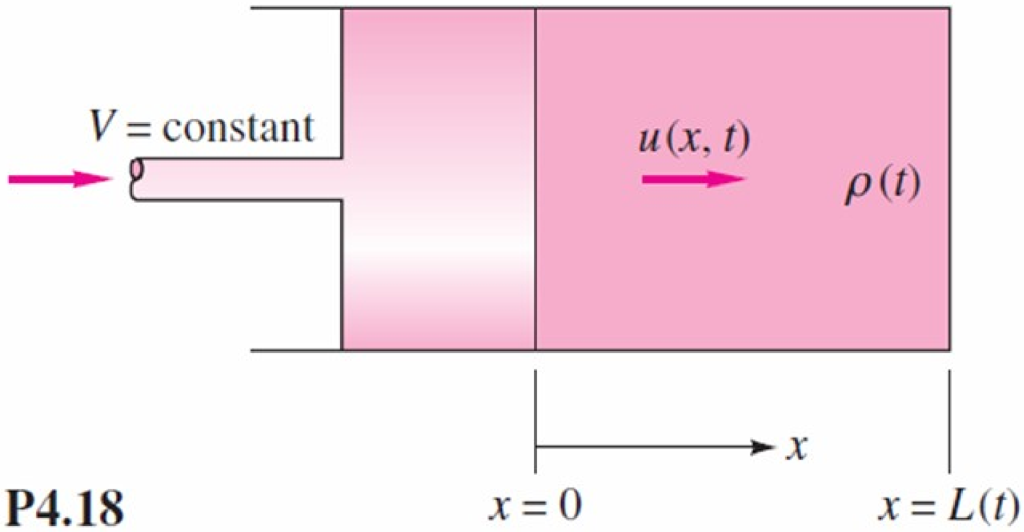
Exercício 4.18 – PME3330

Equação da Continuidade

Exercício 4.18

Ex. 4.18)Um pistão comprime gás em um cilindro. O pistão se move com velocidade constante V. Sejam ρ_o e L_o a massa específica e o comprimento em $t=0$. Considere que a velocidade do gás varia linearmente desde $u=V$ na face do pistão até $u=0$ em $x=L$. Se ρ varia apenas com t, ou seja, é uniforme no cilindro, determine $\rho(t)$.



P4.18

Exercício 4.18

Da equação da continuidade para um escoamento compressível:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\left(\rho \vec{V}\right) = 0$$

Como $\rho = \rho(t)$, a massa específica pode ser retirada de dentro do divergente, e $\partial\rho/\partial t = d\rho/dt$:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla.\vec{V} = 0$$

Como a única velocidade é $u = u(x,t)$:

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0}$$

Exercício 4.18

Como a distribuição de velocidades varia linearmente dentro do cilindro, podemos escrever:

$$u = C_1 x + C_0$$

Como para $x = 0$ temos $u = V$, temos que $C_0 = V$.

Como para $x = L(t)$ temos $u = 0$, resulta $C_1 = -V/L(t)$. Assim:

$$\boxed{u = V\left[1 - \frac{x}{L(t)}\right]}$$

Logo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{V}{L(t)}$$

E esse resultado pode ser substituído na equação da continuidade:

Exercício 4.18

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} - \rho\frac{V}{L(t)} = 0$$

Isso resulta:

$$d\rho = \frac{\rho V}{L(t)}dt$$

Para integrar tal equação, é preciso lembrar que o pistão avança com velocidade constante. Assim, podemos expressar o comprimento interno do cilindro como:

$$L(t) = L_o - Vt$$

Exercício 4.18

Assim, temos que integrar:

$$\frac{1}{\rho}d\rho = \frac{V}{L_o - Vt}dt$$

Integrando:

$$\ln(\rho) = -\ln(L_o - Vt) + K$$

Onde K é uma constante de integração. Como para $t = 0$ temos $\rho = \rho_o$:

$$K = \ln(\rho_o) + \ln(L_o) = \ln(\rho_o L_o)$$

Assim:

$$\ln(\rho) = \ln(\rho_o L_o) - \ln(L_o - Vt) = \ln\left(\frac{\rho_o L_o}{L_o - Vt}\right) \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{\rho_o L_o}{L_o - Vt}}$$

Exercício 4.18

Note que este resultado poderia ser obtido facilmente usando uma análise integral. De fato, existe uma massa constante de gás dentro do cilindro. Se a área de seção do cilindro é S, a massa de gás do cilindro é:

$$m_{\text{gás}} = \rho_o \, L_o \, S = \rho \, L(t) S$$

E obtemos:

$$\rho = \frac{\rho_o \, L_o}{L(t)} = \frac{\rho_o L_o}{L_o - Vt}$$