MAT 1513 - Laboratório de Matemática 1o Semestre 2020 – Profa. Daniela Licenciatura Noturno

Resolução da primeira Lista de Exercícios

1. (i)

X = Y (X igual a Y) significa que X e Y possuem os mesmo elementos, ou seja, todo elemento do conjunto X pertence ao conjunto Y e todo elemento do conjunto Y pertence ao conjunto X.

X ≠ Y (X é diferente de Y) Significa que os conjuntos não possuem os mesmos elementos , existe pelo menos um elemento que pertence a apenas um dos dois conjuntos.

X ⊂ Y (X está contido em Y) significa que X é um subconjunto de Y, ou seja, todo elemento pertencente ao conjunto X , também pertence ao conjunto Y. (Observe que pode ou não haver elementos do conjunto Y que não pertencem ao conjunto X)

X ⊄ Y (X não esta contido em Y) significa que X não é subconjunto de Y, ou seja, existe, pelo menos, um elemento do conjunto X que não pertence ao conjunto Y.

X ⊊ Y (X esta contido mas não é igual a Y) significa que todo elemento do conjunto X pertence também ao conjunto Y , e existe, pelo menos, um elemento do conjunto Y que não pertence ao conjunto X.

(ii)

X = Y Exs: a) X = {1,3} Y = {1,3}
b) X = {x ∈ ℕ : x<5} Y = {1,2,3,4}

... Quaisquer exemplos de Conjuntos X e Y onde X ⊂ Y e Y ⊂ X

X ≠ Y Exs: a) X = {-3,2} Y = {7}
b) X = {x ∈ ℕ : x<7} Y = {1,2,3,4}
c) X = {1} Y = {1, 2}

... Quaisquer exemplos de conjuntos X e Y onde X ⊄ Y ou/e Y ⊄ X

X ⊂ Y Exs: a) X = {1,3,7} Y = {y ∈ ℕ}
b) X = {x ∈ ℕ : x<7} Y = {1,2,3,4,5,6}

... Quaisquer conjuntos X e Y onde todos os elementos do conjunto X pertencem também ao conjunto Y.

X ⊄ Y Exs: a) X = {1,2} Y = {3}

b) $X = \{x \in \mathbb{N} : x=2k \text{, para algum } k \in \mathbb{N}\}$ $Y = \{2,4,6,8\}$

... Quaisquer conjuntos X e Y onde existir, pelo menos, um elemento do conjunto X que não pertença ao conjunto Y.

$X \subsetneq Y$ Exs: a) $X = \{-1,-2,-3\}$ $Y = \{0,-1,-2,-3\}$
b) $X = \{x \in \mathbb{N}\}$ $Y = \{x \in \mathbb{Z}\}$

... Quaisquer conjuntos X e Y onde, $X \subset Y$ e $X \neq Y$

2. (i)

$\{x \in A : x \neq 3\}$ $= \{1,2\}$
$\{B \subset A : 1 \in B\}$ $= \{\{1\};\{1,2\};\{1,3\};\{1,2,3\}\}$
$\{B \subset A : 2 \notin B\}$ $= \{\{1\};\{1,3\};\{3\};\{\emptyset\}\}$

Observe que nos dois últimos casos B esta contido($\subset$) em A e, portanto, os elementos serão subconjuntos de A que satisfazem as condições de cada caso.

(ii)

$\{x \subset A : 3 \notin x \text{ e } 1 \in x\}$ $=\{\{1\};\{1,2\};\{1,4\};\{1,2,4\}\}$
$\{x \in A : x \neq 3 \text{ e } x \neq 1\}$ $=\{2,4\}$

Observe que no primeiro caso x esta contido($\subset$) em A e, portanto, os elementos serão subconjuntos de A que satisfazem as condições dadas.

3. (i)

$= \{x \in \mathbb{N} : x=3k \text{, para algum } k \in \mathbb{N}\}$ x é elemento e, portanto, PERTENCE ao conjunto dos naturais.

(ii)

$=\{x \subset \mathbb{N} : 5 \in x\}$ x é subconjunto dos naturais e portanto está CONTIDO em $\mathbb{N}$, já 5 é um elemento de x e, portanto, PERTENCE a x.

(iii)

$=\{x \subset \mathbb{N} : 5 \in x \text{ e } 3 \notin x\}$ x é subconjunto dos naturais e, portanto, está CONTIDO em $\mathbb{N}$, já 5 e 3 são elementos e, portanto, estabelecem relações de PERTENCIMENTO com X.

4.

(i) Falso, "{3}"representa um conjunto enquanto "3" um elemento.

(ii) Verdadeira,"3" é elemento e, portanto, faz sentido a relação de pertencimento.

(iii) Falso, o símbolo contidos($\subset$) só pode ser utilizado para relacionar conjuntos.

(iv) Falso, o símbolo $\varnothing$ representa o conjunto vazio o qual não é elemento de {3}, e a relação de pertencimento ($\in$) só pode ser estabelecida entre um elemento e um conjunto.

(v) Falso, o conjunto {{5}} possui o conjunto {5} como elemento único e como mencionado no item i $\{5\}\neq 5$.

(vi) Verdadeira, observe que o conjunto {4,{4}} possui 2 elementos 4,{4}, portanto, {4} é um dos elementos e podemos dizer que esta contido no conjunto{4,{4}}.

(vii) Verdadeira, observe que o conjunto {4} possui elemento único "4" que também é um dos elementos do conjunto {4,{4}}, e portanto podemos dizer que {4} é subconjunto de{4,{4}}.

(viii) Falso, pois {3,4} é um dos elementos do conjunto e portanto não podemos utilizar a relação de contido.

(ix) Verdadeira, já que os elementos que pertencem ao conjunto {2,8} são "2"e "8" que também são elementos do conjunto {2,8,9}, portanto, podemos dizer que {2,8} é subconjunto de {2,8,9}.

5.

(a) Verdadeira, pois o conjunto $\{\varnothing\}$ possui elemento(único) : "$\varnothing$"

(b) Falso, pois o conjunto vazio não possui elementos.

(c) Verdadeira, pois todo conjunto esta contido nele mesmo.

(d) Verdadeira, pois o conjunto "{a}" é elemento único do conjunto {{a}}

(e) Verdadeira, pois o único elemento que pertence ao conjunto {b} é "b", o que implica que a=b para que "a" pertença a {b}.

(f)

i. Falso, pois o símbolo $\varnothing$ representa o conjunto vazio o qual não é elemento de A, e a relação de pertencimento ($\in$) só pode ser estabelecida entre um conjunto e seus elementos.

ii. Verdadeira, pois 0 é um elemento do conjunto A.

iii. Verdadeira, já que o conjunto vazio não possui elementos e, portanto, é impossível encontrar um elemento que pertença ao conjunto vazio e não pertença a A. Observe que isso serve para qualquer conjunto, não apenas para A.

<u>Exercícios do Livro</u>

1)Para provar as recíprocas é necessário lembrar da equivalência lógica entre uma afirmação e sua contrapositiva, ou seja, $P_1 \Rightarrow Q_1 \Leftrightarrow \sim Q_1 \Rightarrow \sim P_1$ e $P_2 \Rightarrow Q_2 \Leftrightarrow \sim Q_2 \Rightarrow \sim P_2$, sabendo disso, suponha algum p que satisfaça $Q_1 \Rightarrow$ p não satisfaz $Q_2 \Rightarrow$ p também não satisfaz $P_2 \Rightarrow$ p satisfaz P_1 portanto, $Q_1 \Rightarrow P_1$

seguindo a mesma lógica,

suponha algum q que satisfaça $Q_2 \Rightarrow$ p não satisfaz $Q_1 \Rightarrow$ p também não satisfaz $P_1 \Rightarrow$ p satisfaz P_2 portanto, $Q_2 \Rightarrow P_2$

3) Dado que $X_1 \cup X_2 = U$, podemos concluir que qualquer elemento pertencente a esse universo irá pertencer a X_1 ou a X_2.
Também é dado que $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$ o que nos permite afirmar que Y_1 e Y_2 são incompatíveis, ou seja, excluem-se mutuamente.

Temos por fim que $X_1 \subset Y_1$ e $X_2 \subset Y_2$.
Podemos perceber agora que os exercícios **1)** e **3)** apresentam o mesmo problema, por tanto a forma de resolver será a mesma.

Para cumprir a exigência do problema $X_1 = Y_1$ e $X_2 = Y_2$, é necessário que $X_1 \subset Y_1$ e

$Y_1 \subset X_1$ bem como, $X_2 \subset Y_2$. e $Y_2 \subset X_2$.

Então precisamos provar que $Y_1 \subset X_1$ e $Y_2 \subset X_2$.
Supondo então $x \in Y_1 \Rightarrow x \notin Y_2$,

(Tendo que $X_2 \subset Y_2$, qualquer elemento que pertença X_2 pertence obrigatoriamente a Y_2. Sabendo que o x suposto não pertence a Y_2, podemos afirmar que ele não pertence a X_2)

$\Rightarrow x \notin X_2 \Rightarrow x \in X_1$ portanto, $Y_1 \Rightarrow X_1$, Concluí-se que $Y_1 \subset X_1$.

Analogamente,
supondo $x \in Y_2 \Rightarrow x \notin Y_1 \Rightarrow x \notin X_1 \Rightarrow x \in X_2$ portanto, $Y_2 \Rightarrow X_2$, Concluí-se que

$Y_2 \subset X_2$.

10) U: Universo
$A=\{x \in U : x \text{ cumpre } P(x)\}$

a. (1) $A=U$
(2)$A\neq\varnothing$

b.(1) $A\neq U$ Existe $x \in U$ que <u>não</u> cumpre P(x)
(2) $A=\varnothing$ Não existe $x \in U$ que cumpre P(x)

c.

- Falsa.

Sua negação é $\forall x \in R, x^2 \neq -1$

- Falsa, pois $1^2 = 1$.

Sua negação é $\exists\ n \in \mathbb{N}$, tal que $n^2 \leq n$

- Falsa, pois existem números negativos que não satisfazem ambas condições.

Sua negação é $\exists x : x \in R$, tal que $x \leq 1$ e $x^2 \geq 1$

- Verdadeira, pois assim como os reais os números naturais crescem infinitamente.

Sua negação é $\exists\ x \in R$, tal que $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq x$

- Falso, pois os números reais crescem infinitamente, logo sempre poderemos encontrar um número real maior que o número natural n dado.

Sua negação é $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in R : x \geq n$

11)a) 1. $M \subset C$ (qualquer elemento pertencente a M(matemático) pertence também a C (é cientista))

2. $M \cap P \neq \varnothing$ (Para que alguns matemáticos sejam professores é necessário que seus respectivos conjuntos tenham elementos em comum,ou seja, a intersecção entre eles deve ser diferente do vazio)

3. $C \cap F \neq \varnothing$ (Para que alguns cientistas sejam filósofos é necessário que os seus respectivos conjuntos tenham elementos em comum, ou seja, a intersecção entre eles deve ser diferente do vazio)

4. $F \subset (C \cup P)$ (todos os filósofos são cientistas ou professores, portanto o conjunto dos filósofos esta contido na união dos conjuntos cientistas/professores.)

5. $P - C \neq \varnothing$ (como nem todo professor é cientista, os elementos que pertencem ao conjunto dos professores e não pertencem ao conjunto dos cientistas, diferença entre os conjuntos, não pode ser o vazio)

b)6. $M \cap F \neq \varnothing$ (Para que alguns matemáticos sejam filósofos é necessário que os seus respectivos conjuntos tenham elementos em comum, ou seja, a intersecção entre eles deve ser diferente do vazio)

7. $F - C \neq \varnothing$ (como nem todo filósofo é cientista, os elementos que pertencem ao conjunto dos filósofos e não pertencem ao conjunto dos cientistas, diferença entre os conjuntos, não pode ser o vazio)

8. $F \cap P \neq \varnothing$ (Para que alguns filósofos sejam professores é necessário que os seus respectivos conjuntos tenham elementos em comum, ou seja, a intersecção entre eles deve ser diferente do vazio)

9. $F \subset (M \cup P)$ (Se um filósofo não é matemático, ele é professor, então todos os filósofos são matemáticos ou professores, portanto o conjunto dos filósofos esta contido na união dos conjuntos matemáticos/professores.)

10. $F \cap M \neq \varnothing$ (Para que alguns filósofos sejam matemáticos é necessário que os seus respectivos conjuntos tenham elementos em comum, ou seja, a intersecção entre eles deve ser diferente do vazio)

c) 6. Não é uma implicação lógica.
7.Não é uma implicação lógica.
8. Não é uma implicação lógica
9. Não é uma implicação lógica.
10.Não é uma implicação lógica.

Podemos explicar as respostas do item c, encontrando um contra exemplo para eles, observe o diagrama de Venn abaixo e perceba que este diagrama mostra uma possível relação entre os conjuntos de professores,cientistas, filósofos e matemáticos, relação esta que satisfaz todas as afirmativas de 1 a 5, porém, como podemos observar ela não satisfaz as afirmativas 6,8,9,10 e por isso podemos concluir que satisfazer as afirmativas 1,2,3,4 e 5 não implica satisfazer 6,8,9,10

Já a afirmativa 7 também não é uma implicação lógica das 5 primeiras pois, nenhuma destas nos impede de criar uma intersecção entre o conjunto dos filósofos e dos professore que não são cientistas.