1. Introdução

Na *forma normal* as EDOs de lineares de 2^a ordem podem ser escritas na forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \tag{1}$$

A EDO *homogênea associada* a (1) é

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{2}$$

sendo p, q e g funções contínuas definidas em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

É conveniente usar a notação:

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y,$$

que define um *operador linear no espaço das funções definidas em* I.. Em particular, vale o chamado *Princípio da superposição*

Lema 1. *Se y_1 e y_2 são soluções de* (2)*, então e $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ é solução de* (2)*.*

Lema 2.

- *Se $\bar{y}$ é solução de* (1) *e y_h é solução de* (2) *então $y = \bar{y} + y_h$ também é solução de* (1)*.*
- *Se y_1 e y_2 são soluções de* (1)*, então e $y_h = y_1 - y_2$ é solução de* (2)*.*

Date: April 6, 2020.

Como consequência, se $\bar{y}$ for uma solução *fixada* de (1), então *qualquer solução* de (1), será da forma $y = y_p + y_h$. sendo y_h uma solução de (2).

Lembremos agora a seguinte

Definição 3. *Dizemos que duas funções y_1 e y_2, definidas em um intervalo I são* linearmente dependentes *(L.D.) se existirem constantes não nulas, c_1 e c_2 tais que $c_1y_1 + c_2y_2 \equiv 0$. Caso contrário, dizemos que y_1 e y_2 são* linearmente independentes.

A definição pode ser estendida de maneira análoga para n funções. No caso de duas funções y_1 e y_2 serão L.D se $y_1 = Ky_2$ ou $y_2 = Ky_1$, K constante real.

Vale o seguinte resultado importante para as equações homogêneas.

Teorema 4. *Se y_1 e y_2 são soluções* linearmente independentes *de* (2) *então todas as soluções de* (2) *são da forma:*

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \quad c_1 \text{ e } c_2 \text{ constantes reais .}$$

Para provar este resultado, vamos precisar de algumas definições e resultados auxiliares.

Definição 5. *Se y_1, y_2 são funções deriváveis no intervalo I definimos o* determinante Wronskiano *de y_1, y_2 em I, por*

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Proposição 6. *Se y_1, y_2 são funções deriváveis no intervalo I, linearmente dependentes, então $W[y_1, y_2](x) \equiv 0$ em I*

Demonstração. Se $c_1y_1(x) + c_2y_2(0) \equiv 0$, então $c_1y_1'(x) + c_2y_2'(0) \equiv 0$. Portanto o sistema

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

tem solução não trivial, o que só pode ocorrer se $W[y_1, y_2](x) \equiv 0$ em I.

Lema 7. *Se y_1, y_2 são soluções L.I. da equação* (2) *no intervalo I, então $W[y_1, y_2](x) \neq 0$, para todo $x \in I$.*

Demonstração. Por contradição. Se $W[y_1, y_2](x_0) = 0$, para algum $x_0 \in I$ então o sistema

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

tem solução não trivial, isto é, existem c_1, c_2 tais que a função $y_h(x) = c_1y_1 + c_2y_2$ é solução do problema linear homogêneo (2) *com condição inicial nula* . Por unicidade de soluções, $y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \equiv 0$ e segue que y_1, y_2 são soluções L.D. , contra a hipótese. □

Demonstração do Teorema 4. Sejam y_1, y_2 soluções L.I. da equação (2) e $y(x)$ uma outra solução qualquer no intervalo I com condições iniciais.

$$\begin{cases} y(x_0) & = y_0 \\ y'(x_0) & = y_1 \end{cases}.$$

Do Lema 7 segue que $W[y_1, y_2] \neq 0$ e, portanto, existem c_1 c_2 tais que o sistema

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

tem solução. Daí obtemos que $c_1y_1 + c_2y_2$ e y satisfazem as mesmas condições iniciais e, portanto, têm que coincidir. □

Observação 8. *Em vista do Teorema 4, para encontrar a solução geral da equação* (1)*, precisamos*

- *Encontrar uma solução particular de* (1).
- *Encontrar duas soluções L.I. de* (2).

Além disso, duas soluções y_1, y_2 *de* (2) *serão L.I.* $\Leftrightarrow W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$ *em algum ponto* $x_0 \in I \Leftrightarrow W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$ *em todo ponto* $x_0 \in I$.

Exemplo 9. *Encontrar a solução geral da equação*

$$y'' - 2y' + y = 2x.$$

Nesse caso $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = xe^x$ são soluções L.I. da equação homogênea associada e $y_p(x) = 2x+4$ é solução particular da equação dada. Portanto, sua solução geral é dada por $2x + 4 + c_1e^x + c_2xe^x$., c_1 e c_2 constantes arbitrárias.