Produto Vetorial e Cônicas

MAP 2110 - Diurno

IME USP

7 de abril

Definição do Produto Vetorial

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Exemplos

Uma reta L em V_2 contém os pontos $P = (-3, 1)$ e $Q = (1, 1)$, quais dos seguintes pontos também estão em L

A $(0, 1, 2) \times (1, 0, -1)$

B $(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{j}$

C $(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j}$

D $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \times (2\mathbf{i} - \mathbf{k})$

Propriedades

- $(\vec{a} \times \vec{b}) = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = \alpha\vec{a} \times \vec{b}$
- $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

Exercício

Sejam dados os vetores $\vec{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e $\vec{c} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$, encontrar um vetor $\vec{b}$ tal que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$. Esta solução é única?

solução

Seja $\vec{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ Então podemos escrever usando a propriedade distributiva :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times b_1\mathbf{i} + \vec{a} \times b_2\mathbf{j} + \vec{a} \times b_3\mathbf{k}$$

$$\text{usamos que } \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-b_3 - 2b_2)\mathbf{i} + (2b_1 - 2b_3)\mathbf{j} + (b_1 + 2b_2)\mathbf{k}$$

Comparando os vetores temos o sistema

$$-2b_2 - b_3 = 3$$
$$2b_1 - 2b_3 = 4$$
$$b_1 + 2b_2 = -1$$

O sistema é indeterminado e podemos escrever as soluções como
$\vec{b} = (2\mathbf{i} - \frac{3}{2}\mathbf{j}) + b_3(\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k})$
Para que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ a solução é única ($b_3 = \frac{-11}{9}$)

Definição

O Apostol apresenta três possíveis definições de cônicas, e todos são equivalentes. Mas vamos usar a definição que faz mais uso do conceito de vetor.Nosso situação agora num plano. Então podemos fazer todas as contas em V_2.

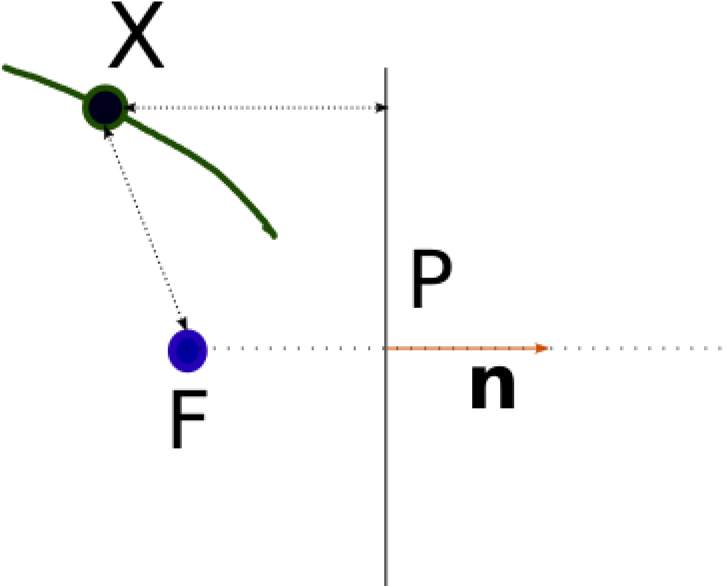
Definição: Se L é uma reta em V_2, F é um ponto fora de L e $e > 0$ um número real positivo, então o conjunto:

$$C = \{X : \|X - F\| = ed(X, L)\}$$

é uma cônica, e diremos que C é uma elípse se $e < 1$, uma parábola se $e = 1$ e uma hipérbole se $e > 1$

Como expressar $d(X, L)$

Nosso problema agora é escrever as equações das cônicas de forma mais direta a partir das definições.



Na figura, $\mathbf{n}$ é um vetor unitário apontando para o lado contrário de F Então temos:

$$F - P = -d\mathbf{n} \ d > 0 \text{ e } F - P = (F - X) + (X - P)$$

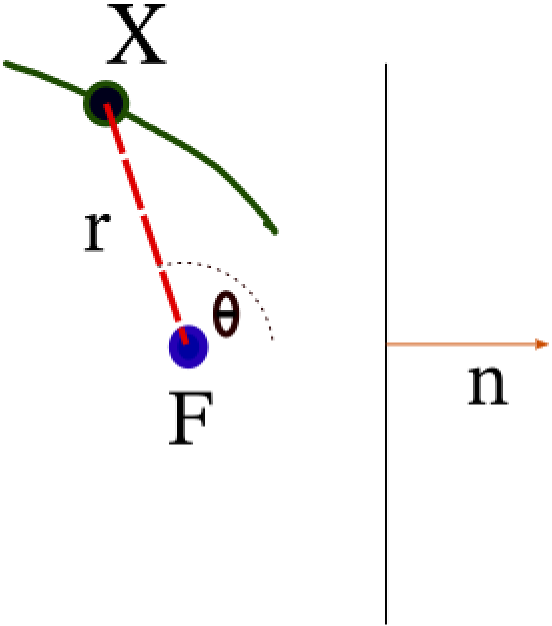
$$(F - P) \cdot \mathbf{n} = (F - X) \cdot \mathbf{n} + (X - P) \cdot \mathbf{n}$$

$$-d = -(X - F) \cdot \mathbf{n} - d(X, L) \implies d(X, L) = |(X - F) \cdot \mathbf{n} - d|$$

Isto dá uma forma equivalente de definir a cônica onde não aparece diretamente a reta diretriz!

$$\|X - F\| = e|(X - F) \cdot \mathbf{n} - d|$$

Equações polares



$$\|X - F\| = r \ (X - F) \cdot \mathbf{n} = r \cos(\theta)$$
$$r = e|r \cos(\theta) - d|$$

Se $r\cos(\theta) - d <= 0$ então $|r\cos(\theta) - d| = d - r\cos(\theta)$ e a equação da cônica fica

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

No outro caso, se $r\cos(\theta) - d > 0$ teremos

$$r = \frac{ed}{e\cos\theta - 1}$$

claramente isso só ocorre se $e > 1$, ou seja, só na hipérbole.

Equações cartesianas

Voltando às equações de definição das cônicas

$$\|X - F\| = e|(X - F) \cdot \mathbf{n} - d|$$

Vamos assumir que temos simetria em relação à origem e elevar os lados ao quadrado.

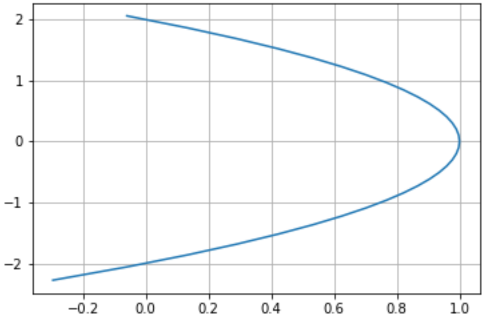
$$(X - F)^2 = e^2((X - F) \cdot \mathbf{n} - d)^2$$
$$\|X\|^2 - 2X \cdot F + \|F\|^2 = e^2(X. \cdot \mathbf{n})^2 + 2ea(X. \cdot \mathbf{n}) + a^2$$
$$a = ed + eF \cdot \mathbf{n}$$
$$\text{usando a simetria teremos}$$
$$\|X\|^2 + e^2a^2 = e^2(X. \cdot \mathbf{n})^2 + a^2$$

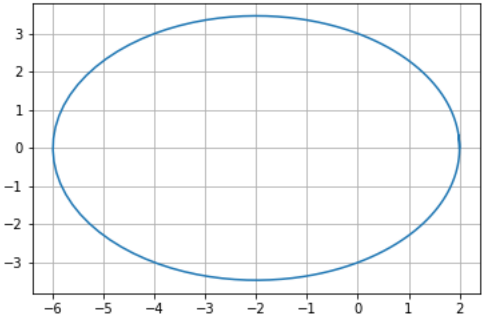
Exercício 1

fazer o esboço da curva:

$$r = \frac{2}{1 + \cos\theta}$$
$$r = \frac{3}{1 + 0.5\cos(\theta)}$$

No primeiro caso temos uma paràbola ($e = 1$), com $d = 2$, e no segundo caso uma elipse ($e = 0.5$) com $d = 6$


2
1
0
−1
−2
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


3
2
1
0
−1
−2
−3
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2

Achar a equação polar da cônica com $e = 1/2$ e diretriz $3x + 4y = 25$. (Foco em $(0, 0)$)

A reta diretriz passa por $(3,4)$, e também $(3,4)$ é um vetor normal à diretriz. Temos então que $d = 5 = \|(3,4)\|$ como $e = 0.5$ a equação polar fica

$$r = \frac{2.5}{1 + 0.5 * \cos(\theta - \theta_0)}$$

A reta diretriz passa por $(3,4)$, e também $(3,4)$ é um vetor normal à diretriz. Temos então que $d = 5 = \|(3,4)\|$ como $e = 0.5$ a equação polar fica

$$r = \frac{2.5}{1 + 0.5 * \cos(\theta - \theta_0)}$$

Aqui θ_0 é o ângulo que a reta normal à diretriz forma com $\mathbf{i}$, ou seja $\cos(\theta_0) = 3/5$.