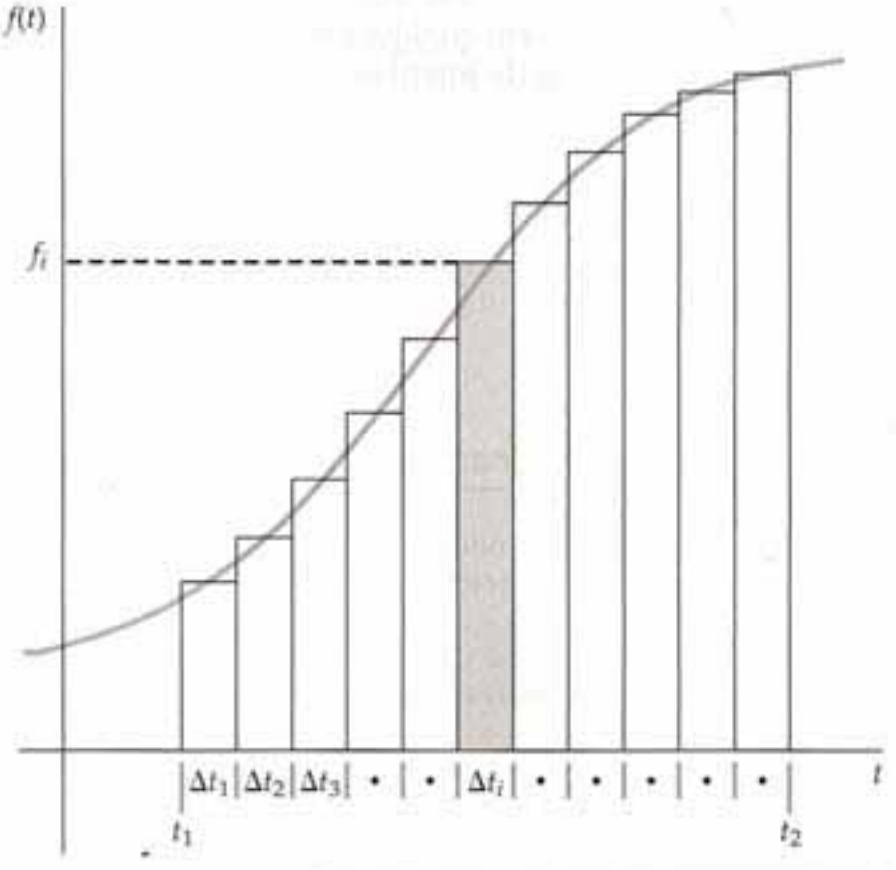


FIGURA M-27 Uma função genérica $f(t)$. A área do elemento sombreado vale aproximadamente $f_i \Delta t_i$, para qualquer f_i do intervalo.

As *dimensões físicas* de uma integral de uma função $f(t)$ são encontradas multiplicando as dimensões do *integrando* (a função que está sendo integrada) pelas dimensões da variável de integração t. Por exemplo, se o integrando é uma função velocidade $v(t)$ (dimensões L/T) e a variável de integração é o tempo t, a dimensão da integral é L = (L/T) × T. Isto é, as dimensões da integral são as de velocidade vezes tempo.

Seja

$$y = \int_{t_1}^{t} f\,dt \qquad \text{M-75}$$

A função y é a área sob a curva f *versus* t, de t_1 até um valor genérico t. Para um pequeno intervalo Δt, a variação da área Δy é aproximadamente $f\,\Delta t$:

$$\Delta y \approx f\,\Delta t$$

$$f \approx \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Se tomarmos o limite quando Δt tende a 0, podemos ver que f é a derivada de y:

$$f = \frac{dy}{dt} \qquad \text{M-76}$$

INTEGRAIS INDEFINIDAS E INTEGRAIS DEFINIDAS

Quando escrevemos

$$y = \int f\,dt \qquad \text{M-77}$$

estamos mostrando y como uma **integral indefinida** de f em relação a t. Para calcular uma integral indefinida, determinamos a função y cuja derivada é f. Como essa função pode conter um termo constante que, derivado, contribui com zero, incluímos como termo final um **constante de integração** C. Se estamos integrando a função em uma região conhecida — como de t_1 a t_2, na Figura M-27 — podemos determinar uma **integral definida**, eliminando a constante desconhecida C:

$$\int_{t_1}^{t_2} f\,dt = y(t_2) - y(t_1) \qquad \text{M-78}$$

A Tabela M-5 lista algumas fórmulas de integração importantes. Listas mais extensas de fórmulas de integração podem ser encontradas em qualquer livro-texto de cálculo ou procurando "tabela de integrais" na Internet.

Tabela M-5 Fórmulas de Integração*

1. $\int A\,dt = At$
2. $\int At\,dt = \frac{1}{2}At^2$
3. $\int At^n\,dt = A\frac{t^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1$
4. $\int At^{-1}\,dt = A\ln|t|$
5. $\int e^{bt}\,dt = \frac{1}{b}e^{bt}$
6. $\int \cos \omega t\,dt = \frac{1}{\omega}\operatorname{sen} \omega t$
7. $\int \operatorname{sen} \omega t\,dt = -\frac{1}{\omega}\cos \omega t$
8. $\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$
9. $\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
10. $\int_0^\infty xe^{-ax^2}\,dx = \frac{2}{a}$
11. $\int_0^\infty x^2e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$
12. $\int_0^\infty x^3e^{-ax^2}\,dx = \frac{4}{a^2}$
13. $\int_0^\infty x^4e^{-ax^2}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$

* Nestas fórmulas, A, b e ω são constantes. Nas fórmulas 1 a 7, uma constante arbitrária C pode ser somada ao lado direito de cada equação. A constante a é maior do que zero.

Exemplo M-14 Integrando Equações de Movimento

Uma partícula está se movendo com aceleração constante a. Escreva uma fórmula para a posição x no tempo t, sabendo que a posição e a velocidade são x_0 e v_0, no tempo $t = 0$.

SITUAÇÃO A velocidade v é a derivada de x em relação ao tempo t, e a aceleraçao é a derivada de v em relação a t. Podemos escrever uma função $x(t)$ realizando duas integrações.

SOLUÇÃO

1. Integre a em relação a t para determinar v como função de t. Pode-se fatorar a do integrando, já que a é constante:
$$v = \int a\,dt = a\int dt$$
$$v = at + C_1$$
onde C_1 representa a vezes a constante de integração.

2. A velocidade v é igual a v_0 quando $t = 0$:
$$v_0 = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = v_0$$
logo $\quad v = v_0 + at$

3. Integre v em relação a t para determinar x como função de t:
$$x = \int v\,dt = \int (v_0 + at)\,dt = \int v_0\,dt + \int at\,dt$$
$$x = v_0\int dt + a\int t\,dt = v_0t + \tfrac{1}{2}at^2 + C_2$$
onde C_2 representa a combinação das constantes de integração.

4. A posição x é igual a x_0 quando $t = 0$:
$$x_0 = 0 + 0 + C_2$$
logo $\quad x = x_0 + v_0t + \tfrac{1}{2}at^2$

CHECAGEM Derive duas vezes o resultado do passo 4 para obter a aceleração:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x_0 + v_0t + \tfrac{1}{2}at^2) = 0 + v_0 + at$$
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 + at) = a$$

PROBLEMAS PRÁTICOS

29. $\int_3^6 3\,dx =$

30. $V = \int_5^8 \pi r^2\,dL =$

Respostas dos Problemas Práticos

1. 0,24 L
2. 31,6 m/s
3. 6,0 kg/cm³
4. -3
5. 1,54 L
6. 3,07 L
7. Falso
8. $x = (4{,}5\ \text{m/s})t + 3{,}0\ \text{m}$
9. $x = 8, y = 60$
11. $2(x - y)^2$
12. $x^2(2x + 4)(x + 3)$
13. $x^{1/2}$
14. x^6
15. 3
16. ~ 2,322
17. $V/A = \frac{1}{3}r$
18. $A = \frac{2}{3}\pi L^2$
19. $\text{sen}\ \theta = 0{,}496, \cos\theta = 0{,}868, \theta = 29{,}7°$
20. $\text{sen}\ 8{,}2° = 0{,}1426, 8{,}2° = 0{,}1431$ rad
21. 0,996, 0,996 00, próximo de 0%
22. 0,96, 0,960 77, $\ll 1\%$
23. $-1 + 0i = -1$
24. $0 + i = i$
25. $dy/dx = \frac{5}{24}x^2 - 24$
26. $dy/dt = ae^{bt}(bt + 1)$
27. 0,693 s
28. 51 a
29. 9
30. $3\pi r^2$

Apêndice A

Unidades SI e Fatores de Conversão

Unidades de Base*

Comprimento	O *metro* (m) é a distância percorrida pela luz no vácuo em 1/299.792.458 s.
Tempo	O *segundo* (s) é a duração de 9.192.631.770 períodos da radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de ^{133}Cs.
Massa	O *quilograma* (kg) é a massa do protótipo internacional conservado em Sèvres, na França.
Mol	O *mol* (mol) é a quantidade de matéria de um sistema contendo tantas entidades elementares quantos átomos existem em 0,012 quilograma de carbono 12.
Corrente	O *ampère* (A) é a corrente elétrica constante que, se mantida em dois condutores paralelos, retilíneos, de comprimento infinito, de seção circular desprezível, e situados à distância de 1 metro entre si no vácuo, produz entre estes condutores uma força igual a 2×10^{-7} newton por metro de comprimento.
Temperatura	O *kelvin* (K) é 1/273,16 da temperatura termodinâmica no ponto tríplice da água.
Intensidade luminosa	A *candela* (cd) é a intensidade luminosa, numa dada direção, de uma fonte que emite uma radiação monocromática de freqüência 540×10^{12} hertz e cuja intensidade radiante nessa direção é 1/683 watt/esterradiano.

* Essas definições são encontras no site do órgão oficial brasileiro responsável pela padronização e assuntos de medição, cujo endereço é: http://www.inmetro.gov.br. (N.T.)

Unidades Derivadas

Força	newton (N)	$1\ N = 1\ kg \cdot m/s^2$
Trabalho, energia	joule (J)	$1\ J = 1\ N \cdot m$
Potência	watt (W)	$1\ W = 1\ J/s$
Freqüência	hertz (Hz)	1 Hz = ciclo/s
Carga	coulomb (C)	$1\ C = 1\ A \cdot s$
Potencial	volt (V)	$1\ V = 1\ J/C$
Resistência	ohm (Ω)	$1\ \Omega = 1\ V/A$
Capacitância	farad (F)	$1\ F = 1\ C/V$
Campo magnético	tesla (T)	$1\ T = 1\ N/(A \cdot m)$
Fluxo magnético	weber (Wb)	$1\ Wb = 1\ T \cdot m^2$
Indutância	henry (H)	$1\ H = 1\ J/A^2$

Fatores de Conversão

Por simplicidade, os fatores de conversão são escritos como equações; as relações marcadas com asterisco são exatas.

Comprimento

1 km = 0,6215 mi
1 mi = 1,609 km
1 m = 1,0936 yd = 3,281 ft = 39,37 in
*1 in = 2,54 cm
*1 ft = 12 in = 30,48 cm
*1 yd = 3 ft = 91,44 cm
1 ano-luz = 1 $c \cdot a = 9{,}461 \times 10^{15}$ m
*1 Å = 0,1 nm

Área

*1 $m^2 = 10^4$ cm^2
1 km^2 = 0,3861 mi^2 = 247,1 acres
*1 in^2 = 6,4516 cm^2
1 $ft^2 = 9{,}29 \times 10^{-2}$ m^2
1 m^2 = 10,76 ft^2
*1 acre = 43 560 ft^2
1 mi^2 = 640 acres = 2,590 km^2

Volume

*1 $m^3 = 10^6$ cm^3
*1 L = 1000 $cm^3 = 10^{-3}$ m^3
1 gal = 3,785 L
1 gal = 4 qt = 8 pt = 128 oz = 231 in^3
1 in^3 = 16,39 cm^3
1 ft^3 = 1728 in^3 = 28,32 L
= $2{,}832 \times 10^4$ cm^3

Tempo

*1 h = 60 min = 3,6 ks
*1 d = 24 h = 1440 min = 86,4 ks
1 a = 365,24 d = $3{,}156 \times 10^7$ s

Rapidez

*1 m/s = 3,6 km/h
1 km/h = 0,2778 m/s = 0,6215 mi/h
1 mi/h = 0,4470 m/s = 1,609 km/h
1 mi/h = 1,467 ft/s

Ângulo e Rapidez Angular

*π rad = 180°
1 rad = 57,30°
1° = $1{,}745 \times 10^{-2}$ rad
1 rev/min = 0,1047 rad/s
1 rad/s = 9,549 rev/min

Massa

*1 kg = 1000 g
*1 t = 1000 kg = 1 Mg
1 u = $1{,}6605 \times 10^{-27}$ kg
= 931,49 MeV/c^2
1 kg = $6{,}022 \times 10^{26}$ u
1 slug = 14,59 kg
1 kg = $6{,}852 \times 10^{-2}$ slug

Massa Específica

*1 g/cm^3 = 1000 kg/m^3 = 1 kg/L
(1 g/cm^3)g = 62,4 lb/ft^3

Força

1 N = 0,2248 lb = 10^5 dyn
*1 lb = 4,448222 N
(1 kg)g = 2,2046 lb

Pressão

*1 Pa = 1 N/m^2
*1 atm = 101,325 kPa = 1,01325 bar
1 atm = 14,7 lb/in^2 = 760 mmHg
= 29,9 inHg = 33,9 ftH_2O
1 lb/in^2 = 6,895 kPa
1 torr = 1 mmHg = 133,32 Pa
1 bar = 100 kPa

Energia

*1 kW · h = 3,6 MJ
*1 cal = 4,1840 J
1 ft · lb = 1,356 J = $1{,}286 \times 10^{-3}$ Btu
*1 L · atm = 101,325 J
1 L · atm = 24,217 cal
1 Btu = 778 ft · lb = 252 cal = 1054,35 J
1 eV = $1{,}602 \times 10^{-19}$ J
1 u · c^2 = 931,49 MeV
*1 erg = 10^{-7} J

Potência

1 HP = 550 ft · lb/s = 745,7 W
1 Btu/h = $2{,}931 \times 10^{-4}$ kW
1 W = $1{,}341 \times 10^{-3}$ HP
= 0,7376 ft · lb/s

Campo Magnético

*1 T = 10^4 G

Condutividade Térmica

1 W/(m·K) = 6,938 Btu·in/(h·ft^2·F°)
1 Btu·in/(h·ft^2·F°) = 0,1441 W/(m·K)

Apêndice B
Dados Numéricos

Dados Terrestres

Aceleração de queda livre g	
Valor-padrão (ao nível do mar e a 45° de latitude)*	9,806 65 m/s^2; 32,1740 ft/s^2
No equador*	9,7804 m/s^2
Nos pólos*	9,8322 m/s^2
Massa da Terra M_T	$5{,}97 \times 10^{24}$ kg
Raio médio da Terra R_T	$6{,}37 \times 10^6$ m; 3960 mi
Rapidez de escape $\sqrt{2R_E g}$	$1{,}12 \times 10^4$ m/s; 6,95 mi/s
Constante solar†	1,37 kW/m^2
Condições normais de temperatura e pressão (CNTP):	
Temperatura	273,15 K (0,00°C)
Pressão	101,325 kPa (1,00 atm)
Massa molar do ar	28,97 g/mol
Massa específica do ar (CNTP), ρ_{ar}	1,217 kg/m^3
Rapidez do som (CNTP)	331 m/s
Calor de fusão de H_2O (0°C, 1 atm)	333,5 kJ/kg
Calor de vaporização de H_2O (100°C, 1 atm)	2,257 MJ/kg

* Medido em relação à superfície da Terra.
† Potência média incidente perpendicularmente sobre uma área de 1 m^2, fora da atmosfera terrestre e a meio caminho entre a Terra e o Sol.

Dados Astronômicos*

Terra	
Distância média à lua†	$3{,}844 \times 10^8$ m; $2{,}389 \times 10^5$ mi
Distância média ao Sol†	$1{,}496 \times 10^{11}$ m; $9{,}30 \times 10^7$ mi; 1,00 UA
Rapidez orbital média	$2{,}98 \times 10^4$ m/s
Lua	
Massa	$7{,}35 \times 10^{22}$ kg
Raio	$1{,}737 \times 10^6$ m
Período	27,32 d
Aceleração da gravidade na superfície	1,62 m/s^2
Sol	
Massa	$1{,}99 \times 10^{30}$ kg
Raio	$6{,}96 \times 10^8$ m

* Dados adicionais sobre o sistema solar podem ser encontrados em http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/planetfact.html.
† Centro a centro.

Constantes Físicas*

Constante de gravitação	G	$6{,}6742(10) \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$
Rapidez da luz	c	$2{,}997\ 924\ 58 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}$
Carga fundamental	e	$1{,}602\ 176\ 453(14) \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$
Número de Avogadro	N_A	$6{,}022\ 141\ 5(10) \times 10^{23}$ partículas/mol
Constante dos gases	R	$8{,}314\ 472(15)\ \mathrm{J/(mol \cdot K)}$
		$1{,}987\ 2065(36)\ \mathrm{cal/(mol \cdot K)}$
		$8{,}205\ 746(15) \times 10^{-2}\ \mathrm{L \cdot atm/(mol \cdot K)}$
Constante de Boltzmann	$k = R/N_A$	$1{,}380\ 650\ 5(24) \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K}$
		$8{,}617\ 343(15) \times 10^{-5}\ \mathrm{eV/K}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = (\pi^2/60)k^4/(\hbar^3c^2)$	$5{,}670\ 400(40) \times 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2K^4)}$
Constante de massa atômica	$m_u = \frac{1}{12}m(^{12}\mathrm{C})$	$1{,}660\ 538\ 86(28) \times 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 1\mathrm{u}$
Constante magnética (permeabilidade do vácuo)	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$
		$1{,}256\ 637 \times 10^{-6}\ \mathrm{N/A^2}$
Constante elétrica (permitividade do vácuo)	$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 C^2)$	$8{,}854\ 187\ 817\ \ldots \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N \cdot m^2)}$
Constante de Coulomb	$k = 1/(4\pi\epsilon_0)$	$8{,}987\ 551\ 788\ \ldots \times 10^{9}\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$
Constante de Planck	h	$6{,}626\ 0693(11) \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$
		$4{,}135\ 667\ 43(35) \times 10^{-15}\ \mathrm{eV \cdot s}$
	$\hbar = h/2\pi$	$1{,}054\ 571\ 68(18) \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$
		$6{,}582\ 119\ 15(56) \times 10^{-16}\ \mathrm{eV \cdot s}$
Massa do elétron	m_e	$9{,}109\ 382\ 6(16) \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
		$0{,}510\ 998\ 918(44)\ \mathrm{MeV}/c^2$
Massa do próton	m_p	$1{,}672\ 621\ 71(29) \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
		$938{,}272\ 029(80) \times \mathrm{MeV}/c^2$
Massa do nêutron	m_n	$1{,}674\ 927\ 28(29) \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
		$939{,}565\ 360(81)\ \mathrm{MeV}/c^2$
Magnéton de Bohr	$m_B = eh/2m_e$	$9{,}274\ 009\ 49(80) \times 10^{-24}\ \mathrm{J/T}$
		$5{,}788\ 381\ 804(39) \times 10^{-5}\ \mathrm{eV/T}$
Magnéton nuclear	$m_n = eh/2m_p$	$5{,}050\ 783\ 43(43) \times 10^{-27}\ \mathrm{J/T}$
		$3{,}152\ 451\ 259(21) \times 10^{-8}\ \mathrm{eV/T}$
Quantum de fluxo magnético	$\phi_0 = h/2e$	$2{,}067\ 833\ 72(18) \times 10^{-15}\ \mathrm{T \cdot m^2}$
Resistência Hall quantizada	$R_K = h/e^2$	$2{,}581\ 280\ 7449(86) \times 10^{4}\ \Omega$
Constante de Rydberg	R_H	$1{,}097\ 373\ 156\ 8525(73) \times 10^{7}\ \mathrm{m^{-1}}$
Quociente freqüência-tensão de Josephson	$K_J = 2e/h$	$4{,}835\ 978\ 79(41) \times 10^{14}\ \mathrm{Hz/V}$
Comprimento de onda de Compton	$\lambda_C = h/m_e c$	$2{,}426\ 310\ 238(16) \times 10^{-12}\ \mathrm{m}$

* Os valores destas e de outras constantes podem ser encontrados na internet em http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html. Os números entre parênteses representam as incertezas nos dois últimos algarismos. (Por exemplo, 2,044 43(13) significa 2,044 43 ± 0,000 13.) Valores sem indicação de incertezas são exatos, bem como valores com reticências (como o número pi, que vale exatamente 3,1415...).

Para dados adicionais, veja as seguintes tabelas no texto.

1-1 Prefixos para Potências de 10
1-2 Dimensões de Quantidades Físicas
1-3 O Universo em Ordens de Grandeza
1-4 Propriedades dos Vetores
5-1 Valores Aproximados de Coeficientes de Atrito
6-1 Propriedades do Produto Escalar
7-1 Energias de Repouso de Algumas Partículas Elementares e de Alguns Núcleos Leves
9-1 Momentos de Inércia de Corpos Homogêneos de Várias Formas
9-2 Analogias entre Rotação em Torno de Eixo Fixo e Movimento de Translação Unidimensional
11-1 Raios Orbitais Médios e Períodos Orbitais dos Planetas
12-1 Módulos de Young Y e Limites de Vários Materiais
12-2 Valores Aproximados do Módulo de Cisalhamento M_{cis} de Vários Materiais
13-1 Massas Específicas de Algumas Substâncias
13-2 Valores Aproximados do Módulo Volumétrico B de Alguns Materiais
13-3 Coeficientes de Viscosidade de Alguns Fluidos
15-1 Intensidade e Nível de Intensidade de Alguns Sons Comuns ($I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$)
17-1 Temperaturas de Vários Lugares e Fenômenos
18-1 Calores Específicos e Calores Específicos Molares de Alguns Sólidos e Líquidos
18-2 Ponto de Fusão (PF), Calor Latente de Fusão (L_f), Ponto de Ebulição (PE) e Calor Latente de Vaporização (L_v), para Várias Substâncias a 1 atm
18-3 Capacidades Térmicas Molares de Vários Gases a 25°C, em J/mol·K
20-1 Valores Aproximados para os Coeficientes de Expansão Térmica de Várias Substâncias
20-3 Temperaturas Críticas T_c para Várias Substâncias
20-4 Condutividades Térmicas k de Vários Materiais
20-5 Fatores R, $l\Delta x/k$, para Vários Materiais de Construção

Geometria e Trigonometria

$C = \pi d = 2\pi r$ definição de π

$A = \pi r^2$ área do círculo

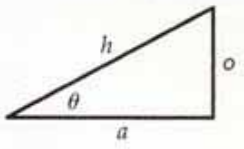
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ volume da esfera

$A = \partial V/\partial r = 4\pi r^2$ área da superfície da esfera

$V = A_{base}L = \pi r^2 L$ volume do cilindro

$A = \partial V/\partial r = 2\pi rL$ área da superfície do cilindro

$o = h \operatorname{sen}\theta$
$a = h \cos\theta$



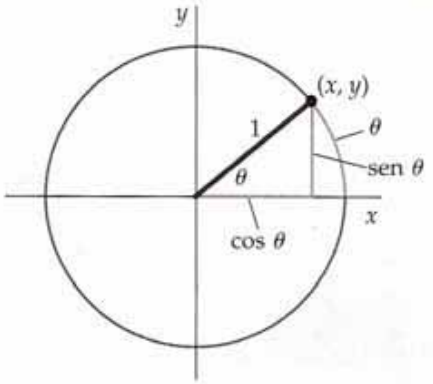
$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B$

$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$

$\operatorname{sen} A \pm \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen}[\frac{1}{2}(A \pm B)] \cos[\frac{1}{2}(A \mp B)]$

$\operatorname{sen}\theta = y$
$\cos\theta = x$
$\tan\theta = \frac{y}{x}$



Se $|\theta| << 1$, então
$\cos\theta \approx 1$ e $\tan\theta \approx \operatorname{sen}\theta \approx \theta$ (θ em radianos)

Fórmula Quadrática

Se $ax^2 + bx + c = 0$, então $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Expansão Binomial

Se $|x| < 1$, então $(1 + x)^n =$

$$1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

Se $|x| << 1$, então $(1 + x)^n \approx 1 + nx$

Aproximação Diferencial

Se $\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x)$ e se $|\Delta x|$ é pequeno,

então $\Delta F \approx \dfrac{dF}{dx}\Delta x$.

Apêndice C

Tabela Periódica dos Elementos*

1																	18
1 H	2											13	14	15	16	17	2 He
3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
11 Na	12 Mg	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
55 Cs	56 Ba	57–71 Terras-raras	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
87 Fr	88 Ra	89–103 Actiní-deos	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110 Ds	111 Rg							

Terras-raras (Lantanídeos)	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
Actinídeos	89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr

* A designação dos grupos de 1 a 18 foi recomendada pela União Internacional de Química Pura e Aplicada (IUPAC). A partir de setembro de 2003 foram comunicadas as existências dos elementos de números atômicos 112, 114 e 116, ainda sem confirmação.

Números Atômicos e Massas Atômicas*

Número Atômico	Nome	Símbolo	Massa	Número Atômico	Nome	Símbolo	Massa
1	Hidrogênio	H	1,00794(7)	57	Lantânio	La	138,90547(7)
2	Hélio	He	4,002602(2)	58	Cério	Ce	140,116(1)
3	Lítio	Li	6,941(2)	59	Praseodímio	Pr	140,90765(2)
4	Berílio	Be	9,012182(3)	60	Neodímio	Nd	144,242(3)
5	Boro	B	10,811(7)	61	Promécio	Pm	[145]
6	Carbono	C	12,0107(8)	62	Samário	Sm	150,36(2)
7	Nitrogênio	N	14,0067(2)	63	Európio	Eu	151,964(1)
8	Oxigênio	O	15,9994(3)	64	Gadolínio	Gd	157,25(3)
9	Flúor	F	18,9984032(5)	65	Térbio	Tb	158,92535(2)
10	Neônio	Ne	20,1797(6)	66	Disprósio	Dy	162,500(1)
11	Sódio	Na	22,98976928(2)	67	Hólmio	Ho	164,93032(2)
12	Magnésio	Mg	24,3050(6)	68	Érbio	Er	167,259(3)
13	Alumínio	Al	26,9815386(8)	69	Túlio	Tm	168,93421(2)
14	Silício	Si	28,0855(3)	70	Itérbio	Yb	173,04(3)
15	Fósforo	P	30,973762(2)	71	Lutécio	Lu	174,967(1)
16	Enxofre	S	32,065(5)	72	Háfnio	Hf	178,49(2)
17	Cloro	Cl	35,453(2)	73	Tântalo	Ta	180,94788(2)
18	Argônio	Ar	39,948(1)	74	Tungstênio	W	183,84(1)
19	Potássio	K	39,0983(1)	75	Rênio	Re	186,207(1)
20	Cálcio	Ca	40,078(4)	76	Ósmio	Os	190,23(3)
21	Escândio	Sc	44,955912(6)	77	Irídio	Ir	192,217(3)
22	Titânio	Ti	47,867(1)	78	Platina	Pt	195,084(9)
23	Vanádio	V	50,9415(1)	79	Ouro	Au	196,966569(4)
24	Cromo	Cr	51,9961(6)	80	Mercúrio	Hg	200,59(2)
25	Manganês	Mn	54,938045(5)	81	Tálio	Tl	204,3833(2)
26	Ferro	Fe	55,845(2)	82	Chumbo	Pb	207,2(1)
27	Cobalto	Co	58,933195(5)	83	Bismuto	Bi	208,98040(1)
28	Níquel	Ni	58,6934(2)	84	Polônio	Po	[209]
29	Cobre	Cu	63,546(3)	85	Astatínio	At	[210]
30	Zinco	Zn	65,409(4)	86	Radônio	Rn	[222]
31	Gálio	Ga	69,723(1)	87	Frâncio	Fr	[223]
32	Germânio	Ge	72,64(1)	88	Rádio	Ra	[226]
33	Arsênio	As	74,92160(2)	89	Actínio	Ac	[227]
34	Selênio	Se	78,96(3)	90	Tório	Th	232,03806(2)
35	Bromo	Br	79,904(1)	91	Protactínio	Pa	231,03588(2)
36	Criptônio	Kr	83,798(2)	92	Urânio	U	238,02891(3)
37	Rubídio	Rb	85,4678(3)	93	Netúnio	Np	[237]
38	Estrôncio	Sr	87,62(1)	94	Plutônio	Pu	[244]
39	Ítrio	Y	88,90585(2)	95	Amerício	Am	[243]
40	Zircônio	Zr	91,224(2)	96	Cúrio	Cm	[247]
41	Nióbio	Nb	92,90638(2)	97	Berquélio	Bk	[247]
42	Molibdênio	Mo	95,94(2)	98	Califórnio	Cf	[251]
43	Tecnécio	Tc	[98]	99	Einstênio	Es	[252]
44	Rutênio	Ru	101,07(2)	100	Férmio	Fm	[257]
45	Ródio	Rh	102,90550(2)	101	Mendelévio	Md	[258]
46	Paládio	Pd	106,42(1)	102	Nobélio	No	[259]
47	Prata	Ag	107,8682(2)	103	Laurêncio	Lr	[262]
48	Cádmio	Cd	112,411(8)	104	Rutherfórdio	Rf	[261]
49	Índio	In	114,818(3)	105	Dúbnio	Db	[262]
50	Estanho	Sn	118,710(7)	106	Seabórgio	Sg	[266]
51	Antimônio	Sb	121,760(1)	107	Bóhrio	Bh	[264]
52	Telúrio	Te	127,60(3)	108	Hássio	Hs	[277]
53	Iodo	I	126,90447(3)	109	Meitnério	Mt	[268]
54	Xenônio	Xe	131,293(6)	110	Darmstádio	Ds	[271]
55	Césio	Cs	132,9054519(2)	111	Roentgênio	Rg	[272]
56	Bário	Ba	137,327(7)				

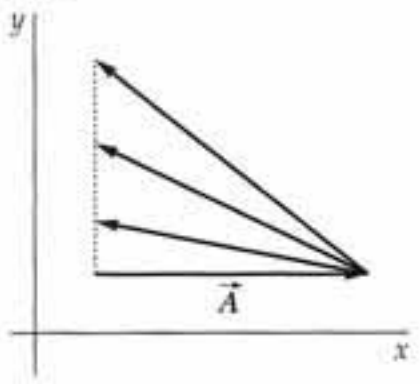
* Valores de massa atômica com incertezas indicadas pelo último algarismo, entre parênteses.

Respostas dos Problemas Ímpares de Finais de Capítulos

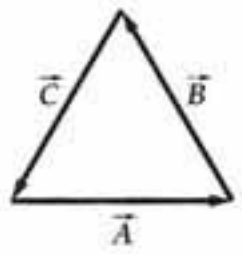
As respostas dos problemas são calculadas usando $g = 9{,}81\ m/s^2$, a não ser quando diferentemente especificado. Diferenças no último algarismo podem facilmente resultar de diferenças de arredondamento dos dados de entrada e não são importantes.

Capítulo 1

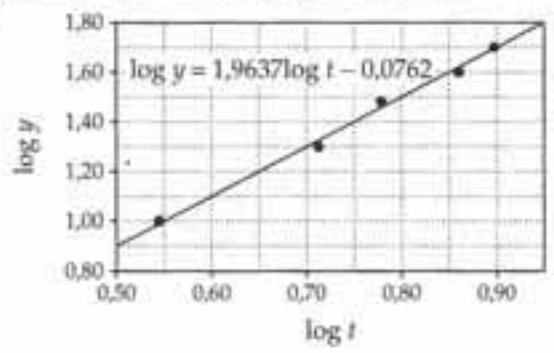
1 (*c*)
3 (*c*)
5 $1{,}609 \times 10^5$ cm/mi
7 (*e*)
9 Falso
11



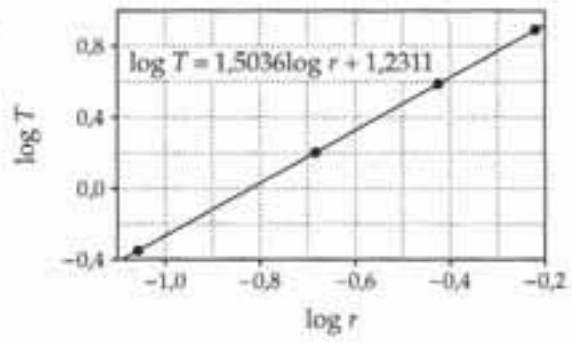
13



15 $2{,}0 \times 10^{27}$ moléculas
17 (*a*) $\approx 3 \times 10^{10}$ fraldas descartáveis, (*b*) $\approx 2 \times 10^7\ m^3$, (*c*) $\approx 0{,}8\ mi^2$
19 (*a*) 50 MB, (*b*) 7×10^2 romances
21 (*a*) 40×10^{-6} W, (*b*) 4×10^{-9} s, (*c*) 3×10^6 W, (*d*) 25×10^3 m
23 (*a*) C_1 em m; C_2 em m/s, (*b*) C_1 em m/s^2, (*c*) C_1 em m/s^2, (*d*) C_1 em m; C_2 em s^{-1}, (*e*) C_1 em m/s; C_2 em s^{-1}
25 (*a*) $4{,}00 \times 10^7$ m, (*b*) $6{,}37 \times 10^6$ m, (*c*) $2{,}49 \times 10^4$ mi, $3{,}96 \times 10^3$ mi
27 210 cm
29 1,280 km
31 (*a*) 36,00 km/h · s, (*b*) 10,00 m/s^2, (*c*) 88 ft/s, (*d*) 27 m/s
33 (*a*) $1{,}3 \times 10^4$ lb, (*b*) 4 fardos
35 (*a*) m/s^2, (*b*) s, (*c*) m
37 T^{-1}
39 (*a*) M/T^2, (*b*) $kg \cdot m^2/s^2$
43 M/L^3
45 (*a*) 30 000, (*b*) 0,0062, (*c*) 0,000 004, (*d*) 217 000
47 (*a*) $1{,}14 \times 10^5$, (*b*) $2{,}25 \times 10^{-8}$, (*c*) $8{,}27 \times 10^3$, (*d*) $6{,}27 \times 10^2$
49 $3{,}6 \times 10^6$
51 (*a*) 25,8 mm^2, (*b*) 30,1 mm^2
53 (*a*) $A_x = 5{,}0$ m, $A_y = 8{,}7$ m, (*b*) $v_x = -19$ m/s, $v_y = -16$ m/s, (*c*) $F_x = 35$ lb, $F_y = 20$ lb
55 Você pode ir tanto 87 m para o norte quanto 87 m para o sul. O sentido de sua caminhada deve apontar ou 60° para norte do leste ou 60° para sul do leste, respectivamente.
57 (*a*) $40\hat{i} - 50\hat{j}$, (*b*) −51°,
59 $-0{,}59\hat{i} - 0{,}81\hat{j}$; $0{,}92\hat{i} - 0{,}38\hat{j}$; $-0{,}51\hat{i} + 0{,}86\hat{j}$
61 $\approx 3{,}3 \times 10^3$ mi/h, $\approx 5{,}3 \times 10^3$ km/h, $\approx 1{,}5 \times 10^3$ m/s
63 31,7 a
65 $2{,}0 \times 10^{23}$
67 (*a*) $1{,}4 \times 10^{17}\ kg/m^3$, (*b*) $2{,}2 \times 10^2$ m
69 (*a*) $4{,}848 \times 10^{-6}$ parsec, (*b*) $3{,}086 \times 10^{16}$ m, (*c*) $9{,}461 \times 10^{15}$ m, (*d*) $6{,}324 \times 10^4$ UA, (*e*) 3,262 anos-luz
71 (*a*)



(*c*) $B = 0{,}84\ m/s^2$, $C = 2{,}0$, (*d*) 1,1 s, (*e*) $1{,}7\ m/s^2$
73 $55{,}4 \times 10^3$ t. A alegação de 50.000 t é conservadora. O peso real é mais próximo de 55.000 t.
75 (*a*)

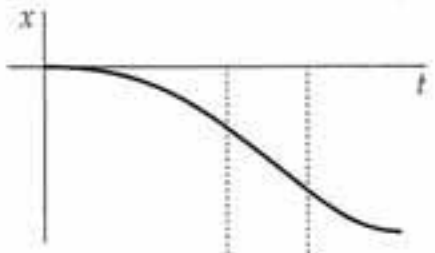


$n = 1{,}50$, $C = 17{,}0\ a/(Gm)^{3/2}$, $T = [17{,}0\ a/(Gm)^{3/2}]r^{1{,}50}$, (*b*) $r = 0{,}510$ Gm
77 (*a*) $\vec{F}_{Paulo} = (35\text{ lb})\hat{i} + (35\text{ lb})\hat{j}$, $\vec{F}_{João} = (-53\text{ lb})\hat{i} + (-37{,}3\text{ lb})\hat{j}$, (*b*) $\vec{F}_{Maria} = (18\text{ lb})\hat{i} + (1{,}9\text{ lb})\hat{j}$, $F_{Maria} = 18$ lb, $\theta = 6{,}1°$ a N do E

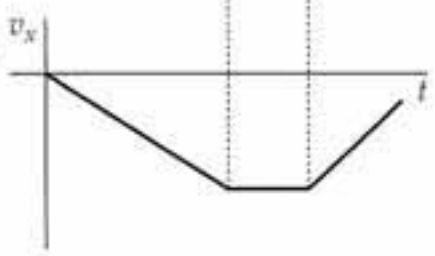
Capítulo 2

1 Zero
3 $v_{méd\ metade\ 1} = 2H/T$, $v_{méd\ metade\ 2} = -2H/T$
5 (*a*) Sua rapidez aumentou a partir de zero, permaneceu constante por um período e depois diminuiu.

(*b*)



(*c*)



7 Verdadeira

9 Falso. Se fosse verdadeiro, então sempre que as velocidades inicial e final fossem nulas a velocidade média também o seria.

11 (*a*)

13 (*a*) *b*, (*b*) *c*, (*c*) *d*, (*d*) *e*

15 (*a*) B, D e E, (*b*) A e D, (*c*) C

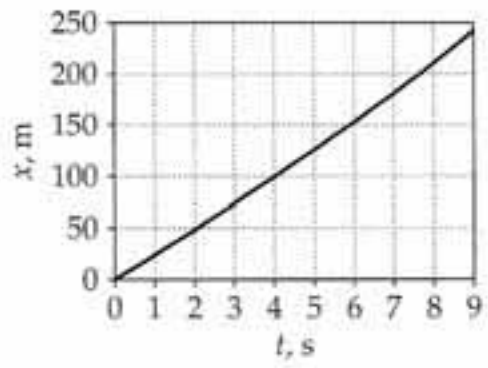
17 (*a*) Verdadeiro, (*b*) Verdadeiro

19 (*a*) 0, (*b*) $-g$, (*c*) A aceleração é maior que g em magnitude enquanto a bola está em contato com o teto.

21 (*a*) Falso, (*b*) Falso, (*c*) Verdadeiro

23 (*a*) *c*

(*b*)



25 B está ultrapassando A.

27 (*c*)

29 (*a*) Sim, quando os gráficos se interceptam, (*b*) Sim, quando as inclinações das curvas têm sinais opostos, (*c*) Sim, quando as curvas têm a mesma inclinação, (*d*) Os dois carros estão mais afastados no instante em que as duas curvas estão mais separadas, na direção x.

31 $v_j = \frac{1}{2} v_{máx}$

33 (*a*) *d*, (*b*) *b*, (*c*) Nenhum, (*d*) *c* e *d*

35 (*a*) *a*, *f* e *i*, (*b*) *c* e *d*, (*c*) *a*, *d*, *e*, *f*, *h* e *i*, (*d*) *b*, *c* e *g*, (*e*) *a* e *i*, *d* e *h*, *f* e *i*

37 $-1{,}2 \times 10^3$ m/s²

39 4,03 m/s²

41 (*a*) 1,7 km ≈ 1 mi, (*b*) Se a incerteza em sua estimativa de tempo é menor que 1 s (±20%), a incerteza na estimativa da distância será aproximadamente 20% de 1,7 km, ou aproximadamente 300 m.

43 (*a*) 0,28 km/min, (*b*) −0,083 km/min, (*c*) 0, (*d*) 0,13 km/min

45 (*a*) 2,2 h, (*b*) $(t_{supersônico}/t_{subsônico}) \approx 0{,}45$

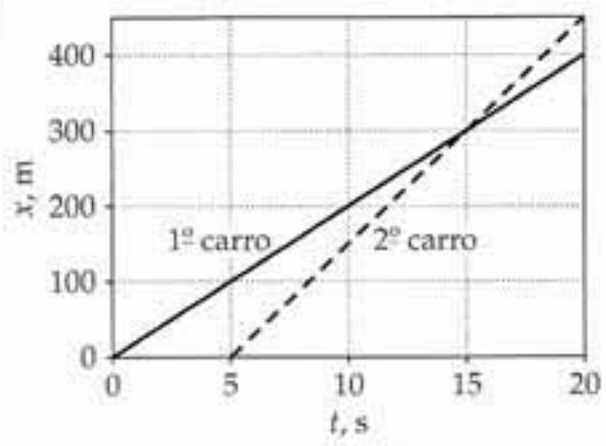
47 (*a*) 4,3 a, (*b*) $4{,}3 \times 10^6$ a. Como $4{,}3 \times 10^6$ a $\gg$ 1000 a, Gregório não tem que pagar.

49 23,5 m/s

51 (*a*) 0, (*b*) 0,3 m/s, (*c*) −2 m/s, (*d*) 1 m/s

53 $v_{méd}$ = 122 km/h. $v_{méd\,arit} = 1{,}04\, v_{méd}$. A rapidez média seria igual a um terço da soma dos três valores de rapidez se cada um desses valores fosse mantido no mesmo intervalo de tempo, ao invés de ser mantido ao longo da mesma distância.

55 (*a*)



(*b*) 15 s, (*c*) 300 m, (*d*) 100 m

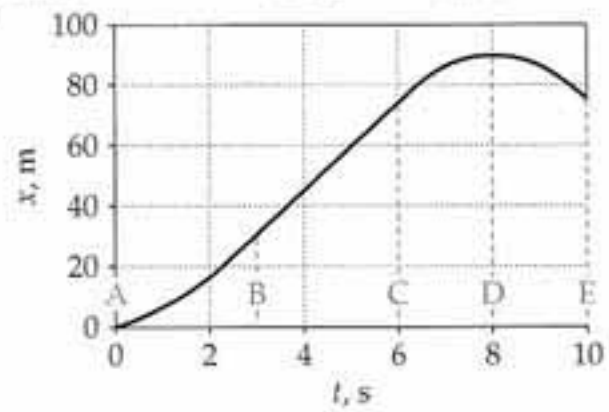
57 15 m/s

59 −2,0 m/s²

61 (*a*) 2,0 m/s, (*b*) $\Delta x = (2t - 5)\,\Delta t + (\Delta t)^2$, (*c*) $v(t) = 2t - 5$

63 (*a*) $a_{méd\,AB} = 3{,}3$ m/s², $a_{méd\,BC} = 0$, $a_{méd\,CE} = -7{,}5$ m/s², (*b*) 75 m

(*c*)



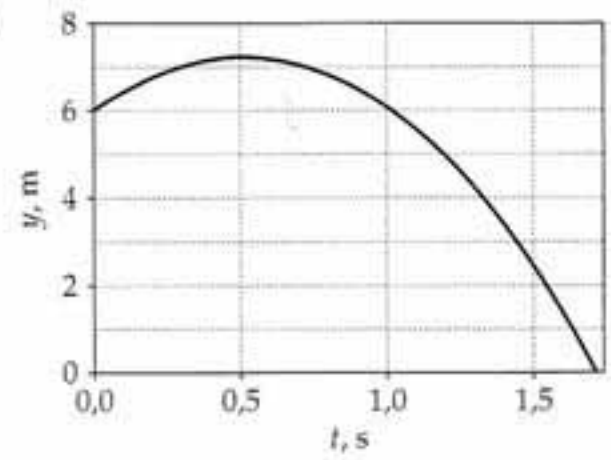
(*d*) No ponto D, t = 8 s, o gráfico corta o eixo do tempo; portanto, $v = 0$.

65 (*a*) 80 m/s, (*b*) 0,40 km, (*c*) 40 m/s

67 16 m/s²

69 (*a*) 4,1 s, (*b*) 20 m, (*c*) 0,99 s e 3,1 s

71 (*a*)



(*b*) 7,3 m, (*c*) 1,7 s, (*d*) 12 m/s

73 44 m

75 68 m/s

77 (*a*) 666 m, (*b*) 14 m/s

79 (*a*) Você não conseguiu seu objetivo. Para subir mais, você pode aumentar o valor da aceleração ou o tempo de aceleração. (*b*) 138 s, (*c*) 610 m/s

81 40 cm/s, −6,9 cm/s²

83 (*a*) 11 mi/h, (*b*) 0,60

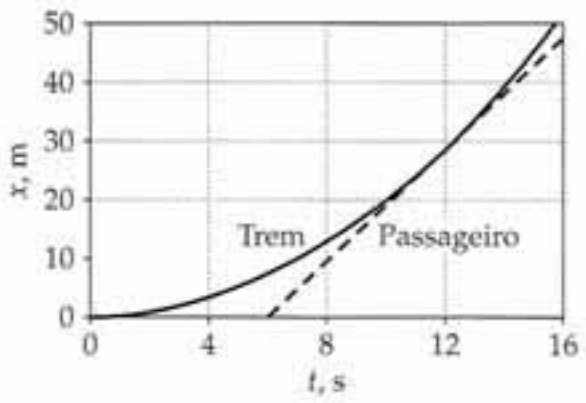
85 11 m

87 28 m

89 (*a*) 2,4 m, (*b*) 1,4 s

93 (*a*) 2,1 d, (*b*) 5,8 a

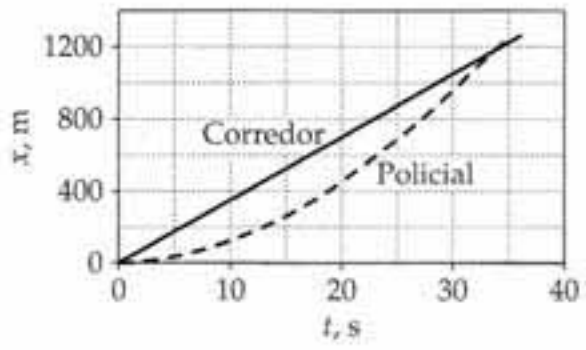
95 4,8 m/s



97 $h/3$

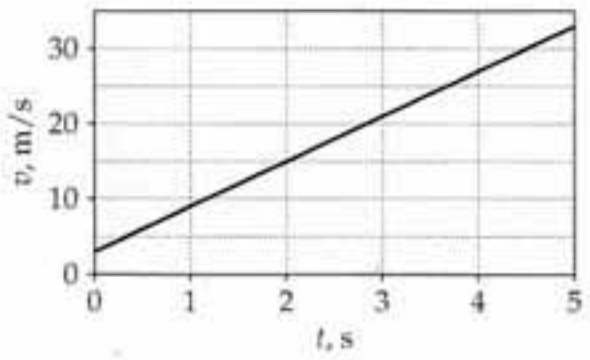
99 (*a*) 35 s, (*b*) 1,2 km

(*c*)



101 (*a*) $2L/3$, (*b*) $\frac{2}{3}t_{final}$, (*c*) $\sqrt{4aL/3}$

103 (*a*)



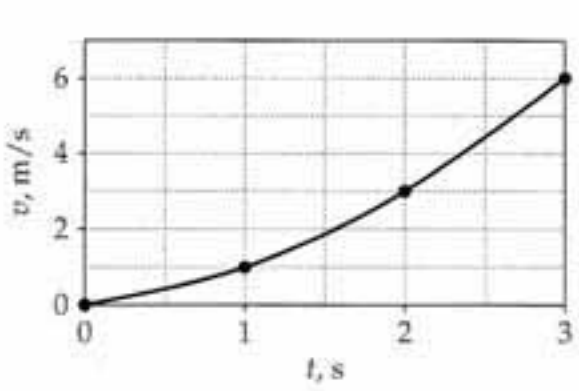
área sob a curva = 90 m

(*b*) $x(t) = (3{,}0\ \text{m/s}^2)t^2 + (3{,}0\ \text{m/s})t$, 90 m

105 $x(t) = (2{,}3\ \text{m/s}^3)t^3 - (5{,}0\ \text{m/s})t$

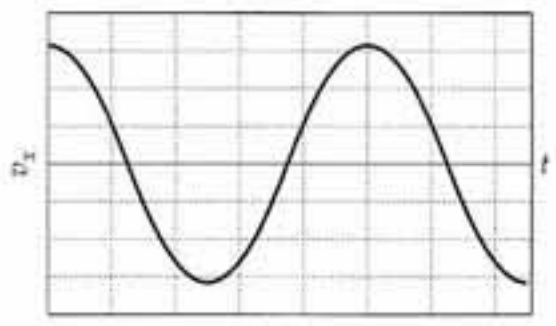
107 (*a*) 0,25 m/s por caixa, (*b*) 0,93 m/s, 3,0 m/s, 6,0 m/s

(*c*)

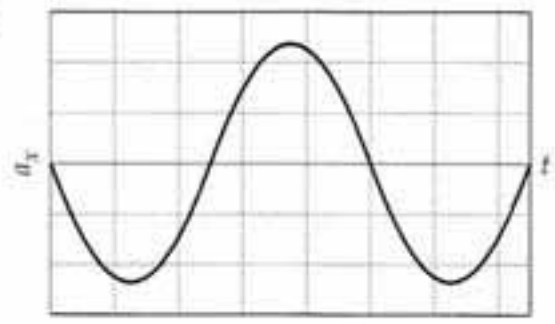


$x(3\ \text{s}) = 6{,}5\ \text{m}$

109 (*a*)



(*b*)



(*c*) Os pontos mais afastados do eixo do tempo correspondem a pontos de retorno. A velocidade do corpo é zero nesses pontos.
(*d*) A velocidade é maior quando a inclinação é maior, e vice-versa. A aceleração é zero quando a concavidade muda de sinal, e a aceleração é maior quando a taxa de variação da inclinação em relação a x é maior.

111 (*a*) $v(t) = (0{,}10\ \text{m/s}^3)t^2 + 9{,}5\ \text{m/s}$,
(*b*) $x(t) = \frac{1}{3}(0{,}20\ \text{m/s}^3)t^3 + (9{,}5\ \text{m/s})t - 5{,}0\ \text{m}$,
(*c*) 13 m/s, 15 m/s. $v_{méd}$ não é igual a $(v_i + v_f)/2$ porque a aceleração não é constante.

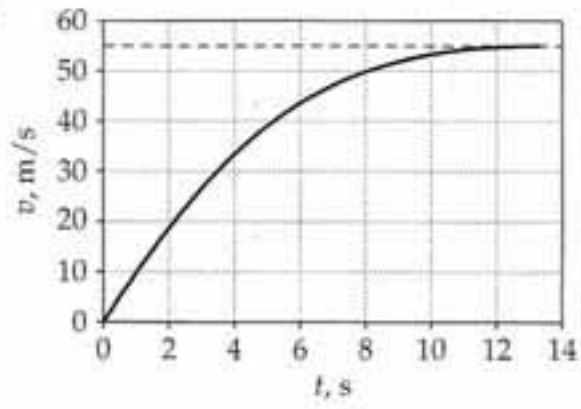
113 (*b*) 0,452 s, (*c*) 12,0 m/s², 22,3%

115 (*a*) O valor máximo da função seno (como em sen ωt) é 1. Logo, o coeficiente $B = v_{máx}$. (*b*) $a = \omega v_{máx} \cos(\omega t)$. A aceleração *não* é constante. (*c*) $|a_{máx}| = \omega v_{máx}$, (*d*) $x = x_0 + (v_{máx}/\omega)\,[1 - \cos(\omega t)]$

117 (*a*) s^{-1}, (*c*) $v_t = g/b$

119 (*b*) 0,762

(*c*)



121 Você não deve recorrer da multa.

Capítulo 3

1 Não. Sim.

3 Zero

5 (*e*)

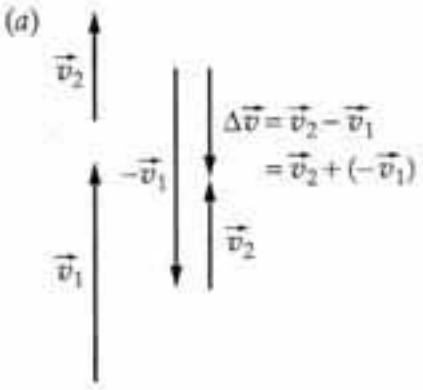
7 (*c*)

9 (*a*) O vetor velocidade é tangente ao caminho.

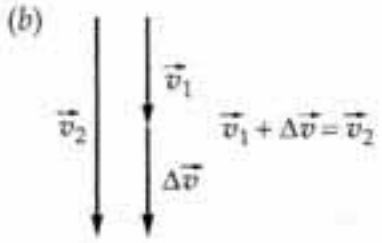
(*b*)

11 (*a*) Um carro percorrendo uma estrada reta e freando. (*b*) Um carro percorrendo uma estrada reta cada vez mais rapidamente. (*c*) Uma partícula movendo-se em um caminho circular com rapidez constante.

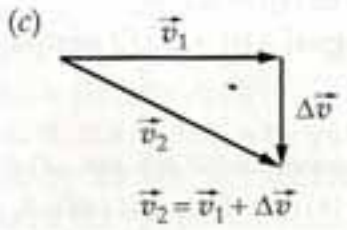
13 (*a*)



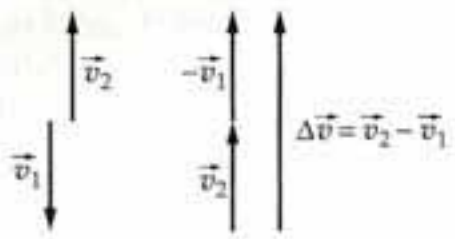
(*b*)



(*c*)



15



17 Você também deve estar caminhando para o oeste, de forma que a chuva está caindo, em relação a você, na vertical.

19 (*a*) Verdadeiro, (*b*) Verdadeiro, (*c*) Verdadeiro

21 (*d*)

23 (*d*)

25 (*a*) Falso, (*b*) Verdadeiro, (*c*) Verdadeiro, (*d*) Falso, (*e*) Verdadeiro

27 Faça a orientação $+x$ apontar para o leste e a orientação $+y$ apontar para o norte. Então,

(*a*)

Caminho	Orientação do Vetor Velocidade
AB	para o Norte
BC	para o Nordeste
CD	para o Leste
DE	para o Sudeste
EF	para o Sul

(*b*)

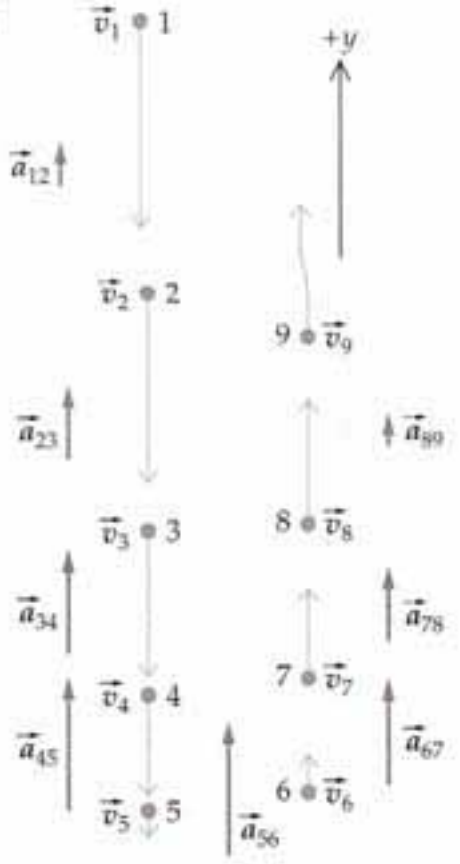
Caminho	Orientação do Vetor Aceleração
AB	para o Norte
BC	para o Sudeste
CD	0
DE	para o Sudoeste
EF	para o Norte

(*c*) A magnitude da aceleração é maior em DE do que em BC.

29 A gota que cai da garrafa tem a mesma velocidade horizontal do navio. Enquanto a gota está no ar, ela também está se movendo horizontalmente, com a mesma velocidade do navio. Por causa disso, ela cai na bacia, que também tem a mesma velocidade horizontal. Como você tem a mesma velocidade horizontal do navio, você vê as coisas como se o navio estivesse parado.

31 (*a*) Verdadeiro, (*b*) Falso, (*c*) Falso, (*d*) Verdadeiro

33 (*a*)



i	v_y (m/s)	Δv_y (m/s)	$a_{méd}$ (m/s²)
1	−0,78		
2	−0,69	0,09	1,8
3	−0,55	0,14	2,8
4	−0,35	0,20	4,0
5	−0,10	0,25	5,0
6	0,15	0,25	5,0
7	0,35	0,20	4,0
8	0,49	0,14	2,8
9	0,53	0,04	0,8

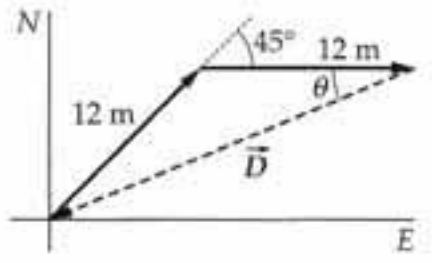
(*b*) O vetor aceleração aponta sempre para cima, de forma que o sinal de sua componente y não varia. A magnitude do vetor aceleração é maior quando a corda elástica está distendida ao máximo.

35 $\approx 7 \times 10^4\ \text{m/s}^2$

37 15 m/s

39 $\Delta\vec{B} = 0, \Delta\vec{A} = -(0{,}25\ \text{m})\hat{j} - (0{,}25\ \text{m})\hat{i}$

41



$\vec{D} \approx 22$ m a um ângulo de 23° ao sul do oeste

43 (*a*) $\vec{D} = (3{,}0\ \text{m})\hat{i} + (3{,}0\ \text{m})\hat{j} + (3{,}0\ \text{m})\hat{k}$, (*b*) 5,2 m

45 $\vec{v}_{méd} = (14\ \text{km/h})\hat{i} + (-4{,}1\ \text{km/h})\hat{j}$

47 7,2 m/s

49 (*a*) $\vec{v}_{méd} = (33\ \text{m/s})\hat{i} + (27\ \text{m/s})\hat{j}$,
(*b*) $\vec{a}_{méd} = (-3{,}0\ \text{m/s}^2)\hat{i} + (-1{,}8\ \text{m/s}^2)$

51 $\vec{v} = 30\hat{i} + (40 - 10t)\hat{j}, \vec{a} = (-10\ \text{m/s}^2)\hat{j}$

53 (*a*) $\vec{v}_{méd} = (20\ \text{m/s})(-\hat{i} + \hat{j})$,
(*b*) $\vec{a}_{méd} = (-2{,}0\ \text{m/s}^2)\hat{i}$, (*c*) $\Delta\vec{r} = (600\ \text{m})(-\hat{i} + \hat{j})$

55 (*a*) 16° a oeste do norte, (*b*) 280 km/s
57 8,5°; 2,57 h
59 Você deve voar cruzando o vento.
61 (*a*) $\vec{r}_{AB}(6{,}0\text{ s}) = (1{,}2 \times 10^2\text{ m})\hat{i} + (4{,}0\text{ m})\hat{j}$, (*b*) $\vec{v}_{AB}(6{,}0\text{ s}) = (-20\text{ m/s})\hat{i} - (12\text{ m/s})\hat{j}$, (*c*) $(-2{,}0\text{ m/s}^2)\hat{j}$
63 (*a*) $\vec{v}_{rel} = (0{,}80\text{ m/s})\hat{i} - (1{,}2\text{ m/s})\hat{j}$, (*b*) 1,0 m/s
65 $1{,}5 \times 10^{-6}\text{ m/s}^2$, $1{,}55 \times 10^{-7}\,g$
67 (*a*) 463 m/s, 0,343 por cento de *g*, (*b*) Apontando da pessoa para o centro da Terra, (*c*) 380 m/s, $2{,}76 \times 10^{-2}\text{ m/s}^2$, (*d*) Zero
69 (*a*) 14 s, 1,8 m/s, (*b*) 0,89 m/s, 0,40 m/s²
71 (*a*) 15 cm, (*b*) As acelerações vão de 1300*g* a 2700*g*.
73 $h = (v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0)/2g$
75 34 m/s
77 20,3 m/s, 36,1°
79 69,3°
81 (*a*) 18 m/s, (*b*) 13°
83 (*a*) 8,1 m/s, (*b*) 23 m/s
85 63,4° abaixo da horizontal
87 (*a*) Não consegue. (*b*) 0,34 m sob o travessão, (*c*) 5,2 m
89 (*a*) 0,97 s, (*b*) 4,2 m, (*c*) 13 m/s, a 70° abaixo da horizontal
91 (*a*) 485 km, (*b*) 1,70 km/s
93 (*a*) 194 m, (*c*) 219 m, 11 por cento
95 (*b*) 80 m, (*c*) 88 m. A solução aproximada é menor. (A aproximação ignora termos de ordem superior, que são importantes quando as diferenças não são pequenas.)
99 (*a*) 11 m/s, (*b*) 3,1 s, (*c*) $\vec{v} = (6{,}5\text{ m/s})\hat{i} + (-22\text{ m/s})\hat{j}$
101 (*a*) 21,5 m/s, (*b*) 3,53 s, (*c*) 19,3 m/s
103 (*a*) 7,41 m/s, (*b*) 0,756 s, (*c*) 15,9 m/s, 17,5 m/s, 25,0°
105 (*a*) 0,785 m, (*b*) 105 m
107 (*a*) 1,1 m, (*b*) 3,9 m
109 (*a*) 15 km, (*b*) 54 s
111 806 mi/h, 60,3° a norte do oeste
113 quarto degrau
115 (*a*) $v_{min} = \dfrac{L}{\cos\theta}\sqrt{\dfrac{g}{2(x\tan\theta - h)}}$, (*b*) $v_{min} = 26\text{ m/s} = 58\text{ mi/h}$
119 (*a*) 26 m/s, (*b*) 7,8°
121 52,9 km, 52,8° a leste do norte

Capítulo 4

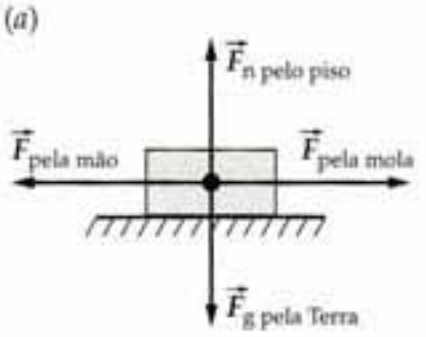
1 Sim, há forças atuando sobre ela. São as mesmas que atuam sobre uma xícara na mesa de sua cozinha.
3 Dentro da limusine, você segura uma extremidade do barbante e pendura o objeto na outra extremidade. Se o barbante permanece na vertical, o referencial da limusine é um referencial inercial. Não, você não pode determinar a velocidade da limusine.
5 Não. Você necessita de informações adicionais para prever a orientação do movimento subseqüente.
7 A massa do corpo é constante. No entanto, o sistema solar ainda atrai o corpo com uma força gravitacional.
9 Você e o elevador podem estar descendo e freando ou subindo e aumentando a rapidez. Nos dois casos, seu peso aparente é maior que seu peso real.
11 A força mais significativa em nosso dia-a-dia é a gravidade. Ela literalmente nos mantém juntos ao chão. A outra força mais relevante é a força eletromagnética. Ela fornece a "cola" que mantém os sólidos e os faz rígidos. Ela é de grande importância em circuitos elétricos.
13 (*a*) Força normal, de contato, (*b*) Normal, contato, (*c*) Normal, contato, (*d*) Normal, contato, (*e*) Gravitacional, ação a distância. As duas forças normais que os dois blocos exercem um sobre o outro e as duas forças normais que a mesa e o bloco de baixo exercem um sobre o outro.
15 Quando o prato está sobre a mesa, a força normal F_n que atua sobre ele para cima é exercida pela mesa e é do mesmo tamanho da força gravitacional F_g sobre o prato. Então, o prato não acelera. No entanto, para frear o prato em uma queda é necessário que $F_n > F_g$ (ou $F_n \gg F_g$, se a mesa é dura e a queda é rápida). Uma força normal grande exercida sobre o prato de louça fina poderá quebrá-lo.
17 (*a*) A força normal do bloco de apoio sobre o velocista, apontando para a frente.
(*b*) A força de atrito do gelo sobre o disco, no sentido oposto ao da velocidade.
(*c*) A força gravitacional da Terra sobre a bola, para baixo.
(*d*) A força da corda elástica esticada sobre a saltadora, para cima.
19 (*a*) (2) 100 N, (*b*) São iguais. (*c*) São iguais.
21 (*a*)

Força	Par da Terceira Lei
$\vec{F}_{\text{pelo fio sobre objeto}}$	$\vec{F}_{\text{pelo objeto sobre fio}}$
$\vec{F}_{\text{g pela Terra sobre objeto}}$	$\vec{F}_{\text{g pelo objeto sobre Terra}}$

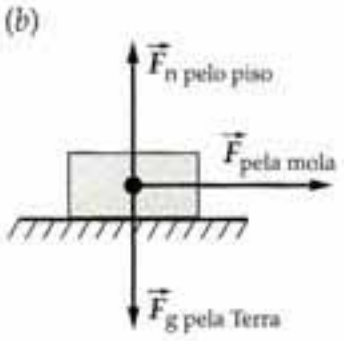
(*b*)

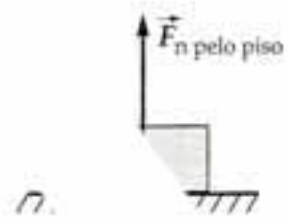
Força	Par da Terceira Lei
$\vec{F}_{\text{pelo teto sobre fio}}$	$\vec{F}_{\text{pelo fio sobre teto}}$
$\vec{F}_{\text{g pela Terra sobre fio}}$	$\vec{F}_{\text{g pelo fio sobre Terra}}$
$\vec{F}_{\text{pelo objeto sobre fio}}$	$\vec{F}_{\text{pelo fio sobre objeto}}$

23 (*a*)

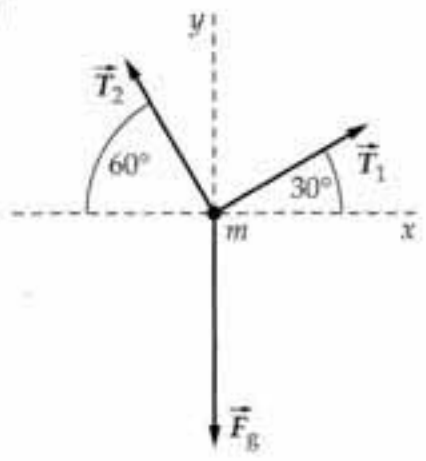


(*b*)

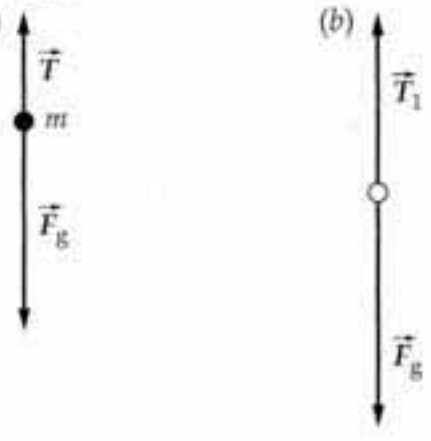




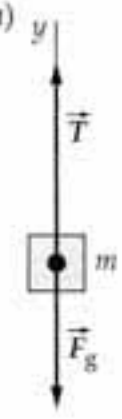
25 (*a*) m_2/m_1, (...) (*c*) $\Delta x = \frac{1}{2}F(m_2^{-1} - m_1^{-1})(\Delta t)^2$. Como $m_1 > m_2$, o objeto ... m_2 está à frente.
27 3,6 kN
29 −17 kN
31 (*a*) 6,0 m/s², (*b*) 1/3, ... s²
33 12 kg
35 (*a*) −3,8 kN, (*b*) 3,00 cm
37 (*a*) 4,2 m/s², formando 45° ... força, (*b*) 8,4 m/s², formando 15° com $2\vec{F}$.
39 (*a*) 4,0 m/s², (*b*) 2,4 m/s²
41 (*a*) $\vec{a} = (1{,}5\text{ m/s}^2)\hat{i} + (-3{,}5\text{ m/s}^2)\hat{j}$
(*b*) $\vec{v}(3{,}0\text{ s}) = (4{,}5\text{ m/s})\hat{i} + (-11\text{ m/s})\hat{j}$
(*c*) $\vec{r}(3{,}0\text{ s}) = (6{,}8\text{ m})\hat{i} + (-16\text{ m})\hat{j}$
43 (*a*) $5{,}3 \times 10^2$ N, (*b*) $1{,}2 \times 10^2$ lb
45 (*a*) 2,45 kN, (*b*) 409 N, (*c*) 2,04 kN
47 (*a*)



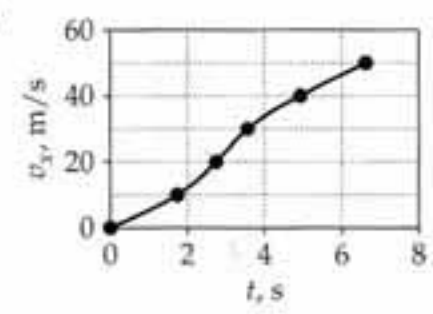
(*b*) T_2 é maior que T_1
49 (*a*) 37°, (*b*) 4,1 N, (*c*) $T_1 = 3{,}4$ N, $T_2 = 2{,}4$ N, $T_3 = 3{,}4$ N
51 $\vec{F}_3 = (-5{,}0\text{ N})\hat{i} + (-26\text{ N})\hat{j}$
53 (*a*) 3,82 kN, (*b*) 4,30 kN
55 (*a*) Se $T_H = 10{,}0$ N, então a largura do arco é 9,56 m. (*b*) Se a largura do arco é 8,00 m, então $T_H = 3{,}72$ N e o arco tem 2,63 m de altura, o suficiente para alguém passar por baixo dele.
57 56,0 N
59 (*a*) $T = 0{,}42$ kN, $F_n = 0{,}25$ kN, (*b*) $T = mg$ sen θ
61 0,55 kN
63 (*a*) (*b*)

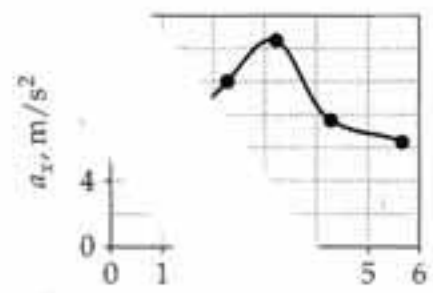


(*c*) Não. Não há diferença.
65 (*a*) 20 N, (*b*) 20 N, (*c*) 26 N, (*d*) $T_{0\to5\text{ s}} = 20$ N, $T_{5\text{ s}\to9\text{ s}} = 15$ N,
67 (*a*) 1,3 m/s², (*b*) $T_1 = 17$ N, $T_2 = 21$ N
69 (*a*) $a = \dfrac{F}{m_1 + m_2}$, $F_{21} = \dfrac{Fm_1}{m_1 + m_2}$, (*b*) 0,40 m/s²; 0,8 N
73 (*a*)



(*b*) 592 N
75 (*a*) $a = \dfrac{g(m_2 - m_1\text{ sen }\theta)}{m_1 + m_2}$, $T = \dfrac{gm_1m_2(1 + \text{sen }\theta)}{m_1 + m_2}$, (*b*) 2,5 m/s², 37 N
77 (*a*) 1,4 m/s², 61 N, (*b*) $(m_1/m_2) = 1{,}19$
79 (*a*) 0,40 kN, (*b*) 0,37 kN
81 (*a*) $a_{20} = 2{,}5$ m/s², $a_5 = 4{,}9$ m/s², (*b*) $T = 25$ N
83 $m_{\text{outra massa}} = 1{,}4$ kg ou 1,1 kg
85 $F_{\text{em } m_1} = \left(\dfrac{m_2 + m_1^2 + m_2^2}{m + m_1 + m_2}\right)g$
87 $T_B = 305$ N, $F_{\text{mastro sobre o convés}} = 1{,}55$ kN
89 (*a*) −0,10 km/s², (*b*) 6,1 cm, (*c*) 35 ms
91 (*a*) $a = \dfrac{F}{m_1 + m_2}$, (*b*) $F_{\text{res}} = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}F$, (*c*) $T = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}F$
93 (*a*) 55,0 g, (*b*) 2,45 m/s², 2,03 N
95 (*a*)T 5 $\frac{1}{3}(F_2 + 2F_1)$, (*b*) $t_0 = (3T_0/4C)$
97 (*a*) Você deve atirar a bota no sentido contrário ao da margem mais próxima. (*b*) 420 N, (*c*) 7,52 s
99 (*a*)





(*b*) 2,8 s a 3,6 s, (*c*) 5500 ... m

Capítulo 5

1 Forças de atrito estático e cinétic... nsáveis pelas acelerações. Se o coeficiente de atri... entre o piso e o objeto for suficientemente grande, ...bjeto não escorregará dentro do caminhão. Quan... ...r a aceleração do caminhão, maior será o coe... atrito estático necessário para evitar o escorregan...
3 (*d*)
5 (*c*)
7 Quando o elástico se distende, a força exercida pe... sobre o bloco aumenta. Uma vez excedido o valor m... da força de atrito estático, o bloco escorrega. Então, el...

encurtará o comprimento do elástico, diminuindo a força que este exerce. A força de atrito cinético freia então o bloco, até o repouso, e o ciclo recomeça.

9 (*a*), (*b*) e (*c*)

11 O bloco 1 atingirá a polia antes de o bloco 2 atingir a parede.

13 O arraste do ar é proporcional à massa específica do ar e à área de seção reta do objeto. Em um dia quente o ar é menos denso. O ar também é menos denso em grandes altitudes. Apontar as mãos implica menor área exposta às forças de arraste e, portanto, as reduz. Roupas polidas e arredondadas têm o mesmo efeito que apontar as mãos.

15 (*c*)

17 (*a*) A força de arraste é proporcional à área exposta e a uma potência da rapidez. A força de arraste sobre a pena inicialmente é maior porque a pena expõe uma maior área do que a pedra. À medida que a pedra ganha rapidez, a força de arraste sobre ela aumenta. A força de arraste sobre a pedra acabará por superar a força de arraste sobre a pena, porque a força de arraste sobre a pena não pode exceder a força gravitacional sobre a pena.
(*b*) A rapidez terminal é muito maior para a pedra do que para a pena. A aceleração da pedra permanecerá grande até que sua rapidez atinja a rapidez terminal.

19 $a_{cm} = (m_1/(m_1 + m_2))a_1$

21 O atrito da estrada sobre os pneus freia o carro

23 O centro de massa se desloca para baixo

25 A aceleração do centro de massa é zero.

27 (*a*) M/T, kg/s, (*b*) M/L, kg/m, (*c*) ML/T², (*d*) 57 m/s, (*e*) 87 m/s

29 $\mu_e = 1{,}4$. Não deve ser uma boa idéia. Os pneus sobre o asfalto ou sobre o concreto possuem um coeficiente de atrito estático máximo próximo de 1.

31 (*b*)

33 (*a*) 15 N, (*b*)12 N

35 500 N

37 (*a*) 5,9 m/s², (*b*) 76 m

39 (*a*) 49,1 N, (*b*) 123 N

41 (*a*) 4,6° (*b*) 4,6°

43 0,84 m/s

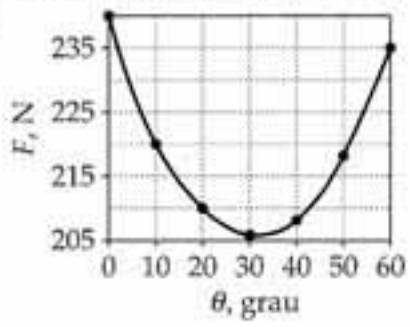
45 2,4 m/s², 37 N

47 (*a*) 4,0 m, (*b*) 0,47

49 (*a*) 2,7 m/s², (*b*)10 s

51 (*a*) 0,96 m/s², (*b*) 0,18 N

53 (*a*) A força de atrito estático opõe-se ao movimento do objeto, e o valor máximo da força de atrito estático é proporcional à força normal F_N. A força normal é igual ao peso menos a componente vertical F_y da força F. Manter a magnitude F constante ao se aumentar o ângulo θ a partir de zero implica uma diminuição de F_n e, portanto, em uma correspondente diminuição da força de atrito estático máxima, $f_{máx}$. O objeto começará a se mover se a componente horizontal F_x da força F exceder a $f_{máx}$. Um aumento de θ resulta em uma diminuição de F_x. Quando θ aumenta a partir de 0, a diminuição de F_N é maior que a diminuição de F_x, de forma que o objeto fica cada vez mais na iminência de deslizar. No entanto, quando θ se aproxima de 90°, F_x se aproxima de zero e nenhum movimento será iniciado. Se F é grande o suficiente e se θ aumenta a partir de 0, então, para algum valor de θ o bloco começará a se mover.
(*b*)



Do gráfico, pode-se ver que o valor mínimo para F ocorre quando $\theta \approx 32°$.

57 (*a*) 0,24, (*b*) 1,4 m/s²

59 (*a*) 18 N, (*b*) 1,5 m/s², 2,9 N (*c*) $a_1 = 2{,}0$ m/s², $a_2 = 7{,}8$ m/s²

61 (*a*) 5,7°, (*b*) 1,9 m/s

63 (*a*) $F_{mín} = -1{,}6$ N, $F_{máx} = 84$ N, (*b*) $F_{mín} = 5{,}8$ N, $F_{máx} = 37$ N (A orientação $+x$ é para a direita.)

65 (*b*) 0,30, (*c*) 2,8 m/s

67 $2{,}8 \times 10^{-4}$ kg/m

69 $d_{n\ filmes} = \sqrt{n}\ d_{1\ filme}$

71 25 m/s

73 (*a*) cerca de 39 ms, (*b*) Com a força de arraste do Problema 72, um tempo cerca de 86 vezes maior do que com a centrífuga.

75 25°

77 (*a*) 1,4 m/s, (*b*) 8,5 N

79 (*a*) 8,33 m/s², para cima, (*b*) 667 N, para cima, (*c*) 1,45 kN, para cima

81 $T_1 = [m_2(L_1 + L_2) + m_1L_1](2\pi/T)^2$, $T_2 = m_2(L_1 + L_2)(2\pi/T)^2$

83 (*a*) 53° acima da horizontal, 0,41 kN, (*b*) 53° abaixo da horizontal, 0,41 kN

85 (*a*) 0,40 N, (*b*) 0,644

87 52°

89 12,8 m/s

91 (*a*) 7,3 m/s, (*b*) 0,54

93 22°

95 (*a*) 7,8 kN, (*b*) −0,78 kN

97 20 km/h ≤ v ≤ 56 km/h

99 (*a*) cerca de 60,4 m, (*b*) cerca de 60,6 m, (*c*) cerca de 3,3 s, (*d*) cerca de 3,7 s, (*e*) menor

101 (0,23 cm; 0)

103 (2,0 m, 1,4 m)

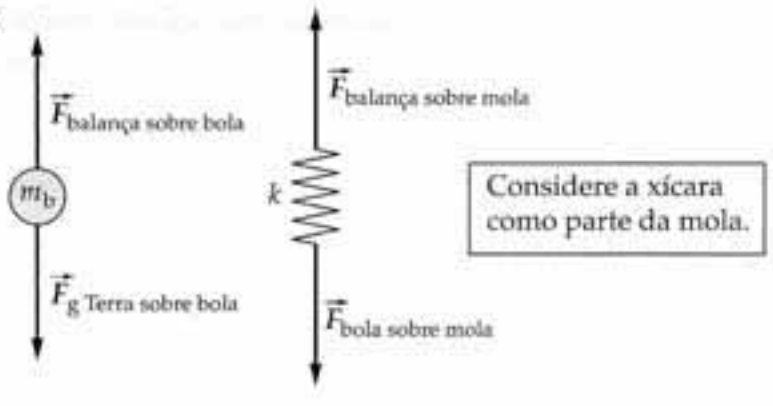
105 (1,5 m, 1,4 m)

107 $(\frac{1}{4}L, \frac{1}{4}L)$

113 $\vec{v}_{cm} = (3{,}0\ \text{m/s})\hat{i} - (1{,}5\ \text{m/s})\hat{j}$

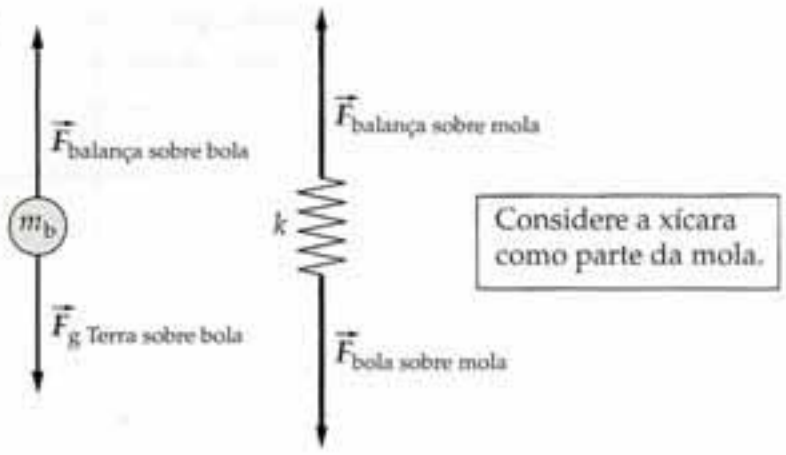
115 $\vec{a}_{cm} = (2{,}4\ \text{m/s}^2)\hat{i}$

117 (*a*)



(*c*) $F_{pela\ balança} = (m_{bola} + m_{plataforma})g$

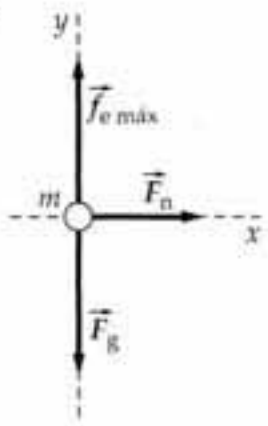
119 (*a*)



(*b*) $d' = \dfrac{m_b(g+a)}{k} > d$,

(*c*) $F_{\text{pela balança}} = (m_b + m_p)(a+g) > F_{\text{pela balança Prob. 117}}$

121 0,51
123 1,49 kN
125 (*a*) 49 m/s², (*b*) 13 rev/min
127 (*a*) 0,19 kN, (*b*) 52 N, (*c*) 35 N, (*d*) 0,24 kN, (*e*) 0,54 kN
129 0,43
131 (*a*)



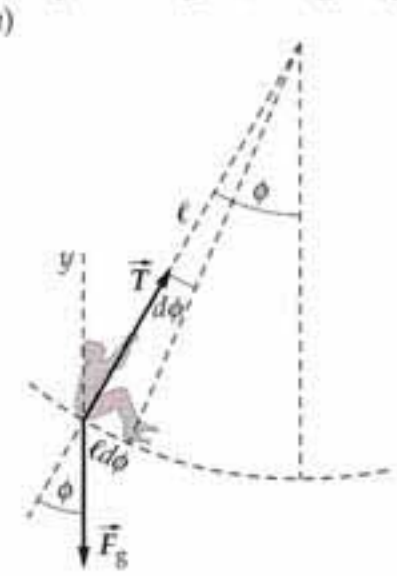
(*b*) 0,74 kN, (*c*) 20 rev/min. Este resultado vale para todos, independentemente da massa.

133 Sim.
135 $4{,}67 \times 10^6$ m. Abaixo da superfície da Terra.
137 (*a*) 35 cm, (*b*) 4,7 m/s, para baixo, (*c*) 14,2 N, para baixo, (*d*) 9,81 m/s², para baixo
139 (*a*) 4,91 m/s, (*b*) 1,64 m/s, para baixo, (*c*) 1,09 m/s², para baixo

Capítulo 6

1 (*a*) Verdadeiro, (*b*) Verdadeiro, (*c*) Falso, (*d*) Verdadeiro, (*e*) Verdadeiro
3 (*a*) Falso, (*b*) Verdadeiro, (*c*) Falso, (*d*) Verdadeiro
5 Um corpo que se move em trajetória curva com rapidez constante tem energia cinética constante, mas está acelerado (porque sua velocidade está continuamente mudando de orientação). Não, porque se o corpo não está acelerado, a força resultante sobre ele deve ser zero e, portanto, sua energia cinética deve ser constante.
7 O trabalho para esticar a mola de 2,0 cm é quatro vezes aquele para esticá-la de 1,0 cm.
9 (*d*)
11 (*a*) Falso, (*b*) Falso, (*c*) Falso, (*d*) Falso
13 (*a*) Falso, (*b*) Falso, (*c*) Verdadeiro, (*d*) Verdadeiro
15 $2\Delta t$
17 A única força externa (desprezando a resistência do ar) que realiza trabalho sobre o centro de massa do carro é a força de atrito estático $\vec{f}_s$ exercida pela pista sobre os pneus. O trabalho positivo sobre o centro de massa que esta força realiza é traduzida em ganho de energia cinética.

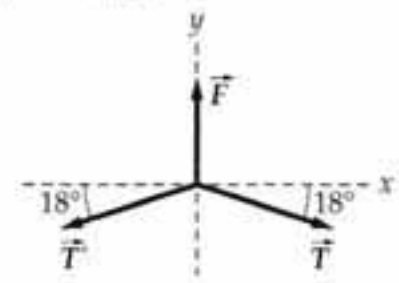
19 (*a*) $4{,}5 \times 10^{18}$ J, (*b*) 1%, (*c*) $1{,}4 \times 10^{11}$ W
21 21 kJ
23 (*a*) 147 J, (*b*) 266 J
25 11 kJ, 3,5 kW
27 (*a*) 6,0 J, (*b*) 12 J, (*c*) 3,5 m/s
31 (*a*) $m(y) = 20\ \text{kg} - (2{,}5\ \text{kg/m})y$, (*b*) 0,59 kJ
33 (*a*)



(*b*) $dW_{F_g} = +mg\ell \operatorname{sen}\phi\, d\phi$, (*c*) 2,5 kJ, 7,0 m/s

35 $W_{x_0 \to x} = A\left(\dfrac{1}{x_0} - \dfrac{1}{x}\right)$, $K_{x\to\infty} = \dfrac{A}{x_0}$, $v_{x\to\infty} = \sqrt{\dfrac{2A}{mx_0}}$

37 180°
39 (*a*) −24, (*b*) −10, (*c*) 0
41 (*a*) 1,0 J, (*b*) 0,21 N
43 (*b*) $6\hat{i} + 8\hat{j}$. Outro vetor que satisfaz a estas condições é $-6\hat{i} - 8\hat{j}$.
45 (*b*) $\vec{p} = (34\ \text{kg}\cdot\text{m/s})\hat{i} + (-16\ \text{kg}\cdot\text{m/s})\hat{j}$, (*c*) 0,28 kJ, 0,28 kJ
49 (*a*) $P(t) = (3{,}1\ \text{W/s})t$, (*b*) 9,4 W
51 0,15 kW
55 (*a*) 0,381 kg/m, (*b*) 148 mi/h
57 $3{,}2 \times 10^5$ m
59 50 kW
61 (*a*) 405 N, (*b*) 19,9 N



(*c*) 39,7 mJ

63 (*a*) $F(x) = mC^2x$, (*b*) $W = \frac{1}{2}mC^2x_1^2$
65 (*a*) $v = (6t^2 - 8t)$, $a = (12t - 8)$, (*b*) $P = 8mt(9t^2 - 18t + 8)$, (*c*) $W = 2mt_1^2(3t_1 - 4)^2$
67 (*a*) 208 kW, (*b*) 5,74 km
69 (*a*)

x (m)	−4,0	−3,0	−2,0	−1,0	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0
W (J)	6,0	4,0	2,0	0,5	0,0	0,5	1,5	2,5	3,0

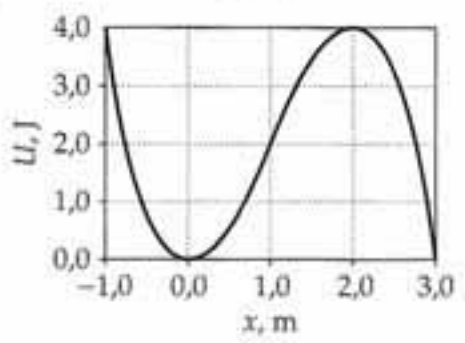
(*b*) 28,0 J

71 (*b*) $W_{1\ \text{volta sentido horário}} = (31\ \text{m})F_0$, $W_{1\ \text{volta sentido anti-horário}} = (-31\ \text{m})F_0$
73 (*a*) $F_x = -kx\left(1 - \dfrac{y_0}{\sqrt{x^2 + y_0^2}}\right)$, (*c*) $v_t = \dfrac{L^2}{2y_0}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

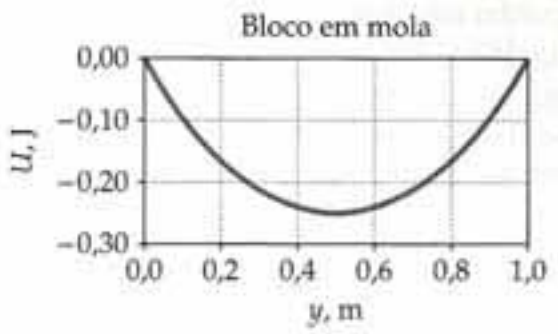
Capítulo 7

1 (*a*)

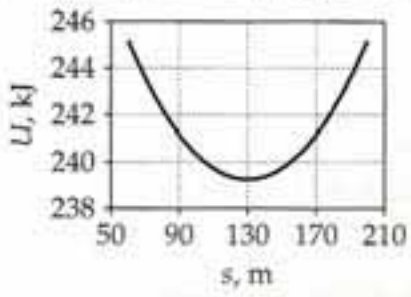
3 (*a*) Falso, (*b*) Falso, (*c*) Falso, (*d*) Falso
5 (*a*) Verdadeiro, (*b*) Verdadeiro, (*c*) Verdadeiro, (*d*) Verdadeiro, (*e*) Falso
7 (*a*) Falso, (*b*) Falso, (*c*) Falso, (*d*) Falso, (*e*) Verdadeiro
9 (*d*)
11 (*a*) Sim, (*b*) Não, (*c*) Não
13 (*a*) 25 cm, (*b*) −0,12 kJ
15 (*a*) 16 s, (*b*) 6,8 min. É impraticável você manter o ritmo durante 6,8 minutos.
17 $1{,}5 \times 10^{18}$ J/a, 3%
19 $2{,}4 \times 10^{5}$ L/s
21 (*a*) 0,39 kJ, (*b*) 2,5 m, 4,9 m/s, (*c*) 24 J, 0,37 kJ, (*d*) 0,39 kJ, 20 m/s
23 (*a*) 10 cm, (*b*) 14 cm
25 (*a*) $F_x = C/x^2$ e $\vec{F} = F_x\hat{i}$
(*b*) Se $x > 0$, $\vec{F}$ aponta afastando-se da origem. Se $x < 0$, $\vec{F}$ aponta para a origem.
(*c*) Diminui.
(*d*) Se $x > 0$, $\vec{F}$ aponta para a origem. Se $x < 0$, $\vec{F}$ aponta afastando-se da origem.
27 $U(x) = [(-0{,}63\ \text{kJ} \cdot \text{m})/x] + 0{,}30\ \text{kJ}$
29 (*a*) $F_x = 4x(x + 2)(x - 2)$, (*b*) $x = -2$ m, $x = 0$ e $x = 2$ m, (*c*) Instável em $x = -2$ m, estável em $x = 0$ e instável em $x = 2$ m.
31 (*a*) $x = 0{,}0$ m e $x = 2{,}0$ m,
(*b*)



(*c*) Equilíbrio estável em $x = 0$, equilíbrio instável em $x = 2$ m, (*d*) 2,0 m/s
33 (*a*) $U(\theta) = (m_2\ell_2 - m_1\ell_1)g \operatorname{sen}\theta$, (*b*) U é mínimo em $\theta = -\pi/2$, U é máximo em $\theta = \pi/2$.
35 (*a*) $U(y) = -mgy - 2Mg(L - \sqrt{y^2 + d^2})$, (*b*) $y = d\sqrt{m^2/4M^2 - m^2}$, (*d*) Este é um ponto de equilíbrio estável.
37 $v = \sqrt{gL/2}$
39 (*a*) 0,858 m, (*b*) O bloco percorrerá o caminho de volta, elevando-se até a altura de 5,00 m.
41 26°
43 $U = \dfrac{[mg(\operatorname{sen}\theta + \mu_s \cos\theta]^2}{2k}$
45 $6mg$
47 16,7 kN
49 $6mg$
51 (*a*) 31 m, (*b*) 34 m/s
53 (*a*) 0,15 km, (*b*) 45 m/s
55 (*a*) $K_{máx} = \frac{5}{2}mgL\,6$, (*b*) $6mg$
57 (*a*) 20°, (*b*) 6,4 m/s
59 $v_2 = L\sqrt{2(g/L)(1 - \cos\theta) + (k/m)(\sqrt{\frac{13}{4} - 3\cos\theta} - \frac{1}{2})^2}$
61 (*a*) 82 kJ, (*b*) A energia vem da energia química interna de seu corpo. (*c*) 410 kJ, (*d*) 330 kJ
63 (*a*) 0,10 kJ, (*b*) 70 J, (*c*) 34 J, (*d*) 2,9 m/s
65 (*a*) 7,7 m/s, (*b*) 59 J, (*c*) 0,33
67 (*a*) (14 N)y, (*b*) −(14 N)y, (*c*) 2,0 m/s
69 (*a*) 0,87 m, (*b*) 2,7 m/s
71 (*a*) $9{,}0 \times 10^{13}$ J, (*b*) $2{,}5 \times 10^{6}$ dólares americanos, (*c*) $2{,}8 \times 10^{4}$ anos
73 (*a*) $3{,}9 \times 10^{11}$ MeV, (*b*) $4{,}2 \times 10^{8}$ m/s. Como seria de se esperar, este resultado ($4{,}2 \times 10^{8}$ m/s) é maior que a rapidez da luz (e, portanto, incorreto). O uso da expressão não-relativística para o cálculo da energia cinética não se justifica.
75 $1{,}1 \times 10^{5}$ reações/s
77 0,782 MeV
79 (*a*) 1,1 kg, (*b*) $2{,}7 \times 10^{9}$ kg
81 (*a*) 6, (*b*) 0,21 eV
83 $\Delta E_{term} = -mgv\,\Delta t \operatorname{sen}\theta$
85 12 m²
87 (*a*) 0,208, (*b*) 3,5 MJ
89 (*a*) $d_1 = (2\mu_c mg/k) - d_0$, (*b*) $v_0 = \sqrt{(k/m)d_0^2 - 2\mu_c g d_0}$, (*c*) $\mu_c = kd_0/2mg$
91 (*a*) 11 kW, (*b*) −6,8 kW
93 (*a*) 1,61 kJ, (*b*) 0,6 kJ, (*c*) 23 m/s
95 (*b*)



97 (*a*) 17 m, (*b*) 4,91 kN, (*c*) 4,9 m/s², (*d*) 13 kN, para cima, (*e*) 5,5 kN, 64°, (*f*)1,4 kN
99 (*a*) $F_{20} = 491$ N, $F_{30} = 981$ N, (*b*) $P_{20} = 9{,}8$ kW, $P_{30} = 29$ kW, (*c*) 8,8°, (*d*) 6,36 km/L
103 (*a*) $v = \sqrt{2my/(m + M)}$, (*b*) O mesmo de (*a*)
107 (*a*)



(*b*) 5,4 kJ

Capítulo 8

5 A quantidade de movimento do sistema projétil–rifle vale, inicialmente, zero. Após o disparo, a quantidade de movimento do projétil aponta para o oeste. A conservação da quantidade de movimento exige que a quantidade de movimento total do sistema não varie e, portanto, a quantidade de movimento do rifle deve apontar para o leste. A energia cinética não é conservada.
7 De certa forma, o foguete precisa de algo que o empurre. Ele empurra a exaustão em um sentido, e a exaustão o empurra no sentido oposto. No entanto, o foguete não é empurrado pelo ar.
9 Pense em alguém empurrando uma caixa sobre o chão. O empurrão sobre a caixa é igual e oposto ao empurrão da caixa sobre a pessoa, mas as forças de ação e reação atuam sobre *corpos diferentes*. A segunda lei de Newton afirma que a soma das forças que atuam sobre a caixa é igual à taxa de variação da quantidade de movimento da caixa. Esta soma não inclui a força da caixa sobre a pessoa.
11 Flutuar no ar enquanto se atira objetos viola a conservação da quantidade de movimento linear! Atirar algo para a

frente implica ser empurrado para trás. Os super-heróis não são mostrados sofrendo este movimento para trás, previsto pela conservação da quantidade de movimento linear. A cena não viola a conservação da energia.

13 A estrada. (A força de atrito da estrada sobre os pneus freia o carro.)

15 Cerca de 10^4

17 (*a*) Falso, (*b*) Verdadeiro, (*c*) Verdadeiro, (*d*) Verdadeiro

19 (*a*) A perda de energia cinética é a mesma nos dois casos. (*b*) A situação em que os dois corpos têm velocidades de sentidos opostos.

21 (*b*)

23 A água muda de direção quando passa pelo ângulo do esguicho. Portanto, o esguicho deve exercer uma força extra sobre o fluxo de água para alterar sua quantidade de movimento e, pela terceira lei de Newton, a água exerce sobre o esguicho uma força igual e oposta. Isto exige uma força resultante na direção da variação da quantidade de movimento.

25 No referencial do centro de massa, as duas velocidades são iguais e opostas, tanto antes quanto depois da colisão. Além disso, a rapidez de cada disco é a mesma, antes e depois da colisão. A direção da velocidade de cada disco varia, de certo ângulo, durante a colisão.

27 A força da gravidade lunar, para baixo, e a força de empuxo, para cima, exercida pelos retrofoguetes.

29 Pense na vela em frente do ventilador e pense no fluxo de moléculas atingindo a vela. Imagine que elas rebatem elasticamente na vela — a resultante variação da quantidade de movimento das moléculas é, então, praticamente o dobro da variação da quantidade de movimento que elas tinham sofrido ao atravessarem o ventilador. Assim, a variação de quantidade de movimento do ar é para trás, e, para que a quantidade de movimento do sistema ar–ventilador–barco seja conservada, a variação da quantidade de movimento do sistema ventilador–barco será para a frente.

31 (*a*) 2,34 s, (*b*)6,7 m/s

33 5,5 m/s

35 4,0 m/s para a direita

37 $\vec{v}' = 2v\hat{i} - v\hat{j}$

39 0,084

41 (*a*) 44 J, (*b*) $\vec{v}_{cm} = (1{,}5\text{ m/s})\hat{i}$, (*c*) $\vec{v}_{1\,rel} = (3{,}5\text{ m/s})\hat{i}$, $\vec{v}_{2\,rel} = (-3{,}5\text{ m/s})\hat{i}$, (*d*) 37 J

43 (*a*) 11 N · s, (*b*) 1,3 kN

45 1,81 MN · s, 0,60 MN

47 0,23 kN

49 (*a*) 1,1 N · s, orientada para a parede, (*b*) 0,36 kN, para a parede, (*c*) 0,48 N · s, afastando-se da parede, (*d*) 3,8 N, afastando-se da parede

51 (*a*) 0,20 s, (*b*) 27 ms, (*c*) Como o tempo de colisão é muito menor para o revestimento de serragem, a força média exercida sobre o atleta pelo colchão de ar é muito menor do que a força média exercida sobre ele pela serragem.

53 (*a*) 20 m/s, (*b*) Vinte por cento da energia cinética inicial é transformada em energia térmica, energia acústica e na deformação do metal.

55 (*a*) 2,0 m/s, (*b*) A colisão não é elástica.

57 $v_{p\,f} = -0{,}25$ km/s, $v_{nuc\,f} = 46$ m/s

59 (*a*) 5,0 m/s, (*b*) 0,25 m, (*c*) $v_{1f} = 0$, $v_{2f} = 7{,}0$ m/s

61 (*a*) $0{,}2v_0$, (*b*) $0{,}4v_0$

63 0,45 km/s

67 $h = (v^2/8g)(m_1/m_2)^2$

69 0,0529

71 (*a*) O meteorito deveria chocar-se com a Terra com uma orientação oposta à do vetor velocidade orbital da Terra. (*b*) $2{,}71 \times 10^{-15}$ por cento, (*c*) $1{,}00 \times 10^{23}$ kg

73 $1{,}5 \times 10^6$ m/s

75 (*a*) $\vec{v}_1 = (312\text{ m/s})\hat{i} + (66{,}6\text{ m/s})\hat{j}$, (*b*) 5,6 km, (*c*) 35,8 kJ

77 0,91

79 (*a*) 20%, (*b*) 0,89

81 (*a*) 1,7 m/s, (*b*) 0,83

83 (*a*) À temperatura ambiente, a borracha repica mais contra um taco do que quando congelada. (*b*) 3,8 cm

85 (*a*) 60°, (*b*) $v_u = 2{,}50$ m/s, $v_8 = 4{,}33$ m/s

87 (*a*) $v_1 = 1{,}7$ m/s e $v_2 = 1{,}0$ m/s, (*b*) A colisão foi elástica.

89 5,3 m/s, 29°

91 $$K_i = K_f = \frac{p_1^2}{2}\left[\frac{m_1^2 + 6m_1m_2 + m_2^2}{m_1^2m_2 + m_1m_2^2}\right] = \frac{p_1'^2}{2}\left[\frac{m_1^2 + 6m_1m_2 + m_2^2}{m_1^2m_2 + m_1m_2^2}\right],$$

$p_1' = \pm p_1$. Se $p_1' = +p_1$, as partículas não colidem.

93 (*a*) $\vec{v}_{cm} = 0$, (*b*) $\vec{u}_3 = (-5{,}0\text{ m/s})\hat{i}$, $\vec{u}_5 = (3{,}0\text{ m/s})\hat{i}$, (*c*) $\vec{u}_3' = (5{,}0\text{ m/s})\hat{i}$, $\vec{u}_5' = (-3{,}0\text{ m/s})\hat{i}$, (*d*) $\vec{v}_3' = (5{,}0\text{ m/s})\hat{i}$, $\vec{v}_5' = (-3{,}0\text{ m/s})\hat{i}$, (*e*) $K_i = K_f = 60$ J

95 (*a*) 360 kN, (*b*) 120 s, (*c*) 1,72 km/s

97 (*d*) 28

99 0,19 m/s, $K_i = 31$ mJ, $K_f = 12$ mJ

101 (*a*) $\vec{p} = -(1{,}1 \times 10^5\text{ kg} \cdot \text{km/h})\hat{i} + (1{,}1 \times 10^5\text{ kg} \cdot \text{km/h})\hat{j}$, (*b*) 43 km/h, 45° a oeste do norte.

103 (*a*) 6,3 m/s, (*b*) 20 m

105 (*a*) A velocidade da bola de basquete terá a mesma magnitude e o sentido oposto ao da bola de beisebol. (*b*) 0, (*c*) $2v$

107 (*a*) 30 km/s, (*b*) 8,1. A energia vem de uma incomensuravelmente pequena diminuição da rapidez orbital de Saturno.

109 O motorista não está dizendo a verdade.

111 8,9 kg

113 (*b*) 55

115 (*a*) $$v_{2f} = \left(\frac{m_b}{m_2 + m_b}\right)\left(1 + \frac{m_1}{m_1 + m_b}\right)v_i,$$

$$v_{1f} = -\frac{m_2m_b(2m_1 + m_b)}{(m_1 + m_b)^2(m_2 + m_b)}v_i,$$

(*b*) $$\Delta K = \frac{1}{2}\frac{m_2m_b^2(2m_1 + m_b)^2}{(m_2 + m_b)^2(m_1 + m_b)^2}\left(1 + \frac{m_1m_2}{(m_1 + m_b)^2}\right)v^2.$$

Esta energia adicional veio da energia química dos corpos dos astronautas.

117 4,53 m/s

Capítulo 9

1 (*a*) O da borda. (*b*) Ambos varrem o mesmo ângulo. (*c*) O da borda. (*d*) Ambos têm a mesma rapidez angular. (*e*) O da borda. (*f*) Ambos têm a mesma aceleração angular. (*g*) O da borda.

3 (*a*)

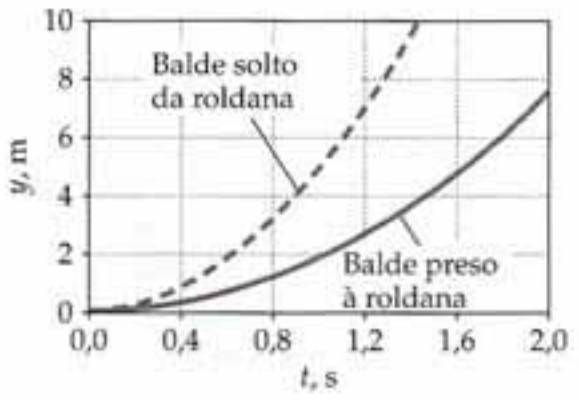
5 (*a*) Tatiana, (*b*) Tatiana, (*c*) Tatiana

7 Segurando desta forma, você estará girando o bastão em torno de um eixo mais próximo do centro de massa, reduzindo assim o momento de inércia do bastão. Com menor momento de inércia, a aceleração angular será maior (um bastão mais rápido) para o mesmo torque.

9 (*b*)

11 (*b*)

13 Uma razão é maximizar, em relação à linha que liga as dobradiças, o braço de alavanca da força exercida por alguém que puxa ou empurra a maçaneta.
15 (*b*)
17 (*b*)
19 (*a*)
23 12 rev
25 10%
27 Aproximadamente 6
29 (*a*) 16 rad/s, (*b*) 47 rad, (*c*) 7,4 rev, (*d*) 4,7 m/s e 73 m/s²
31 (*a*) 40 rad/s, (*b*) $a_t = 0{,}96$ m/s², $a_c = 0{,}19$ km/s²
33 (*a*) 0,59 rad/s², (*b*) 4,7 rad/s
35 3,6 rad/s
37 1,0 rad/s, 9,9 rev/min
39 (*a*) 2,94 rad, (*b*) 780 d
41 60 kg · m²
43 (*a*) 28 kg · m², (*b*) 32 kg·m²
45 2,6 kg·m²
47 (*b*) $I_{cm} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
49 $5{,}4 \times 10^{-47}$ kg · m²
51 $1{,}4 \times 10^{-2}$ kg · m²
55 $I = \frac{3}{10}MR^2$
57 $I_z = 3M((H^2/5) + (R^2/20))$
59 (*a*) $1{,}9 \times$ N · m, (*b*) $1{,}2 \times 10^2$ rad/s², (*c*) $6{,}2 \times 10^2$ rad/s
61 (*a*) $a_t = g \operatorname{sen}\theta$, (*b*) $mgL \operatorname{sen}\theta$
63 (*a*) $d\tau = (2\mu_c Mg/R^2)r^2 dr$, (*b*) $\tau = \frac{2}{3}MR\mu_c g$, (*c*) $\Delta t = (3R\omega/4\mu_d g)$
65 (*a*) 85 mJ, (*b*) 72 rev/min
67 (*a*) 19,6 kN, (*b*) 5,9 kN·m, (*c*) 0,27 rad/s, (*d*) 1,6 kW
69 (*a*) 3,6 rad/s, (*b*) 3,6 rad/s
71 3,1 m/s², $T_1 = 12$ N, $T_2 = 13$ N
73 30°
75 8,21 m/s
77 (*a*) $a = g/(1 + (2M/5m))$, (*b*) $T = (2mMg)/(5m + 2M)$
79 (*a*) 72 kg, (*b*) 1,4 rad/s², 0,29 kN, 0,75 kN
81 (*a*) $a = \dfrac{g \operatorname{sen}\theta}{1 + (m_1/2m_2)}$, (*b*) $T = \dfrac{m_2 g \operatorname{sen}\theta}{1 + (2m_2/m_1)}$,
(*c*) $v = \sqrt{\dfrac{2gh}{1 + (m_1/2m_2)}}$, (*d*) $a = g$, $T = 0$, e $v = \sqrt{2gh}$
83 10 kJ
85 3,1 m/s
87 (*a*) 0,19 m/s², (*b*) 0,96 N
89 20°
91 (*a*) $a = \frac{2}{3}g \operatorname{sen}\theta$, (*b*) $f_e = \frac{1}{3}mg \operatorname{sen}\theta$, (*c*) $\theta_{máx} = \tan^{-1}(3\mu_e)$
93 $v' = \sqrt{\frac{4}{3}}v$
95 0,22 kJ
97 (*a*) $\alpha = 2F/[R(M + 3m)]$, no sentido anti-horário,
(*b*) $a_C = F/(M + 3m)$, no sentido de $\vec{F}$,
(*c*) $a_{CB} = -2F/(M + 3m)$, no sentido oposto ao de $\vec{F}$
99 (*a*) 0,40 rad/s², 0,20 rad/s², (*b*) 4,0 N, no sentido horário
101 (*a*) $s_1 = \frac{12}{49}(v_0^2/\mu_c g)$, $t_1 = \frac{2}{7}(v_0/\mu_c g)$, e $v_1 = \frac{5}{7}v_0$, (*b*) $\frac{5}{7}$,
(*c*) $s_1 = 27$ m, $t_1 = 3{,}9$ s, e $v_1 = 5{,}7$ m/s
103 $v = (2r\omega_0/7)$
105 (*a*) 0,19 s, (*b*) 0,67 m, (*c*) 2,9 m/s
107 (*a*) $v = \frac{11}{7}v_0$, (*b*) $\Delta t = \frac{4}{7}(v_0/\mu_c g)$, (*c*) $\Delta x = \frac{36}{49}(v_0^2/\mu_c g)$
109 13 cm
111 (*a*) 7,4 m/s², (*b*) 15 m/s², (*c*) 2,4 m/s
113 (*a*) $7{,}8 \times 10^2$ kJ, (*b*) 90 N · m, 0,15 kN, (*c*) $1{,}4 \times 10^3$ voltas
115 (*a*) 15 m, (*b*) 15 rad/s
117 (*a*) $\omega = \sqrt{4g/3r}$, (*b*) $F = \frac{7}{3}Mg$
119 (*a*) 32,2 rad/s, (*b*) 23°, (*c*) 24 rad/s²
121 (*a*) 14,7 m/s², (*b*) 66,7 cm
123 42 J
125



127 (*a*) 26 N, (*b*) 1,1 m/s², (*c*) 3,2 kg

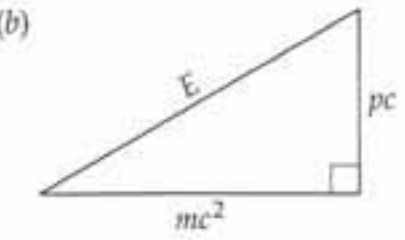
Capítulo 10

1 (*a*) Verdadeiro, (*b*) Falso, (*c*) Falso
3 90°
5 (*a*) L é duplicado, (*b*) L é duplicado
7 Falso. Um mergulhador alterando a posição do corpo.
9 (*c*)
11 O ovo cozido é sólido em seu interior, de forma que tudo gira com uma rapidez angular uniforme. Ao contrário, quando você põe a girar um ovo cru, a gema não começará imediatamente a girar com a casca, e quando você interrompe o giro a gema ainda continua a girar por um tempo.
13 (*a*)
15 (*a*) O avião tende para a direita. A variação da quantidade de movimento angular $\Delta\vec{L}_{hélice}$ da hélice aponta para cima e, portanto, o torque resultante $\vec{\tau}$ sobre a hélice também aponta para cima. A hélice deve exercer um torque igual mas oposto, sobre o avião. Este torque apontando para baixo, da hélice sobre o avião, tende a provocar uma variação da quantidade de movimento angular do avião para baixo. Isto significa que o avião tende a girar no sentido horário, se visto de cima.
(*b*) O nariz apontará para baixo. A variação da quantidade de movimento angular $\Delta\vec{L}_{hélice}$ da hélice aponta para a direita e, portanto, o torque resultante $\vec{\tau}$ sobre a hélice também aponta para a direita. A hélice deve exercer um torque igual, mas oposto sobre o avião. Este torque apontando para a esquerda, da hélice sobre o avião, tende a provocar uma variação da quantidade de movimento angular do avião para a esquerda. Isto significa que o avião tende a girar no sentido horário, se visto da direita.
17 (*a*) Sua energia cinética irá diminuir. Aumentando seu momento de inércia I, com a quantidade de movimento angular L se mantendo constante, sua energia cinética $K = L^2/(2I)$ irá diminuir.
(*b*) Estender seus braços provoca o aumento de seu momento de inércia e a diminuição de sua rapidez angular. A quantidade de movimento angular do sistema não se altera.
19 Cerca de 4 rev/s
21 (*a*) 33, (*b*) 33, (*c*) 8, (*d*) 14
23 (*a*) $2{,}4 \times 10^{-8}$ kg · m²/s,
(*b*) $\ell(\ell + 1) = 5{,}2 \times 10^{52}$, $\ell \approx 2{,}3 \times 10^{26}$,
(*c*) $\Delta\ell = 2{,}3 \times 10^{18}$. A quantização da quantidade de movimento angular não é notada na física macroscópica porque nenhum experimento pode detectar uma variação fracionária em ℓ de 10^{-60}%.

25 (*a*) 0,331, (*b*) Como experimentalmente $C < 0{,}4$, a massa específica deve ser maior próximo ao centro da Terra.
27 $\vec{\tau} = FR\hat{k}$
29 (*a*) $24\hat{k}$, (*b*) $-24\hat{j}$, (*c*) $-5\hat{k}$
33 $\vec{B} = 4\hat{j} + 3\hat{k}$
37 (*a*) 54 kg · m²/s, para cima, (*b*) 54 kg · m²/s, para baixo, (*c*) 0
39 (*b*) Para baixo
41 (*a*) $1{,}3 \times 10^{-5}$ kg · m²/s, afastando-se de você,
(*b*) $1{,}3 \times 10^{-5}$ kg · m²/s, afastando-se de você,
(*c*) $1{,}3 \times 10^{-5}$ kg · m²/s, afastando-se de você,
(*d*) $8{,}8 \times 10^{-5}$ kg · m²/s, apontando para você
43 (*a*) −4,9 N · m. Note que, como L diminui enquanto a partícula gira no sentido horário, a aceleração angular e o torque resultante apontam para cima.
(*b*) $\omega_{orbital} = 0{,}48 \text{ rad/s} - (0{,}19 \text{ rad/s}^2)t$.
45 (*a*) $\tau_{res} = Rg(m_2 \operatorname{sen}\theta - m_1)$, (*b*) $L = vR((I/R^2) + m_1 + m_2)$,
(*c*) $a = \dfrac{g(m_2 \operatorname{sen}\theta - m_1)}{(I/R^2) + m_1 + m_2}$
49 (*a*) 5,0 rev/s, (*b*) 0,62 kJ, (*c*) Como nenhum agente externo trabalha sobre o sistema, a energia vem de sua energia interna.
51 10 mm/s
53 (*a*) $r_0 m v_0$, (*b*) $\frac{1}{2}mv_0^2$, (*c*) $m(v_0^2/r_0)$, (*d*) $-\frac{2}{3}mv_0^2$
55 125°
57 (*a*) $3{,}46 \times 10^{-47}$ kg · m², (*b*) 1,00 MeV, 2,01 MeV, 6,02 MeV
59 (*a*) Não, nenhum dos valores permitidos de E_f é igual a $3E_{0c}$.
(*b*) 2,5
61 $\vec{v}_{cm}$ $\dfrac{m}{m+M}\vec{v}$, $\omega = \left(\dfrac{mMd}{\frac{1}{12}ML^2(M+m) + Mmd^2}\right)v$
63 $v = \sqrt{\dfrac{(0{,}5M + 0{,}8m)(\frac{1}{3}ML^2 + 0{,}64mL^2)g}{0{,}32Lm^2}}$
65 (*a*) $v_{cm} = J/M$, (*b*) $V = 4J/M$, (*c*) $V = -2J/M$, (*d*) Sim, um ponto permanece em repouso, mas por apenas um curtíssimo intervalo de tempo.
67 0,36
69 (*a*) 18 J · s, (*b*) 0,41 rad/s, (*c*) 15 s, (*d*) 0,079 J · s
71 (*a*) $\vec{L} = -(48 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})\hat{k}$, (*b*) $\vec{\tau} = (16 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{k}$
73 (*a*) 0,24 kJ · s, (*b*) 0,31 kJ
75 (*a*) Como $\tau_{res} \neq 0$, a quantidade de movimento angular não é conservada. (*b*) Como não existe atrito e a força externa resultante sobre o corpo é a força de tensão que atua perpendicularmente à sua velocidade, a energia do corpo é conservada. (*c*) v_0
77 Sim, a solução depende apenas da conservação da quantidade de movimento angular do sistema, e logo depende apenas dos momentos de inércia inicial e final.
81 (*a*) 0,228 rad/s, (*b*) 0,192 rad/s
83 $4{,}47 \times 10^{22}$ N · m
85 −79,9 cm

Capítulo R

1 No referencial do carro, os dois eventos ocorrem na mesma localização (no carro). Assim, o relógio do seu amigo mede o tempo próprio entre os dois eventos.
3 Sim. Seja 1 o referencial inicial. No referencial 1, seja L a distância entre os eventos, seja T o tempo entre os eventos e seja $+x$ o sentido do evento B em relação ao evento A. Calcule o valor de L/T. Se L/T é menor do que c, então considere os dois eventos em um referencial 2 que se move com a rapidez $v = L/T$ no sentido $+x$. No referencial 2, os dois eventos ocorrem na mesma localização.
5 Sim.
7 (*a*)
9 (*b*)



11 (*a*)
13 5,9 ns
15 (*a*) $K/E_0 = 5 \times 10^{-15}$, (*b*) $E/E_0 = 1{,}000\,000\,000\,000\,005\,0$,
(*c*) $K_{não\,rel}/K_{rel} = 0{,}999\,999\,999\,999\,997\,5$
17 6,6 m
19 599 m
21 (*a*) $1{,}3 \times 10^2$ a, (*b*) 88 a
23 (*a*) 60 cm, (*b*) 2,5 ns
25 0,80*c*
27 (*a*) $4{,}50 \times 10^{-10}$%, (*b*) 142 μs menos do que 1 ano, 142 μs
29 36 min
31 12,5 min, 12,5 min
33 60 min
35 0,400*c*. O evento B pode preceder o evento A, desde que $v >$ 0,400*c*.
37 (*a*) 11 anos, (*b*) 40 anos
39 (*a*) 1,01, (*b*) 1,15, (*c*) 1,67, (*d*) 7,09
41 (*a*) 0,155 mc^2, (*b*) 1,29 mc^2, (*c*) 6,09 mc^2
43 2,97 GeV
45 (*b*) 0,866*c*, (*c*) 0,999*c*
49 (*a*) 0,79%, (*b*) 69%
51 (*a*) 0,943
53 Em 100 vidas médias, $d \approx 6600$ km, ou aproximadamente um raio terrestre. Esta distância relativamente curta deve convencer seu colega de que a origem dos múons observados na Terra está dentro de nossa atmosfera, e que certamente eles não provêm do Sol.
55 (*a*) 4,50 km/s, (*b*) 0,334 μs
57 (*a*) 0,75*c*, (*b*) 5,0 ft, (*c*) Não. Em seu próprio referencial de repouso, a extremidade de trás da escada passará pela porta antes que a extremidade da frente chegue na parede do galpão, enquanto no referencial de Ernani a extremidade da frente atingirá a parede do galpão antes que a extremidade de trás chegue na porta.

Capítulo 11

1 (*a*) Falso, (*b*) Verdadeiro, (*c*) Verdadeiro, (*d*) Falso
3 A Terra está mais próxima do Sol durante o inverno no hemisfério norte. É nesta época que ocorre a maior rapidez orbital. O verão é a época de menor rapidez orbital.
5 Para obter a massa M de Vênus você precisa medir o período T e o semi-eixo maior a da órbita de um dos satélites, substitua os valores medidos em $T^2/a^3 = 4\pi^2/(GM)$ (terceira lei de Kepler) e determine M.
7 (*d*)
9 (*b*)
11 (*b*)
13 Você deve disparar os foguetes no sentido oposto ao do movimento orbital do satélite. À medida que o satélite se aproxima da Terra, após a queima, a energia potencial diminui. A energia mecânica total também diminui, devido

às forças de arraste que transformam energia mecânica em energia térmica. A energia cinética aumenta, até que o satélite entra na atmosfera onde as forças de arraste o freiam.

15 Em um ponto dentro da esfera, a uma distância r de seu centro, a intensidade do campo gravitacional é diretamente proporcional à quantidade de massa até a distância r a partir do centro, e inversamente proporcional ao quadrado da distância r ao centro. A massa até a distância r do centro é proporcional ao cubo de r. Logo, a intensidade do campo gravitacional é diretamente proporcional a r.

17 $M_{\text{galáxia}} = 1{,}08 \times 10^{11}\, M_S$

19 Cerca de 3,0 km

21 (*a*) $6{,}28 \times 10^{-4}$ rad/s, 2,78 h, (*b*) $L_1 = 1{,}93 \times 10^{43}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, $L_S = 7{,}85 \times 10^{42}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, 0,70%, (*c*) $T_{\text{Sol}} = 3{,}64$ h, $T_{\text{Sol}} = 1{,}30\, T_{\text{mês}}$

23 84,0 anos

25 $4{,}90 \times 10^{11}$ m = 3,00 UA

27 (*a*) $1{,}6 \times 10^{11}$ m = 1,1 UA, (*b*) $2{,}7 \times 10^{10}$ m = 0,18 UA, $2{,}9 \times 10^{11}$ m = 1,9 UA

29 (*b*) 0,73 UA, (*c*) 0,63 a

31 (*a*) $1{,}90 \times 10^{27}$ kg

33 (*a*) 22,7 h, (*b*) $1{,}22 \times 10^{9}$ m

35 Seu peso seria dez vezes o peso na Terra.

37 $2{,}27 \times 10^{4}$ m/s

39 (*a*) 1,4, (*b*) Ele está mais afastado do Sol do que a Terra. A terceira lei de Kepler [$T^2 = Cr^3_{\text{méd}}$] nos diz que períodos orbitais mais longos junto com raios orbitais mais longos significam valores menores de rapidez orbital, de forma que a rapidez dos objetos que orbitam o Sol diminui com a distância ao Sol. A rapidez média orbital da Terra, dada por $v = 2\pi r_{TS}/T_{TS}$, é aproximadamente de 30 km/s. Como a dada rapidez máxima do asteróide é de apenas 20 km/s, o asteróide está mais afastado do Sol.

41 (*a*) 7,37 m, (*b*) 31,9 μm

43 0,605

45 10^{9} m

47 2,38 km/s

49 (*a*) 8,7 kW · h, (*b*) 500 reais

51 6,9 km/s

53 19,4 km/s

55 13,8 km/s

57 (*a*) 7,31 h, (*b*) $1{,}04 \times 10^{9}$ J, (*c*) $8{,}72 \times 10^{12}$ J · s

59 $1{,}11 \times 10^{10}$ J

61 $(4{,}0\ \text{N/kg})\hat{i}$

63 (*a*) $\vec{g} = \dfrac{Gm}{L^2}\hat{i} + \dfrac{Gm}{L^2}\hat{j}$, (*b*) $|\vec{g}| = \sqrt{2}\dfrac{Gm}{L^2}$

65 (*a*) $(-1{,}7 \times 10^{-11}\ \text{N/kg})\hat{i}$, (*b*) $(-8{,}3 \times 10^{-12}\ \text{N/kg})\hat{i}$, (*c*) 2,5 m

67 (*a*) $\frac{1}{2}CL^2$, (*b*) $\vec{g} = -\dfrac{2GM}{L^2}\left[\dfrac{L}{x_0 - L} - \ln\dfrac{x_0}{x_0 - L}\right]\hat{i}$

69 (*a*) 0, (*b*) 0, (*c*) $3{,}2 \times 10^{-9}$ N/kg

71 $g_1 = g_2$

73 (*a*) $\dfrac{Gm(M_1 + M_2)}{9a^2}$, (*b*) $\dfrac{GmM_1}{3{,}61a^2}$, (*c*) 0

77 $g(x) = G\left(\dfrac{4\pi\rho_0 R^3}{3}\right)\left[\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{8(x - \frac{1}{2}R)^2}\right]$

79 $\omega = \sqrt{\dfrac{4\pi\rho_0 G}{3}}$

81 1,0 m/s

83 (*a*) $\vec{F} = -\dfrac{GMm}{d^2}\left[1 - \dfrac{d^3/4}{\{d^2 + (R^2/4)\}^{3/2}}\right]\hat{i}$

85 249 anos

87 (*a*) $W = GM_1 m\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)$

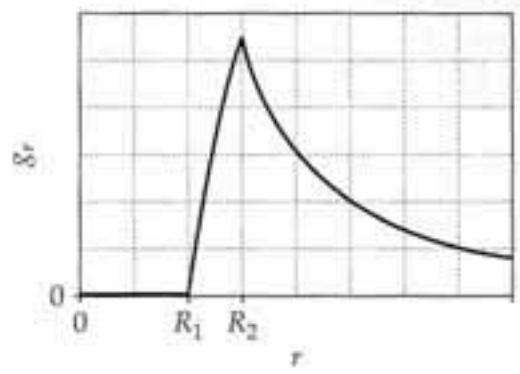
89 (*a*) $3{,}36 \times 10^{5}$, (*b*) 241

91 1,70 Mm

95 $1{,}60 \times 10^{-4}$

97 $v = 1{,}16\sqrt{\dfrac{GM}{a}}$

99 $g(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \dfrac{GM(r^3 - R_1^3)}{r^2(R_2^3 - R_1^3)} & R_1 < r \le R_2 \\ \dfrac{GM}{r^2} & R_2 < r \end{cases}$



101 $g = (2G\lambda)/r$

103 (*b*) $U = -\dfrac{GMm_0}{L}\ln\left(\dfrac{x + L/2}{x - L/2}\right)$, (*c*) $F_x(x) = -\dfrac{GMm_0}{x^2 - (L/2)^2}$

Esta resposta e a resposta dada no Exemplo 11-8 são a mesma.

105 34 pN

107 (*a*) A força gravitacional é maior sobre o robô de baixo; logo, se não fosse pelo cabo, sua aceleração seria maior do que a do robô de cima e eles se afastariam um do outro. Opondo-se a esta separação, o cabo é tensionado. (*b*) $2{,}2 \times 10^{5}$ m

Capítulo 12

1 (*a*) Falso, (*b*) Verdadeiro, (*c*) Verdadeiro, (*d*) Falso

3 (*b*)

5 Quanto mais alta for a placa, maior será o torque em relação ao eixo horizontal que passa pela base dos postes, para uma dada rapidez do vento. Além disso, quanto mais fundo for o buraco, maior será o torque máximo compensador, em relação ao mesmo eixo, para uma dada consistência do solo. Assim, placas mais altas requerem buracos mais fundos para os postes.

7 A razão principal é que isto torna mais baixo o centro de gravidade da caneca. Quanto mais baixo o centro de gravidade, mais estável será a caneca.

9 (*b*)

11 (*b*) 2,0 N/cm

13 (*b*) Passos longos requerem grandes coeficientes de atrito estático, porque θ se torna grande. (*c*) Se μ_s é pequeno, isto é, se o piso é escorregadio, θ deve ser menor, para evitar escorregamento.

15 84 cm

17 692 N, 2,54 kN

19 0,728 m

21 $F_1 = \frac{1}{2}Mg$, $F_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}Mg$
23 (*a*) $\vec{F} = (30\text{ N})\hat{i} + (30\text{ N})\hat{j}$, (*b*) $\vec{F} = (35\text{ N})\hat{i} + (45\text{ N})\hat{j}$
25 (*a*) $F_n = Mg - F\sqrt{(2R - h)/h}$, (*b*) F, (*c*) $F\sqrt{(2R - h)/h}$
27 (*a*) 6,87 N, (*b*) 1,7 N · m, (*c*) 8,3 N, 15 N
29 (*a*) 71 N, (*b*) 3,5 m, (*c*) 0,50 kN
31 $\tau = (69{,}3\text{ N})b - (40{,}0\text{ N})a$
33 $h = \mu_e L \tan\theta \operatorname{sen}\theta$
35 $\mu_e = 2h/L \tan\theta \operatorname{sen}\theta$
37 59°
39 62°
41 (*a*) 42 N, (*b*) 0,14%
43 5,0°
47 (*a*) $1{,}4 \times 10^6\text{ N/m}^2$, (*b*) 7 mJ, (*c*) 28 mJ. Há 4 vezes mais energia armazenada na borracha quando a massa de 0,30 kg está pendurada. Isto ocorre porque a energia armazenada aumenta quadraticamente com o aumento da massa.
49 0,69
51 Como a tensão que provocou o rompimento é menor do que a tensão que o cabo deverá suportar, ele não conseguirá suportar o elevador.
55 1,5 kN
57 $m_1 = 0{,}15\text{ kg}$, $m_2 = 0{,}71\text{ kg}$, $m_3 = 0{,}36\text{ kg}$
59 1,8 kg
61 0,15
63 $\mu_e < 0{,}50$
65 $\mu_e = (\cot\theta + 1)/2$
67 (*a*) 0,15 kN, (*b*) 3,8 m
69 $\mu_e < 0{,}50$
71 (*c*)

Célula	Conteúdo/Fórmula	Forma Algébrica
B5	B4+1	$i + 1$
C5	C4+$B$1/(2*B5)	$d_i + \frac{L}{2i}$

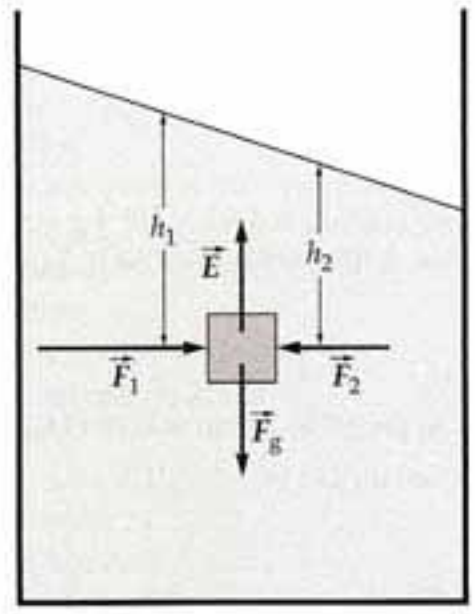
	A	B	C	D
1	L =	0,20	m	
2		0		
3		*i*	afastamento	
4		1	0,100	
5		2	0,150	
6		3	0,183	
102		99	0,518	
103		100	0,519	

$d_5 = 15\text{ cm}$, $d_{10} = 26\text{ cm}$, e $d_{100} = 0{,}52\text{ cm}$

(*d*) Não.
73 566 N
75 $F_n = 2mg$, $F = mg\frac{r}{\sqrt{R(2r - R)}}$, $F_p = mg\frac{R - r}{\sqrt{R(2r - R)}}$

Capítulo 13

1 (*e*)
3 (*c*)
5 A pressão aumenta aproximadamente 1 atm a cada 10 m de profundidade. Para respirar, você precisa criar uma pressão menor do que 1 atm em seus pulmões. Na superfície isto é fácil, mas não a uma profundidade de 10 m.
7 (*b*)
9 Falso. A força de empuxo sobre um corpo submerso depende do peso do fluido deslocado, que, por sua vez, depende do volume do fluido deslocado. Como os tijolos possuem o mesmo volume, eles deslocarão o mesmo volume de água.
11 Como a pressão cresce com a profundidade, o objeto será comprimido e sua massa específica aumentará com a diminuição do volume. Então, o objeto afundará.
13



O diagrama mostra o copo e um elemento de água no meio do copo. Como se pode verificar com uma demonstração simples, a superfície da água não é plana enquanto o copo está acelerado, o que mostra que há um gradiente de pressão (uma diferença de pressão) da água, por causa da diferença de profundidades ($h_1 > h_2$, logo, $F_1 > F_2$) nos dois lados do elemento de água. Este gradiente de pressão corresponde a uma força resultante sobre o elemento de água, como mostrado na figura. A força de empuxo para cima é igual em magnitude à força gravitacional para baixo.
15 (*c*)
17 O montinho junto à entrada 1 fará com que as linhas de corrente se curvem sobre a entrada, em forma côncava. Um gradiente de pressão para cima produz a força centrípeta para baixo. Isto significa que há uma redução da pressão na entrada 1. Isto não ocorre na entrada 2, logo, lá a pressão é maior do que a pressão na entrada 1. O ar circula da entrada 2 para a entrada 1. Já foi demonstrado que, mesmo com a mais leve brisa do lado de fora, haverá circulação de ar suficiente dentro do túnel.
19 $1{,}11\text{ kg/m}^3$
21 $1{,}0 \times 10^2\text{ kg}$
23 $33{,}6\text{ kg/m}^3$
25 0,773
27 29,8 inHg
29 1,5 N
31 230 N
33 197 atm. Como uma profundidade de apenas 2 km é necessária para produzir uma compressão de 1 por cento, isto ocorre nos oceanos.
35 (*a*) 15 kN, (*b*) 0,34 kg
37 45 cm
39 1,4%
41 4,36 N
43 (*a*) $11 \times 10^3\text{ kg/m}^3$, (*b*) Vemos, na Tabela 13-1, que a massa específica do material desconhecido é próxima da do chumbo.
45 800 kg/m^3, 1,11

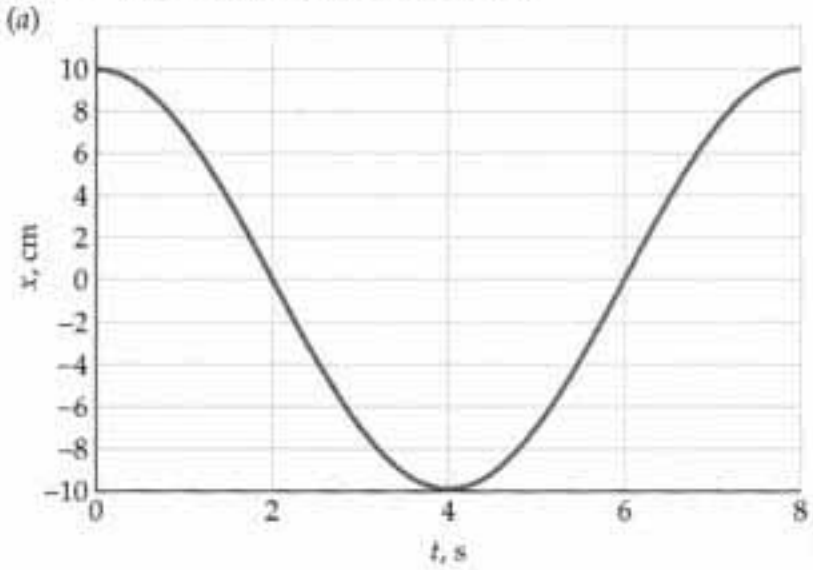
47 250 kg/m³
49 3,9 kg
51 $3{,}9 \times 10^5$ N
53 $2{,}5 \times 10^7$ kg
55 (*a*) 12,0 m/s, (*b*) 133 kPa, (*c*) As vazões volumétricas são iguais.
57 (*a*) 4,6 L/min, (*b*) $7{,}6 \times 10^{-2}$ m²
59 144 kPa
61 0,20 kPa. Como $\Delta P \propto I_V^2$ (um gráfico de ΔP como função de I_V é uma parábola crescente), esta diferença de pressão é a diferença mínima.
65 (*b*) $P_{topo} = P_{at} - \rho g d$
67 (*a*) 9,28 cm/s, (*b*) 0,331 cm, (*c*) 76 cm
69 (*a*) $x = 2\sqrt{h(H-h)}$, (*b*) $x_{máx} = H$
71 1,43 mm
73 90 mi/h. Como esta é uma rapidez alcançada por muitos lançadores profissionais, a diminuição abrupta da força de arraste pode ser importante em uma partida.
75 2,91 L/s
77 2
79 36 kg/m³
81 0,71 kg
83 11,8 cm
85 Um metro é um diâmetro plausível para este oleoduto.
87 29 s
89 (*a*) 70 m³, (*b*) 5,2 m/s²
91 (*b*) 0,13 km⁻¹
93 39 cm³

Capítulo 14

1 (*a*) Falso, (*b*) Verdadeiro, (*c*) Verdadeiro
3 (*a*)
5 (*c*)
7 (*c*)
9 Ao desprezar a massa da mola em seus cálculos você estará usando uma massa do sistema oscilante menor do que o seu valor real. Assim, o valor que você calcula para o período será menor do que o período real do sistema e o valor que você calcula para a freqüência, que é o inverso do período, será maior do que o valor real.

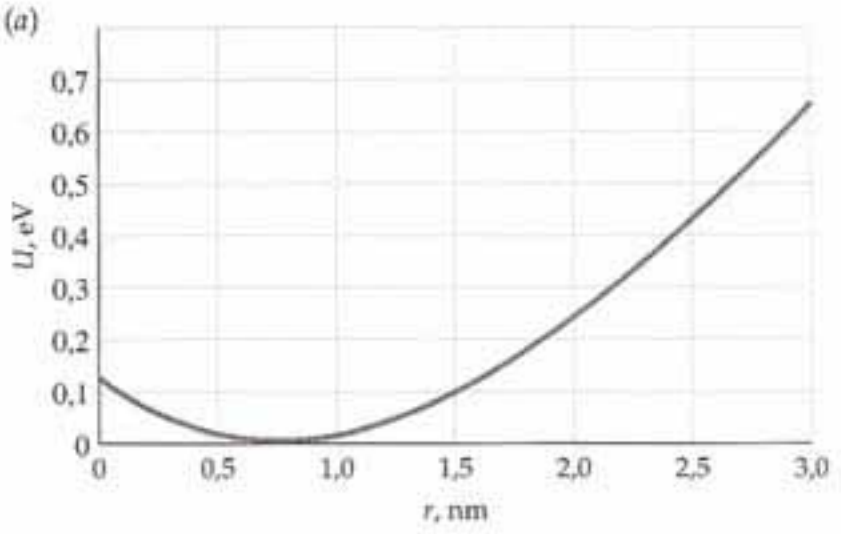
Como a energia total do sistema oscilante depende apenas da amplitude do movimento e não da rigidez da mola, ela é independente da massa do sistema; logo, desprezar a massa da mola não acarretará em modificação no resultado do cálculo da energia total do sistema.

11 (*d*)
13 (*b*)
15 1 com B, 2 com D, 3 com A.
17 (*c*)
19 (*a*) Verdadeiro, (*b*) Falso, (*c*) Verdadeiro, (*d*) Falso, (*e*) Verdadeiro
21 (*b*)
23 (*b*)
25 Cerca de cinco
27 8π
29 (*a*) 3,00 Hz, (*b*) 0,333 s, (*c*) 7,0 cm, (*d*) 0,0833 s no sentido de $-x$.
31 (*a*) $x = (0{,}25\text{ m})\cos[(4{,}2\text{ s}^{-1})t]$,
(*b*) $v = -(1{,}0\text{ m/s})\,\text{sen}[(4{,}2\text{ s}^{-1})t]$,
(*c*) $a = -(4{,}4\text{ m/s}^2)\cos[(4{,}2\text{ s}^{-1})t]$.
33 (*a*) $x = (0{,}28\text{ m})\cos[(4{,}2\text{ s}^{-1})t - 0{,}45]$,
(*b*) $v = -(1{,}2\text{ m/s})\,\text{sen}[(4{,}2\text{ s}^{-1})t - 0{,}45]$,
(*c*) $a = -(4{,}9\text{ m/s}^2)\cos[(4{,}2\text{ s}^{-1})t - 0{,}45]$.
35 (*a*)



(*b*) 2,9 cm, 7,1 cm, 7,1 cm, 2,9 cm
37 (*a*) 7,9 m/s, 25 m/s², (*b*) 6,3 m/s, −15 m/s²
39 (*a*) 0,32 Hz, 3,1 s, (*b*) $x = (40\text{ cm})\cos[(2{,}0\text{ s}^{-1})t + (\pi/2)]$
41 23 J
43 (*a*) 0,368 J, (*b*) 3,83 cm
45 1,4 kN/m
47 (*a*) 6,9 Hz, (*b*) 0,15 s, (*c*) 10 cm, (*d*) 4,3 m/s, (*e*) $1{,}9 \times 10^2$ m/s², (*f*) 36 ms, 0
49 (*a*) 0,68 kN/m, (*b*) 0,42 s, (*c*) 1,5 m/s, (*d*) 23 m/s²
51 (*a*) 3,08 kN/m, (*b*) 4,16 Hz, (*c*) 0,240 s
53 0,262 s
55 (*a*) 1,0 Hz, (*b*) 0,50 s, (*c*) 0,29 N
57 (*a*) 6,7 cm, (*b*) 0,26 cm, (*c*) Como $h < 8{,}0$ cm, a mola nunca fica frouxa. 77 cm/s
59 44 cm
61 12 s
63 11,7 s
65 $T = 2\pi\sqrt{L/(g\cos\theta)}$
67 1,1 s
69 0,50 kg · m²
71 A 21,1 cm do centro da régua.
75 (*a*) $d = 1{,}64$ m, (*b*) 2,31 cm
79 (*a*) 0,31, (*b*) $-3{,}1 \times 10^{-2}\%$
81 (*a*) 1,57%, (*c*) 0,43 E_0
83 (*a*) 5,51 Pa · s, (*b*) 125
85 (*a*) 1,0 Hz, (*b*) 2 Hz, (*c*) 0,35 Hz
87 (*a*) 4,98 cm, (*b*) 14,1 rad/s, (*c*) 35,4 cm, (*d*) 1,00 rad/s
89 (*a*) 0,48 Hz, 2,1 s, (*b*) $v = -(1{,}2\text{ m/s})\,\text{sen}[(3{,}0\text{ rad/s})t + \pi/4)]$, (*c*) 1,2 m/s
91 O erro será maior se o relógio for elevado.
93 (*a*) $\mu_e = Ak/[(m_1 + m_2)g]$, (*b*) A não se altera, E não se altera, ω diminui e T aumenta.
95 (*b*) 2,0 cm/s²
101 $6{,}44 \times 10^{13}$ rad/s
103 $T = 7{,}78\sqrt{R/g}$

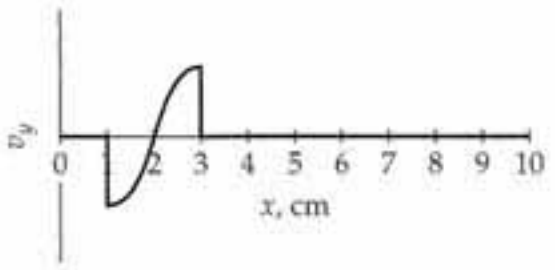
107 (*a*)



(*b*) $r = r_0$, $k = 2\beta^2 D$, (*c*) $\omega = 2\beta\sqrt{D/m}$

Capítulo 15

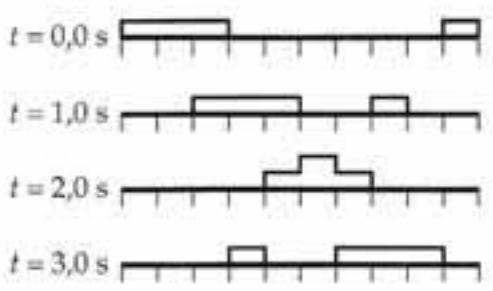
1 A rapidez de uma onda transversal em uma corda uniforme aumenta com o aumento da tração. As ondas na corda se movem mais rapidamente à medida que sobem, porque a tração aumenta com o aumento do peso da corda abaixo.
3 (*b*)
5 Verdadeiro
7 (*c*)
9 Houve apenas uma explosão. O som viaja mais rapidamente na água do que no ar. Abel ouviu primeiro a onda sonora dentro d'água e, depois, na superfície, ele ouviu a onda sonora no ar, onde ela se propaga mais lentamente.
11 (*b*)
13 (*a*)
15 (*b*)
17 (*a*) Falso, (*b*) Verdadeiro, (*c*) Verdadeiro
19 (*a*)
21 A luz da estrela visível será deslocada de sua freqüência média periodicamente, devido à aproximação e ao afastamento relativos à Terra, enquanto a estrela gira em torno do centro de massa comum.
23



25 Ao longo do caminho C. Como a rapidez do som é maior na água, e é o caminho C que tem sua maior parte dentro d'água, a onda sonora levará menos tempo percorrendo o caminho C.
27 11 ms
29 0,27 km/s, 21%
31 1,32 km/s
33 (*b*) 40 N, (*c*) 40,8 N, 2%
39 9,9 W
41 (*a*) 5,00 m/s, no sentido $-x$, (*b*) 10,0 cm, 50,0 Hz, 0,0200 s, (*c*) 0,314 m/s
43 (*a*) 6,8 J, (*b*) 44 W
45 (*a*) 79 mW, (*b*) A potência pode ser aumentada de um fator de 100 aumentando-se ou a freqüência ou a amplitude de um fator de 10, ou aumentando-se a tração de um fator de 100.
47 (*a*) 0,75 Pa, (*b*) 4,00 m, (*c*) 85,8 Hz, (*d*) 343 m/s
49 (*a*) 36,4 μm, (*b*) 83,4 mPa
51 (*a*) Zero, (*b*) 3,64 μm
53 (*a*) 0,80 s, (*b*) 30 m, (*c*) 6,8 m
55 (*a*) 50,3 W, (*b*) 2,00 m, (*c*) 44 mW/m^2
57 (*a*) 20,0 dB, (*b*) 100 dB
59 90 dB
61 (*a*) 0,10 km, (*b*) 0,13 W
63 (*a*) 80 dB, (*b*) Eliminar as fontes de 70 dB e de 73 dB não reduz significativamente o nível de intensidade sonora.
65 87,8 dB
67 57 dB
73 (*a*) 263 m/s, (*b*) 1,32 m, (*c*) 261 Hz
75 153 Hz
77 $2{,}25 \times 10^8$ m/s
79 174 mi/h
81 (*a*) −7,78 kHz, (*b*) −4,44 kHz
83 (*a*) $f_r' = f_t(v - u_r)/(v - u_t)$
85 (*a*) 0,82 kHz, (*b*) 0,85 kHz
87 185 m, 714 Hz
89 $\lambda_{máx} = (500\text{ nm})(1 + 4{,}36 \times 10^{-5})$ e $\lambda_{mín} = (500\text{ nm})(1 - 4{,}36 \times 10^{-5})$
91 529 Hz, 474 Hz
93 A 7,99 m da extremidade esquerda do fio
95 (*a*) 55,6 N/m^2, (*b*) 3,49 W/m^2, (*c*) 0,110 W
97 77 kN
99 206 m
101 0,2 cm
103 (*a*) 10,0 m/s, (*b*) 2,00 m, (*c*) $P_{máx} = 1{,}26 \times 10^{-4}$ kg · m/s, (*d*) 3,95 mN

Capítulo 16

1



3 (*b*)
5 (*a*)
7 3,0 m
9 (*b*)
11 (*a*)
13 Você pode medir a freqüência de ressonância mais baixa f e o comprimento L do tubo. Supondo desprezíveis correções nas extremidades, o comprimento de onda é igual a $4L$ se o tubo for fechado em uma extremidade e $2L$ se ele for aberto nas duas extremidades. Use, então, $v = f\lambda$ para determinar a rapidez do som à temperatura ambiente. Finalmente, use $v = \sqrt{\gamma RT/M}$ (Equação 15-5), onde $\gamma = 1{,}4$ para um gás diatômico como o ar, M é a massa molar do ar, R é a constante universal dos gases e T é a temperatura absoluta, para estimar a temperatura do ar.
15 (*a*) Não, (*b*) Sim
17 Ondas sonoras estacionárias são produzidas nas colunas de ar acima da água. As freqüências de ressonância das colunas de ar dependem do comprimento de cada coluna que, por sua vez, depende da quantidade de água no copo.
19 O comprimento de onda é determinado principalmente pelo tamanho da cavidade ressonante da boca; a freqüência

sonora que ele produz é igual à rapidez do som dividida pelo comprimento de onda. Como $v_{He} > v_{ar}$ (veja a Equação 15-5), a freqüência de ressonância será maior se o gás na cavidade for o hélio.

21 Se você não ouve nenhum batimento durante todo o tempo em que a corda e o diapasão estão vibrando, você pode estar certo de que suas freqüências, se não exatamente iguais, estão muito próximas. Se os sons da corda e do diapasão, ao vibrarem, durarem 10 s, então a freqüência de batimento será menor do que 0,1 Hz. Assim, as freqüências da corda e do diapasão diferirão no máximo em 0,1 Hz.

23 As freqüências estimadas diferem no máximo em 14% das freqüências observadas.

25 7,1 cm

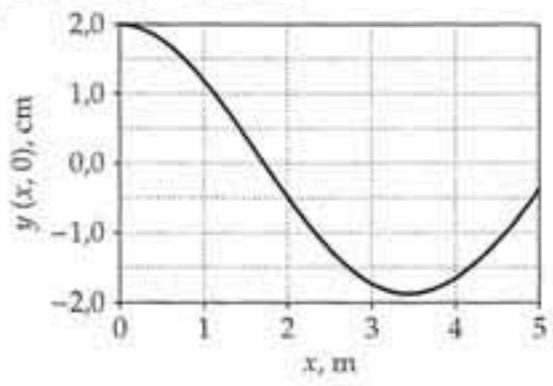
27 (*a*) 89°, (*b*) 1,5 *A*

29 (*a*) 0, (*b*) $2I_0$, (*c*) $4I_0$

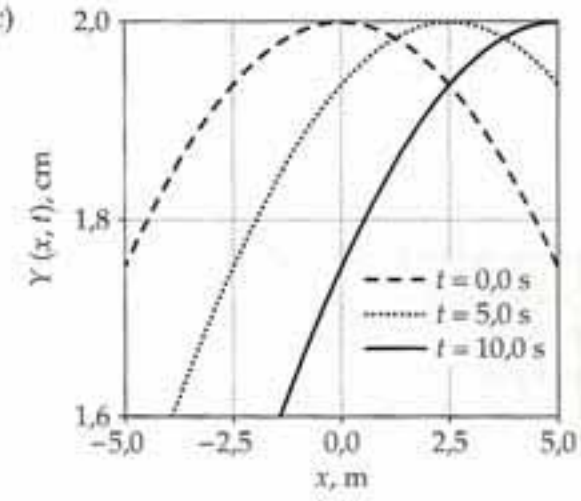
31 (*a*) 60,0 cm, (*b*) 0,400π rad, (*c*) 24,0 m/s

33 $f_1 = 2{,}0$ kHz, $f_2 = 5{,}0$ kHz

35 (*b*)



(*c*)



$v_{est} = 46$ cm/s, v_{est} é 92% de $v_{envelope}$

37 1,8 m, 51°

39 (*a*) 0,279 m, (*b*) 1,23 kHz, (*c*) 0,432 rad, 0,592 rad, 0,772 rad, 0,992 rad e 1,35 rad, (*d*) 0,0698 rad

41 2,0 rad

43 (*b*) 1,2 kHz, (*c*) 15 Hz/(mi/h)

45 (*a*) 2,00 m, 2,50 Hz,
(*b*) $y_3(x,t) = (4{,}00\text{ mm})\,\text{sen}(\pi\text{ m}^{-1})x\,\cos(50{,}0\pi\text{ s}^{-1})t$

47 (*a*) 521 m/s, (*b*) 2,80 m, 186 Hz, (*c*) 372 Hz e 558 Hz

49 141 Hz

51 (*a*) 32,4 cm, 47,7 Hz, (*b*) 15,0 m/s, (*c*) 62,8 cm

53 (*a*) 71,5 Hz, (*b*) 5,00 kHz, (*c*) 71

55 452 Hz. Idealmente, o tubo deveria expandir de forma a permitir que v/L, onde L é o comprimento do tubo, permanecesse independente da temperatura.

57 (*a*) 40,0 cm, (*b*) 480 N, (*c*) Você deve posicionar o dedo a 9,2 cm do cavalete da voluta.

59 (*a*) 75 Hz, (*b*) 5° e 6°, (*c*) 2,0 m

61 (*a*) 0,574 g/m, (*b*) 1,29 g/m, 2,91 g/m, 6,57 g/m

63 (*a*) Os dois sons produzem um batimento porque o terceiro harmônico da corda lá é igual ao segundo harmônico da corda mi, e a freqüência original da corda mi é ligeiramente maior do que 660 Hz. (*b*) 662 Hz

65 (*a*) Como a freqüência é fixa, o comprimento de onda depende apenas da tração na corda. Isto é verdadeiro, porque o único parâmetro que pode afetar a rapidez da onda na corda é a tração. A tração na corda é dada pelo peso pendurado em sua extremidade. Como o comprimento da corda é fixo, apenas certos comprimentos de onda podem ressoar na corda. Assim, como apenas certos comprimentos de onda são permitidos, apenas certos valores de rapidez podem ocorrer. Isto, por sua vez, significa que apenas certas trações, e portanto pesos, produzem ondas estacionárias.
(*b*) Modos de freqüência mais alta, no mesmo comprimento da corda, resultam em comprimentos de onda menores. Para que isto aconteça sem variação da freqüência, você precisa reduzir a rapidez da onda. Isto é feito reduzindo a tração na corda. Como a tração é dada pelo peso pendurado, você deve reduzir este peso.
(*d*) $F_{T1} = 19{,}2$ N, $F_{T2} = 4{,}80$ N, $F_{T3} = 2{,}13$ N

67 (*a*) $\Delta t = N/f_0$, (*b*) $\lambda \approx \Delta x/N$, (*c*) $k \approx 2\pi N/\Delta x$, (*d*) N é incerto porque a forma de onda vai desaparecendo gradualmente, em vez de parar abruptamente em dado tempo; não está bem definido nem onde o pulso começa nem onde o pulso termina.

69 6,74 m

71 (*a*) 1,9 cm, 3,6 m/s, (*b*) 0, 0, (*c*) −1,2 cm, −2,2 m/s, (*d*) 0, 0

73 98,0 Hz

75 (*a*) O tubo está fechado em uma das pontas. (*b*) 262 Hz, (*c*) 32,7 cm

77 (*a*) $y_1(x,t) = (0{,}010\text{ m})\text{sen}[(\frac{1}{2}\pi\text{ m}^{-1})x - (40\pi\text{ s}^{-1})t]$, $y_2(x,t) = (0{,}010\text{ m})\text{sen}[(\frac{1}{2}\pi\text{ m}^{-1})x + (40\pi\text{ s}^{-1})t]$, (*b*) 2,00 m, (*c*) 2,5 m/s, (*d*) 0,32 km/s²

79 $y_{res}(x,t) = (10{,}0\text{ cm})\,\text{sen}(kx - \omega t)$

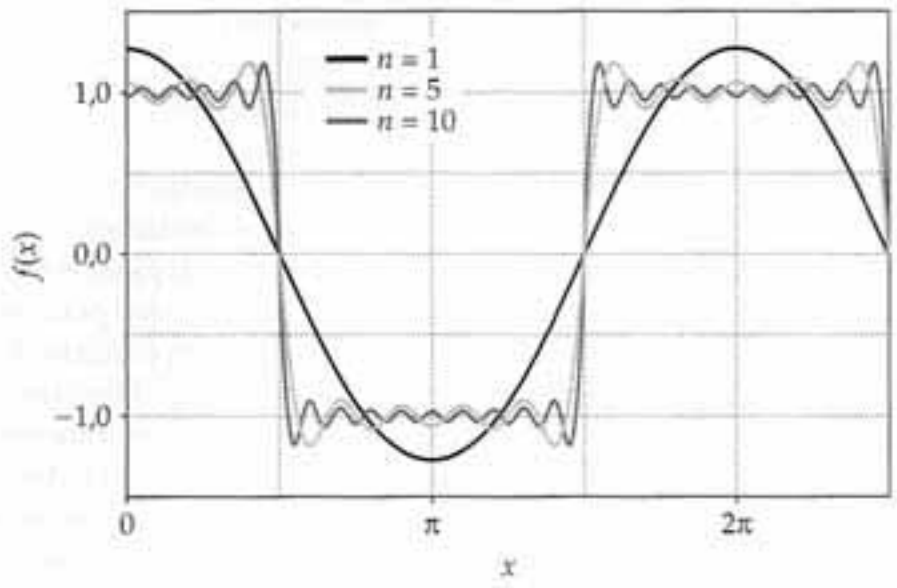
81 (*b*) 203,4 Hz, (*c*) 203,4 Hz

83 812 Hz

85 (*a*)

Célula	Conteúdo/Fórmula	Forma Algébrica
A6	A5+0,1	$x + \Delta x$
B4	2*B3+1	$2n + 1$
B5	(−1)^B$3*COS(B$4*$A5)/B$4*4/PI()	$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{n}\frac{(-1)^n\cos((2n+1)x)}{2n+1}$
C5	B5+(−1)^C$3*COS(C$4*$A5)/C$4*4/PI()	$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{n}\frac{(-1)^n\cos((2n+1)x)}{2n+1}$

	A	B	C	D	K	L
1						
2						
3		0	1	2	9	10
4		1	3	5	19	21
5	0,0	1,2732	0,8488	1,1035	0,9682	1,0289
6	0,1	1,2669	0,8614	1,0849	1,0134	0,9828
134	12,9	1,2030	0,9740	0,9493	0,9691	1,0146
135	13,0	1,1554	1,0422	0,8990	1,0261	0,9685

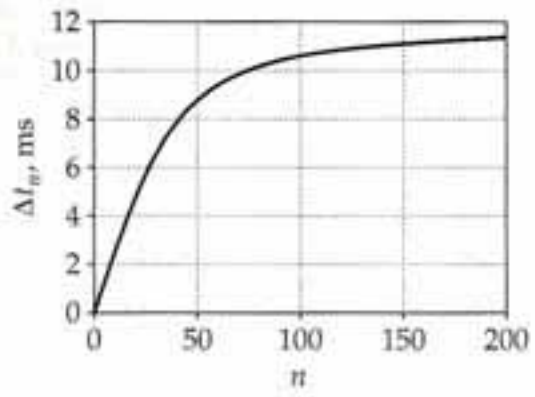


(*b*) É equivalente à fórmula de Leibnitz.

87 (*b*)

Célula	Conteúdo/Fórmula	Forma Algébrica
B1	90	L
B2	1	r
B3	340	c
B8	B7+1	$n + 1$
C7	2/$B$3*((2*(B7−1)*$B$2)^2+$B$1^2)^0,5	Δt_n

	A	B	C	D
1	L =	90	m	
2	*r* =	1	m	
3	*c* =	343	m/s	
6		*n*	*t*(*n*)	delta *t*(*n*)
7		1	0,5248	0,0001
8		2	0,5249	0,0004
206		200	2,3739	0,0114



(*c*) A freqüência ouvida em qualquer tempo é $1/\Delta t_n$; logo, como Δt_n aumenta com o tempo, a freqüência do assovio de galeria diminui. $f_{máxima} = 7{,}72$ kHz, $f_{mínima} = 85{,}5$ Hz

Capítulo 17

1 (*a*) Falso, (*b*) Falso, (*c*) Verdadeiro

3 Mateus tinha o quarto mais frio.

5 Da lei dos gases ideais, temos $P = nRT/V$, e V/T é a inclinação da linha que liga a origem ao ponto (T,V) no gráfico. Durante o processo, a inclinação da linha da origem até (T, V) diminui continuamente, de modo que a pressão aumenta continuamente.

7 (*d*)

9 As energias cinéticas médias são iguais. A razão entre os valores de rapidez rms é igual à raiz quadrada do inverso da razão entre as massas moleculares.

11 Falso

13 Não importa.

15 (*b*)

17 A rapidez rms é sempre um pouco maior do que a rapidez do som. Contudo, é apenas a componente das velocidades moleculares na direção de propagação que é relevante, neste caso. Além disso, em um gás o livre caminho médio é maior do que a distância intermolecular média.

19 Se o volume diminui a pressão aumenta, porque mais moléculas atingem uma área unitária das paredes em dado tempo. Isto ocorre porque o número de moléculas por unidade de volume aumenta com a diminuição do volume.

21 A rapidez molecular média do gás de He, a 300 K, é cerca de 1,4 km/s, e portanto, uma fração significativa de moléculas de He possui rapidez maior do que a rapidez de escape da Terra (11,2 km/s). Assim, elas "vazam" para o espaço. Com o tempo, o He contido na atmosfera diminui para quase nada.

23 Cerca de 1,2 kg/m³.

25 (*a*) 3600 K, (*b*) 230 K, (*c*) Como o hidrogênio é mais leve do que o ar, ele sobe até a atmosfera superior. Como lá a temperatura é maior, uma grande parte das moléculas atinge a rapidez de escape. (*d*) 160 K, 10 K. Como g é menor na Lua, a rapidez de escape é menor. Assim, uma porcentagem maior de moléculas se move com a rapidez de escape.

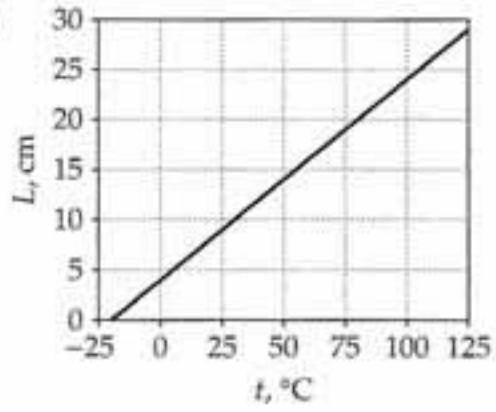
27 (*a*) 1,23 km/s, (*b*) 310 m/s, (*c*) 264 m/s, (*d*) Como v_e é maior do que v_{rms} para H_2, O_2 e CO_2, os três gases devem ser encontrados em Júpiter.

29 (*a*) 2×10^{11} atm, (*b*) $v_{rms\ próton} = 5 \times 10^5$ m/s, $v_{rms\ elétron} = 2 \times 10^7$ m/s

31 1×10^{-4} g

33 1063°C

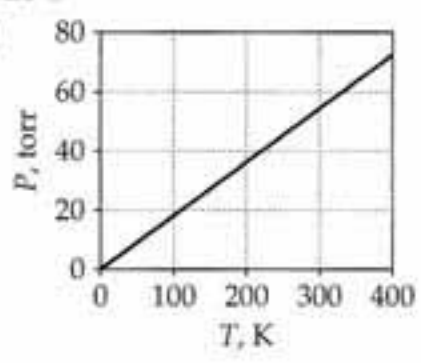
35 (*a*)



(*b*) 8,40 cm, (*c*) 107°C

37 −320°F

39 (*a*)



(*b*) 54,9 torr, (*c*) $3{,}70 \times 10^3$ K

41 −40,0°C = −40,0°F

43 −183°C, −297°F

45 (*a*) $R_0 = 3{,}91 \times 10^{-3}$ K, $B = 3{,}94 \times 10^3$ K, (*b*) 1,31 kΩ, (*c*) −389 Ω/K, −4,33 Ω/K, (*d*) O termistor é mais sensível para baixas temperaturas.

47 1,79 mol, $1{,}08 \times 10^{24}$ moléculas

49 -83 *glips*

51 (*a*) $3{,}7 \times 10^3$ mol, (*b*) 60 mol

53 11,1 atm

55 (*a*) O ar será menos denso quando seu conteúdo de vapor d'água for maior. (*b*) 18 g

57 1,1 kN

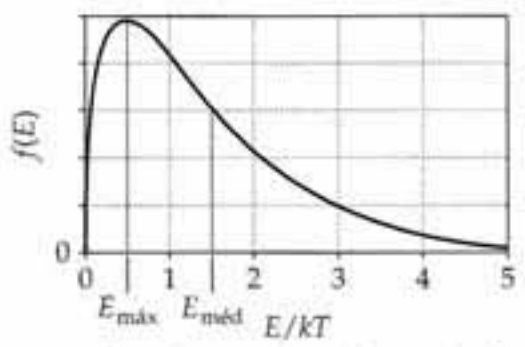
59 (*a*) 0,28 km/s, (*b*) 0,87 km/s. A rapidez rms dos átomos de argônio é um pouco menor do que um terço da rapidez rms dos átomos de hélio.

61 $5{,}0 \times 10^5$ m/s, $2{,}1 \times 10^{-16}$ J

65 $K/\Delta U = 7{,}9 \times 10^4$

69 (*a*) $E_{máx} = \frac{1}{2}kT$, $E_{máx} = \frac{1}{3}E_{méd}$

(*b*)



$E_{máx}$ é a energia mais provável

(*c*) O gráfico cresce de zero até seu máximo muito mais rapidamente do que diminui, à direita do máximo. Como a distribuição é tão fortemente inclinada à direita do máximo, as moléculas que possuem energias relativamente altas afastam a média ($3kT/2$) bem para a direita do valor mais provável ($kT/2$).

71 (*a*) $1{,}2 \times 10^2$ K, (*b*) $2{,}4 \times 10^2$ K, (*c*) 1,4 atm

73 (*a*) Para escapar da superfície de uma gota d'água, as moléculas devem possuir energia cinética de translação suficiente para superar as forças atrativas de suas vizinhas. Assim, as moléculas que escapam serão aquelas que se movem mais rapidamente, deixando para trás as moléculas mais lentas. As moléculas mais lentas possuem menos energia cinética, de modo que a temperatura da gota, que é proporcional à energia cinética média de translação por molécula, diminui. (*b*) Desde que a temperatura não seja muito alta, as moléculas que evaporam de uma superfície serão apenas aquelas com as velocidades mais extremas, na "cauda" de alta energia da distribuição de Maxwell–Boltzmann. Nesta parte da distribuição, um aumento muito pequeno de temperatura pode causar um grande aumento da porcentagem de moléculas com rapidez acima de um certo limiar. Por exemplo, se temos um limiar inicial em $E = 5kT_1$ e aumentamos a temperatura em 10%, de forma que $T_2 = 1{,}1T_1$, a razão entre a nova distribuição de energias e a antiga, no limiar, é

$$\frac{F(T_2)}{F(T_1)} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)e^{-E/kT_2}e^{+E/kT_1} = (1{,}1)^{-3/2}e^{-5/1{,}1}e^5 = 1{,}365$$

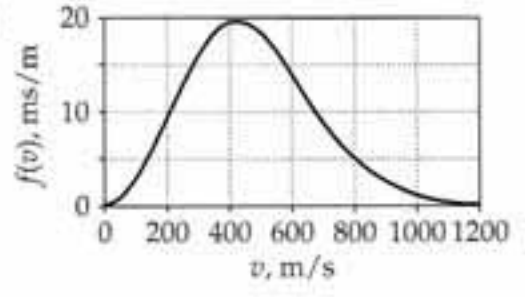
um aumento de quase 37%.

75 110 moles de H_2, 55 moles de O_2

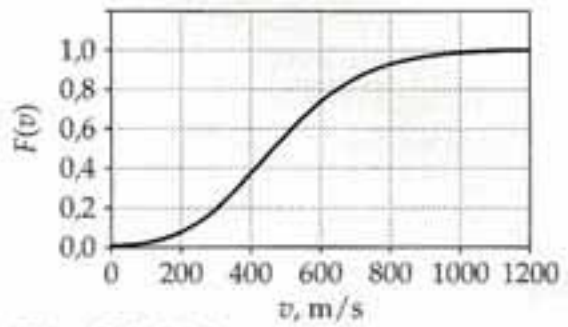
77 $4m$

79 (*a*) 142 ms, (*b*) 146 ms

81 (*a*)



(*b*) Quando a temperatura aumenta, o gráfico se espalha horizontalmente e perde altura. Mais precisamente, a posição horizontal do pico se move para a direita na proporção da raiz quadrada da temperatura, enquanto a altura do pico cai pelo mesmo fator, preservando a área total sob o gráfico (que deve ser igual a 1,0, a probabilidade total de que uma molécula tenha qualquer rapidez entre zero e infinito).
(*c*) Um gráfico de $F(v)$ para o nitrogênio a 300 K é mostrado a seguir. Cada número na coluna C da planilha é aproximadamente igual à integral de $f(v)$ de zero até o respectivo valor v. Esta integral representa a probabilidade de que uma molécula tenha uma rapidez menor ou igual a v.



$F(v) = \int_0^v f(v')dv'$

(*d*) Cerca de 7%. Note que este valor é consistente com o gráfico de $F(v)$ aqui mostrado.
(*e*) Um pouco menos de 14%.

Capítulo 18

1 (*e*)

3 (*c*)

5 (*a*)

7 (*c*)

9 Sim. $\Delta E_{int} = Q_{entra} + W_{sobre}$. Se o gás realiza trabalho à mesma taxa que absorve calor, sua energia interna permanecerá constante.

11 Partículas que se atraem possuem mais energia potencial quanto mais afastadas estiverem. Em um gás real as moléculas exercem forças atrativas fracas entre si. Estas forças aumentam a energia potencial interna durante uma expansão. Um aumento da energia potencial significa uma diminuição da energia cinética, e uma diminuição da energia cinética significa uma diminuição da energia cinética de translação. Portanto, há uma diminuição da temperatura.

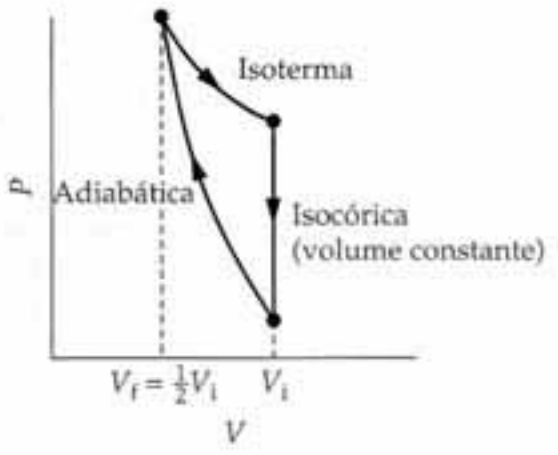
13 Partículas que se repelem possuem mais energia potencial quanto mais próximas estiverem. As forças repulsivas diminuem a energia potencial interna durante uma expansão. Uma diminuição da energia potencial significa um aumento da energia cinética, e um aumento da energia cinética significa um aumento da energia cinética de translação. Portanto, há um aumento da temperatura.

15 (*a*)

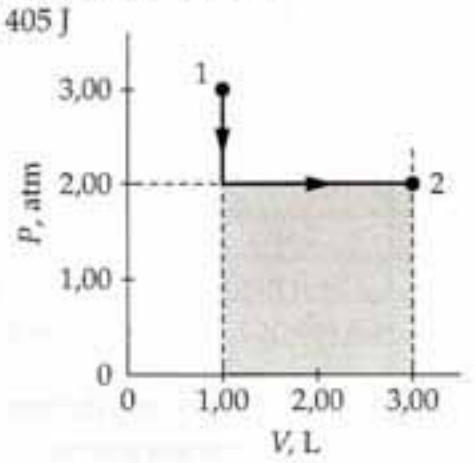
17 (*a*) Falso, (*b*) Falso, (*c*) Verdadeiro, (*d*) Verdadeiro, (*e*) Verdadeiro, (*f*) Verdadeiro

19 (*d*)

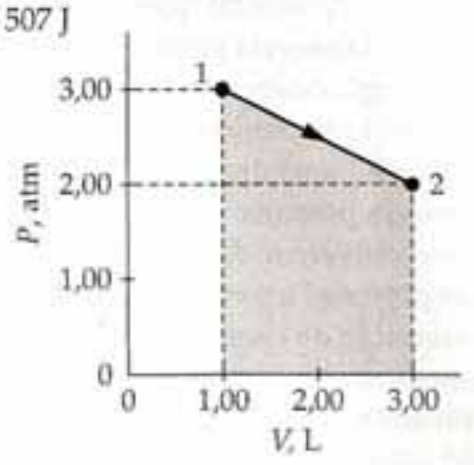
21 Durante um processo adiabático reversível, PV^γ é constante, com $\gamma > 1$ e, durante um processo isotérmico, PV é constante. Assim, o aumento de pressão durante a compressão é maior do que a queda de pressão durante a expansão. O processo final poderia ser um processo a volume constante durante o qual calor é absorvido do sistema. Um resfriamento a volume constante fará diminuir a temperatura e levará o gás de volta ao seu estado original.



23 A temperatura diminui.
25 1,6 minuto, um tempo que parece consistente com a experiência.
27 $1{,}2 \times 10^{-5}$ (ou $1{,}2 \times 10^{-3}$ por cento)
29 31,3 kJ
31 48,8 g
33 12,1°C
35 $4{,}5 \times 10^{2}$ kg
37 (*a*) 0°C, (*b*) 125 g
39 (*a*) 4,9°C, (*b*) Não sobra gelo.
41 (*a*) 5,26°C, (*b*) 175 g, (*c*) Não
43 618°C
45 2,20 kJ
47 54 J
49 (*a*) 6,13 W, (*b*) 38,1 min
51 (*a*) 405 J



(*b*) 861 J
53 (*a*) 507 J



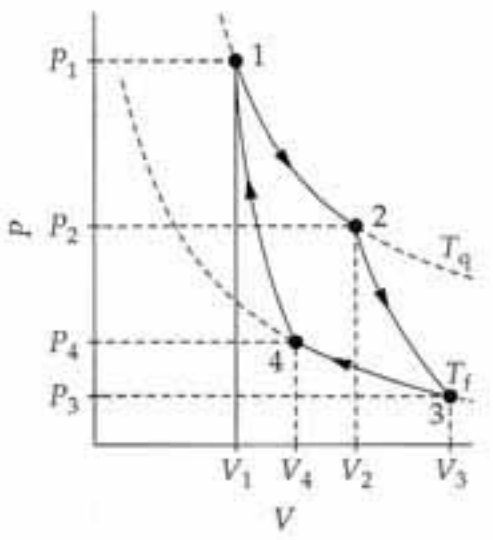
(*b*) 963 J
55 $W_{\text{pelo gás}} = \frac{3}{2}P_0V_0$
57 (*a*) 555 J, (*b*) 555 J
59 (*a*) 0,495 mol, (*b*) 3,09 kJ, (*c*) 20,8 J/mol · K, (*d*) 10,3 J/K
61 (*a*) 6,24 kJ; 0; 6,24 kJ, (*b*) 6,24 kJ; 8,73 kJ; 2,49 kJ, (*c*) 2,49 kJ
63 59,6 L
65 $\Delta c_p' = -\frac{13}{2}R$
67 Há três graus de liberdade de translação e três graus de liberdade de rotação. Além disso, cada um dos átomos de hidrogênio pode vibrar contra o átomo de oxigênio, o que resulta em mais 4 graus de liberdade (2 por átomo). $C_{v\ \text{água}} = 5Nk = 5nR$

69 (*a*) 300 K; 7,80 L; 1,14 kJ; 1,14 kJ, (*b*) 208 K; 5,40 L; 0,574 J; 0
71 (*a*) 263 K, (*b*) 10,8 L, (*c*) 1,48 kJ, (*d*) −1,48 kJ
73 0,14 kJ
75

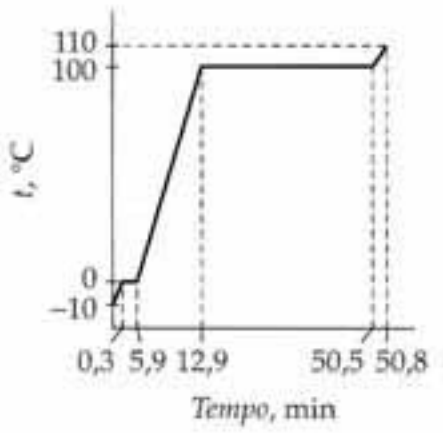
Processo	Q_{entra} (kJ)	W_{sobre} (kJ)
D → A	8,98	0
A → B	13,2	−13,2
B → C	−8,98	0
C → D	−6,58	6,58

$W_{\text{total pelo gás}} = 6{,}6$ kJ

77 (*a*)



79 (*a*) 65 K, 81 K, (*b*) 1,6 kJ, (*c*) 2,2 kJ
81 (*a*) 65 K, 81 K, (*b*) 2,7 kJ, (*c*) 3,3 kJ
83 256 kcal
85 (*a*) $c(4{,}00\ \text{K}) = 9{,}20 \times 10^{-2}$ J/kg · K, (*b*) 0,0584 J/kg
87 (*a*) 2,49 kJ, (*b*) 3,20 kJ
89 171 K
91



93 396 K
95 (*b*) 4,62 kJ
97 (*a*) $P_2 = \frac{1}{2}P_0$, (*b*) O gás é diatômico. (*c*) Durante o processo isotérmico, a energia cinética de translação não varia. Durante o processo adiabático, a energia cinética de translação aumenta por um fator de 1,32.

Capítulo 19

1 (*c*)
3 (*a*)
5 O CD é definido de forma a medir a eficácia do aparelho. Para um refrigerador ou um aparelho de ar condicionado, a quantidade importante é o calor retirado do interior que já está mais frio, Q_f. Para uma bomba térmica, a idéia é focar no calor transferido para dentro da casa já aquecida, Q_q.
7 Aumentar a temperatura do vapor implica aumentar seu conteúdo energético. Ademais, isto faz aumentar o

rendimento de Carnot e, de maneira geral, faz aumentar o rendimento de qualquer máquina térmica.

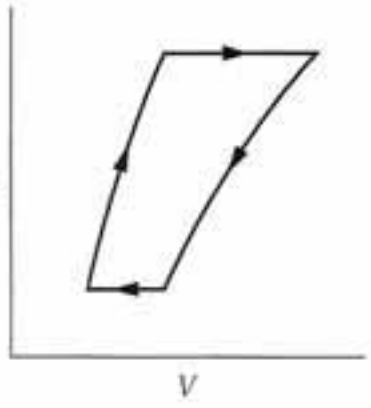
9 Um ciclo de um refrigerador de Carnot é mais eficiente quando as temperaturas estão mais próximas, porque menos trabalho é necessário para se extrair calor de um interior já resfriado se a temperatura externa estiver próxima da temperatura interna do refrigerador. Um ciclo de uma máquina térmica de Carnot é mais eficiente quando a diferença de temperatura é grande, porque assim mais trabalho é realizado pela máquina, para cada unidade de calor absorvido do reservatório quente.

11 (*c*)

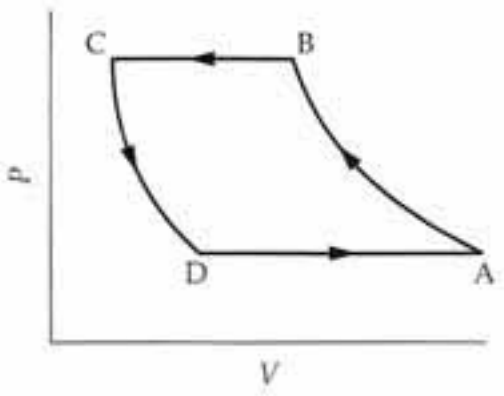
13 (*d*)

15 Trata-se de um ciclo Otto (veja a Figura 19-3).

17



19



21 Um aumento de cerca de 47%.

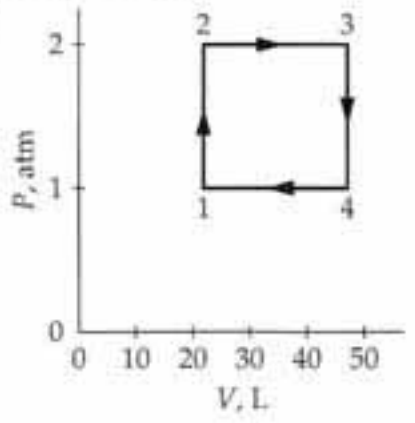
23 56%

25 (*a*) $1{,}7 \times 10^{17}$ W, (*b*) $6{,}02 \times 10^{14}$ J/(K · s)

27 (*a*) 500 J, (*b*) 400 J

29 (*a*) 40%, (*b*) 80 W

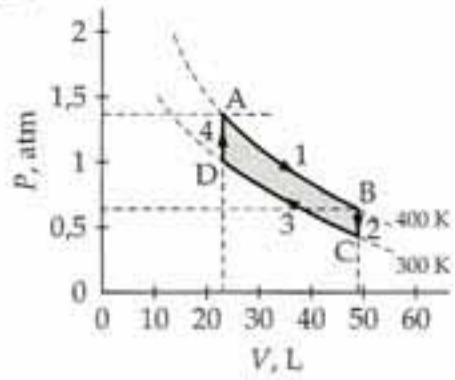
31 (*a*)



Processo	W (kJ)	Q (kJ)	ΔE_{int} (kJ)
$1 \rightarrow 2$	0	3,74	3,74
$2 \rightarrow 3$	−4,99	12,5	7,5
$3 \rightarrow 4$	0	−7,48	−7,48
$4 \rightarrow 1$	2,49	−6,24	−3,75

(*b*) 15%

33 13,1%



35 (*a*) $T_2 = 600$ K, $T_3 = 1800$ K, $T_4 = 600$ K, (*b*) 15%

37 (*a*) 5,16%, sem contradição. (*b*) A maior parte dos animais de sangue quente sobrevive praticamente sob as mesmas condições dos humanos. Para fazer uma máquina térmica trabalhar com rendimento apreciável, as temperaturas corporais internas deveriam ser mantidas em níveis inadmissivelmente altos.

41 (*a*) 33,3%, (*b*) 33,3 J, (*c*) 67 J, (*d*) 2,0

43 (*a*) 33%

47 (*a*) 100°C, (*b*) $Q_{1\rightarrow2} = 3{,}12$ kJ, $Q_{2\rightarrow3} = 0$, $Q_{3\rightarrow1} = -2{,}91$ kJ, (*c*) 6,7%, (*d*) 35,5%

49 (*a*) 6,3, (*b*) 3,2 kW, (*c*) 5,3 kW

51 (*a*) 0,17 MJ, (*b*) 0,12 MJ. Como a diferença de temperatura aumenta quando a sala está mais quente, o CD diminui

53 6,05 kJ/K

55 $\Delta S_u = 2{,}40$ J/K e, como $\Delta S_u > 0$, a entropia do universo aumenta.

57 (*a*) 0, (*b*) 267 K

59 (*a*) 244 kJ/K, (*b*) −244 kJ/K, (*c*) A variação da entropia do universo é apenas ligeiramente maior do que zero.

61 (*a*) −117 J/K, (*b*) 138 J/K, (*c*) 20 J/K

63 (*a*) 0,42 J/K, (*b*) 125 J

65 (*a*) $W_{ciclo} = 20{,}0$ J, (*b*) $Q_{q\ ciclo} = 67$ J, $Q_{f\ ciclo} = 47$ J

67 (*a*) 51%, (*b*) 0,10 MJ, (*c*) 98 kJ

69 113 W/K

71 (*a*) Você deve explicar a ele que, como o rendimento do invento alegado por ele (83,3%) é maior do que o rendimento de uma máquina de Carnot operando entre as mesmas duas temperaturas, os dados fornecidos não são consistentes com o conhecimento que se tem da termodinâmica de máquinas. Ele deve ter cometido algum erro na análise dos dados, ou está tentando fraudar alguém. (*b*) 135 W

73 (*a*) O processo (2) desperdiça mais *trabalho disponível*. (*b*) $\Delta S_1 = 1{,}67$ J/K, $\Delta S_2 = 0{,}833$ J/K

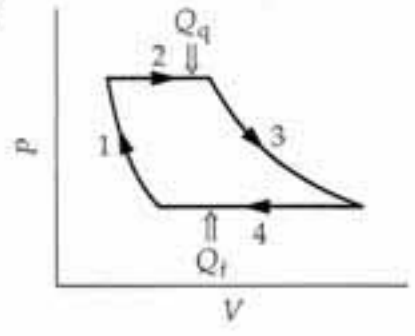
75 313 K

77 10 W

79 (*a*) 253 kPa, (*b*) 462 K, (*c*) 6,97 kJ

81 (*a*) 253 kPa, (*b*) 416 K, (*c*) 6,59 kJ

83 (*a*)



89 $T = 10^{484}$ anos, $T \approx 10^{478}\ T_{Russell}$

Capítulo 20

1 O bulbo de vidro esquenta e se expande antes de o mercúrio esquentar e se expandir.

3 A água se expande muito, ao se congelar. Se uma garrafa de vidro fechada, cheia d'água, for colocada no congelador, ao se congelar a água não terá espaço para que ocorra a expansão. A garrafa se quebrará.

5 A tira se curvará mais ainda.

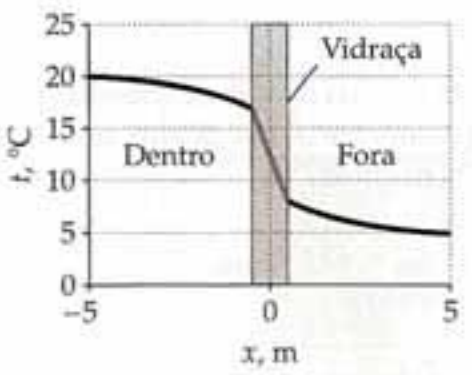
7 (*c*)

9 (*a*) Com o aumento da altitude, P diminui; da curva OC, a temperatura T da interface líquido–gás diminui com a diminuição da pressão, de forma que a temperatura de ebulição diminui. Da mesma forma, da curva OB, a temperatura de fusão aumenta com o aumento da altitude. (*b*) A ebulição da água a uma temperatura mais baixa exige que o tempo de cozimento seja maior.

11 A temperaturas e pressões muito baixas, o dióxido de carbono pode existir apenas como sólido ou como gás (ou como vapor acima do gás). A atmosfera de Marte é 95% constituída de dióxido de carbono. Na média, Marte é quente o suficiente para que a atmosfera seja feita principalmente de dióxido de carbono gasoso. As regiões polares são frias o suficiente para permitir a existência do dióxido de carbono sólido (gelo seco), mesmo a baixas pressões.

13 (*a*)

15



17 Sua hipótese não está correta e 14 mL de água transbordam.

19 17 mW/(m · K)

21 0,30 kW, 0,1 K/W

23 2,9 nm

25 8(°F · h · ft²)/Btu

27 220°C

29 $15 \times 10^{-6}\ K^{-1}$

31 $3{,}7 \times 10^{-12}\ N/m^2$

33 (*a*) 90°C, (*b*) 82°C, (*c*) 170 kPa

35 2,1 kBtu/h

37 (*a*) $I_{Cu} = 0{,}96$ kW, $I_{Al} = 0{,}57$ kW, (*b*) 1,53 kW, (*c*) 0,0052 K/W

41 1,3 mm

43 93,5 cm²

45 1598°C

47 2,1 km

49 5800 K

51 (*b*) Os valores concordam em até 0,3%.

53 $1{,}3 \times 10^{10}$ kW. Cerca de 0,007 por cento.

55 142 W

57 $\omega_2 \approx (1 - 2\alpha\,\Delta T)\omega_1$, $K_2 = (1 - 2\alpha\,\Delta T)K_1$, $L_2 = L_1$

59 (*a*) 0,70 cm/h, (*b*) 12 dias

Constantes Físicas*

Carga fundamental	e	$1{,}602\,176\,53(14) \times 10^{-19}$ C
Comprimento de onda de Compton	$\lambda_C = h/(m_e c)$	$2{,}426\,310\,238(16) \times 10^{-12}$ m
Constante de Boltzmann	$k = R/N_A$	$1{,}380\,6505(24) \times 10^{-23}$ J/K $8{,}617\,343(15) \times 10^{-5}$ eV/K
Constante de Coulomb	$k = 1/(4\pi\epsilon_0)$	$8{,}987\,551\,788\ldots \times 10^{9}$ N · m²/C²
Constante de gravitação	G	$6{,}6742(10) \times 10^{-11}$ N · m²/kg²
Constante de massa atômica	$m_u = \frac{1}{12} m(^{12}\text{C})$	1 u = $1{,}660\,538\,86(28) \times 10^{-27}$ kg
Constante de Planck	h	$6{,}626\,0693(11) \times 10^{-34}$ J · s = $4{,}135\,667\,43(35) \times 10^{-15}$ eV · s
	$\hbar = h/(2\pi)$	$1{,}054\,571\,68(18) \times 10^{-34}$ J · s = $6{,}582\,119\,15(56) \times 10^{-16}$ eV · s
Constante de Stefan–Boltzmann	σ	$5{,}670\,400(40) \times 10^{-8}$ W/(m² · K⁴)
Constante dos gases	R	8,314 472(15) J/(mol · K) = 1,987 2065(36) cal/(mol · K) = $8{,}205\,746(15) \times 10^{-2}$ L · atm/(mol · K)
Constante elétrica (permitividade do vácuo)	ϵ_0	$= 1/(\mu_0 c^2) = 8{,}854\,187\,817\ldots \times 10^{-12}$ C²/(N · m²
Constante magnética (permeabilidade do vácuo)	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ N/A²
Magnéton de Bohr	$m_B = e\hbar/(2m_e)$	$9{,}274\,009\,49(80) \times 10^{-24}$ J/T = $5{,}788\,381\,804(39) \times 10^{-5}$ eV/T
Massa do elétron	m_e	$9{,}109\,3826(16) \times 10^{-31}$ kg = 0,510 998 918(44) MeV/c^2
Massa do nêutron	m_n	$1{,}674\,927\,28(29) \times 10^{-27}$ kg = 939,565 360(81) MeV/c^2
Massa do próton	m_p	$1{,}672\,621\,71(29) \times 10^{-27}$ kg = 938,272 029(80) MeV/c^2
Número de Avogadro	N_A	$6{,}022\,1415(10) \times 10^{23}$ partículas/mol
Rapidez da luz	c	$2{,}997\,924\,58 \times 10^{8}$ m/s

* Os valores destas e de outras constantes podem ser encontrados no Apêndice B, assim como na Internet em http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html. Os números entre parênteses representam as incerteza nos dois últimos algarismos. (Por exemplo, 2,044 43(13) significa 2,044 43 ± 0,000 13.) Valores sem indicação de incertezas são exatos. Valores com reticências são exatos (como o número π = 3,1415...), mas não estão completamente especificados.

Derivadas e Integrais Definidas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} ax = a\cos ax \qquad \frac{d}{dx}\cos ax = -a\operatorname{sen} ax \qquad \frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a} \qquad \int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \int_0^\infty xe^{-ax^2}\,dx = \frac{2}{a}$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \qquad \int_0^\infty x^3 e^{-ax^2}\,dx = \frac{4}{a^2} \qquad \int_0^\infty x^4 e^{-ax^2}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

O a nas seis integrais é uma constante positiva.

Produtos Vetoriais

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \qquad \vec{A}\times\vec{B} = AB\operatorname{sen}\theta\,\hat{n}$$ ($\hat{n}$ obtido usando a regra da mão direita)

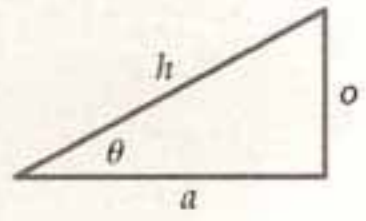
Para dados adicionais, veja as seguintes tabelas no texto.

1-1 Prefixos para Potências de 10
1-2 Dimensões de Quantidades Físicas
1-3 O Universo em Ordens de Grandeza
1-4 Propriedades dos Vetores
5-1 Valores Aproximados de Coeficientes de Atrito
6-1 Propriedades do Produto Escalar
7-1 Energias de Repouso de Algumas Partículas Elementares e de Alguns Núcleos Leves
9-1 Momentos de Inércia de Corpos Homogêneos de Várias Formas
9-2 Analogias entre Rotação em Torno de Eixo Fixo e Movimento de Translação Unidimensional
11-1 Raios Orbitais Médios e Períodos Orbitais dos Planetas
12-1 Módulos de Young Y e Limites de Vários Materiais
12-2 Valores Aproximados do Módulo de Cisalhamento M_{cis} de Vários Materiais
13-1 Massas Específicas de Algumas Substâncias
13-2 Valores Aproximados do Módulo Volumétrico B de Alguns Materiais
13-3 Coeficientes de Viscosidade de Alguns Fluidos
15-1 Intensidade e Nível de Intensidade de Alguns Sons Comuns ($I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$)
17-1 Temperaturas de Vários Lugares e Fenômenos
18-1 Calores Específicos e Calores Específicos Molares de Alguns Sólidos e Líquidos
18-2 Ponto de Fusão (PF), Calor Latente de Fusão (L_f), Ponto de Ebulição (PE) e Calor Latente de Vaporização (L_v) para Várias Substâncias a 1 atm
18-3 Capacidades Térmicas Molares de Vários Gases a 25°C, em J/mol · K
20-1 Valores Aproximados para os Coeficientes de Expansão Térmica de Várias Substâncias
20-3 Temperaturas Críticas T_c de Várias Substâncias
20-4 Condutividades Térmicas k de Vários Materiais
20-5 Fatores R, $|\Delta x|/k$, para Vários Materiais de Construção

Geometria e Trigonometria

$C = \pi d = 2\pi r$	definição de π
$A = \pi r^2$	área do círculo
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	volume da esfera
$A = \partial V/\partial r = 4\pi r^2$	área da superfície da esfera
$V = A_{base} L = \pi r^2 L$	volume do cilindro
$A = \partial V/\partial r = 2\pi r L$	área da superfície do cilindro

$o = h \operatorname{sen}\theta$
$a = h \cos\theta$



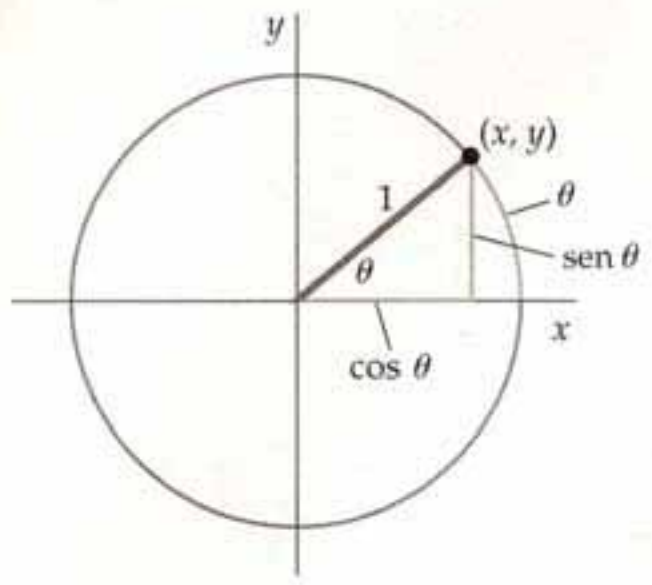
$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen}A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen}B$

$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen}A \operatorname{sen}B$

$\operatorname{sen}A \pm \operatorname{sen}B = 2\operatorname{sen}[\frac{1}{2}(A \pm B)] \cos[\frac{1}{2}(A \mp B)]$

$\operatorname{sen}\theta \equiv y$
$\cos\theta \equiv x$
$\tan\theta \equiv \dfrac{y}{x}$



Se $|\theta| << 1$, então
$\cos\theta \approx 1$ e $\tan\theta \approx \operatorname{sen}\theta \approx \theta$ (θ em radianos)

Fórmula Quadrática

Se $ax^2 + bx + c = 0$, então $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Expansão Binomial

Se $|x| < 1$, então $(1 + x)^n =$

$$1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

Se $|x| << 1$, então $(1 + x)^n \approx 1 + nx$

Aproximação Diferencial

Se $\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x)$ e se $|\Delta x|$ é pequeno,

então $\Delta F \approx \dfrac{dF}{dx}\Delta x$.