Exercício 4.36 – PME3330

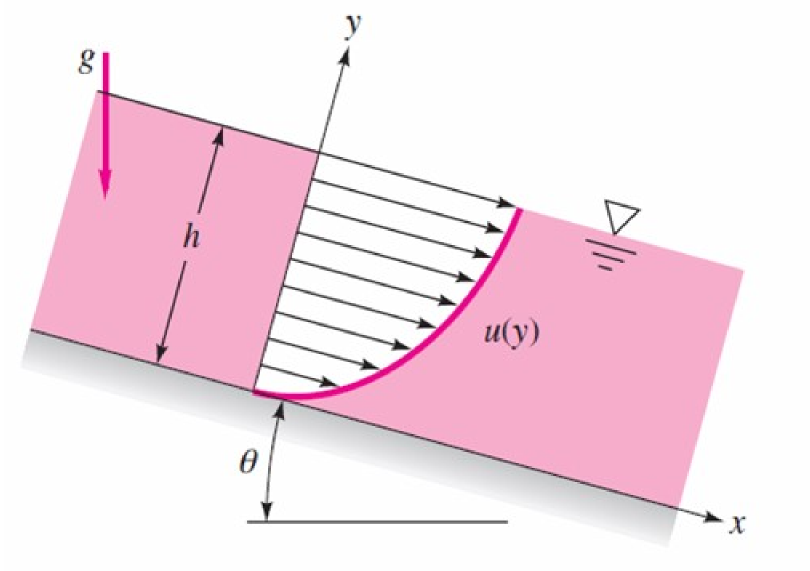
Equação de Navier-Stokes

Exercício 4.36

Ex. 4.36)Um filme de líquido viscoso de espessura constante escoa em movimento laminar sobre um plano inclinado da ângulo θ. O campo de velocidades é dado por:

$$u = Cy(2h - y),\ \upsilon = 0,\ w = 0$$

Ache a constante C em função do peso específico, viscosidade e ângulo θ. Determine a vazão volumétrica Q/b do escoamento, onde b é a largura do filme na direção ortogonal à figura.



Exercício 4.36

Da equação da continuidade para um escoamento incompressível:

$$\nabla.\vec{V}=0$$

Como o escoamento é bidimensional (ocorre no plano xy):

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=0$$

Como $\upsilon=0$:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=0}$$

Ou seja, o escoamento é desenvolvido (dinamicamente estabelecido). Note que esse resultado é coerente com a expressão dada para u.

Exercício 4.36

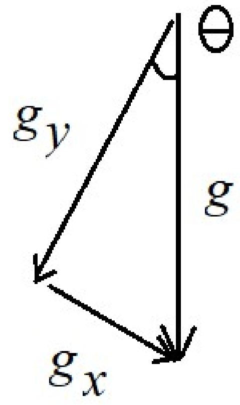
Da Equação de Navier-Stokes para escoamento incompressível com propriedades (viscosidade) uniformes:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}.\nabla\right)\vec{V}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{V}+\vec{g}$$

Se o escoamento for em regime permanente, $\partial\vec{V}/\partial t=0$. Para escoamento bidimensional:

$$u\overbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}^{0}+\overbrace{\upsilon}^{0}\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\overbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{0}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\overbrace{g_x}^{g\ \mathrm{sen}\,\theta}$$

$$u\overbrace{\frac{\partial \upsilon}{\partial x}}^{0}+\overbrace{\upsilon}^{0}\overbrace{\frac{\partial \upsilon}{\partial y}}^{0}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\overbrace{\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}}^{0}+\overbrace{\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}}^{0}\right)+\overbrace{g_y}^{-g\cos\theta}$$



Exercício 4.36

Da equação na direção y resulta que:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho\, g \cos\theta$$

Logo:

$$p = -\rho\, g\, y \cos\theta + f(x)$$

Mas, na superfície do canal, para $y = h$, a pressão é atmosférica. Assim:

$$p_{atm} = -\rho\, g\, h \cos\theta + f(x) \Rightarrow f(x) = p_{atm} + \rho\, g\, h \cos\theta$$

E a pressão resulta:

$$\boxed{p = p_{atm} + \rho\, g (h - y) \cos\theta}$$

Exercício 4.36

Note que, com este último resultado, $\boxed{\dfrac{\partial p}{\partial x}=0}$.

Note que este é um resultado que poderia ser intuído simplesmente por termos a pressão atmosférica ao longo de toda a superfície livre na direção x. Vamos agora observar a equação de Navier-Stokes na direção x. Do campo de velocidades dado:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[Cy(2h-y)\right]=-2C$$

E a equação resulta, dado que o gradiente de pressão é nulo na direção x:

$$-2C\nu+g\ \text{sen}\,\theta=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C=\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{2\nu}=\frac{\rho g\,\text{sen}\,\theta}{2\rho\nu}=\frac{\gamma\,\text{sen}\,\theta}{2\mu}}$$

Exercício 4.36

A vazão pode ser calculada imaginando um elemento de área bdy, onde b é a largura do canal na direção ortogonal ao plano da figura e dy é a altura do elemento. Através desse elemento escoa uma vazão dada por:

$$dQ = u(y)\, b\, dy$$

E a vazão total é:

$$Q = \int_0^h u(y)\, b\, dy = \int_0^h Cy(2h - y)\, b\, dy \ = \int_0^h \left(2Chy - Cy^2\right) b\, dy$$

A vazão por unidade de largura resulta:

$$\boxed{\frac{Q}{b} = \frac{2}{3} Ch^3 = \frac{\gamma\, h^3\, sen\theta}{3\mu}}$$