Variáveis Aleatórias Contínuas

Bacharelado em Economia - FEA - Noturno

1º Semestre 2016

Profs. Fábio P. Machado e Gilberto A. Paula

Sumário

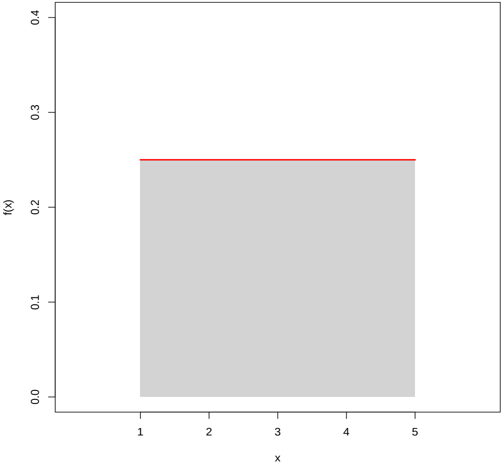
Objetivos da Aula

Variáveis Contínuas

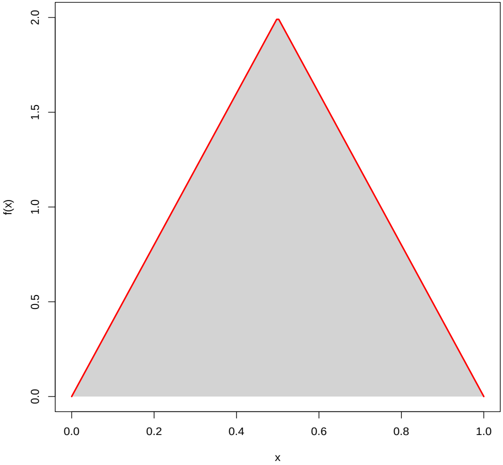
O objetivo principal desta aula é apresentar alguns formas de distribuições de variáveis aleatórias contínuas, discutir as principais propriedades para esse tipo de variável e ilustrar com algumas aplicações.

Sumário

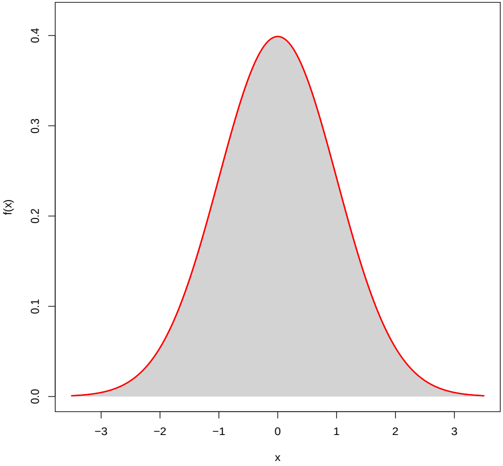
Distribuição Uniforme



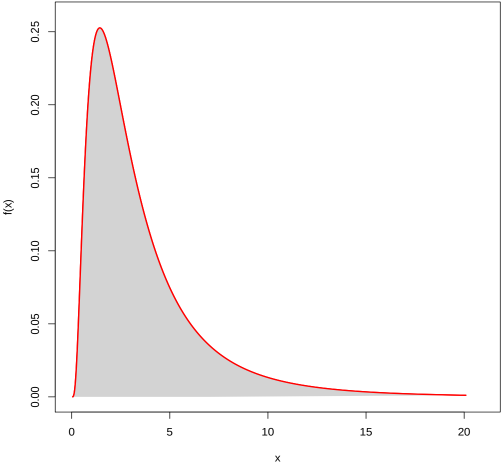
Distribuição Triangular



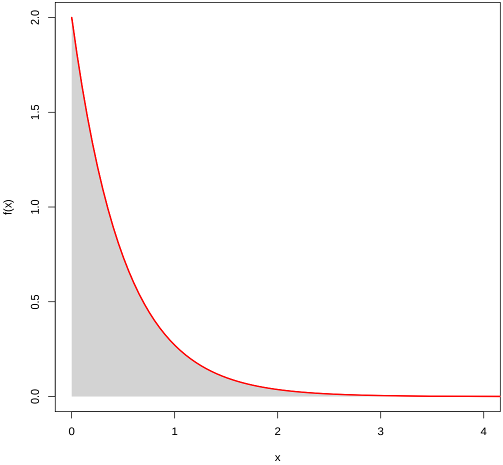
Distribuição Normal



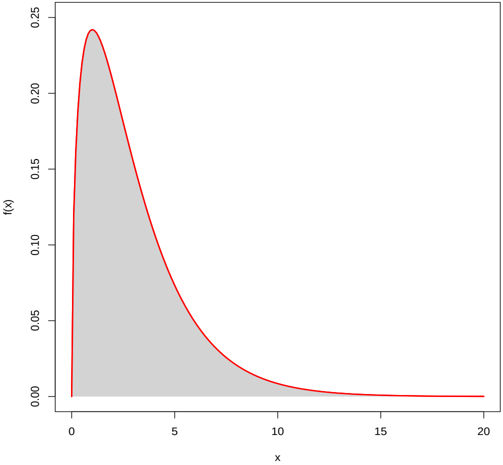
Distribuição Log-Normal



Distribuição Exponencial



Distribuição Qui-Quadrado



Distribuição de Gumbel

Sumário

Variáveis Aleatórias Contínuas

Definição

Uma função X definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua.

Variáveis Aleatórias Contínuas

Definição

Uma função X definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua.

Exemplos

- altura de um adulto

Variáveis Aleatórias Contínuas

Definição

Uma função X definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua.

Exemplos

- altura de um adulto
- custo do sinistro de um carro

Variáveis Aleatórias Contínuas

Definição

Uma função X definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua.

Exemplos

- altura de um adulto
- custo do sinistro de um carro
- temperatura mínima diária

Variáveis Aleatórias Contínuas

Definição

Uma função X definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua.

Exemplos

- altura de um adulto
- custo do sinistro de um carro
- temperatura mínima diária
- saldo em aplicações financeiras

Variáveis Aleatórias Contínuas

Definição

Uma função X definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua.

Exemplos

- altura de um adulto
- custo do sinistro de um carro
- temperatura mínima diária
- saldo em aplicações financeiras
- ganho de peso após dieta

Variáveis Aleatórias Contínuas

Definição

Uma função X definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua.

Exemplos

- altura de um adulto
- custo do sinistro de um carro
- temperatura mínima diária
- saldo em aplicações financeiras
- ganho de peso após dieta
- distância percorrida

Variáveis Aleatórias Contínuas

Função densidade de probabilidade

A função densidade de probabilidade (f.d.p.) de uma variável aleatória X é uma função $f(x) \geq 0$ cuja área total sob a curva seja igual à unidade.

Variáveis Aleatórias Contínuas

Função densidade de probabilidade

A função densidade de probabilidade (f.d.p.) de uma variável aleatória X é uma função $f(x) \geq 0$ cuja área total sob a curva seja igual à unidade. Em termos matemáticos

Variáveis Aleatórias Contínuas

Função densidade de probabilidade

A função densidade de probabilidade (f.d.p.) de uma variável aleatória X é uma função $f(x) \geq 0$ cuja área total sob a curva seja igual à unidade. Em termos matemáticos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição Uniforme

Se X é uma variável aleatória uniforme no intervalo $[1, 5]$, notação $X \sim U[1, 5]$, então a função densidade de probabilidade de X é definida por

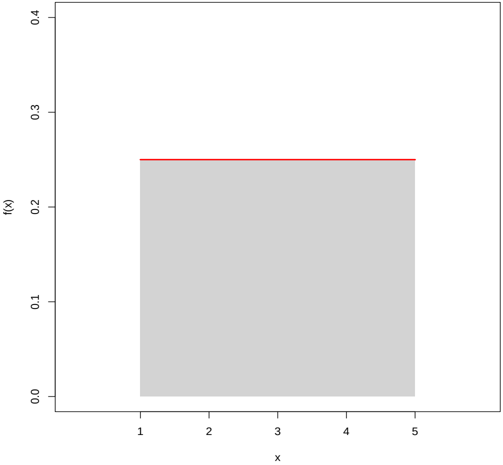
Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição Uniforme

Se X é uma variável aleatória uniforme no intervalo $[1, 5]$, notação $X \sim U[1, 5]$, então a função densidade de probabilidade de X é definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 1 \leq x \leq 5, \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Descrição de $f(x)$



Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição Uniforme

A área total sob a curva corresponde à área de um retângulo de base $\Delta = 4$ e altura $h = \frac{1}{4}$.

Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição Uniforme

A área total sob a curva corresponde à área de um retângulo de base $\Delta = 4$ e altura $h = \frac{1}{4}$. Logo, a área total fica dada por

Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição Uniforme

A área total sob a curva corresponde à área de um retângulo de base $\Delta = 4$ e altura $h = \frac{1}{4}$. Logo, a área total fica dada por

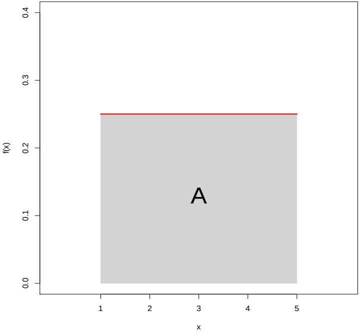
$$A = \Delta \times h = 4 \times \frac{1}{4} = 1.$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição Uniforme

A área total sob a curva corresponde à área de um retângulo de base $\Delta = 4$ e altura $h = \frac{1}{4}$. Logo, a área total fica dada por

$$A = \Delta \times h = 4 \times \frac{1}{4} = 1.$$



Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição Uniforme

A área total sob a curva pode ser calculada diretamente pela solução da integral

Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição Uniforme

A área total sob a curva pode ser calculada diretamente pela solução da integral

$$\begin{aligned}
\int_1^5 \frac{1}{4} dx &= \frac{1}{4} \int_1^5 dx \\
&= \frac{1}{4} x \Big|_1^5 \\
&= \frac{1}{4}(5-1) \\
&= \frac{4}{4} = 1.
\end{aligned}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

Probabilidade de eventos

A probabilidade $P(a \leq X \leq b)$ corresponde à área sob a curva no intervalo $[a, b]$.

Variáveis Aleatórias Contínuas

Probabilidade de eventos

A probabilidade $P(a \leq X \leq b)$ corresponde à área sob a curva no intervalo $[a, b]$. Em termos matemáticos

Variáveis Aleatórias Contínuas

Probabilidade de eventos

A probabilidade $P(a \leq X \leq b)$ corresponde à área sob a curva no intervalo $[a, b]$. Em termos matemáticos

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Distribuição Uniforme

Por exemplo, se $X \sim U[1,5]$, a probabilidade $P(1 \leq X \leq 2)$ corresponde à área do retângulo de base $\Delta = 1$ e altura $h = \frac{1}{4}$.

Distribuição Uniforme

Por exemplo, se $X \sim U[1, 5]$, a probabilidade $P(1 \leq X \leq 2)$ corresponde à área do retângulo de base $\Delta = 1$ e altura $h = \frac{1}{4}$.
Essa área fica dada por

Distribuição Uniforme

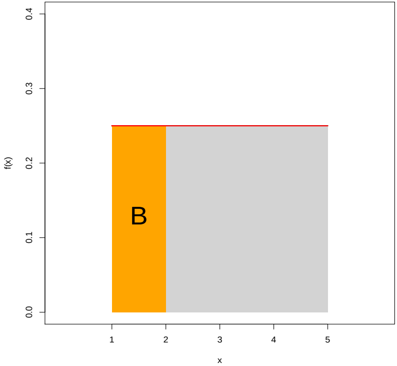
Por exemplo, se $X \sim U[1,5]$, a probabilidade $P(1 \leq X \leq 2)$ corresponde à área do retângulo de base $\Delta = 1$ e altura $h = \frac{1}{4}$. Essa área fica dada por

$$B = \Delta \times h = 1 \times \frac{1}{4} = 0,25.$$

Distribuição Uniforme

Por exemplo, se $X \sim U[1,5]$, a probabilidade $P(1 \leq X \leq 2)$ corresponde à área do retângulo de base $\Delta = 1$ e altura $h = \frac{1}{4}$. Essa área fica dada por

$$B = \Delta \times h = 1 \times \frac{1}{4} = 0,25.$$



Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição Uniforme

A probabilidade $P(1 \leq X \leq 2)$ pode ser calculada diretamente pela solução da integral

Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição Uniforme

A probabilidade $P(1 \leq X \leq 2)$ pode ser calculada diretamente pela solução da integral

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{4}dx &= \frac{1}{4}\int_1^2 dx \\ &= \frac{1}{4}x\Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{4}(2-1) \\ &= \frac{1}{4} = 0,25.\end{aligned}$$

Sumário

Esperança

Definição

A esperança matemática de uma variável aleatóra contínua X fica dada por

Esperança

Definição

A esperança matemática de uma variável aleatóra contínua X fica dada por

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Sumário

Variância

Definição

A variância de uma variável aleatória X contínua é definida por

Variância

Definição

A variância de uma variável aleatória X contínua é definida por

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}[X - \mu]^2 \\ &= \mathrm{E}(X^2) - \mu^2, \end{aligned}$$

Variância

Definição

A variância de uma variável aleatória X contínua é definida por

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}[X-\mu]^2 \\ &= \mathrm{E}(X^2)-\mu^2, \end{aligned}$$

em que

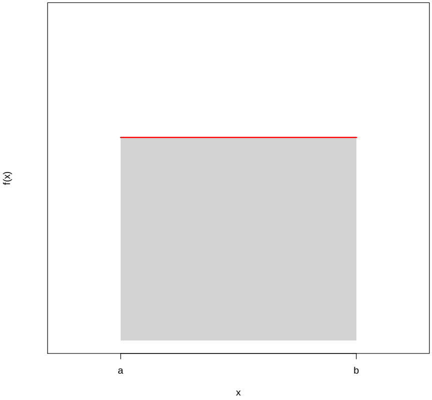
$$\mathrm{E}(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx.$$

Distribuição Uniforme

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo [a,b], notação $X \sim U[a, b]$, então $f(x) = \frac{1}{(b-a)}$ para $a \leq x \leq b$ e $f(x) = 0$ em caso contrário.

Distribuição Uniforme

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo [a,b], notação $X \sim U[a,b]$, então $f(x) = \frac{1}{(b-a)}$ para $a \leq x \leq b$ e $f(x) = 0$ em caso contrário.



Distribuição Uniforme

Vamos supor que X é uma variável aleatória tal que $X \sim U[a, b]$.

Distribuição Uniforme

Vamos supor que X é uma variável aleatória tal que $X \sim U[a, b]$.

Esperança

A esperança de X fica dada por

$$\mathrm{E}(X) = \int_a^b \frac{x}{(b-a)} dx = \frac{a+b}{2}.$$

Distribuição Uniforme

Vamos supor que X é uma variável aleatória tal que $X \sim U[a, b]$.

Esperança

A esperança de X fica dada por

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{(b-a)} dx = \frac{a+b}{2}.$$

Variância

A variância de X fica dada por

$$\text{Var}(X) = \underbrace{\int_a^b \frac{x^2}{(b-a)} dx}_{E(X^2)} - [E(X)]^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Sumário

Função de distribuição acumulada

Definição

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória T contínua é definida por

Função de distribuição acumulada

Definição

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória T contínua é definida por

$$F(x) = P(T \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Função de Distribuição Acumulada

Distribuição Uniforme

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória $T \sim U[a, b]$ é dada por

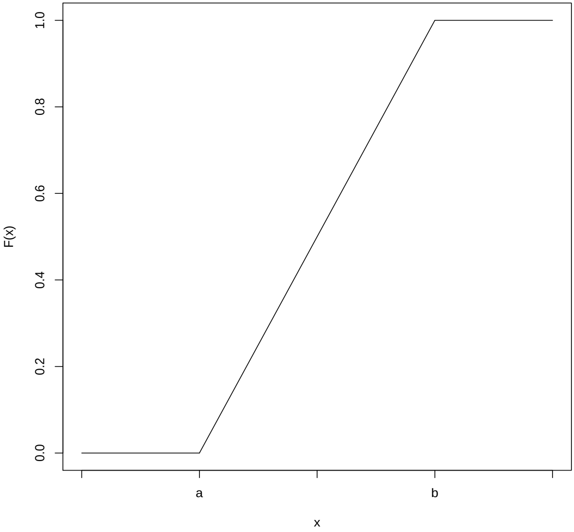
Função de Distribuição Acumulada

Distribuição Uniforme

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória $T \sim U[a, b]$ é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b, \\ 1 & x \geq b. \end{cases}$$

Descrição de $F(x)$



Sumário

Distribuição Triangular

Distribuição Triangular

Se X é uma variável aleatória triangular no intervalo $[0, 1/2, 1]$, notação $X \sim T[0, 1/2, 1]$), então a função densidade de probabilidade de X é definida por

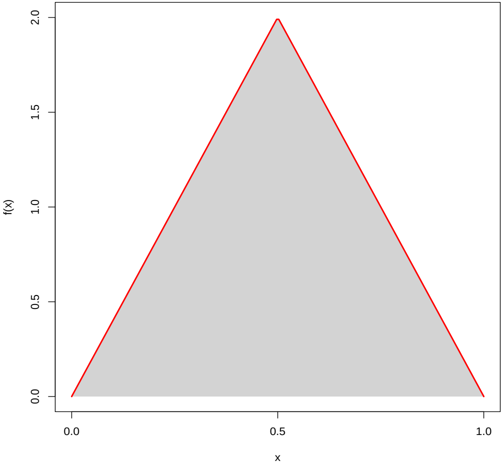
Distribuição Triangular

Distribuição Triangular

Se X é uma variável aleatória triangular no intervalo $[0, 1/2, 1]$, notação $X \sim T[0, 1/2, 1]$), então a função densidade de probabilidade de X é definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4x & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 4(1-x) & 1/2 < x \leq 1, \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Descrição de $f(x)$



Distribuição Triangular

Área total

A área total sob a curva corresponde à área de um triângulo de base $\Delta = 1$ e altura $h = 2$.

Distribuição Triangular

Área total

A área total sob a curva corresponde à área de um triângulo de base $\Delta = 1$ e altura $h = 2$. Logo, a área total fica dada por

Distribuição Triangular

Área total

A área total sob a curva corresponde à área de um triângulo de base $\Delta = 1$ e altura $h = 2$. Logo, a área total fica dada por

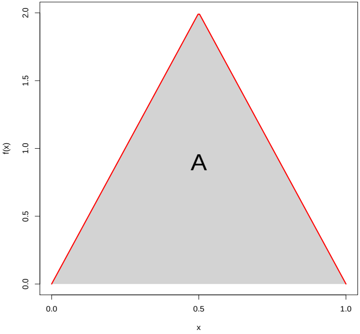
$$A = \frac{\Delta \times h}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1.$$

Distribuição Triangular

Área total

A área total sob a curva corresponde à área de um triângulo de base $\Delta = 1$ e altura $h = 2$. Logo, a área total fica dada por

$$A = \frac{\Delta \times h}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1.$$



Distribuição Triangular

Probabilidade de eventos

A probabilidade $P(1/4 \leq X \leq 1/2)$ corresponde à diferença entre 1/2 e a área do triângulo A de base $\Delta = 1/4$ e altura $h = 1$, isto é

Distribuição Triangular

Probabilidade de eventos

A probabilidade $P(1/4 \leq X \leq 1/2)$ corresponde à diferença entre 1/2 e a área do triângulo A de base $\Delta = 1/4$ e altura $h = 1$, isto é

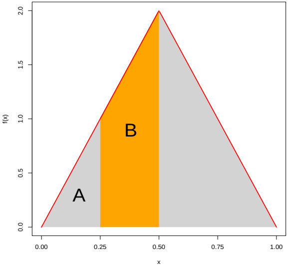
$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} - \frac{1/4 \times 1}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Distribuição Triangular

Probabilidade de eventos

A probabilidade $P(1/4 \leq X \leq 1/2)$ corresponde à diferença entre 1/2 e a área do triângulo A de base $\Delta = 1/4$ e altura $h = 1$, isto é

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} - \frac{1/4 \times 1}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$



Distribuição Triangular

Distribuição Triangular

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição triangular no intervalo [a,c,b], notação $X \sim T[a, c, b]$.

Distribuição Triangular

Distribuição Triangular

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição triangular no intervalo [a,c,b], notação $X \sim T[a, c, b]$. Então

Distribuição Triangular

Distribuição Triangular

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição triangular no intervalo [a,c,b], notação $X \sim T[a,c,b]$. Então

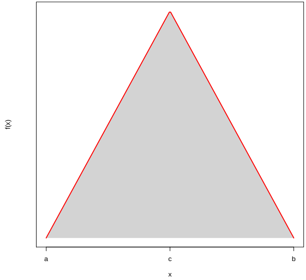
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a \leq x \leq c, \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & c < x \leq b, \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Distribuição Triangular

Distribuição Triangular

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição triangular no intervalo [a,c,b], notação $X \sim T[a, c, b]$. Então

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a \leq x \leq c, \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & c < x \leq b, \\ 0 & c.c. \end{cases}$$



Distribuição Triangular

Vamos supor que X é uma variável aleatória tal que $X \sim T[a, c, b]$.

Distribuição Triangular

Vamos supor que X é uma variável aleatória tal que $X \sim T[a, c, b]$.

Esperança

A esperança de X fica dada por

$$E(X) = \frac{a + b + c}{3}.$$

Distribuição Triangular

Vamos supor que X é uma variável aleatória tal que $X \sim T[a, c, b]$.

Esperança

A esperança de X fica dada por

$$\mathrm{E}(X) = \frac{a + b + c}{3}.$$

Variância

A variância de X fica dada por

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18}.$$

Distribuição Exponencial

Distribuição Exponencial

Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$ ($X \sim \text{Exp}(\lambda)$), a função densidade de probabilidade de X é definida por

Distribuição Exponencial

Distribuição Exponencial

Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$ ($X \sim \text{Exp}(\lambda)$), a função densidade de probabilidade de X é definida por

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

Distribuição Exponencial

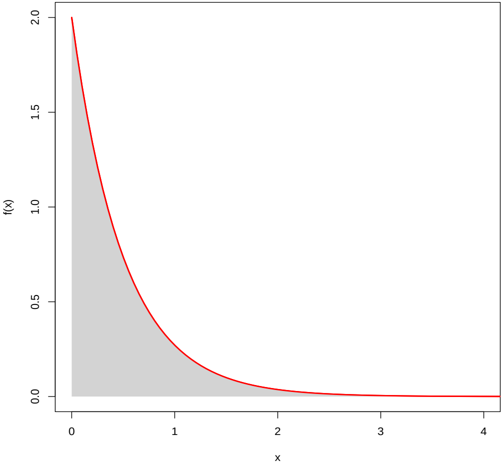
Distribuição Exponencial

Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$ ($X \sim \text{Exp}(\lambda)$), a função densidade de probabilidade de X é definida por

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

em que $x > 0$.

Descrição de $f(x)$ para $\lambda = 3$



Distribuição Exponencial

Área total

A área total sob a curva é calculada através da integral

Distribuição Exponencial

Área total

A área total sob a curva é calculada através da integral

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = 1.$$

Distribuição Exponencial

Probabilidade de eventos

A probabilidade $P(1 \leq X \leq 2)$ corresponde à área na figura abaixo e pode ser calculada pela integral

Distribuição Exponencial

Probabilidade de eventos

A probabilidade $P(1 \leq X \leq 2)$ corresponde à área na figura abaixo e pode ser calculada pela integral

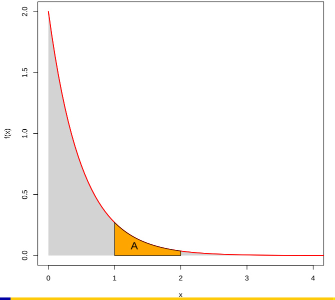
$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}. \end{aligned}$$

Distribuição Exponencial

Probabilidade de eventos

A probabilidade $P(1 \leq X \leq 2)$ corresponde à área na figura abaixo e pode ser calculada pela integral

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}. \end{aligned}$$



Distribuição Exponencial

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$.

Distribuição Exponencial

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$.

Esperança

A esperança de X fica dada por

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Distribuição Exponencial

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$.

Esperança

A esperança de X fica dada por

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Variância

A variância de X fica dada por

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Distribuição Exponencial

Função de distribuição acumulada

A Função de Distribuição Acumulada de uma variável aleatória $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ fica dada por

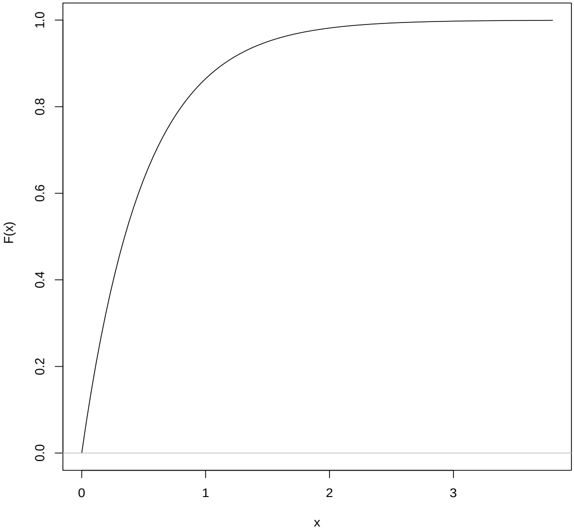
Distribuição Exponencial

Função de distribuição acumulada

A Função de Distribuição Acumulada de uma variável aleatória $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ fica dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0. \end{cases}$$

Descrição de $F(x)$ para $\lambda = 1$



Distribuição Normal

Distribuição Normal

Se X é uma variável aleatória com distribuição normal de média μ e variância σ^2, a função densidade de probabilidade de X é definida por

Distribuição Normal

Distribuição Normal

Se X é uma variável aleatória com distribuição normal de média μ e variância σ^2, a função densidade de probabilidade de X é definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2},$$

Distribuição Normal

Distribuição Normal

Se X é uma variável aleatória com distribuição normal de média μ e variância σ^2, a função densidade de probabilidade de X é definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2},$$

para $-\infty < x, \mu < +\infty$ e $\sigma > 0$.

Distribuição Normal

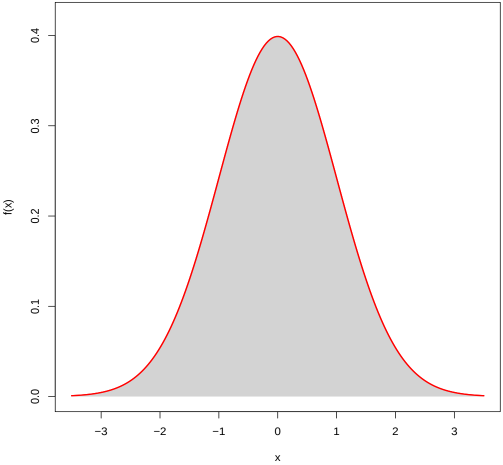
Distribuição Normal

Se X é uma variável aleatória com distribuição normal de média μ e variância σ^2, a função densidade de probabilidade de X é definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2},$$

para $-\infty < x, \mu < +\infty$ e $\sigma > 0$. Notação: $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

Descrição de $f(x)$ de uma N(0,1).



Distribuição Normal

Padronização

Se $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ e $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$ (normal padrão), então

Distribuição Normal

Padronização

Se $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ e $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ (normal padrão), então

$$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right),$$

Distribuição Normal

Padronização

Se $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ e $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$ (normal padrão), então

$$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

ou seja, todos os cálculos podem ser feitos pela normal padrão.

Distribuição N(0,1)

Cálculo de probabilidades

Por exemplo, a probabilidade $A = P(0 \leq X \leq 1)$ pode ser calculada pela diferença

Distribuição N(0,1)

Cálculo de probabilidades

Por exemplo, a probabilidade $A = P(0 \leq X \leq 1)$ pode ser calculada pela diferença

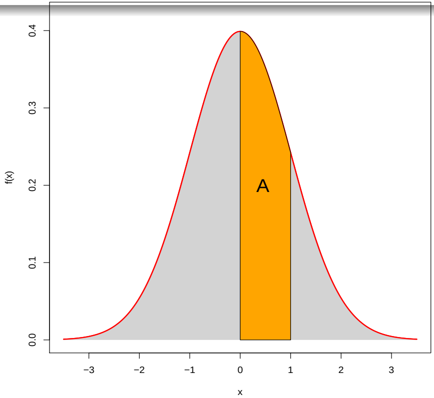
$$P(X \leq 1) - P(X \leq 0) = 0,841 - 0,5 = 0,341.$$

Distribuição N(0,1)

Cálculo de probabilidades

Por exemplo, a probabilidade $A = P(0 \leq X \leq 1)$ pode ser calculada pela diferença

$$P(X \leq 1) - P(X \leq 0) = 0,841 - 0,5 = 0,341.$$



Distribuição N(0,1)

Cálculo de probabilidades

Para calcular a probabilidade $A = P(-1 \leq X \leq 1)$ podemos usar o fato da distribuição ser simétrica na média.

Distribuição N(0,1)

Cálculo de probabilidades

Para calcular a probabilidade $A = P(-1 \leq X \leq 1)$ podemos usar o fato da distribuição ser simétrica na média. Assim,

Distribuição N(0,1)

Cálculo de probabilidades

Para calcular a probabilidade $A = P(-1 \leq X \leq 1)$ podemos usar o fato da distribuição ser simétrica na média. Assim,

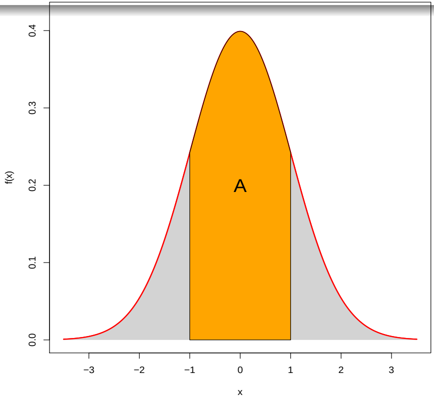
$$P(-1 \leq X \leq 1) = 2 \times P(0 \leq X \leq 1) = 2 \times 0,341 = 0,682.$$

Distribuição N(0,1)

Cálculo de probabilidades

Para calcular a probabilidade $A = P(-1 \leq X \leq 1)$ podemos usar o fato da distribuição ser simétrica na média. Assim,

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 2 \times P(0 \leq X \leq 1) = 2 \times 0,341 = 0,682.$$



Distribuição N(0,1)

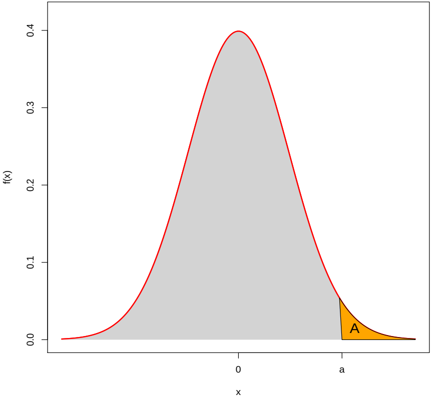
Cálculo de percentil

Como encontrar a tal que $A = P(X \geq a)$, em que $A = 0,02 (2\%)$? Pelo R podemos encontrar $a = 2,054$ usando o comando qnorm(0.98).

Distribuição N(0,1)

Cálculo de percentil

Como encontrar a tal que $A = P(X \geq a)$, em que $A = 0,02(2\%)$? Pelo R podemos encontrar $a = 2,054$ usando o comando qnorm(0.98).



Descrição de $F(x)$ para N(0,1)