Equações de Poisson, Laplace e Helmholtz

(Jackson – seções 1.7-1.9; Fitzpatrick - 2.2-2.3)

Condições de contorno – Equações de Poisson e Laplace

$$\nabla^2\phi = -\mathrm{g}\,;\;\; \nabla^2\phi = 0$$

1. Condição de contorno de Dirichlet: $\phi(\vec{r})$ especificado em superfícies fechadas
2. Condição de contorno de Neumann: $\hat{n}\cdot\nabla\phi(\vec{r})$ especificado em superfícies fechadas

---

Acompanhar na seção 1.9 do Jackson demonstração de que a solução da equação de Laplace, satisfazendo uma ou outra condição de contorno, é única.

Equação de Helmholtz – Solução pelo Método da Função de Green

Equações de onda para os potenciais $\phi(\vec{r},t)$; $\vec{A}(\vec{r},t)$

$$\nabla^2\phi - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}; \qquad \nabla^2\vec{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}$$

Ambas são da forma geral

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -g$$

onde c é a velocidade de propagação da onda e $g(\vec{r},t)$ é a fonte.

Fonte variando harmonicamente no tempo

$$g(\vec{r},t) = g(\vec{r})e^{-i\omega t} \rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega^2\psi(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

Equação de Helmholtz

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = -g$$
$$k = \omega/c$$

Método da Função de Green

Consideremos conhecida uma função escalar $G(\vec{r},\vec{r}')$, denominada Função de Green, que satisfaz a equação

$$\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}') + k^2 G(\vec{r},\vec{r}') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

Como $\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \delta(\vec{r}'-\vec{r}) \rightarrow G(\vec{r},\vec{r}') = G(\vec{r}',\vec{r})$.

Operação: $G(\vec{r},\vec{r}') \times [equação\ para\ \psi(\vec{r})] - \psi(\vec{r}) \times [equação\ para\ G(\vec{r},\vec{r}')]$

$$G(\vec{r},\vec{r}')\nabla^2\psi(\vec{r}) - \psi(\vec{r})\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}') = \psi(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}') - G(\vec{r},\vec{r}')g(\vec{r})$$

Integrando equação em um volume *V*

$$\int [G\nabla^2\psi - \psi\nabla^2 G]dV = \int \psi(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}')dV - \int G(\vec{r},\vec{r}')g(\vec{r})dV$$

Segunda Identidade de Green

$$\int [G\nabla^2\psi - \psi\nabla^2 G]dV = \int \left[G\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial G}{\partial n}\right]dA$$

Superfície de integração $S \to \infty$, onde $G;\ \psi\ \to 0$; portanto

$$0 = \int \psi(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}')dV - \int G(\vec{r},\vec{r}')g(\vec{r})dV = \psi(\vec{r}') - \int G(\vec{r},\vec{r}')g(\vec{r})dV$$

$\vec{r} \to \vec{r}'; \vec{r}' \to \vec{r}\ \to$

$$\boxed{\psi(\vec{r}) = \int G(\vec{r},\vec{r}')g(\vec{r}')dV'}$$

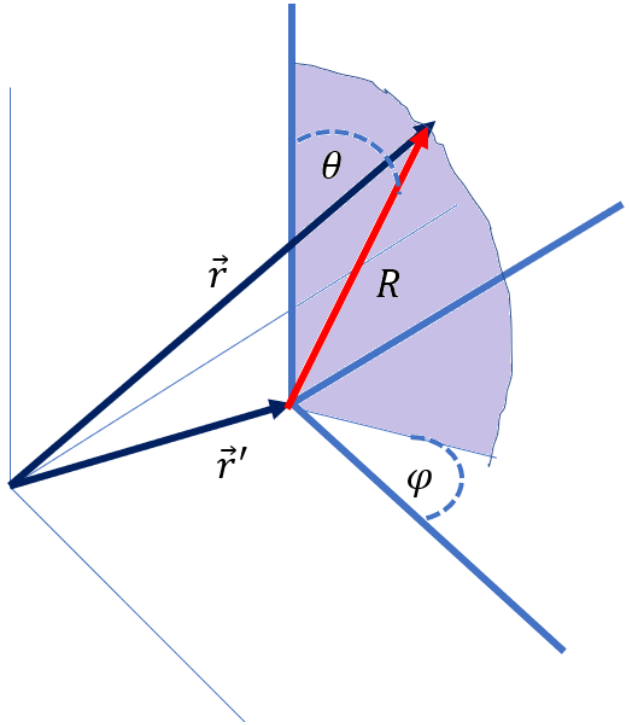
<u>Solução da equação para $G(\vec{r},\vec{r}')$</u>

$$\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}') + k^2 G(\vec{r},\vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}');$$

$$\lim_{|\vec{r}-\vec{r}'|\to\infty} G(\vec{r},\vec{r}') \to 0$$

$G(\vec{r},\vec{r}')$ simétrico → só deve depender de $\left|\vec{R}\right|;\ \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$

Solução em coordenadas esféricas $(R,\theta,\varphi)\ \to G(\vec{r},\vec{r}') = G(R)$



$$\nabla^2 G = \nabla \cdot \nabla G = \left(\hat{e}_R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\hat{e}_\theta}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{e}_\varphi}{R \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \left(\hat{e}_R \frac{dG}{dR} \right)$$

$$\frac{\partial \hat{e}_R}{\partial \theta} = \hat{e}_\theta ; \; \frac{\partial \hat{e}_R}{\partial \varphi} = \sin\theta \, \hat{e}_\varphi ; \; \frac{\partial \hat{e}_R}{\partial R} = 0$$

Aplicando as derivadas e produtos escalares

$$\nabla^2 G = \frac{d^2 G}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{dG}{dR} + \frac{1}{R}\frac{dG}{dR} = \frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2}(RG)$$

Equação para G fica

$$\frac{1}{R}\frac{d^2(RG)}{dR^2} + k^2 G = -\delta(\vec{R})$$

<u>Pontos fora da origem</u>

$$\frac{d^2(RG)}{dR^2} = -k^2(RG) \; \rightarrow RG = Ae^{\pm ikR} \; \rightarrow G(R) = \frac{A}{R} e^{\pm ikR}$$

Inclusão da origem → incluir corretamente derivadas em $R \to 0$

$$\nabla^2 G = \nabla \cdot \nabla \left[\frac{A}{R} e^{\pm ikR}\right] = \frac{A}{R}\nabla^2\left[e^{\pm ikR}\right] + 2A\left[\nabla e^{\pm ikR}\right] \cdot \nabla\left(\frac{1}{R}\right) + Ae^{\pm ikR}\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$\nabla\frac{1}{R} = -\frac{\hat{e}_R}{R^2};\ \nabla\left(e^{\pm ikR}\right) = \pm ike^{\pm ikR}\hat{e}_R;\ \nabla^2\left(e^{\pm ikR}\right) = \pm\frac{2ik}{R}e^{\pm ikR} - k^2 e^{\pm ikR}$$

Substituindo na equação para RG, quatro termos se cancelam, sobrando

$$Ae^{\pm ikR}\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) = -\delta\left(\vec{R}\right) \to -Ae^{\pm ikR}4\pi\delta\left(\vec{R}\right) = -\delta\left(\vec{R}\right) \to A = \frac{1}{4\pi}$$

Função de Green para a Equação de Helmholtz

$$G(R) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm ikR}}{R} \to \boxed{G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}}$$

Solução da Equação de Helmholtz

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = -g \implies \boxed{\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{g(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dV'}$$

Caso particular: Equação de Poisson → $k = 0$.

Aplicação: Problema 6; Cap. 9; Panofsky and Phillips

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \rightarrow \nabla\left(\nabla \cdot \vec{E}\right) - \nabla^2\vec{E} = -\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

Campo de indução: $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ → para cada componente cartesiana j de $\vec{E}$, temos

$$\nabla^2 E_j = -\left[\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\right]_j \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\left[\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\right] dV'$$

Prosseguir a partir deste ponto usando a relação vetorial para $\nabla \times (f\vec{a})$